6. *Алехина М. А., Каргин С. П.* Об одном методе повышения надежности схем в базисе Россера — Туркетта // Труды IX Междунар. конф. «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва и Подмосковье, 20–22 мая 2015 г.), посвященной 90-летию со дня рождения С. В. Яблонского. М.: МГУ, МАКС Пресс, 2015. С. 17–19.
7. *Алехина М. А., Каргин С. П.* Верхняя оценка ненадежности схем в базисе Россера — Туркетта (в P_4) // Сб. статей Междунар. науч.-технич. конф. «Проблемы автоматизации и управления в технических системах — 2015», посвященной 70-летию Победы в Великой Отечественной войне (г. Пенза, 19–21 мая 2015 г.) Пенза: Изд-во Пенз. ун-та, 2015. С. 315–317.
8. *Алехина М. А., Каргин С. П.* Нижние оценки ненадёжности схем в базисе Россера — Туркетта (в P_4) // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2015. № 8. С. 104–105.

УДК 519.718 DOI 10.17223/2226308X/9/38

НЕНАДЁЖНОСТЬ СХЕМ ПРИ СЛИПАНИЯХ ВХОДОВ ЭЛЕМЕНТОВ[1]

М. А. Алехина, О. А. Логвина

Рассматривается реализация булевых функций схемами из ненадёжных функциональных элементов в некоторых полных конечных базисах. Предполагается, что каждый из элементов схемы независимо от других элементов подвержен дизъюнктивным (конъюнктивным) слипаниям входов. Показано, что в некоторых базисах любую булеву функцию можно реализовать схемой сколь угодно высокой надёжности, а в некоторых — схемой, ненадёжность которой равна нулю.

Ключевые слова: *ненадёжные функциональные элементы, надёжность схемы, ненадёжность схемы, слипание входов элементов.*

Задача синтеза надёжных схем, реализующих булевы функции, при константных неисправностях одного типа (например, только типа 0 на входах элементов) решена в полных неприводимых базисах из двухвходовых элементов [1], при константных неисправностях двух типов [2 – 4], при константных неисправностях четырёх типов на входах и выходах [5, 6].

В этой работе рассмотрим реализацию булевых функций схемами из ненадёжных элементов в полном конечном базисе B и исследуем модель неисправностей, в которой каждый элемент схемы подвержен дизъюнктивным (конъюнктивным) слипаниям входов, когда на оба входа базисного элемента при наличии неисправности подается дизъюнкция (конъюнкция) входных значений. Различные слипания переменных исследовались, например, в работах [7 – 10] при построении тестов.

Считаем, что схема из ненадёжных элементов реализует функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, если при поступлении на входы схемы набора $\tilde{a}^n = (a_1, \ldots, a_n)$ при отсутствии неисправностей в схеме на её выходе появляется значение $f(\tilde{a}^n)$. Предполагаем, что в неисправные состояния элементы схемы переходят независимо друг от друга с вероятностью $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Пусть схема S реализует булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$. Обозначим через $P_{\overline{f(\tilde{a}^n)}}(S, \tilde{a}^n)$ вероятность появления значения $\overline{f(\tilde{a}^n)}$ на выходе схемы S при входном наборе $\tilde{a}^n$. *Ненадёжность* $P(S)$ схемы S равна максимальному из чисел $P_{\overline{f(\tilde{a}^n)}}(S, \tilde{a}^n)$ по всем входным наборам $\tilde{a}^n$ схемы S. *Надёжность* схемы S равна $1 - P(S)$.

[1]Работа поддержана грантом РФФИ, проект № 14-01-00273.

1. Дизъюнктивные слипания входов элементов

1.1. Пусть базис $B = \{x|y\}$ (где $x|y = \overline{x\&y}$ — штрих Шеффера) и на входах базисных элементов с вероятностью ε появляются дизъюнктивные слипания. Учитывая характер этих неисправностей, вычислим вероятности появления ошибок на выходе базисного элемента E при всех входных наборах этого элемента: $P_0(E,(00)) = 0$, $P_0(E,(01)) = P_0(E,(10)) = \varepsilon$, $P_1(E,(11)) = 0$. В этом случае [11] любую булеву функцию можно реализовать схемой сколь угодно высокой надёжности, т. е. схемой ненадёжность которой стремится к нулю. Построение такой схемы можно сделать так же, как в [2–7], причём для повышения надёжности используется одна и та же схема.

1.2. Пусть базис B содержит $x\&y$, $\bar{x}$ и на входах базисных элементов с вероятностью ε появляются дизъюнктивные слипания. Заметим, что инвертор при такой неисправности работает абсолютно надёжно. Возьмём конъюнктор и инвертор и соединим выход конъюнктора со входом инвертора. Построенная схема D реализует штрих Шеффера, а вероятности появления ошибок на выходе схемы D таковы: $P_0(D,(00)) = 0$, $P_0(D,(01)) = P_0(D,(10)) = \varepsilon$, $P_1(D,(11)) = 0$. В этом случае [11] любую булеву функцию можно реализовать схемой сколь угодно высокой надёжности, т. е. схемой, ненадёжность которой стремится к нулю.

1.3. Пусть базис $B = \{x \downarrow y\}$ (где $x \downarrow y = \overline{x \vee y}$ — стрелка Пирса) и на входах базисных элементов с вероятностью ε появляются дизъюнктивные слипания. Поскольку в неисправном состоянии базисный элемент также реализует стрелку Пирса, вероятность появления ошибки на выходе базисного элемента на каждом входном наборе равна нулю. Поэтому любую булеву функцию можно реализовать схемой, ненадёжность которой равна нулю.

1.4. Пусть базис B содержит $x \vee y$, $\bar{x}$ и на входах базисных элементов с вероятностью ε появляются дизъюнктивные слипания. Заметим, что инвертор при такой неисправности работает абсолютно надёжно. Возьмем дизъюнктор и инвертор и соединим выход дизъюнктора со входом инвертора. Построенная схема реализует стрелку Пирса, причём вероятность появления ошибки на выходе этой схемы на каждом входном наборе равна нулю. Поэтому любую булеву функцию можно реализовать схемой, ненадёжность которой равна нулю.

2. Конъюнктивные слипания входов элементов

2.1. Пусть базис $B = \{x|y\}$ и на входах базисных элементов с вероятностью ε появляются конъюнктивные слипания. Учитывая характер этих неисправностей, нетрудно проверить, что вероятность появления ошибки на каждом входном наборе равна нулю. Поэтому любую булеву функцию можно реализовать схемой, ненадёжность которой равна нулю.

2.2. Пусть базис B содержит $x\&y$, $\bar{x}$ и на входах базисных элементов с вероятностью ε появляются конъюнктивные слипания. Заметим, что инвертор при такой неисправности работает абсолютно надёжно. Возьмем конъюнктор и инвертор и соединим выход конъюнктора со входом инвертора. Построенная схема реализует штрих Шеффера, причём вероятность появления ошибки равна нулю на каждом из входных наборов. Поэтому любую булеву функцию можно реализовать схемой, ненадёжность которой равна нулю.

2.3. Пусть базис $B = \{x \downarrow y\}$ и на входах базисных элементов с вероятностью ε появляются конъюнктивные слипания. Учитывая характер этих неисправностей, вычислим вероятности появления ошибок на выходе базисного элемента E при всех входных наборах этого элемента: $P_0(E,(00)) = 0$, $P_1(E,(01)) = P_1(E,(10)) = \varepsilon$, $P_1(E,(11)) = 0$.

В этом случае [11] любую булеву функцию можно реализовать схемой сколь угодно высокой надёжности, т. е. схемой, ненадёжность которой стремится к нулю. Построение такой схемы можно сделать так же, как в [2–7], причём для повышения надёжности используется одна и та же схема.

2.4. Пусть базис B содержит $x \vee y$, $\bar{x}$ и на входах базисных элементов с вероятностью ε появляются конъюнктивные слипания. Заметим, что инвертор при такой неисправности работает абсолютно надёжно. Возьмем конъюнктор и инвертор и соединим выход конъюнктора со входом инвертора. Построенная схема C реализует стрелку Пирса, причём вероятности появления ошибок на выходе схемы C равны $P_0(C,(00)) = 0$, $P_1(C,(01)) = P_1(C,(10)) = \varepsilon$, $P_1(C,(11)) = 0$. В этом случае [11] любую булеву функцию можно реализовать схемой сколь угодно высокой надёжности, т. е. схемой, ненадёжность которой стремится к нулю.

Вывод: при дизъюнктивных (конъюнктивных) слипаниях входов элементов в некоторых базисах любую булеву функцию можно реализовать схемой сколь угодно высокой надёжности, а в некоторых — схемой, ненадёжность которой равна нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алехина М. А.* Синтез, надежность и сложность схем из ненадежных функциональных элементов: дис. ... докт. физ.-мат. наук. Пенза, 2004. 169 с.
2. *Алехина М. А., Барсукова О. Ю.* О ненадежности схем из функциональных элементов, подверженных двум типам неисправностей // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. 2013. №3. С. 33–50.
3. *Алехина М. А., Барсукова О. Ю.* Об оценках ненадёжности схем при инверсных неисправностях и отказах функциональных элементов // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2013. №6. С. 50–51.
4. *Alekhina M. A. and Barsukova O. Yu.* The reliability of circuits in the basis anticonjuction with constant faults of gates // Comput. Sci. Inform. Technol. 2014. V. 2(1). P. 51–54.
5. *Алехина М. А.* Синтез надежных схем при константных неисправностях на входах и выходах элементов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. 2015. №2. С. 3–15.
6. *Алехина М. А.* Ненадёжность схем при константных неисправностях на входах и выходах элементов // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2015. №8. С. 100–102.
7. *Романов Д. С.* О диагностических тестах относительно локальных слипаний переменных в булевых функциях // Прикладная математика и информатика. 2010. Т. 36. С. 91.
8. *Romanov D. S.* Diagnostic tests for local coalescences of variables in Boolean functions // Computat. Math. Modeling. 2012. V. 23. P. 72–78.
9. *Морозов Е. В., Романов Д. С.* Проверяющие тесты для булевых функций при линейных локальных неисправностях входов схем // Дискретный анализ и исследование операций. 2015. Т. 22. №1. С. 49–61.
10. *Морозов Е. В., Романов Д. С.* О проверяющих тестах относительно множественных линейных слипаний переменных // Материалы XI Междунар. семинара «Дискретная математика и ее приложения», посвященного 80-летию со дня рождения академика О. Б. Лупанова (Москва, МГУ, 18–23 июня 2012 г.). М.: Изд-во механико-математического фак-та МГУ, 2012. С. 144–147.
11. *Тарасов В. В.* К синтезу надежных схем из ненадежных элементов // Математические заметки. 1976. Т. 20. №3. С. 391–400.