ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2016 Математика и механика № 4(42)

УДК 512.541
DOI 10.17223/19988621/42/3

В.М. Мисяков

ВПОЛНЕ ТРАНЗИТИВНЫЕ, ТРАНЗИТИВНЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ И НЕКОТОРЫЕ ИХ ОБОБЩЕНИЯ

При исследовании абелевых групп большое значение имеет свойство гомоморфизмов, отображающих подгруппы данной группы в саму группу, – продолжаться до эндоморфизма всей группы. Так, например, (вполне) транзитивные группы без кручения можно определить как группы, в которых все (гомоморфизмы) сохраняющие высоты элементов гомоморфизмы из любой сервантной подгруппы ранга 1 в саму группу продолжаются до (эндоморфизмов) автоморфизмов всей гуппы. Приведены некоторые эквивалентные условия выполнимости свойств для группы быть (вполне) транзитивной, эндотранзитивной или слабо транзитивной. Рассмотрены связи между этими понятиями. Известно, что прямое слагаемое вполне транзитивной группы будет вполне транзитивной группой. Существуют транзитивные *p*-группы, которые имеют нетранзитивное прямое слагаемое. В то же время остаётся открытым вопрос: «Замкнут ли класс транзитивных групп без кручения относительно взятия прямых слагаемых?» Предлагаются некоторые необходимые и достаточные условия, при которых прямое слагаемое произвольной транзитивной группы будет транзитивной группой. Хорошо известен критерий Корнера о (вполне) транзитивности редуцированной *p*-группы. Ниже данный результат обобщается на произвольные редуцированные абелевы группы.

Ключевые слова: *абелева группа, (вполне) транзитивность, эндотранзитивность, слабая транзитивность, автоморфизм.*

Термин (вполне) транзитивность был введен И. Капланским в [1] при исследовании модулей над полным кольцом дискретного нормирования. Впервые вполне транзитивные абелевы группы без кручения изучались в работе П. А. Крылова [2] (он называл эти группы транзитивными). Определение (вполне) транзитивной произвольной абелевой группы было введёно Ю.Б. Добрусиным в [3]. Описание (вполне) транзитивных групп остается до сих пор открытым вопросом, хотя исследования, связанные с этими объектами, постоянно ведутся. Так (вполне) транзитивные периодические группы рассматривались в работах [4–13]; без кручения – в [2, 3, 14–24] ; смешанные – в [25–29]; слабо транзитивные группы без кручения – в [30-32]; В данной статье показываются некоторые связи между этими понятиями, даются некоторые эквивалентные условия выполнимости свойств для группы быть (вполне) транзитивной, эндотранзитивной или слабо транзитивной. В [33] вводятся коммутаторно и стого коммутаторно вполне транзитивные абелевы группы, изучаются их свойства и показываются связи с вполне транзитивными группами. В [34, 35] рассматриваются (вполне) транзитивные модули.

В работе [4] Корнер рассматривает следующее понятие: пусть Φ – подкольцо с единицей кольца $E(G)$, и H есть Φ-инвариантная подгруппа редуцированной p-группы G, тогда он говорит, что Φ действует (вполне) транзитивно на H, если для любых $x,y\in H$, таких, что ($U_G(x)\le U_G(y)$) $U_G(x)=U_G(y)$, следует существование (элемента $\varphi\in\Phi$) обратимого элемента $\varphi\in\Phi$, такого, что $\varphi(x)=y$. Допуская вольность речи, будем говорить, что подгруппа H (вполне) транзитивна над Ф. Таким образом, G – (вполне) транзитивная группа в смысле Капланского тогда и только тогда, когда $E(G)$ действует (вполне) транзитивно на G. В теореме 6 даются некоторые необходимые и достаточные условия (вполне) транзитивного действия кольца $E(G)$ на произвольной редуцированной группе G.

В [36] ставится проблема 41.1: «Замкнут ли класс транзитивных (сильно однородных) групп без кручения относительно взятия прямых слагаемых?» Напомним, что однородные транзитивные группы без кручения называются сильно однородными. В теореме 9 даются необходимые и достаточные условия, при которых прямое слагаемое произвольной транзитивной группы будет транзитивной группой.

В работе под словом «группа» понимается редуцированная абелева группа. Все стандартные определения и обозначения можно найти в [37, 38]. Если G – группа, то через Aut(G) (E(G)) будем обозначать группу (кольцо) всех её автоморфизмов (эндоморфизмов); через $H(a)_A$ – высотную матрицу элемента a в подгруппе A группы G; через $H_p(a)_A$ – строку высотной матрицы $H(a)_A$, соответствующую простому числу p; через $T_p(G)$ – p-компоненту периодической части $T(G)$ группы G.

Напомним, что редуцированная группа G называется (вполне) транзитивной, если для каждой пары элементов $a,b\in G$ таких, что ($H(a)\le H(b)$) $H(a)=H(b)$, следует существование ($\varphi\in \mathrm{E}(G)$) $\varphi\in \mathrm{Aut}(G)$, переводящего элемент a в элемент b.

Рассмотрим связанные с ненулевым элементом $a\in G$ вполне характеристические подгруппы группы G:

$$bfc(a)=\{b\in G|H(a)\le H(b)\},$$

$$lfc(a)=\{b\in G|\exists\varphi\in E(G),\varphi(a)=b\},$$

которые будем называть соответственно большой и малой вполне характеристическими подгруппами группы G, содержащими элемент a.

Замечание 1. Для каждого ненулевого элемента $a\in G$ существует эпиморфизм ψ_a: $\mathrm{E}^+(G)\to \boldsymbol{lfc}(a)$, действующий по правилу: $\psi_a(\varphi)=\varphi(a)$ для любого $\varphi\in \mathrm{E}^+(G)$.

Далее рассмотрим некоторые эквивалентные условия вполне транзитивности группы G.

Предложение 1. Для группы G следующие условия эквивалентны:

1) G – вполне транзитивная группа;

2) $\boldsymbol{bfc}(a)=\boldsymbol{lfc}(a)$ для любого ненулевого элемента $a\in G$;

3) для любого ненулевого элемента $a\in G$ существует эпиморфизм ψ_a: $E^+(G)\to \boldsymbol{bfc}(a)$, действующий по правилу: $\psi_a(\varphi)=\varphi(a)$ для любого $\varphi\in E^+(G)$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть a – произвольный элемент группы G. Так как $\boldsymbol{lfc}(a)\subseteq \boldsymbol{bfc}(a)$, то пусть $c\in \boldsymbol{bfc}(a)$. Тогда $H(a)\le H(c)$. Поскольку G – вполне транзитивная группа, то существует $\varphi\in E(G)$, такой, что $\varphi(a)=c$. Следовательно, $c\in \boldsymbol{lfc}(a)$ и $\boldsymbol{bfc}(a)=\boldsymbol{lfc}(a)$.

2) $\Rightarrow$ 1). Рассмотрим произвольные элементы $a,b\in G$, такие, что $H(a)\le H(b)$. Так как $b\in \boldsymbol{bfc}(a)$ и $\boldsymbol{bfc}(a)=\boldsymbol{lfc}(a)$, то существует $\varphi\in E(G)$, такой, что $\varphi(a)=b$.

2) $\Rightarrow$ 3). Следует из условия и замечания 1.

3) $\Rightarrow$ 2). Пусть a – произвольный элемент группы G. Так как $\boldsymbol{lfc}(a) \subseteq \boldsymbol{bfc}(a)$, то пусть c – произвольный элемент подгруппы $\boldsymbol{bfc}(a)$. Тогда для элемента c найдётся $\eta \in E^{+}(G)$ такой, что $c = \psi_a(\eta) = \eta(a)$. Следовательно, $c \in \boldsymbol{lfc}(a)$ и $\boldsymbol{bfc}(a) = \boldsymbol{lfc}(a)$.

По аналогии с вполне характеристическими подгруппами группы G, связанными с ненулевым элементом $a \in G$, рассмотрим характеристические подмножества группы G:

$$\boldsymbol{bc}(a) = \{b \in G \mid H(b) = H(a)\},$$

$$\boldsymbol{lc}(a) = \{b \in G \mid \exists \varphi \in \mathrm{Aut}(G), \varphi(a) = b\},$$

которые будем называть соответственно большим и малым характеристическими подмножествами группы G, содержащими элемент a. Здесь под характеристическим подмножеством группы G понимается подмножество, замкнутое относительно действия автоморфизмов группы G.

Замечание 2. Для произвольного ненулевого элемента $a \in G$ существует следующая связь между вышеопределёнными вполне характеристическими подгруппами и характеристическими подмножествами:

$$\boldsymbol{lc}(a) \subseteq \boldsymbol{lfc}(a) \subseteq \boldsymbol{bfc}(a) \text{ и}$$

$$\boldsymbol{lc}(a) \subseteq \boldsymbol{bc}(a) \subseteq \boldsymbol{bfc}(a).$$

Далее термин «слабо транзитивная группа», введённый для групп без кручения в [30], определим для произвольной абелевой группы.

Определение 1. Группу G будем называть слабо транзитивной, если для произвольных элементов $x,y \in G$ из существования эндоморфизмов $\varphi,\psi \in E(G)$, таких, что $\varphi(x) = y$, $\psi(y) = x$, следует существование $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$, такого, что $\alpha(x) = y$.

Для некоторой характеризации слабо транзитивных групп нам потребуется следующее подмножество, определяемое для любого ненулевого элемента $a \in G$,

$$weak(a) = \{b \in G \mid \exists\ \varphi,\psi \in E(G), \varphi(a) = b, \psi(b) = a\}.$$

Замечание 3. Легко проверяется, что $\boldsymbol{lc}(a) \subseteq \boldsymbol{weak}(a) \subseteq \boldsymbol{bc}(a)$ и $\boldsymbol{lc}(a) \subseteq \boldsymbol{weak}(a) \subseteq \boldsymbol{lfc}(a)$ для любого ненулевого элемента $a \in G$.

Лемма 2. Группа G слабо транзитивна тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{lc}(a) = \boldsymbol{weak}(a)$ для любого ненулевого элемента $a \in G$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть G – слабо транзитивная группа. Тогда для любого ненулевого элемента $a \in G$ и для любого $x \in weak(a)$ существуют $\varphi,\psi \in E(G)$, такие, что $\varphi(x) = a$ и $\psi(a) = x$. Так как G – слабо транзитивная группа, то существует $\alpha \in Aut(G)$, такой, что $\alpha(a) = x$. Следовательно, $x \in lc(a)$. Из замечания 3 следует обратное включение.

Достаточность. Рассмотрим произвольные $x,y \in G$ и $\varphi,\psi \in E(G)$, такие, что $\varphi(x) = y$ и $\psi(y) = x$. Тогда $y \in weak(x) = lc(x)$. Поэтому найдётся $\alpha \in Aut(G)$, такой, что $\alpha(x) = y$.

Замечание 4. Для каждого ненулевого элемента $a \in G$ существует сюръективное отображение $\psi_a : Aut(G) \to lc(a)$, действующее по правилу: $\psi_a(\varphi) = \varphi(a)$ для любого $\varphi \in Aut(G)$.

Поскольку всякая транзитивная группа является слабо транзитивной, то представляет интерес нахождение такого дополнительного условия, при котором слабо транзитивная группа будет транзитивной. В следующем утверждении предлагается такое условие.

Предложение 3. Для группы G следующие условия эквивалентны:

1) G – транзитивная группа;

2) $\boldsymbol{bc}(a) = \boldsymbol{lc}(a)$ для любого ненулевого элемента $a \in G$;

3) для любого ненулевого элемента $a \in G$ существует сюръективное отображение $\psi_a : Aut(G) \to bc(a)$, действующее по правилу: $\psi_a(\varphi) = \varphi(a)$ для любого $\varphi \in Aut(G)$;

4) G – слабо транзитивная группа и $\boldsymbol{weak}(a) = \boldsymbol{bc}(a)$ для любого ненулевого элемента $a \in G$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть a – произвольный ненулевой элемент группы G и $c \in bc(a)$. Тогда $H(c) = H(a)$. Следовательно, будут существовать $\varphi \in Aut(G)$, такой, что $\varphi(a) = c$. Тогда $c \in lc(a)$ и $bc(a) \subseteq lc(a)$. Обратное включение следует из замечания 2.

2) $\Rightarrow$ 1). Рассмотрим произвольные ненулевые элементы $a, b \in G$ такие, что $H(a) = H(b)$. Тогда $b \in bc(a)$. Поскольку $bc(a) = lc(a)$, то найдется $\varphi \in Aut(G)$ такой, что $\varphi(a) = b$.

2) $\Rightarrow$ 3). Следует из условия и замечания 4.

3) $\Rightarrow$ 2). Пусть a – произвольный ненулевой элемент группы G. Поскольку $lc(a) \subseteq bc(a)$, то пусть $x \in bc(a)$. Так как $\psi_a : Aut(G) \to bc(a)$ – эпиморфизм, то существует $\varphi \in Aut(G)$ такой, что $x = \psi_a(\varphi) = \varphi(a)$. Следовательно, $x \in lc(a)$ и $bc(a) = lc(a)$.

Эквивалентность условий 2) и 4) следует из замечания 3 и леммы 2.

Определение 2. Группа G называется эндотранзитивной, если для произвольных элементов $x, y \in G$, таких, что $H(x) = H(y)$ следует существование $\varphi \in E(G)$, такого, что $\varphi(x) = y$.

В монографии [36] сформулирована проблема 44: «Существуют ли слабо транзитивные группы без кручения (здесь под термином «слабая транзитивность» понимается термин «эндотранзитивность»), не являющиеся ни транзитивными, ни вполне транзитивными?». Замечание 4 и следующая лемма дают надежду, что такие группы могут существовать.

Лемма 4. Редуцированная группа G эндотранзитивна тогда и только тогда, когда $bc(a) \subseteq lfc(a)$.

Доказательство. *Необходимость.* Рассмотрим произвольные $0 \neq a \in G$ и $x \in bc(a)$, тогда $H(a) = H(x)$. Так как G – эндотранзитивная группа, то существует $\varphi \in E(G)$, такой, что $\varphi(a) = x$. Следовательно, $x \in lfc(a)$.

Достаточность. Рассмотрим произвольные элементы $a, b \in G$, такие, что $H(a) = H(b)$. Тогда $b \in bc(a) \subseteq lfc(a)$. Следовательно, найдётся эндоморфизм $\varphi \in E(G)$ такой, что $\varphi(a) = b$. Таким образом, G – эндотранзитивная группа.

Замечание 5. Из предложений 1 и 4, замечания 4 и леммы 4 следует хорошо известный результат, что если группа (вполне) транзитивна, то она эндотранзитивна.

Для полноты изложения напомним следующую лемму, доказанную Корнером в [4].

Лемма 5 [4]**.** Редуцированная p-группа G (вполне) транзитивна тогда и только тогда, когда $E(G)$ действует (вполне) транзитивно на $p^{\omega}G$.

Распространим понятие, введённое Корнером для p-групп, на произвольные редуцированные абелевы группы. При этом, в отличие от него, считаем, что для любого $a \in A$ высотная матрица $H(a)$ берётся в подгруппе A группы G.

Определение 3. Пусть Φ – подкольцо с единицей кольца $E(G)$ и A есть Φ-инвариантная подгруппа редуцированной абелевой группы G. Будем говорить, что Φ действует (вполне) транзитивно на A или подгруппа A (вполне) транзитивна над Φ, если для любых $x, y \in A$, таких, что ($H(x)_A \le H(y)_A$) $H(x)_A = H(y)_A$, следует существование (элемента $\varphi \in \Phi$) обратимого элемента $\varphi \in \Phi$, такого, что $\varphi(x) = y$.

В следующем утверждении рассматривается свойство (вполне) транзитивности для произвольной редуцированной группы.

Теорема 6. Редуцированная группа G (вполне) транзитивна тогда и только тогда, когда $E(G)$ действует (вполне) транзитивно на $p^{\sigma}G$ для любого порядкового числа σ и произвольного простого числа p.

Доказательство. Докажем теорему для случая вполне транзитивности, транзитивный случай доказывается аналогично.

Необходимость. Пусть p – произвольное простое число, если G – p-делимая группа, то для любого порядкового числа σ следует, что $p^{\sigma}G = G$, то есть $p^{\sigma}G$ – вполне транзитивная группа над $E(G)$.

Пусть $pG \ne G$. Проведём доказательство индукцией по σ. Если $\sigma = 0$, то $E(G)$ действует вполне транзитивно на G.

Пусть для любого δ, такого, что $0 \le \delta < \sigma$, утверждение теоремы выполняется. Покажем, что $E(G)$ действует вполне транзитивно на $p^{\sigma}G$. Пусть $a, b \in p^{\sigma}G$ и $H(a)_{p^{\sigma}G} \le H(b)_{p^{\sigma}G}$. Тогда $H_p(a)_{p^{\sigma}G} \le H_p(b)_{p^{\sigma}G}$, где

$$H_p(a)_{p^{\sigma}G} = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots) \text{ и } H_p(b)_{p^{\sigma}G} = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m, \ldots).$$

Пусть σ – изолированное порядковое число, тогда $p^{\sigma}G = p(p^{\sigma-1}G)$ и, следовательно, существуют элементы $c_1, c_2 \in p^{\sigma-1}G$, такие, что $a = pc_1, b = pc_2$. Тогда $H_p(c_1)_{p^{\sigma-1}G} = (\mu, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots)$ и $H_p(c_2)_{p^{\sigma-1}G} = (\nu, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m, \ldots)$, причём $H_q(c_1)_{p^{\sigma-1}G} = H_q(a)_{p^{\sigma}G}$ и $H_q(c_2)_{p^{\sigma-1}G} = H_q(b)_{p^{\sigma}G}$ для любого простого числа q, $q \ne p$. Если $\mu \le \nu$, то $H(c_1)_{p^{\sigma-1}G} \le H(c_2)_{p^{\sigma-1}G}$. Так как, по предположению индукции, подгруппа $p^{\sigma-1}G$ вполне транзитивна над $E(G)$, то существует $\varphi \in E(G)$ такой, что $\varphi(c_1) = c_2$. Тогда $p\varphi(c_1) = pc_2$ и $\varphi(a) = b$.

Пусть $\nu < \mu$. Допустим, что между ν и β_0 есть скачок (в противном случае $\mu \le \nu$). Тогда ν-й инвариант Ульма – Капланского группы $T_p(p^{\sigma-1}G)$ отличен от нуля, то есть существует $d \in p^{\sigma-1}G$, такой, что $o(d) = p$ и $H_p(d)_{p^{\sigma-1}G} = (\nu, \infty, \ldots)$. Рассмотрим элемент $c_1 + d \in p^{\sigma-1}G$. Так как

$$H_p(c_1+d)_{p^{\sigma-1}G} = (\nu, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots) \leq H_p(c_2)_{p^{\sigma-1}G}$$

и
$$H_q(c_1+d)_{p^{\sigma-1}G} = H_q(c_1)_{p^{\sigma-1}G}$$

для любого простого q, $q \neq p$, то $H(c_1+d)_{p^{\sigma-1}G} \leq H(c_2)_{p^{\sigma-1}G}$. Поскольку, по предположению индукции, подгруппа $p^{\sigma-1}G$ вполне транзитивна над $E(G)$, то существует $\varphi \in E(G)$, такой, что $\varphi(c_1+d) = c_2$. Тогда $p\varphi(c_1+d) = pc_2$ и $\varphi(a) = b$.

Пусть σ – предельное порядковое число, то есть $p^\sigma G = \bigcap_{\delta<\sigma} p^\delta G$. Следовательно, $a, b \in p^\delta G$ для любого $\delta < \sigma$. Тогда по определению обобщённой высоты $h_p^*(a)_{p^\delta G} = h_p^*(a)_{p^\sigma G}$ для любого $\delta < \sigma$ и, следовательно, $h_p^*(p^k a)_{p^\delta G} = h_p^*(p^k a)_{p^\sigma G}$ для любых $\delta < \sigma$ и натурального k, то есть $H_p(a)_{p^\delta G} = H_p(a)_{p^\sigma G}$ для любого $\delta < \sigma$. Поскольку $H_q(a)_{p^\delta G} = H_q(a)_{p^\sigma G}$ для любых $\delta < \sigma$ и простого q, $q \neq p$, то $H(a)_{p^\delta G} = H(a)_{p^\sigma G}$ для любого $\delta < \sigma$. Аналогичные рассуждения показывают, что $H(b)_{p^\delta G} = H(b)_{p^\sigma G}$ для любого $\delta < \sigma$. Тогда $H(a)_{p^\delta G} \leq H(b)_{p^\delta G}$. По предположению индукции подгруппа $p^\delta G$ вполне транзитивна над $E(G)$ для любого $\delta < \sigma$, то есть существует $\varphi \in E(G)$, такой, что $\varphi(a) = b$.

Достаточность. Пусть $E(G)$ действует вполне транзитивно на подгруппе $p^\sigma G$ для любого порядкового числа σ и для любого простого числа p. Тогда, в частности, $E(G)$ действует вполне транзитивно на $p^0 G = G$, то есть G – вполне транзитивная группа.

Следствие 7. Для редуцированной p-группы G следующие условия эквивалентны:

1) G – (вполне) транзитивная группа;

2) $E(G)$ действует (вполне) транзитивно на $p^\omega G$ (в смысле Корнера);

3) $E(G)$ действует (вполне) транзитивно на $p^\sigma G$ для любого порядкового числа σ (в смысле определения 3).

Доказательство. Эквивалентность условий 1) и 2), 1) и 3) получаем из леммы 5 и теоремы 6 соответственно.

Введём следующее понятие.

Определение 4. Пусть $G = A \oplus B$. Будем говорить, что автоморфизмы группы A индуцируются автоморфизмами группы G, если для любого $a \in A$ и для любого $x \in bc(a)$ из существования $\varphi \in AutG$, такого, что $\varphi\rho(a) = \rho(x)$, следует существование $\psi \in AutA$, такого, что $\pi\varphi\rho(a) = \psi(a)$, где $\rho: A \to G$ и $\pi: G \to A$ – канонические вложение и проекция соответственно.

Теорема 8. Прямое слагаемое A транзитивной группы G является транзитивной группой тогда и только тогда, когда автоморфизмы группы A индуцируются автоморфизмами группы G.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $G = A \oplus B$, причём G и A – транзитивные группы. Пусть $\rho: A \to G$ и $\pi: G \to A$ – канонические вложение и проекция соответственно. Тогда для любого ненулевого элемента $a \in A$ и для любого $x \in bc(a)$ из транзитивности группы A следует существование $\psi \in AutA$, такого, что $\psi(a) = x$.

Рассмотрим элемент ρx. Так как $H(\rho x) = H(\rho a)$, то из транзитивности группы G следует существование $\varphi \in AutG$, такого, что $\varphi\rho a = \rho x$. Следовательно, $\pi\varphi\rho a = x = \psi(a)$.

Достаточность. Для транзитивности группы A, согласно предложению 3, достаточно показать, что для любого ненулевого элемента $a \in A$ следует, что $bc(a) = lc(a)$. Для произвольного элемента $x \in bc(a)$ имеем $H(x) = H(a)$. Поскольку $H(\rho x) = H(\rho a)$, то из транзитивности группы G следует существование $\varphi \in AutG$, такого, что $\varphi\rho(a) = \rho(x)$. Поскольку автоморфизмы группы G индуцируют автоморфизмы группы A, то существует $\psi \in AutA$, такой, что $x = \pi\varphi\rho(a) = \psi(a)$. Следовательно, $bc(a) = lc(a)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kaplansky I.* Infinite abelian groups. Ann. Arbor: Michigan, 1954.
2. *Крылов П.А.* О вполне характеристических подгруппах абелевых групп без кручения // Сборник аспирантских работ по математике. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1973. С. 15–20.
3. *Добрусин Ю.Б.* О продолжениях частичных эндоморфизмов абелевых групп без кручения, II // Абелевы группы и модули. Томск: Изд.-во Том. ун-та, 1985. Вып. 5. С. 31–41.
4. *Corner A.L.S.* The independence of Kaplansly's notions of transitivity and fully transitivity // Quart. J. Math. Oxford. 1976. V. 27. No. 105. P. 15–20.
5. *Carroll D., Goldsmith B.* On transitive and fully transitive abelian p-groups // Proc. Royal Irish Academy. 1996. V. 96A. No. 1. P. 33–41.
6. *Danchev P.V., Goldsmith B.* On socle-regularity and some notions of transitivity for Abelian p-groups // J. Commut. Algebra. 2011. V. 3. No. 3. P. 301–319.
7. *Files S., Goldsmith B.* Transitive and fully transitive groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. V. 126. No. 6. P. 1605–1610.
8. *Goldsmith B., Strüngmann L.* Some transitivity results for torsion Abelian groups // Houston J. Math. 2007. V. 33. No. 4. P. 941–957.
9. *Griffith P.* Transitive and fully transitive primary abelian groups // Pacific J. Math. 1968. V. 25. No. 2. P. 249–254.
10. *Hill P.* On transitive and fully transitive primary groups // Proc. Am. Math. Soc. 1969. V. 22. No. 2. P. 414–417.
11. *Paras A., Strüngmann L.* Fully transitive p-groups with finite first Ulm subgroup // Proc. Amer. Math. Soc. 2003. V. 131. P. 371–377.
12. *Danchev P., Goldsmith B.* On projectively fully transitive Abelian p-groups // Results Math. 2013. V. 63. Issue 3. P. 1109–1130.
13. *Meggiben C.* A nontransitive, fully transitive primary group // Journ. Algebra. 1969. V. 13. P. 571–574.

14. *Добрусин Ю.Б.* О продолжениях частичных эндоморфизмов абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. Томск: Изд.-во Том. ун-та. 1986. Вып. 4. С. 36–53.
15. *Крылов П.А.* Некоторые примеры квазисервантно инъективных и транзитивных абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. 1988. С. 81–99.
16. *Крылов П.А.* Вполне транзитивные абелевы группы без кручения // Алгебра и логика. 1990. Т. 29. № 5. С. 549–560.
17. *Гриншпон С.Я.* О строении вполне характеристических подгрупп абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. 1982. С. 56–92.
18. *Чехлов А.Р.* Вполне транзитивные группы без кручения конечного *p*-ранга // Алгебра и логика. 2001. Т.40. № 6. С. 698–715.
19. *Chekhlov A.R., Danchev P.V.* On abelian groups having all proper fully invariant subgroups isomorphic // Communications in Algebra. 2015. V. 43. Issue 12. P. 5059–5073.
20. *Чехлов А.Р.* О разложимых вполне транзитивных группах без кручения // Сиб. матем. журн. 2001. Т. 42. № 3. С. 714–719.
21. *Göbel R., Shelah S.* Uniquely Transitive Torsion-free Abelian Groups. URL: http://www.arXiv:math/0404259 (дата обращения: 02.04.2016).
22. *Hausen J.* E-transitive torsion-free abelian groups // J. Algebra. 1987. V. 107. P. 17–27.
23. *Dugas M., Shelah S.* E-transitive groups in L // Contemp. Math. 1989. V. 87. P. 191–199.
24. *Чехлов А.Р.* Об одном классе эндотранзитивных групп // Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 6. С. 944–949.
25. *Files S.* On trasitive mixed abelian groups // Abelian Group Theory: Proceedings of the International Conference at Colorado Springs. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. 1996. V. 182. P. 243–251.
26. *Гриншпон С.Я.* Вполне характеристические подгруппы абелевых групп и вполне транзитивность // Фундам. и прикл. мат. 2002. Т. 8. Вып. 2. С. 407–473.
27. *Гриншпон С.Я., Мисяков В.М.* О вполне транзитивных абелевых группах // Абелевы группы и модули. 1986. С. 12–27.
28. *Гриншпон С.Я., Мисяков В.М.* Вполне транзитивность прямых произведений абелевых групп // Абелевы группы и модули. 1991. С. 23–30.
29. *Мисяков В.М.* Вполне транзитивность редуцированных абелевых групп // Абелевы группы и модули. 1994. С. 134–156.
30. *Goldsmith B., Strüngmann L.* Torsion-free weakly transitive abelian groups // Communications in Algebra. 2005. V. 33. P. 1177–1191.
31. *Meehan C., Strüngmann L.* Rational rings related to weakly transitive torsion-free groups // Journal of Algebra and Its Applications. 2009. V. 8. No. 5. P. 723–732.
32. *Чехлов А.Р.* Слабо транзитивные E-энгелевы абелевы группы без кручения // Матем. заметки. 2013. Т. 94. Вып. 4. С. 620–627.
33. *Chekhlov A.R., Danchev P.V.* On commutator fully transitive Abelian groups // J. Group Theory. 2015. V. 18. P. 623–647.
34. *Files S.* Transitivity and full transitivity for nontorsion modules // J. Algebra. 1997. V. 197. P. 468–478.
35. *Hennecke G., Strüngmann L.* Transitivity and full transitivity for *p*-local modules // Archiv der Mathematik. 2000. V. 74. P. 321–329.
36. *Крылов П.А., Михалёв А.В., Туганбаев А.А.* Связи абелевых групп и их колец. Томск: Томский государственный университет, 2002. 464 с.
37. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. I. 335 с.
38. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир. 1977. Т. II. 416 с.

Статья поступила 02.04.2016 г.

Misyakov V.M. (2016) FULLY TRANSITIVE, TRANSITIVE ABELIAN GROUPS AND SOME THEIR GENERALIZATIONS. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(42). pp. 23–32

DOI 10.17223/19988621/42/3

In the study of Abelian groups, the fact that homomorphisms mapping subgroups of a group into this group can be extended to an endomorphism of the whole group is an important property of homomorphisms. For example, (fully) transitive torsion-free groups can be defined as groups in which all (homomorphisms) height-preserving homomorphisms from any pure rank 1 subgroup into this group are extended to (endomorphisms) automorphisms of the group. In this paper, some equivalent feasibility conditions for a group to be (fully) transitive, endotransitive, or weakly transitive are given. Relations between these notions are also shown.

It is easy to show that a direct summand of a fully transitive group is a fully transitive group. There exist transitive *p*-groups which have a nontransitive direct summand. At the same time, the question whether the class of torsion free transitive groups is closed with respect to taking direct summands remains open. In this paper, some necessary and sufficient conditions under which a direct summand of an arbitrary transitive group is a transitive group are proposed.

There is a well-known Corner's criterion on (full) transitivity of a reduced *p*-group. Below, this result is generalized to arbitrary reduced Abelian groups.

Keywords: abelian group, (fully) transitive, endotransitive, weakly transitive, automorphism.

MISYAKOV Victor Mikhajlovich (Candidate of Physics and Mathematics,
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: mvm@mail.tsu.ru

REFERENCES

1. Kaplansky I. (1954) *Infinite abelian groups*. Ann. Arbor: Michigan.
2. Krylov P.A. (1973) O vpolne kharakteristicheskikh podgruppakh abelevykh grupp bez krucheniya [On fully invariant subgroups of abelian torsion-free groups]. *Collected works of postgraduates on mathematics*. Tomsk: TGU publ. pp. 15–20.
3. Dobrushin Yu.B. (1985) On extensions of partial endomorphisms of torsionfree abelian groups, II. *Abelian Groups and Modules*. pp. 31–41. (In Russian)
4. Corner A.L.S. (1976) The independence of Kaplansly's notions of transitivity and fully transitivity. *Quart. J. Math. Oxford*. 27(105). pp. 15–20.
5. Carroll D., Goldsmith B. (1996) On transitive and fully transitive abelian *p*-groups. *Proc. Royal Irish Academy*. 96A(1). pp. 33–41.
6. Danchev P.V., Goldsmith B. (2011) On socle-regularity and some notions of transitivity for abelian *p*-groups. *J. Commut. Algebra*. 3(3). pp. 301–319. DOI 10.1216/JCA-2011-3-3-301.
7. Files S., Goldsmith B. (1998) Transitive and fully transitive groups. *Proc. Amer. Math. Soc.* 126(6). pp. 1605–1610.
8. Goldsmith B., Strüngmann L. (2007) Some transitivity results for torsion abelian groups. *Houston J. Math.* 33(4). pp. 941–957.
9. Griffith P. (1968) Transitive and fully transitive primary abelian groups. *Pacific J. Math*. 25(2). pp. 249–254.
10. Hill P. (1969) On transitive and fully transitive primary groups. *Proc. Am. Math. Soc*. 22(2). pp. 414–417.
11. Paras A., Strüngmann L. (2003) Fully transitive *p*-groups with finite first Ulm subgroup. *Proc. Amer. Math. Soc*. 131. pp. 371–377.
12. P. Danchev P., Goldsmith B. (2013) On projectively fully transitive Abelian *p*-groups. *Results Math*. 63(3). pp.1109–1130. DOI 10.1007/s00025-012-0256-8.
13. Meggiben C. (1969) A nontransitive, fully transitive primary group. *Journ. Algebra*. 13. pp. 571–574.

14. Dobrushin Yu.B. (1986) On extensions of partial endomorphisms of torsionfree abelian groups. *Abelian Groups and Modules*. pp. 36–53. (In Russian)
15. Krylov P.A. (1988) Some examples of quasi-pure injective and transitive abelian groups without torsion. *Abelian Groups and Modules*. pp. 81 – 99. (In Russian)
16. Krylov P.A. (1990) Fully transitive torsion-free Abelian groups. *Algebra and Logic*. 29(5). pp. 362–370.
17. Grinshpon S.Ya. (1982) On the structure of fully invariant subgroups of abelian torsion-free groups. *Abelian Groups and Modules*. pp. 56–92. (In Russian)
18. Chekhlov A.R. (2001) Totally transitive torsion-free groups of finite *p*-rank. *Algebra and Logic*. 40(6). pp. 391–400.
19. Chekhlov A.R., Danchev P.V. (2015) On abelian groups having all proper fully invariant subgroups isomorphic. *Communications in Algebra*. 43(12). pp. 5059–5073. DOI 10.1080/00927872.2015.1008011.
20. Chekhlov A.R. (2001) On decomposable fully transitive torsion-free groups. *Sib. Math. J.* 42(3). pp. 605–609.
21. Göbel R., Shelah S. (2016) Uniquely Transitive Torsion-free Abelian Groups. URL: http://www.arXiv:math/0404259.
22. Hausen J. (1987) E-transitive torsion-free abelian groups. *J. Algebra*. 107. pp. 17–27.
23. Dugas M., Shelah S. (1989) E-transitive groups in L. *Contemp. Math*. 87. pp. 191–199.
24. Chekhlov A.R. (2001) On a class of endotransitive groups. *Math. Notes*. 69(6). pp. 863–867. DOI 10.1023/A:1010298919298.
25. Files S. (1996) On trasitive mixed abelian groups. *Abelian Group Theory: Proceedings of the International Conference at Colorado Springs. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*. 182. pp. 243–251.
26. Grinshpon S.Ya. (2002) Vpolne kharakteristicheskie podgruppy abelevykh grupp i vpolne tranzitivnost' [Fully invariant subgroups of Abelian groups and full transitivity]. *Fundam. Prikl. Mat. – Fundamental and Applied Mathematics*. 8(2). pp. 407–473.
27. Grinshpon S.Ya., Misyakov V.M. (1986) Fully transitive abelian groups. *Abelian Groups and Modules*. pp. 12–27. (In Russian)
28. Grinshpon S.Ya., Misyakov V.M. (1991) Fully transitivity of direct products of abelian groups. *Abelian Groups and Modules*. pp. 23–30. (In Russian)
29. Misyakov V.M. (1994) On complete transitivity of reduced abelian groups. *Abelian Groups and Modules*. pp. 134–156. (In Russian)
30. Goldsmith B., Strüngmann L. (2005) Torsion-free weakly transitive abelian groups. *Communications in Algebra*. 33. pp. 1177–1191.
31. Meehan C., Strüngmann L. (2009) Rational rings related to weakly transitive torsion-free groups. *Journal of Algebra and Its Applications*. 8(5). pp. 723–732. DOI 10.1142/S0219498809003576.
32. Chekhlov A.R. (2013) Torsion-free weakly transitive E-engel abelian groups. *Math. Notes*. 94(4). pp. 583–589. DOI 10.4213/mzm9378.
33. Chekhlov A.R., Danchev P.V. (2015) On commutator fully transitive Abelian groups. *J. Group Theory*. 18. pp. 623–647. DOI 10.1515/jgth-2015-0014.
34. Files S. (1997) Transitivity and full transitivity for nontorsion modules. *J. Algebra*. 197. pp. 468–478.
35. Hennecke G., Strüngmann L. (2000) Transitivity and full transitivity for p-local modules. *Archiv der Mathematik*. 74. pp. 321–329.
36. Krylov P.A., Mikhalev A.V., Tuganbaev A.A. (2003) *Endomorphism Rings of Abelian Groups*. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. DOI 10.1007/978-94-017-0345-1.
37. Fuchs L. (1970) *Infinite Abelian Groups*. *V. I*. New York – London: Academic Press.
38. Fuchs L. (1973) *Infinite Abelian Groups*. *V. II*. New York – London: Academic Press.