Секция 1

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИКЛАДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

УДК 519.1 DOI 10.17223/2226308X/9/1

ОБОБЩЁННЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ НАРАЯНЫ И ИХ q-АНАЛОГИ[1]

Л. Н. Бондаренко, М. Л. Шарапова

На введённых 312-избегающих ГС-перестановках порядка $r \geqslant 1$ рассматриваются производящие многочлены статистик rise, des и inv. Показано, что многочлены статистик rise и des являются обобщением известных многочленов Нараяны. Получены обратная производящая функция, алгебраическое уравнение для производящей функции и рекуррентная формула с кратными свёртками для обобщённых многочленов Нараяны. Для производящих многочленов пары $(\mathrm{des}, \mathrm{inv})$ найдены аналог полученной рекуррентной формулы и уравнение для производящей функции этих многочленов, частный случай которых приводит к соответствующим q-аналогам обобщённых многочленов Нараяны.

Ключевые слова: *312-избегающие ГС-перестановки, обобщённые многочлены Нараяны, производящая функция, обратная функция, свёртка, q-аналоги.*

Если все буквы слова $\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_{rn}$ длины $|\sigma| = rn$ над алфавитом $\mathbb{N}_n = \{1, \ldots, n\}$, где $r \geqslant 1$ — целочисленный параметр, стоящие между любыми двумя вхождениями символа $i \in \mathbb{N}_n$, не меньше этого i, то эту особенность σ назовем ГС-свойством, а множество всех перестановок мультимножества $\{1^r, \ldots, n^r\}$, обладающих ГС-свойством (ГС-перестановок), обозначим $GS_{n,r}$.

Эти названия мотивированы применением И. Гесселем и Р. Стенли множества $GS_{n,2}$ для изучения полиномиальных последовательностей Стирлинга обоих родов [1], а также исследованием свойств чисел Эйлера порядка r, комбинаторная интерпретация которых связана с рассмотрением $GS_{n,r}$ [1–3].

Введем обобщение понятия рассматриваемой в [4, 5] 312-избегающей перестановки.

Определение 1. Слово $\sigma \in GS_{n,r}$ назовем 312-избегающей ГС-перестановкой порядка r, если не существует тройки индексов $i < j < k$, для которых выполняется неравенство $\sigma_j < \sigma_k < \sigma_i$, а множество всех таких перестановок обозначим $\widetilde{GS}_{n,r}$.

Для слова $\sigma \in \widetilde{GS}_{n,r}$ стандартным образом вводятся неотрицательные целочисленные функции (статистики): $\mathrm{rise}(\sigma) = |\{i \in \mathbb{N}_n : \sigma_{i-1} < \sigma_i, \sigma_0 = 0\}|$ — число подъёмов; $\mathrm{des}(\sigma) = |\{i \in \mathbb{N}_n : \sigma_i > \sigma_{i+1}, \sigma_{n+1} = 0\}|$ — число спусков; $\mathrm{inv}(\sigma) = |\{(i, j) \in \mathbb{N}_n^2 : i < j, \sigma_i > \sigma_j\}|/r$ — приведённое число инверсий.

Теорема 1. Производящие многочлены $\widetilde{A}_{n,r}(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} \widetilde{A}_{n,r,k}\, t^k$ статистик rise и des на множестве $\widetilde{GS}_{n,r}$ совпадают и определяются равенством

$$\widetilde{A}_{n,r}(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \binom{rn}{k-1} t^k, \tag{1}$$

[1]Работа поддержана грантом РФФИ № 14-01-00273.

где $\widetilde{A}_{n,r}(1) = C_{n,r+1} = \dfrac{1}{rn+1}\dbinom{(r+1)n}{n}$ — числа Фусса—Каталана [2].

Доказательство. Так как $\mathrm{rise}(\sigma) = \mathrm{des}(\pi)$, $\sigma, \pi \in \widetilde{GS}_{n,r}$, $\pi_i = \sigma_{rn+1-i}$, $i \in \mathbb{N}_{rn}$, то многочлены (1) статистик rise и des совпадают. Для вычисления коэффициента $\widetilde{A}_{n,r,k} = |\{\sigma \in \widetilde{GS}_{n,r} : \mathrm{rise}(\sigma) = k\}|$ сопоставим каждой перестановке $\sigma \in \widetilde{GS}_{n,r}$ слово $\tau = \tau_1 \ldots \tau_{rn}$, $\tau_i = rn + 1 - \sigma_{rn+1-i}$, $i \in \mathbb{N}_{rn}$, упорядочиваемое с помощью единственного стека, и сформируем новую последовательность, в которую записывается 1, когда символ слова τ помещается в стек, и -1, когда он вынимается из стека, причём в соответствии с принципом «последним пришёл — первым ушёл» из стека вынимаются последовательно r одинаковых символов. В результате перестановке $\sigma \in \widetilde{GS}_{n,r}$ сопоставляется последовательность длины $2rn$, состоящая из одинакового числа 1 и -1 (число записанных подряд -1 кратно r), её частичные суммы неотрицательны, а $\mathrm{rise}(\sigma) = k$, если в этой последовательности имеется k переходов с 1 на -1.

Имеется $\dbinom{rn}{k-1}\dbinom{n-1}{k-1}$ пар k-композиций $A : a_1 + \ldots + a_k = rn + 1$ и $B : b_1 + \ldots + b_k = n$ взаимно простых чисел $rn + 1$ и n. Пусть циклическая последовательность $w = w(A, B)$ состоит из a_1 единиц, rb_1 минус единиц, a_2 единиц, rb_2 минус единиц и т. д., причём имеет ровно k пар (A_i, B_i), $i = 1, \ldots, k$, вида $A_i : a_i + a_{i+1} + \ldots + a_k + a_1 + \ldots + a_{i-1} = rn+1$, $B_i : b_i + b_{i+1} + \ldots + b_k + b_1 + \ldots + b_{i-1} = n$. Тогда по лемме Рени [2, 4] единственным способом можно разорвать w так, чтобы получилась последовательность, начинающаяся с 1, после удаления которой любая частичная сумма оставшейся последовательности неотрицательна. Таким образом, получена биекция циклических классов эквивалентности $\{(A_i, B_i) : i = 1, \ldots, k\}$ с множеством $\{\sigma \in \widetilde{GS}_{n,r} : \mathrm{rise}(\sigma) = k\}$ и

$$\widetilde{A}_{n,r,k} = \frac{1}{k}\binom{rn}{k-1}\binom{n-1}{k-1} = \frac{1}{n}\binom{n}{k}\binom{rn}{k-1}.$$

Отметим, что при $r = 1$ эта конструкция аналогична используемой в [4, 5], а $\widetilde{A}_{n,r}(1)$ легко вычисляется с помощью свёртки Вандермонда. ■

При $r = 1$ выражение (1) задает многочлены Нараяны, коэффициенты которых называются числами Нараяны. Эти многочлены и числа встречаются в ряде комбинаторных задач [4]. Поэтому в рассматриваемом обобщении назовем $\widetilde{A}_{n,r,k}$ числами Нараяны порядка r, а $\widetilde{A}_{n,r}(t)$ — многочленами Нараяны порядка r.

Следствие 1. Многочлены Нараяны порядка r находятся по формуле

$$\widetilde{A}_{n,r}(t) = \frac{1}{n!}\,\frac{\partial^{n-1}}{\partial v^{n-1}}((v+t)^n(v+1)^{rn})\Big|_{v=0}. \tag{2}$$

Доказательство. Непосредственное вычисление (2) с помощью формулы Лейбница для $(n-1)$-й производной приводит к выражению (1). ■

Теорема 2. Производящей функции $v = \widetilde{A}_r(t, u) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \widetilde{A}_{n,r}(z)\, u^n$ отвечает обратная функция $u = \widetilde{A}_r^{-1}(t, v) = v(v+t)^{-1}(v+1)^{-r}$, и справедливо соотношение

$$\widetilde{A}_{0,r}(t) = 1,\ \widetilde{A}_{n+1,r}(t) = (t-1)\left\langle \widetilde{A}_{n,r}(t)\right\rangle^{r} + \left\langle \widetilde{A}_{n,r}(t)\right\rangle^{r+1},\ n \geqslant 0, \tag{3}$$

где $\langle P_n(t)\rangle^m = \sum\limits_{\substack{k_1+\ldots+k_m=n,\\ k_i\geqslant 0}} P_{k_1}(t)\ldots P_{k_m}(t)$ — m-кратная свёртка последовательности многочленов $P_0(t), P_1(t), \ldots, P_n(t)$, $\deg(P_k(t)) = k$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Доказательство. Первое утверждение теоремы 2 вытекает из (2) и теоремы Лагранжа [4]. Применение функции $v = \widetilde{A}_r(t,u)$, увеличенной на 1, к $u = \widetilde{A}_r^{-1}(t,v)$ даёт алгебраическое уравнение $u(v+1)^{r+1} + u(t-1)(v+1)^r - (v+1) + 1 = 0$. Так как коэффициент при u^n степенного ряда $(v+1)^{r+1}$ равен свертке $\left\langle \widetilde{A}_{n,r}(z)\right\rangle^{r+1}$, то сравнение коэффициентов в этом уравнении при степенях u даёт рекуррентное соотношение (3), причём при $t = 1$ уравнение и соотношение (3) соответствуют формулам из [2]. ■

Теорема 2 допускает q-обобщение.

Теорема 3. Справедливо рекуррентное соотношение

$$\widetilde{A}_{0,r}^{\mathrm{des,inv}}(t,q) = 1,\ \widetilde{A}_{n+1,r}^{\mathrm{des,inv}}(t,q) = (t-1)\left\langle \widetilde{A}_{n,r}^{\mathrm{des,inv}}(t,q)\right\rangle^{r} + \left\langle \widetilde{A}_{n,r}^{\mathrm{des,inv}}(t,q)\right\rangle^{r+1},\ n \geqslant 0, \quad (4)$$

где $\langle P_n(t,q)\rangle^m = \sum\limits_{\substack{k_1+\ldots+k_m=n,\\ k_i\geqslant 0}} q^{k_2+2k_3+\ldots(m-1)k_m} P_{k_1}(t,q)\ldots P_{k_m}(t,q)$ является q-аналогом m-кратной свёртки последовательности многочленов $P_0(t,q), P_1(t,q), \ldots, P_n(t,q)$, а производящая функция $\widetilde{A}_r^{\mathrm{des,inv}}(t,u;q) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \widetilde{A}_{n,r}^{\mathrm{des,inv}}(t,q)u^n$ удовлетворяет уравнению $\widetilde{A}_r^{\mathrm{des,inv}}(t,u;q) = 1 + u(\widetilde{A}_r^{\mathrm{des,inv}}(t,u;q) + t - 1)\widetilde{A}_r^{\mathrm{des,inv}}(t,qu;q)\ldots\widetilde{A}_r^{\mathrm{des,inv}}(t,q^r u;q)$.

Доказательство. Рекуррентное соотношение (4) для производящих многочленов пары $(\mathrm{des},\mathrm{inv})$ является q-обобщением выражения (3) и может быть получено применением метода математической индукции по r к словам из 1 и -1, используемым в доказательстве теоремы 1, причем для случая $r = 1$ применяется метод доказательства, аналогичный рассмотренному в [6] при $t = 1$. Соотношение (4) при $t = 1$ определяет q-многочлены Нараяны $\widetilde{B}_{n,r}(q) = \widetilde{A}_{n+1,r}^{\mathrm{des,inv}}(1,q)$ порядка r, совпадающие при $r = 1$ с многочленами из [6]. Уравнение для производящей функции $\widetilde{A}_r^{\mathrm{des,inv}}(t,u;q)$ соответствует рекуррентному соотношению (4). ■

Таким образом, рассмотрение статистик на множестве 312-избегающих ГС-перестановок порядка r позволяет получить естественным путём как обобщённые многочлены Нараяны, так и их q-аналоги.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gessel I. and Stanley R. P.* Stirling polynomials // J. Comb. Theory. Ser. A. 1978. V. 24. P. 24–33.
2. *Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. Основание информатики. М.: Мир, 1998. 703 с.
3. *Бондаренко Л. Н., Шарапова М. Л.* Параметрические комбинаторные задачи и методы их исследования // Известия вузов. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. 2010. № 4 (16). С. 50–63.
4. *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика. Т. 2. М.: Мир, 2009. 768 с.
5. *Кнут Д.* Искусство программирования для ЭВМ. Т. 1. М.: Мир, 1976. 720 с.
6. *Fürlinger J. and Hofbauer J.* q-Catalan numbers // J. Comb. Theory. Ser. A. 1985. V. 40. P. 248–264.