УДК 514.76
DOI 10.17223/19988621/42/5

Я.В. Славолюбова[1]

АССОЦИИРОВАННЫЕ КОНТАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА 7-МЕРНОЙ ЕДИНИЧНОЙ СФЕРЕ S^7

Построены новые примеры ассоциированных контактных метрических структур (η, ξ, φ, g^J) на 7-мерной единичной сфере S^7. Для полученных структур установлено соответствие ассоциированных метрик g^J неинтегрируемому семейству ассоциированных почти комплексных структур J в 3-мерном комплексном проективном пространстве CP^3.

Ключевые слова: *контактные структуры, ассоциированные контактные метрические структуры, 7-мерная сфера.*

1. Предварительные сведения

Напомним основные понятия о контактных многообразиях.

Определение 1 ([1]). Дифференцируемое ($2n$+1)-мерное многообразие M^{2n+1} класса C^∞ называется контактным многообразием или имеет контактную структуру, если на нём задана глобальная дифференциальная 1-форма η, такая, что

$$\eta\wedge(d\eta)^n\neq 0$$

всюду на M^{2n+1}.

Контактная структура задает $2n$-мерное распределение

$$E=\left\{X\in TM^{2n+1}:\eta(X)=0\right\},$$

которое называют контактным распределением, и ненулевое векторное поле ξ, такое, что

$$\eta(\xi)=1,\ d\eta(\xi,X)=0$$

для всех векторных полей X на M^{2n+1}. Это векторное поле определяет 1-мерное распределение, дополнительное к распределению E, и называется характеристическим векторным полем контактной структуры.

Определение 2 ([1]). Говорят, что дифференцируемое многообразие M^{2n+1} имеет (η, ξ, φ)-структуру, если оно допускает поле φ эндоморфизмов касательных пространств, векторное поле ξ и 1-форму η, удовлетворяющую условиям

$$\eta(\xi)=1,\ \varphi^2=-I+\eta\otimes\xi, \tag{1}$$

где I – тождественное преобразование TM^{2n+1}.

Также имеют место следующие условия: $\varphi\xi=0$ и $\eta\circ\varphi=0$ в определении (η, ξ, φ)-структуры, вытекающие из условий (1).

Определение 3 ([1]). Если многообразие M^{2n+1} с заданной (η, ξ, φ)-структурой допускает риманову метрику g, такую, что

$$g(\varphi X,\varphi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y)$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке фонда гранта Президента РФ (проект НШ-4382.2014.1)

для любых векторных полей X, Y , тогда говорят, что M^{2n+1} имеет (η, ξ, φ, g)-структуру или почти контактную метрическую структуру и g называется совместимой метрикой.

Определение 4 ([1]). Пусть многообразие M^{2n+1} имеет почти контактную метрическую структуру (η, ξ, φ, g), g – совместимая метрика и пусть определена 2-форма $\tilde{\Phi}$:

$$\tilde{\Phi}(X,Y)=g(X,\varphi Y) .$$

Почти контактную метрическую структуру (η, ξ, φ, g) с $\tilde{\Phi}=d\eta$ называют ассоциированной почти контактной метрической структурой для контактной структуры η или более проще её также называют контактной метрической структурой (η, ξ, φ, g), а метрику g – ассоциированной метрикой.

2. Контактная метрическая структура на 7-мерной единичной сфере S^7

Рассмотрим S^7 как сферу в пространстве $\mathbf{C}^4$, то есть $S^7 = \{(z^1,z^2,z^3,z^4)\in \mathbf{C}^4: |z^1|^2+|z^2|^2+|z^3|^2+|z^4|^2 = 1\}$.

На сфере S^7 подействуем справа группой $G=\{e^{it}, 0\le t\le 2\pi\}$. Её можно отождествить с единичной сферой S^1. Группа G действует по правилу

$$z\cdot e^t=(z^1\cdot e^{it},z^2\cdot e^{it},z^3\cdot e^{it},z^4\cdot e^{it}) .$$

Тогда $S^7/S^1 = \mathbf{CP}^3$. Получим отображение $S^7\to\mathbf{CP}^3$, которое называется расслоением Хопфа. Прообразом каждой точки пространства $\mathbf{CP}^3$ при этом отображении является окружность $S^1=\{e^{it}\}$. Контактная структура на сфере S^7 строится следующим образом.

Действие S^1 на S^7 порождает характеристическое векторное поле ξ [2]. Его значение в комплексных координатах пространства $\mathbf{C}^4$

$$\xi(z)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(z\cdot e^{it})= z\cdot i\cdot e^{it}\,|_{t=0}=i\cdot z=i\left(z^1,z^2,z^3,z^4\right).$$

Контактная форма определяется как $\eta(X)=g_0(\xi,X)$ для всех векторных полей X на сфере S^7, где g_0 – риманова метрика на сфере S^7.

Вычислим риманову метрику g_0 в комплексных координатах:

$$g_0(\xi,X)=(\xi,X)|_{\mathrm{C}^4}\ ,\ X=(X^1,X^2,X^3,X^4)\,;$$

$$(\xi,X)=(i\cdot z,X)=i(z^1\overline{X}^1+z^2\overline{X}^2+z^3\overline{X}^3+z^4\overline{X}^4)\,,$$

где $d\overline{z}^i(X)=\overline{X}^i$, $i=\overline{1,4}$. Получим выражение формы η в комплексных координатах пространства $\mathbf{C}^4$:

$$\eta=iz^1d\overline{z}^1+iz^2d\overline{z}^2+iz^3d\overline{z}^3+iz^4d\overline{z}^4\ . \qquad (2)$$

С учётом в данном выражении для формы η соотношения $z^1\overline{z^1}+z^2\overline{z^2}+z^3\overline{z^3}+z^4\overline{z^4}=1$ на координаты (z^1,z^2,z^3,z^4) получим ограничение формы η в пространстве $\mathbf{C}^4$ на сферу S^7.

Проверим условие $\eta\wedge(d\eta)^3\ne 0$ на S^7. Для этого найдем это выражение в $\mathbf{C}^4$, а затем ограничим его на S^7.

$$\eta\wedge(d\eta)^3=6z^4\wedge dz^1\wedge d\overline{z}^1\wedge dz^2\wedge d\overline{z}^2\wedge dz^3\wedge d\overline{z}^3\wedge d\overline{z}^4+$$

$$+6z^3\wedge dz^1\wedge d\overline{z}^1\wedge dz^2\wedge d\overline{z}^2\wedge dz^4\wedge d\overline{z}^4\wedge d\overline{z}^3+$$

$$+6z^2\wedge dz^1\wedge d\overline{z}^1\wedge dz^3\wedge d\overline{z}^3\wedge dz^4\wedge d\overline{z}^4\wedge d\overline{z}^2+$$

$$+6z^1\wedge dz^2\wedge d\overline{z}^2\wedge dz^3\wedge d\overline{z}^3\wedge dz^4\wedge d\overline{z}^4\wedge d\overline{z}^1=6i_z\mu,$$

где $\mu=dz^1\wedge d\overline{z}^1\wedge dz^2\wedge d\overline{z}^2\wedge dz^3\wedge d\overline{z}^3\wedge dz^4\wedge d\overline{z}^4$. Нетрудно заметить, что вычисленное выражение $\eta\wedge(d\eta)^3\neq 0$ в ограничении на сферу S^7. Следовательно, так определённая 1-форма $\eta(X)=g_0(\xi,X)$ является контактной формой.

Определим по контактной форме η контактное распределение E: $E=\{X\in TS^7:\eta(X)=0\}$. Очевидно $X\perp r$, где r – радиус сферы, $r=(z^1,z^2,z^3,z^4)$. Контактное распределение задается уравнениями:

$$\begin{cases} i(z^1\overline{X}^1+z^2\overline{X}^2+z^3\overline{X}^3+z^4\overline{X}^4)=0,\\ z^1X^1+z^2X^2+z^3X^3+z^4X^4=0,\end{cases}$$

где $X\in E$, $X=(X^1,...,X^4)$ – искомые координаты.

Аффинор φ определяется из соотношения $d\eta(X,Y)=g_0(X,\varphi Y)$ и обладает свойствами $\varphi^2|_E=-I$ и $\varphi(\xi)=0$.

Таким образом, определены все характеристики контактной структуры на сфере S^7: η, $d\eta$, ξ, E, φ.

3. Связь между контактной структурой на сфере S^7 и почти комплексной структурой в пространстве $\mathbf{CP}^3$

При отображении $S^7\to\mathbf{CP}^3$ контактные метрические структуры и почти комплексные структуры соответствуют друг другу, то есть данное отображение аффинор φ переводит в почти комплексную структуру J.

Рассмотрим проекцию $\pi:\mathbf{C}^4\backslash\{0\}\to\mathbf{CP}^3$. Используя естественную комплексную координатную систему (z^1,z^2,z^3,z^4) в пространстве $\mathbf{C}^4\backslash\{0\}$, имеем фундаментальную форму Φ в пространстве $\mathbf{CP}^3$, а также метрику Фубини – Штуди $g(X,Y)=\Phi(JX,Y)$ для любых векторных полей X, Y.

Докажем, что $d\eta=\pi^*\Phi$. Рассмотрим в пространстве $\mathbf{C}^4\backslash\{0\}$ форму

$$\tilde{\Phi}=-4i\partial\overline{\partial}\ln\left(\sum_{k=1}^4 z^k\overline{z}^k\right)=-4i\partial\left(\frac{\sum_{k=1}^4 z^k d\overline{z}^k}{\sum_{k=1}^4 z^k\overline{z}^k}\right)=$$

$$=-4i\left(\frac{\left(\sum_{k=1}^4 z^k\overline{z}^k\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^4 dz^k d\overline{z}^k\right)-\left(\sum_{k=1}^4 \overline{z}^k dz^k\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^4 z^k d\overline{z}^k\right)}{\left(\sum_{k=1}^4 z^k\overline{z}^k\right)^2}\right).$$

Форма $\tilde{\Phi}$ проектируется на форму Φ, то есть $\pi^*\Phi = \tilde{\Phi}$. Рассмотрим ограничение формы $\tilde{\Phi}$ в пространстве $\mathbf{C}^4 \backslash \{0\}$ на сферу S^7:

$$S^7 = \{ (z^1, z^2, z^3, z^4) \in \mathbf{C}^4 \colon |z^1|^2 + |z^2|^2 + |z^3|^2 + |z^4|^2 = 1 \},$$

$$z \in S^7 \colon z^1\overline{z}^1 + z^2\overline{z}^2 + z^3\overline{z}^3 + z^4\overline{z}^4 = 1.$$

Продифференцировав равенство

$$z^1\overline{z}^1 + z^2\overline{z}^2 + z^3\overline{z}^3 + z^4\overline{z}^4 = 1,$$

получим

$$\sum_{k=1}^{4} \overline{z}^k dz^k + \sum_{k=1}^{4} z^k d\overline{z}^k = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{4} \overline{z}^k dz^k = -\sum_{k=1}^{4} z^k d\overline{z}^k .$$

$$\tilde{\Phi}|_{S^7} = -4i\left(\left(\sum_{k=1}^{4} dz^k \wedge d\overline{z}^k\right) + \left(\sum_{k=1}^{4} z^k d\overline{z}^k\right) \wedge \left(\sum_{k=1}^{4} z^k d\overline{z}^k\right)\right) = -4i\sum_{k=1}^{4} dz^k \wedge d\overline{z}^k .$$

Рассмотрим глобальную дифференциальную 1-форму η (2), определенную в разделе 2,

$$\eta = iz^1 d\overline{z^1} + iz^2 d\overline{z^2} + iz^3 d\overline{z^3} + iz^4 d\overline{z^4} = i\sum_{k=1}^{4} z^k d\overline{z^k} .$$

Вычислим внешний дифференциал формы η:

$$d\eta = i\sum_{k=1}^{4} dz^k \wedge d\overline{z^k} .$$

Сравнивая выражения формы $\tilde{\Phi}|_{S^7}$ и дифференциала $d\eta$, получим $d\eta = \tilde{\Phi}|_{S^7}$ или $d\eta = \pi^*\Phi|_{S^7}$ с точностью до коэффициента из **C**.

4. Метрика Фубини – Штуди

Пусть $\mathbf{CP}^3$ есть 3-мерное комплексное проективное пространство с однородными координатами $z^0, z^1, \ldots, z^3$. Пусть U_0 – открытое подмножество в пространстве $\mathbf{CP}^3$, определенное условием $z^0 \neq 0$. Пусть $w^k = \dfrac{z^k}{z^0}$, $k = 0,\ldots,3$. Метрика Фубини – Штуди в пространстве $\mathbf{CP}^3$ определяется (в координатной плоскости U_0) следующим образом:

$$ds^2 = 4\frac{(1+\sum_{i=1}^{3} w^i\overline{w}^i)(\sum_{i=1}^{3} dw^i \cdot d\overline{w}^i) - (\sum_{i=1}^{3} \overline{w}^i dw^i)\cdot(\sum_{i=1}^{3} w^i d\overline{w}^i)}{(1+\sum_{i=1}^{3} w^i\overline{w}^i)}.$$

Данная метрика в пространстве $\mathbf{CP}^3$ кэлерова.

Определим метрику в пространстве $\mathbf{CP}^3$ в комплексных локальных координатах w^1, w^2, w^3.

$$ds^2 = 4\frac{(1+\sum_{i=1}^{3} w^i \overline{w}^i)(\sum_{i=1}^{3} dw^i \cdot d\overline{w}^i) - (\sum_{i=1}^{3} \overline{w}^i dw^i)\cdot(\sum_{i=1}^{3} w^i d\overline{w}^i)}{(1+\sum_{i=1}^{3} w^i \overline{w}^i)} =$$

$$= \frac{4}{\left(1+\|w\|^2\right)^2}\left[\left(1+\sum_{i=1}^{3} w^i \cdot \overline{w}^i\right)\left(dw^1\cdot d\overline{w}^1 + dw^2\cdot d\overline{w}^2 + dw^3 \cdot d\overline{w}^3\right) -\right.$$

$$\left. -\left(\overline{w}^1\cdot dw^1 + \overline{w}^2\cdot dw^2 + \overline{w}^3\cdot dw^3\right)\left(w^1 d\overline{w}^1 + w^2\cdot d\overline{w}^2 + w^3\cdot d\overline{w}^3\right)\ \right] =$$

$$= \frac{4}{\left(1+\|w\|^2\right)^2}\left[\left(1+w^2\overline{w}^2 + w^3\overline{w}^3\right)dw^1\cdot d\overline{w}^1 + \left(1+w^1\overline{w}^1 + w^3\overline{w}^3\right)\times\right.$$

$$\times dw^2\cdot d\overline{w}^2 + \left(1+w^1\overline{w}^1 + w^2\overline{w}^2\right)dw^3\cdot d\overline{w}^3 - \overline{w}^1 w^2 dw^1\cdot d\overline{w}^2 -$$

$$\left. -\overline{w}^2 w^3 dw^2\cdot d\overline{w}^3 - \overline{w}^3 w^1 dw^3\cdot d\overline{w}^1 - \overline{w}^3 w^2 dw^3 \cdot d\overline{w}^2\ \right] =$$

$$= \frac{2}{\left(1+\|w\|^2\right)^2}\left[\left(1+w^2\overline{w}^2 + w^3\overline{w}^3\right)dw^1\otimes d\overline{w}^1 + (1+w^2\overline{w}^2 + w^3\overline{w}^3)d\overline{w}^1\otimes dw^1 +\right.$$

$$+\left(1+w^1\overline{w}^1 + w^3\overline{w}^3\right)dw^2\otimes d\overline{w}^2 + (1+w^1\overline{w}^1 + w^3\overline{w}^3)d\overline{w}^2\otimes dw^2 +$$

$$+\left(1+w^1\overline{w}^1 + w^2\overline{w}^2\right)dw^3\otimes d\overline{w}^3 + (1+w^1\overline{w}^1 + w^2\overline{w}^2)d\overline{w}^3\otimes dw^3 -$$

$$-\overline{w}^1 w^2 dw^1\otimes d\overline{w}^2 - \overline{w}^1 w^2 d\overline{w}^2\otimes dw^1 - \overline{w}^1 w^3 dw^1\otimes d\overline{w}^3 -$$

$$-\overline{w}^1 w^3 d\overline{w}^3\otimes dw^1 - \overline{w}^2 w^1 dw^2\otimes d\overline{w}^1 - \overline{w}^2 w^1 d\overline{w}^1\otimes dw^2 -$$

$$-\overline{w}^2 w^3 dw^2\otimes d\overline{w}^3 - \overline{w}^2 w^3 d\overline{w}^3\otimes dw^2 - \overline{w}^3 w^1 dw^3\otimes d\overline{w}^1 -$$

$$\left. -\overline{w}^3 w^1 d\overline{w}^1\otimes dw^3 - \overline{w}^3 w^2 dw^3\otimes d\overline{w}^2 - \overline{w}^3 w^2 d\overline{w}^3\otimes dw^2\ \right].$$

Матрица метрики g имеет вид

$$g = m_1\begin{pmatrix} & 0 & & W^1 & -w^2\overline{w}^1 & -w^3\overline{w}^1 \\ & & & -w^1\overline{w}^2 & W^2 & -w^3\overline{w}^2 \\ & & & -w^1\overline{w}^3 & -w^2\overline{w}^3 & W^3 \\ W^1 & -w^1\overline{w}^2 & -w^1\overline{w}^3 & & & \\ -w^2\overline{w}^1 & W^2 & -w^2\overline{w}^3 & & 0 & \\ -w^3\overline{w}^1 & -w^3\overline{w}^2 & W^3 & & & \end{pmatrix},$$

где

$$m_1 = \frac{2}{\left(1+\|w\|^2\right)^2},\ W^1 = 1+\|w\|^2 - w^1\overline{w}^1,\ W^2 = 1+\|w\|^2 - w^2\overline{w}^2,\ W^3 = 1+\|w\|^2 - w^3\overline{w}^3.$$

Рассмотрим правый верхний блок и приведём его к более удобному виду:

$$\frac{2}{\left(1+\|w\|^2\right)^2}\begin{pmatrix} W^1 & -w^2\overline{w}^1 & -w^3\overline{w}^1 \\ -w^1\overline{w}^2 & W^2 & -w^3\overline{w}^2 \\ -w^1\overline{w}^3 & -w^2\overline{w}^3 & W^3 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{2}{\left(1+\|w\|^2\right)^2}\left(\left(1+\|w\|^2\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} w^1\overline{w}^1 & w^2\overline{w}^1 & w^3\overline{w}^1 \\ w^1\overline{w}^2 & w^2\overline{w}^2 & w^3\overline{w}^2 \\ w^1\overline{w}^3 & w^2\overline{w}^3 & w^3\overline{w}^3 \end{pmatrix}\right)=$$

$$=\frac{2}{\left(1+\|w\|^2\right)^2}\left(\left(1+\|w\|^2\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \overline{w}^1 \\ \overline{w}^2 \\ \overline{w}^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w^1 & w^2 & w^3 \end{pmatrix}\right)=$$

$$=\frac{2}{\left(1+\|w\|^2\right)^2}\left(\left(1+\|w\|^2\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\overline{w}w^t\right).$$

Тогда метрика примет вид

$$g=\frac{2}{\left(1+\|w\|^2\right)^2}\left(\left(1+\|w\|^2\right)\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & \overline{w}w^t \\ w\overline{w}^t & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Обозначим компоненты:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},\; B=\begin{pmatrix} 0 & b_{\alpha\overline{\beta}} \\ \left(b_{\alpha\overline{\beta}}\right)^t & 0 \end{pmatrix},$$

где
$$(b_{\alpha\overline{\beta}})=\begin{pmatrix} w^1\overline{w}^1 & w^2\overline{w}^1 & w^3\overline{w}^1 \\ w^1\overline{w}^2 & w^2\overline{w}^2 & w^3\overline{w}^2 \\ w^1\overline{w}^3 & w^2\overline{w}^3 & w^3\overline{w}^3 \end{pmatrix}.$$

Ввиду данных обозначений метрика g может быть представлена матрицей:

$$g=\frac{2}{\left(1+\|w\|^2\right)^2}\left(\left(1+\|w\|^2\right)A-B\right). \qquad (3)$$

Фундаментальная 2-форма эрмитовой метрики g задается:

$$\Phi=-2i\sum_{\alpha,\beta}g_{\alpha\overline{\beta}}dw^\alpha\wedge d\overline{w}^\beta,$$

где $g_{\alpha\overline{\beta}}$ – элементы матрицы эрмитовой формы

$$ds^2=2\sum_{\alpha,\beta}g_{\alpha\overline{\beta}}dz^\alpha\cdot d\overline{z}^\beta.$$

5. Ассоциированные контактные метрические структуры на S^7 и ассоциированные почти комплексные структуры на CP³

Из определения контактной метрической структуры следует, что $d\eta(X,Y)=g(X,\varphi Y)$. Если зафиксировать η, $d\eta$, ξ, то по аффинору φ можно определить метрику g. То есть за счет вариаций аффинора φ можем построить новые примеры ассоциированных контактных метрических структур. Так как при отображении $S^7\to\mathbf{CP}^3$ существует связь между контактной метрической структурой и почти комплексной структурой, аффинор φ соответствует почти комплексной структуре J, то необходимо построить новые примеры ассоциированных почти комплексных структур в пространстве $\mathbf{CP}^3$.

Большой класс почти комплексных структур образуют ассоциированные почти комплексные структуры. Почти комплексная структура J называется положительной ассоциированной с формой Φ, если для любых векторных полей X, Y выполняются условия: $\Phi(JX,JY)=\Phi(X,Y)$ и $\Phi(X,JX)>0$, если $X\neq 0$ [3].

Построим в пространстве $\mathbf{CP}^3$ ассоциированную почти комплексную структуру J, отличную от стандартной почти комплексной структуры J_0. Положительную ассоциированную почти комплексную структуру можно получить в следующем виде:

$$J=J_0(1+R)(1-R)^{-1},$$

где R – симметрический эндоморфизм $R:TCP^3\to TCP^3$, антикоммутирующий с почти комплексной структурой J_0. При этом $R=(1-JJ_0)^{-1}(1+JJ_0)$, $J_0=\begin{pmatrix} iI & 0 \\ 0 & -iI \end{pmatrix}$.

Матрица R, антикоммутирующая с матрицей J_0, имеет вид

$$R=\begin{pmatrix} 0 & \overline{R_\alpha^{\bar\beta}} \\ R_\alpha^{\bar\beta} & 0 \end{pmatrix},\ \text{где}\ R_\alpha^{\bar\beta}=\begin{pmatrix} r_1^{\bar1} & r_2^{\bar1} & r_3^{\bar1} \\ r_1^{\bar2} & r_2^{\bar2} & r_3^{\bar2} \\ r_1^{\bar3} & r_2^{\bar3} & r_3^{\bar3} \end{pmatrix}.$$

Это легко проверить. Вычислив J_0R и RJ_0:

$$\begin{pmatrix} iI & 0 \\ 0 & -iI \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \overline{R_\alpha^{\bar\beta}} \\ R_\alpha^{\bar\beta} & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & i\overline{R_\alpha^{\bar\beta}} \\ -iR_\alpha^{\bar\beta} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \overline{R_\alpha^{\bar\beta}} \\ R_\alpha^{\bar\beta} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} iI & 0 \\ 0 & -iI \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -i\overline{R_\alpha^{\bar\beta}} \\ iR_\alpha^{\bar\beta} & 0 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 0 & i\overline{R_\alpha^{\bar\beta}} \\ -iR_\alpha^{\bar\beta} & 0 \end{pmatrix},$$

видим, что $J_0R=-RJ_0$.

Для симметричности оператора R достаточно, чтобы матрица $gR=g_{\alpha\bar\beta}R_\gamma^{\bar\beta}$ была бы симметрической. Из выражения (3) метрики g следует, что для этого матрицы AR и BR должны быть симметрическими.

Вычислим матрицу AR:

$$AR=\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & R_\alpha^{\bar\beta} \\ \overline{R_\alpha^{\bar\beta}} & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \overline{R_\alpha^{\bar\beta}} & 0 \\ 0 & R_\alpha^{\bar\beta} \end{pmatrix}.$$

Для симметричности матрицы AR достаточно взять матрицу $R_{\alpha}^{\bar\beta}$ симметрической, а именно:

$$R_{\alpha}^{\bar\beta}=\begin{pmatrix} r_1^{\bar1} & r_2^{\bar1} & r_3^{\bar1}\\ r_2^{\bar1} & r_2^{\bar2} & r_3^{\bar2}\\ r_3^{\bar1} & r_3^{\bar2} & r_3^{\bar3}\end{pmatrix}.$$

Для симметричности матрицы BR достаточно выполнения следующего равенства:

$$b_{\alpha\bar\beta}R_{\gamma}^{\bar\beta}=b_{\gamma\bar\beta}R_{\alpha}^{\bar\beta}.$$

В результате произведения матриц $b_{\alpha\bar\beta}$ и $R_{\alpha}^{\bar\beta}$, получим

$$\begin{pmatrix} w^1\bar w^1 & w^2\bar w^1 & w^3\bar w^1\\ w^1\bar w^2 & w^2\bar w^2 & w^3\bar w^2\\ w^1\bar w^3 & w^2\bar w^3 & w^3\bar w^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1^{\bar1} & r_2^{\bar1} & r_3^{\bar1}\\ r_2^{\bar1} & r_2^{\bar2} & r_3^{\bar2}\\ r_3^{\bar1} & r_3^{\bar2} & r_3^{\bar3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} wr_{11} & wr_{12} & wr_{13}\\ wr_{21} & wr_{22} & wr_{23}\\ wr_{31} & wr_{32} & wr_{33}\end{pmatrix},$$

где

$$wr_{11}=w^1\bar w^1 r_1^{\bar1}+w^2\bar w^1 r_2^{\bar1}+w^3\bar w^1 r_3^{\bar1};\; wr_{12}=w^1\bar w^1 r_2^{\bar1}+w^2\bar w^1 r_2^{\bar2}+w^3\bar w^1 r_3^{\bar2};$$

$$wr_{13}=w^1\bar w^1 r_3^{\bar1}+w^2\bar w^1 r_3^{\bar2}+w^3\bar w^1 r_3^{\bar3};\; wr_{21}=w^1\bar w^2 r_1^{\bar1}+w^2\bar w^2 r_2^{\bar1}+w^3\bar w^2 r_3^{\bar1};$$

$$wr_{22}=w^1\bar w^2 r_2^{\bar1}+w^2\bar w^2 r_2^{\bar2}+w^3\bar w^2 r_3^{\bar2};\; wr_{23}=w^1\bar w^2 r_3^{\bar1}+w^2\bar w^2 r_3^{\bar2}+w^3\bar w^2 r_3^{\bar3};$$

$$wr_{31}=w^1\bar w^3 r_1^{\bar1}+w^2\bar w^3 r_2^{\bar1}+w^3\bar w^3 r_3^{\bar1};\; wr_{32}=w^1\bar w^3 r_2^{\bar1}+w^2\bar w^3 r_2^{\bar2}+w^3\bar w^3 r_3^{\bar2};$$

$$wr_{33}=w^1\bar w^3 r_3^{\bar1}+w^2\bar w^3 r_3^{\bar2}+w^3\bar w^3 r_3^{\bar3}.$$

Учитывая равенство $b_{\alpha\bar\beta}R_{\gamma}^{\bar\beta}=b_{\gamma\bar\beta}R_{\alpha}^{\bar\beta}$, имеем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} w^1\bar w^1 r_2^{\bar1}+w^2\bar w^1 r_2^{\bar2}+w^3\bar w^1 r_3^{\bar2}=w^1\bar w^2 r_1^{\bar1}+w^2\bar w^2 r_2^{\bar1}+w^3\bar w^2 r_3^{\bar1},\\ w^1\bar w^1 r_3^{\bar1}+w^2\bar w^1 r_3^{\bar2}+w^3\bar w^1 r_3^{\bar3}=w^1\bar w^3 r_1^{\bar1}+w^2\bar w^3 r_2^{\bar1}+w^3\bar w^3 r_3^{\bar1},\\ w^1\bar w^2 r_3^{\bar1}+w^2\bar w^2 r_3^{\bar2}+w^3\bar w^2 r_3^{\bar3}=w^1\bar w^3 r_2^{\bar1}+w^2\bar w^3 r_2^{\bar2}+w^3\bar w^3 r_3^{\bar2}.\end{cases}\tag{4}$$

Решая данную систему, получим общее решение:

$$r_2^{\bar1}=\frac{\bar w^2}{\bar w^3}r_3^{\bar1}-\frac{w^2}{w^1}r_2^{\bar2}+\frac{\left(w^2\bar w^2-w^3\bar w^3\right)}{w^1\bar w^3}r_3^{\bar2}+\frac{w^3\bar w^2}{w^1\bar w^3}r_3^{\bar3};$$

$$r_1^{\bar1}=-\frac{\left(w^2\bar w^2-w^1\bar w^1+w^3\bar w^3\right)}{w^1\bar w^3}r_3^{\bar1}+\frac{\left(w^2\right)^2}{\left(w^1\right)^2}r_2^{\bar2}-\frac{w^3\left(w^2\bar w^2-w^1\bar w^1\right)}{\left(w^1\right)^2\bar w^3}r_3^{\bar3},$$

где комплексные числа $r_3^{\bar1}$, $r_2^{\bar2}$, $r_3^{\bar2}$, $r_3^{\bar3}$ – любые.

Можно найти несколько частных решений системы (4) и соответствующие им ассоциированные почти комплексные структуры.

Случай 1. Пусть $r_3^{\overline{1}}=0$, $r_3^{\overline{2}}=0$, $r_3^{\overline{3}}=w^1w^2\overline{w}^3$, $r_2^{\overline{2}}=w^1\overline{w}^2w^3$, тогда $r_2^{\overline{1}}=0$, $r_1^{\overline{1}}=\overline{w}^1w^2w^3$.

Следовательно,

$$R_\alpha^{\overline{\beta}}=\begin{pmatrix}\overline{w}^1w^2w^3 & 0 & 0\\ 0 & w^1\overline{w}^2w^3 & 0\\ 0 & 0 & w^1w^2\overline{w}^3\end{pmatrix}.$$

Эндоморфизм $R{:}\mathrm{TCP}^3\to TCP^3$ определен только в локальной карте U_0. Продолжим его на всё пространство $\mathbf{CP^3}$ нулем, т.е. $R|_{TCP^3\backslash(\pi')^{-1}(U_0)}=0$, где π': $\mathrm{TCP}^3\to CP^3$ – естественная проекция. Для этого умножим матрицу R на гладкую функцию $\frac{1}{f(w)}$, обращающуюся в нуль на бесконечности быстрее, чем возрастают выражения: $\overline{w}^1w^2w^3$, $w^1\overline{w}^2w^3$ или $w^1w^2\overline{w}^3$. В качестве функции $f(w)$, например, можно взять функцию вида $f(w)=(1+\|w\|)^4$.

Окончательно имеем вид эндоморфизма

$$R=\frac{1}{f(w)}\begin{pmatrix}0 & \overline{R_\alpha^{\overline{\beta}}}\\ R_\alpha^{\overline{\beta}} & 0\end{pmatrix}.$$

Определенная данным эндоморфизмом R почти комплексная структура $J=J_0(1+R)(1-R)^{-1}$ совпадает со стандартной структурой J_0 в «бесконечной точке» пространства $\mathbf{CP^3}$, $J(\infty)=J_0(\infty)$.

Проведем простые вычисления для нахождения $(1+R)(1-R)^{-1}$:

$$(1-R)(1+R)=(1-R)(1+R);$$

$$(1-R)^{-1}(1-R)(1+R)=(1+R);$$

$$(1-R)^{-1}=(1+R)(1-R^2)^{-1}.$$

$$R^2=\frac{1}{(f(w))^2}\begin{pmatrix}R_{\overline{\gamma}}^{\beta}R_\alpha^{\overline{\gamma}} & 0\\ 0 & R_\gamma^{\overline{\beta}}R_{\overline{\alpha}}^{\gamma}\end{pmatrix}=\frac{1}{((f(w))^2}|w^1w^2w^3|^2\,I;$$

$$1-R^2=\left(1-\frac{1}{((f(w))^2}|\mathrm{w}^1\mathrm{w}^2\mathrm{w}^3|^2\right)I>0;$$

$$(1-R)^{-1}=(1+R)(1-R^2)^{-1}=\frac{(f(w))^2}{((f(w))^2-|w^1w^2w^3|^2}(1+R);$$

$$(1+R)(1-R^2)^{-1}=\frac{(f(w))^2}{((f(w))^2-|w^1w^2w^3|^2}(1+2R+R^2);$$

$$(1+R)(1-R)^{-1}=I+2R+2\frac{|w^1w^2w^3|^2}{((f(w))^2-|w^1w^2w^3|^2}(I+R).$$

Окончательно получим

$$J = J_0 + 2J_0\left(\frac{((f(w))^2}{((f(w))^2 - |w^1w^2w^3|^2}R + \frac{|w^1w^2w^3|^2}{((f(w))^2 - |w^1w^2w^3|^2}I\right).$$

Нетрудно проверить, что $J^2 = -1$. При вычислении используем равенство $RJ_0 = -J_0R$.

Найдем еще три частных решения системы (4).

Случай 2. Пусть $r_3^{\bar{1}} = -w^1w^2\bar{w}^3$, $r_2^{\bar{2}} = 0$, $r_2^{\bar{3}} = (w^1)^2\bar{w}^3$, $r_3^{\bar{3}} = (w^1)^2\bar{w}^3$, тогда $r_1^{\bar{2}} = w^1w^3(\bar{w}^2 - \bar{w}^3)$, $r_1^{\bar{1}} = w^3(2w^2\bar{w}^3 - w^2\bar{w}^2 + w^1\bar{w}^1)$.

Следовательно,

$$R_\alpha^{\bar{\beta}} = \begin{pmatrix} w^3(2w^2\bar{w}^3 + w^1\bar{w}^1 - w^2\bar{w}^2) & w^1w^3(\bar{w}^2 - \bar{w}^3) & -w^1w^2\bar{w}^3 \\ w^1w^3(\bar{w}^2 - \bar{w}^3) & 0 & (w^1)^2\bar{w}^3 \\ -w^1w^2\bar{w}^3 & (w^1)^2\bar{w}^3 & (w^1)^2\bar{w}^3 \end{pmatrix}.$$

Эндоморфизм R:TCP$^3 \to TCP^3$ определен только в локальной карте U_0. Продолжим его на всё пространство **CP^3** нулем. Для этого умножим матрицу R на гладкую функцию $1/f(w)$, обращающуюся в нуль на бесконечности быстрее, чем возрастают элементы матрицы $R_\alpha^{\bar{\beta}}$: $w^3(2w^2\bar{w}^3 + w^1\bar{w}^1 - w^2\bar{w}^2)$, $w^1w^3(\bar{w}^2 - \bar{w}^3)$, $-w^1w^2\bar{w}^3$, $(w^1)^2\bar{w}^3$. В качестве функции $f(w)$, например, можно взять функцию вида $f(w) = (1 + \|w\|)^4$.

Случай 3. Пусть $r_3^{\bar{1}} = 0$, $r_2^{\bar{2}} = 0$, $r_3^{\bar{3}} = 0$, $r_3^{\bar{2}} = (w^1)^2\bar{w}^3$, тогда $r_2^{\bar{1}} = w^1(w^2\bar{w}^2 - w^3\bar{w}^3)$, $r_1^{\bar{1}} = w^2(w^1\bar{w}^1 - w^2\bar{w}^2 + w^3\bar{w}^3)$.

Следовательно,

$$R_\alpha^{\bar{\beta}} = \begin{pmatrix} w^2(w^1\bar{w}^1 - w^2\bar{w}^2 + w^3\bar{w}^3) & w^1(w^2\bar{w}^2 - w^3\bar{w}^3) & 0 \\ w^1(w^2\bar{w}^2 - w^3\bar{w}^3) & 0 & (w^1)^2\bar{w}^3 \\ 0 & (w^1)^2\bar{w}^3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эндоморфизм R:TCP$^3 \to TCP^3$ определен только в локальной карте U_0. Продолжим его на всё пространство **CP^3** нулем. Для этого умножим R на гладкую функцию $1/f(w)$, обращающуюся в нуль на бесконечности быстрее, чем возрастают элементы матрицы $R_\alpha^{\bar{\beta}}$. В качестве функции $f(w)$, например, можно взять функцию вида $f(w) = (1 + \|w\|)^4$.

Случай 4. Пусть $r_3^{\bar{1}} = 0$, $r_2^{\bar{2}} = 0$, $r_3^{\bar{2}} = 0$, $r_3^{\bar{3}} = (w^1)^2\bar{w}^3$, тогда $r_1^{\bar{1}} = w^3(w^1\bar{w}^1 - w^2\bar{w}^2)$, $r_2^{\bar{1}} = w^1\bar{w}^2w^3$.

Следовательно,

$$R_\alpha^{\bar{\beta}} = \begin{pmatrix} w^3(w^1\bar{w}^1 - w^2\bar{w}^2) & w^1\bar{w}^2w^3 & 0 \\ w^1\bar{w}^2w^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (w^1)^2\bar{w}^3 \end{pmatrix}.$$

Матрица эндоморфизма R имеет вид

$$R = \frac{1}{f(w)}\begin{pmatrix} 0 & \overline{R_{\alpha}^{\bar\beta}} \\ R_{\alpha}^{\bar\beta} & 0 \end{pmatrix}.$$

В качестве функции $f(w)$, например, можно взять функцию вида $f(w) = (1+\|w\|)^4$.

Более подробно рассмотрим случай 1. Для эндоморфизма R, соответствующего первому случаю, найдем соответствующую почти комплексную структуру J. В качестве функции $f(w)$ возьмем следующую функцию: $f(w) = (1+|w|)^4$. Тогда матрица почти комплексной структуры J имеет вид

$$J = f_1(w^1,w^2,w^3)\begin{pmatrix} iI & if_2(w^1,w^2,w^3)\overline{R_{\alpha}^{\bar\beta}} \\ -if_2(w^1,w^2,w^3)R_{\alpha}^{\bar\beta} & -iI \end{pmatrix},$$

где

$$f_1(w^1,w^2,w^3) = \frac{(1+|w|)^8 + |w^1w^2w^3|^2}{(1+|w|)^8 - |w^1w^2w^3|^2},$$

$$f_2(w^1,w^2,w^3) = \frac{2(1+|w|)^4}{(1+|w|)^8 + |w^1w^2w^3|^2}.$$

Проверим найденную почти контактную структуру на интегрируемость. Найдем выражение для матрицы почти комплексной структуры J в действительных координатах пространства $\mathbf{R^8}$.

Имеют место следующие соответствия:

$$f_1(w^1,w^2,w^3) \to \mathrm{f}_1(x^1,y^1,x^2,y^2,x^3,y^3),$$

$$f_2(w^1,w^2,w^3) \to \mathrm{f}_2(x^1,y^1,x^2,y^2,x^3,y^3),$$

$$(1+|w|)^8 = \left(1+\sqrt{(x^1)^2+(y^1)^2+(x^2)^2+(y^2)^2+(x^3)^2+(y^3)^2}\right)^4,$$

$$|w^1w^2w^3|^2 = (x^1x^2x^3 - x^3y^1y^2 - x^1y^2y^3 - x^2y^1y^3)^2 +$$

$$+(x^1x^3y^2 + y^1x^2x^3 + x^1x^2y^3 - y^1y^2y^3)^2.$$

Таким образом, в действительных координатах матрица почти комплексной метрической структуры J имеет следующий вид:

$$J = f_1\begin{pmatrix} if_2\left(\overline{R_{\alpha}^{\bar\beta}} - R_{\alpha}^{\bar\beta}\right) & -2I + f_2\left(R_{\alpha}^{\bar\beta} + \overline{R_{\alpha}^{\bar\beta}}\right) \\ -2I - f_2\left(R_{\alpha}^{\bar\beta} + \overline{R_{\alpha}^{\bar\beta}}\right) & if_2\left(\overline{R_{\alpha}^{\bar\beta}} - R_{\alpha}^{\bar\beta}\right) \end{pmatrix},$$

где

$$if_2(\overline{R_{\alpha}^{\bar\beta}} - R_{\alpha}^{\bar\beta}) = 2f_2\begin{pmatrix} \mathrm{Im}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Im}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Im}_3 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{Im}_1 = x^1x^3y^2 - x^2x^3y^1 + x^1x^2y^3 + y^1y^2y^3,$$

$$\mathrm{Im}_2 = x^2x^3y^1 - x^1x^3y^2 + x^1x^2y^3 + y^1y^2y^3,$$

$$\mathrm{Im}_3 = x^1x^3y^2 + x^2x^3y^1 - x^1x^2y^3 + y^1y^2y^3,$$

$$-2I \mp f_2(\overline{R^{\overline{\beta}}_{\alpha} + R^{\overline{\beta}}_{\alpha}}) = -2f_2\begin{pmatrix} 1 \pm f_2\,\mathrm{Re}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \pm f_2\,\mathrm{Re}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \pm f_2\,\mathrm{Re}_3 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{Re}_1 = x^1x^2x^3 + x^3y^1y^2 - x^1y^2y^3 + x^2y^1y^3,$$

$$\mathrm{Re}_2 = x^1x^2x^3 + x^3y^1y^2 - x^2y^1y^3 + x^1y^2y^3,$$

$$\mathrm{Re}_3 = x^1x^2x^3 - x^3y^1y^2 + x^1y^2y^3 + x^2y^1y^3.$$

Вычисляя тензор Нейенхейса N для почти комплексной структуры J с помощью системы аналитических вычислений *Maple*, получим $N \neq 0$ (108 ненулевых компонент). Следовательно, построенная структура J не интегрируема.

Полученная структура позволяет получить новые классы ассоциированных контактных метрических структур (η, ξ, φ, g).

Вычислим ассоциированную метрику g^J в матричном виде. Согласно равенству $g(X,Y) = \Phi(JX,Y)$, имеем

$$\Phi_0 = -g_0 J_0.$$

Следовательно, форма Φ_0 имеет матрицу вида

$$\Phi_0 = -\begin{pmatrix} 0 & g_{\alpha\overline{\beta}} \\ \overline{g_{\alpha\overline{\beta}}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} iI & 0 \\ 0 & -iI \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ig_{\alpha\overline{\beta}} \\ -i\overline{g_{\alpha\overline{\beta}}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Воспользовавшись полученным выражением, имеем

$$g^J = \Phi_0 J = f_1(w^1,w^2,w^3)\begin{pmatrix} 0 & ig_{\alpha\overline{\beta}} \\ -i\overline{g_{\alpha\overline{\beta}}} & 0 \end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} iI & if_2(w^1,w^2,w^3)\overline{R^{\overline{\beta}}_{\gamma}} \\ -if_2(w^1,w^2,w^3)R^{\overline{\beta}}_{\gamma} & -iI \end{pmatrix} =$$

$$= f_1(w^1,w^2,w^3)\begin{pmatrix} f_2(w^1,w^2,w^3)g_{\alpha\overline{\beta}}R^{\overline{\beta}}_{\gamma} & g_{\alpha\overline{\beta}}I \\ \overline{g_{\alpha\overline{\beta}}}I & f_2(w^1,w^2,w^3)\overline{g_{\alpha\overline{\beta}}}\,\overline{R^{\overline{\beta}}_{\gamma}} \end{pmatrix},$$

где

$$g_{\alpha\overline{\beta}}R^{\overline{\beta}}_{\gamma} = m_1\begin{pmatrix} W^1 & -w^2\overline{w}^1 & -w^3\overline{w}^1 \\ -w^1\overline{w}^2 & W^2 & -w^3\overline{w}^2 \\ -w^1\overline{w}^3 & -w^2\overline{w}^3 & W^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{w}^1w^2w^3 & 0 & 0 \\ 0 & w^1\overline{w}^2w^3 & 0 \\ 0 & 0 & w^1w^2\overline{w}^3 \end{pmatrix} =$$

$$= m_1\begin{pmatrix} W^1\overline{w}^1w^2w^3 & -w^1\overline{w}^1w^2\overline{w}^2w^3 & -w^1\overline{w}^1w^2w^3\overline{w}^3 \\ -w^1\overline{w}^1w^2\overline{w}^2w^3 & W^2w^1\overline{w}^2w^3 & -w^1w^2\overline{w}^2w^3\overline{w}^3 \\ -w^1\overline{w}^1w^2w^3\overline{w}^3 & -w^1w^2\overline{w}^2w^3\overline{w}^3 & W^3w^1w^2\overline{w}^3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица ассоциированной метрики g^J имеет следующий вид:

$$g^J = \begin{pmatrix} g_{\lambda\mu} & g_{\lambda\bar{\mu}} \\ g_{\bar{\lambda}\mu} & g_{\bar{\lambda}\bar{\mu}} \end{pmatrix},$$

где $g_{\bar{\lambda}\mu} = \overline{g_{\lambda\bar{\mu}}}$ и $g_{\bar{\lambda}\bar{\mu}} = \overline{g_{\lambda\mu}}$,

$$g_{\lambda\mu} = m_1 f_1 f_2 \begin{pmatrix} W^1\bar{w}^1 w^2 w^3 & -w^1\bar{w}^1 w^2 \bar{w}^2 w^3 & -w^1\bar{w}^1 w^2 w^3 \bar{w}^3 \\ -w^1\bar{w}^1 w^2 \bar{w}^2 w^3 & W^2 w^1 \bar{w}^2 w^3 & -w^1 w^2 \bar{w}^2 w^3 \bar{w}^3 \\ -w^1\bar{w}^1 w^2 w^3 \bar{w}^3 & -w^1 w^2 \bar{w}^2 w^3 \bar{w}^3 & W^3 w^1 w^2 \bar{w}^3 \end{pmatrix},$$

$$g_{\lambda\bar{\mu}} = m_1 f_1 \begin{pmatrix} W^1 & -w^2\bar{w}^1 & -w^3\bar{w}^1 \\ -w^1\bar{w}^2 & W^2 & -w^3\bar{w}^2 \\ -w^1\bar{w}^3 & -w^2\bar{w}^3 & W^3 \end{pmatrix},$$

$$m_1 = \frac{2}{\left(1+\|w\|^2\right)^2}, \; W^1 = 1+\|w\|^2 - w^1\bar{w}^1,$$

$$W^2 = 1+\|w\|^2 - w^2\bar{w}^2, \; W^3 = 1+\|w\|^2 - w^3\bar{w}^3,$$

$$f_1(w^1, w^2, w^3) = \frac{(1+|w|)^8 + |w^1 w^2 w^3|^2}{(1+|w|)^8 - |w^1 w^2 w^3|^2},$$

$$f_2(w^1, w^2, w^3) = \frac{2(1+|w|)^4}{(1+|w|)^8 + |w^1 w^2 w^3|^2}.$$

Аналогичным образом были рассмотрены случаи 2–4.

Таким образом, построены новые примеры ассоциированных контактных метрических структур (η, ξ, φ, g^J) на 7-мерной единичной сфере S^7. Кроме того, найденное семейство ассоциированных метрик g^J соответствует неинтегрируемому семейству ассоциированных почти комплексных структур J в 3-мерном комплексном проективном пространстве $\mathbf{CP}^3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Blair D.E.* Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds // Progress in Mathematics. V. 203. Birkhäuser Boston, 2002. 304 p.
2. *Славолюбова Я.В.* Контактные метрические структуры на нечетномерных единичных сферах // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 6(32). С. 46–54.
3. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т.1 и Т.2. М.: Наука, 1981. 344 с.

Статья поступила 15.12.2015 г.

Slavolyubova Ya.V. (2016) ASSOCIATED CONTACT METRIC STRUCTURES ON THE 7-DIMENSIONAL UNIT SPHERE S[7]. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(42). pp. 44–57

DOI 10.17223/19988621/42/5

In this paper, we construct new examples of associated contact metric structures (η, ξ, φ, g^J) on the 7-dimensional unit sphere S^7, other than standard.

The construction involved a Hopf bundle π: $S^7\to\mathbf{CP^3}$. This projection maps affinor φ into an almost complex structure J. Therefore, it became necessary to build new examples of associated almost complex structures J in the 3-dimensional complex projective space $\mathbf{CP^3}$.

Let Φ be a nondegenerate 2-form (a Fubini–Study form). An almost complex structure J is called positively associated with the form Φ if the following conditions are satisfied for any vector fields X, Y:

$$\Phi(JX,JY)=\Phi(X,Y) \text{ and } \Phi(X,JX)>0\text{, if } X\neq 0.$$

Each positively associated almost complex structure J defines a Riemannian metric g^J by the equality $g(X,Y)=\Phi(X,JY)$; the metric is also called associated. The associated metric has the following properties:

$$g(JX,JY)=g(X,JY)\,,\ g(JX,Y)=\Phi(X,Y)\,.$$

The positively associated almost complex structure can be obtained as follows:

$$J=J_0(1+R)(1-R)^{-1},$$

where R is a symmetric endomorphism $R:TCP^3\to TCP^3$ anticommuting with the standard structure J_0,

$$J_0=\begin{pmatrix} iI & 0\\ 0 & -iI\end{pmatrix}.$$

In this paper, we have found a series of matrices R satisfying these conditions. Each matrix of this kind defines an associated almost complex structure in the space $\mathbf{CP^3}$. One of these matrices,

$$R=\frac{1}{(1+|w|)^4}\begin{pmatrix} 0 & \overline{R_\alpha^{\overline{\beta}}}\\ R_\alpha^{\overline{\beta}} & 0\end{pmatrix},$$

where the block $R_\alpha^{\overline{\beta}}=\begin{pmatrix} \overline{w}^1w^2w^3 & 0 & 0\\ 0 & w^1\overline{w}^2w^3 & 0\\ 0 & 0 & w^1w^2\overline{w}^3\end{pmatrix}$, has been considered in more detail.

For this endomorphism, the relevant almost complex structure J and a Hermite metric g^J have been found in the space $\mathbf{CP^3}$. It has been verified that the constructed structure J is not integrable.

Keywords: contact structures, associated contact metric structures, 7-dimensional sphere.

SLAVOLYUBOVA Yaroslavna Viktorovna (Candidate of Physics and Mathematics, Kemerovo Institute of Plekhanov Russian University of Economics, Kemerovo, Russian Federation)
E-mail: jar1984@mail.ru

REFERENCES

1. Blair D.E. (2002) Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds. *Progress in Mathematics*. 203. Birkhäuser Boston.
2. Slavolyubova Ya.V. (2014) Kontaktnye metricheskie struktury na nechetnomernykh edinichnykh sferakh [Contact metric structures on odd-dimensional unit spheres]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 6 (32). pp. 46–54.
3. Kobayashi Sh., Nomizu K. (1963) *Foundations of differential geometry. Vol. 1, 2.* New York, London: Interscience Publishers.