УДК 519.651 DOI 10.17223/2226308X/9/2

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗЫ О НАЛИЧИИ ВКРАПЛЕНИЙ В ДВОИЧНОЙ ЦЕПИ МАРКОВА

А. В. Волгин

Рассматривается модель побитового вкрапления в простые цепи Маркова с неизвестной матрицей переходных вероятностей, основанная на LSB-методе. Получено условие на взаимное асимптотическое соотношение длины отрезка исходной последовательности и объёма вкраплений, позволяющее гарантировать состоятельность статистического критерия выявления факта наличия вкраплений.

Ключевые слова: *цепи Маркова, вкрапления в псевдослучайные последовательности, статистические критерии различия гипотез.*

В [1] рассматриваются условия, при которых возможно гарантированно обнаружить факт наличия независимых вкраплений в простой конечной неразложимой и ациклничной цепи Маркова с неизвестной матрицей переходных вероятностей в рамках следующей модели: к каждому элементу исходной последовательности применяется случайное преобразование. При этом преобразования получены по схеме серий и являются независимыми. В данной работе получено дополнительное (по сравнению с [1]) условие на взаимное асимптотическое соотношение длины отрезка исходной последовательности и объёма вкраплений, позволяющее гарантировать состоятельность статистического критерия выявления факта наличия вкраплений.

Пусть $X = \{X_0, X_1, \ldots\}$ — простая конечная неразложимая и ацикличная цепь Маркова с двумя состояниями 0, 1 и фиксированной положительной матрицей переходных вероятностей $\Pi = (\pi_{a,b})_{2\times 2}$, $a, b \in \{0,1\}$. Стационарное распределение цепи обозначим через $\pi = (\pi_0, \pi_1)$, $\pi_0, \pi_1 \in (0,1)$. В процедуре внесения вкраплений используются две последовательности — $Z = \{Z_0, Z_1, \ldots\}$ и $\delta = \{\delta_0, \delta_1, \ldots\}$, $Z_i, \delta_i \in \{0,1\}$, $i \geqslant 0$, которые являются реализациями испытаний в схеме Бернулли. При этом $\mathbf{P}\{Z_i = a\} = p_a$, $p_a \neq \pi_a$, $a \in \{0,1\}$, и $\mathbf{P}\{\delta_i = 0\} = \tau$, $i \geqslant 0$, $p_a, \tau \in [0,1]$. В результате внесения вкраплений образуется последовательность $Y = \{Y_0, Y_1, \ldots\}$:

$$Y_i = X_i \mathbf{I}\{\delta_i = 1\} + Z_i \mathbf{I}\{\delta_i = 0\}, \quad i \geqslant 0,$$

где через $\mathbf{I}\{A\}$ обозначается индикатор события A. При этом предполагается, что последовательности X, Z и δ являются независимыми.

Постановка задачи заключается в следующем. Наблюдается отрезок двоичной последовательности $(Y_0, \ldots, Y_{n-1})$ длины n. Относительно способа образования данного отрезка выдвигаются две сложные гипотезы $H_0 : \tau = 0$ и $H_1 : \tau > 0$ об отсутствии и наличии вкраплений в цепь Маркова X соответственно. При обеих гипотезах будем предполагать, что матрица Π, стационарное распределение π цепи Маркова X, а также величины p_a, $a \in \{0,1\}$, и τ неизвестны. Рассмотрим схему серий, в которой

$$\tau = \tau(n) \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Задача заключается в построении состоятельного критерия различия гипотез H_0 и H_1.

В [1] для выявления факта наличия вкраплений в цепь Маркова рассматривается статистика

$$S = \sum_{a,b,c \in \{0,1\}} \frac{\left(\nu_{abc} - \nu_{ab}\nu_{bc}/\nu_b\right)^2}{\nu_{ab}\nu_{bc}/\nu_b}, \tag{1}$$

где $a, b, c \in \{0, 1\}$,

$$\nu_{abc} = (n-2)^{-1} \sum_{i=0}^{n-3} \mathbf{I}\{Y_i = a, Y_{i+1} = b, Y_{i+2} = c\},$$

$$\nu_{ab} = (n-1)^{-1} \sum_{i=0}^{n-2} \mathbf{I}\{Y_i = a, Y_{i+1} = b\}, \quad \nu_a = n^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{I}\{Y_i = a\},$$

при этом в [1] рассматривается не двоичный, а произвольный конечный алфавит состояний цепи Маркова.

Рассмотрим критерий проверки гипотезы H_0 против H_1, основанный на статистике (1):

$$\text{принимается гипотеза} \begin{cases} H_0, \text{ если } S < t_{\chi_2^2, 1-\alpha}, \\ H_1, \text{ если } S \geqslant t_{\chi_2^2, 1-\alpha}, \end{cases} \tag{2}$$

где $\alpha = \mathbf{P}\left\{S \geqslant t_{\chi_2^2,1-\alpha} \middle| H_0\right\}$ – вероятность ошибки первого рода; $t_{\chi_2^2,\alpha}$ – квантиль уровня α распределения χ-квадрат с двумя степенями свободы.

Теорема 1. Пусть в модели вкраплений $p_a \neq \pi_a$, $a \in \{0, 1\}$, и среди элементов матрицы переходных вероятностей Π есть хотя бы один, отличный от 1/2. Тогда при выполнении условий

$$\tau \to 0, \ n \to \infty, \tag{3}$$

$$\sqrt{n}\tau \to \infty, \ n \to \infty, \tag{4}$$

критерий (2) проверки гипотезы H_0 против альтернативы H_1 является состоятельным.

Замечание 1. При отсутствии вкраплений ($\tau \equiv 0$) и при наличии вкраплений во всех позициях последовательности X ($\tau \equiv 1$) гипотезы H_0 и H_1 неразличимы, поскольку в обоих случаях Y является простой однородной цепью Маркова (с глубиной зависимости 1 и 0 соответственно). Критерий будет состоятельным, когда вкраплений «не слишком много», что гарантируется условием (3), но в то же время когда число вкраплений превосходит по порядку квадратный корень из длины наблюдаемого отрезка последовательности X (условие (4)).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шойтов А. М.* О выявлении факта зашумления конечной цепи Маркова с неизвестной матрицей переходных вероятностей // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2010. № 3. С. 44–45.

УДК 519.7 DOI 10.17223/2226308X/9/3

АЛГОРИТМ РАСПОЗНАВАНИЯ ПОЛНОТЫ МНОЖЕСТВА СЛОВ И ДИНАМИКА ЗАПРЕТОВ[1]

А. А. Евдокимов

Вводятся инвариантные операции и даётся описание алгоритма распознавания полноты множества слов. Приводится теорема о результатах работы алгоритма и их отношении к свойству полноты исходного множества слов. Формулируется

[1]Работа поддержана Новосибирским государственным университетом и грантом РФФИ, проект № 14-01-00507.