

УДК 532.135; 532.517; 678.053.3  
 DOI 10.17223/19988621/42/10

А.А. Марценко, А.В. Шваб

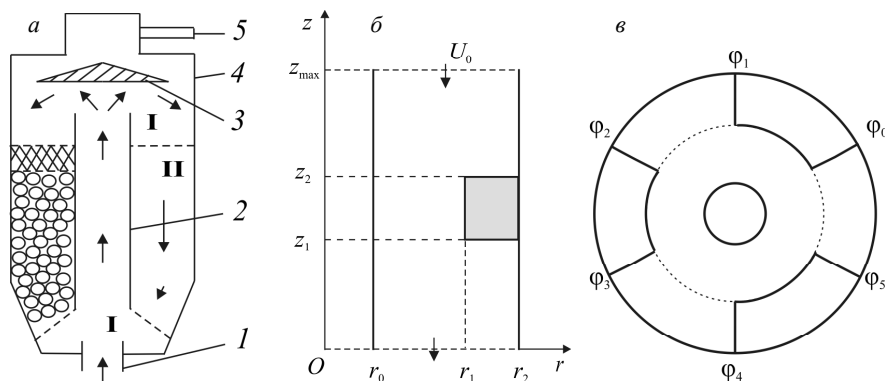
**ДИНАМИКА ПЛОТНОГО СЛОЯ ГРАНУЛИРОВАННОЙ СРЕДЫ  
 В ПНЕВМАТИЧЕСКОМ ЦИРКУЛЯЦИОННОМ АППАРАТЕ**

На основе предложенного авторами подхода проведено численное моделирование пространственного движения плотного слоя гранулированной среды в пневматическом циркуляционном аппарате. Работоспособность и достоверность предложенной математической модели подтверждается сравнением результатов расчета тестовой задачи с экспериментальными данными.

**Ключевые слова:** сыпучая среда, пневматический циркуляционный аппарат, условия скольжения.

Пневматические методы переработки порошковых и гранулированных сред нашли широкое применение при измельчении, дозировании, смешении, сушке, хранении и транспортировании зернистых материалов в современной химической технологии, порошковой металлургии, ядерном топливном цикле, фармацевтической и пищевой промышленности.

Разработанная авторами математическая модель применяется для расчета гидродинамики и процесса смешения высококонцентрированной гранулированной среды в пневматическом циркуляционном смесителе (рис. 1, а). Работа аппарата происходит следующим образом. В начальный момент времени ключевой и основной компоненты смеси находятся в несмешанном состоянии. Под действием струи газа из сопла 1 частицы из области I поднимаются вверх по вертикальной трубе 2, затем ударяются об отбойник 3 и равновероятно рассеиваются по поверхности плотного слоя (область II). В результате непрерывной циркуляции компонентов гранулированного материала в корпусе бункера 4 происходит их смешивание по



**Рис. 1.** Пневматический циркуляционный аппарат: принципиальная схема (а); геометрия цилиндрической области аппарата: б, в – вид сбоку и сверху  
**Fig. 1.** Circulating pneumatic apparatus: (а) scheme of work; (б) cylindrical area of the apparatus; (в) top and side view

всему объему аппарата. Скорость движения материала регулируется расходом газа из сопла 1. Запыленный поток газа фильтруется через фильтр 5 и возвращается в аппарат. Такой циклический метод смешения удобен тем, что процесс смешивания можно проводить до требуемой однородности смеси. Для повышения интенсивности процесса смешения компонент смеси на цилиндрической стенке аппарата могут дополнительно устанавливаться полки в виде сегментов (рис. 1, б), которые, наряду с осевой компонентой скорости, вызывают появление радиальной и окружной составляющих вектора скорости. В работе приводится исследование по влиянию этих сегментов на процесс смешения зернистой среды.

При теоретическом описании плотного слоя зернистой среды в зависимости от скорости сдвига наблюдают два различных режима течения. Известно, что при небольших скоростях сдвига инерцией частиц можно пренебречь, и возникает так называемый квазистатический режим течения, который определяется кулоновским трением и описывается в рамках теории предельного равновесия. В другом предельном случае при больших скоростях сдвига имеет место так называемый инерционный режим течения. В этом режиме, с одной стороны, гранулы находятся в постоянном контакте, а с другой стороны, между ними имеются зазоры и взаимодействие между ними обусловлено неупругими соударениями. Описание этого инерционного режима основывается на законах сохранения массы, импульса и энергии хаотического движения частиц [1]. Этот инерционный режим движения высококонцентрированной гранулированной среды относят к научному направлению, получившему название «теория быстрых движений гранулированных сред» [2]. Как показывают экспериментальные исследования [3], движение плотного слоя гранулированной среды в пневматическом циркуляционном смесителе осуществляется в инерционном режиме течения.

Анализ результатов экспериментальных и теоретических исследований «быстрых движений гранулированных сред» позволяет при постановке задачи сделать ряд упрощающих допущений. Будем считать, что хорошо сыпучая гранулированная среда состоит из твердых одинаковых шарообразных частиц, находящихся во взаимном контакте, причем объем отдельной гранулы мал по сравнению с объемом сыпучего тела и порозность плотного слоя по объему практически постоянная. Поэтому такую среду можно считать однородной и несжимаемой. Известно, также, что плотный слой гранулированной среды имеет кривую течения, отличную от ньютоновской, и относится к реостабильной дилатантной жидкости [2]. В исследовании [4] показано, что при движении плотного слоя несвязанной, хорошо сыпучей зернистой среды тензор напряжений незначительно отличается от тензора напряжений ньютоновской среды, прежде всего вследствие ее скольжения на стенках в вертикальных трубах. Таким образом, вязкость среды представим в виде суперпозиции постоянного ее значения  $\mu_0$  и нелинейного слагаемого  $\mu_1$ . В общем случае значение консистенции материала  $\mu_1$  зависит от второго инварианта тензора скоростей деформаций  $A$ , который в цилиндрической системе можно представить в виде

$$A = 2 \left( \frac{\partial U_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \left( \frac{U_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial U_z}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial U_\varphi}{\partial r} - \frac{U_\varphi}{r} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial U_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \right)^2.$$

В прикладных задачах по реологии, например [5], используется величина интенсивности тензора скоростей деформаций равная  $J = \sqrt{A}$ . На основании сказанного выше, и используя степенную модель для нелинейного слагаемого, для тензора внутренних напряжений можно записать

$$\tau_{ij} = 2(\mu_0 + \mu_1^n J^{n-1}) \dot{e}_{ij}, \quad (1)$$

где  $n$  – индекс течения,  $\dot{e}_{ij}$  – тензор скоростей деформаций.

При моделировании гидродинамики и процессов смешения в пневматическом циркуляционном аппарате будем учитывать только кольцевую цилиндрическую область с плотным слоем, так как она значительно больше по объему конической части аппарата. Безразмерную форму уравнений движения и уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат с учетом реологического уравнения (1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{\partial u_r^2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_r u_z}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1+b}{\text{Re}} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1+b}{r^2 \text{Re}} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1+b}{\text{Re}} \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = \\ & = -\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{u_r^2}{r} + \frac{u_\varphi^2}{r} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial b}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial b}{\partial z} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re} r} \left( \frac{\partial b}{\partial \varphi} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{\partial b}{\partial \varphi} u_\varphi + b \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2b}{r} \frac{\partial b}{\partial \varphi} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{b u_r}{r} \right); \\ & \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + \frac{\partial u_r u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi^2}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi u_z}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1+b}{\text{Re}} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1+b}{r^2 \text{Re}} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1+b}{\text{Re}} \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \right) = \\ & = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - 2 \frac{u_r u_\varphi}{r} + \frac{1}{\text{Re} r} \left( \frac{\partial b}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial b}{\partial r} u_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial b}{\partial \varphi} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2 \partial b}{r \partial \varphi} u_r + \frac{\partial b}{\partial z} \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{2b}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + b \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{b}{r} u_\varphi \right); \\ & \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial u_r u_z}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z^2}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1+b}{\text{Re}} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1+b}{r^2 \text{Re}} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1+b}{\text{Re}} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \\ & = -\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{u_r u_z}{r} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial b}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial b}{\partial \varphi} \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{\partial b}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{b}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ & \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{U_r}{r} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь

$$b = \frac{\mu_1^n}{\mu_0} \left( \frac{H}{U_0} \right)^{n-1} J_1^{n-1}; \quad J_1 = J \frac{H}{U_0}; \quad \text{Re} = \rho \frac{H U_0}{\mu_0}.$$

В качестве масштаба скорости и длины выбираются соответственно: среднее значение аксиальной скорости на входе в исследуемую область –  $U_0$ ; расстояние между внутренней транспортной трубой и корпусом аппарата  $H = r_2 - r_0$ .

Существенной особенностью предложенной модели движения гранулированной среды является постановка граничных условий на твердых поверхностях. На стенке обычно используют условие прилипания среды, которое, по-видимому, является причиной неудовлетворительного соответствия теоретических и экспериментальных данных. Опытные исследования движения гранулированной среды в вертикальных каналах показывают, что скорость перемещения дисперсного мате-

риала на стенке не равна нулю, т.е. имеет место некоторое скольжение среды по стенке. Это явление, по-видимому, можно объяснить преобладанием внутренних напряжений в среде по сравнению с силами трения частиц о твердую поверхность. В данной модели для учета эффекта скольжения среды на стенке принимается, что касательные напряжения на стенке пропорциональны скорости движения среды на ней с точностью до некоторой постоянной  $\beta$ , которую назовем коэффициентом скольжения. Граничные условия на твердой поверхности будут иметь вид

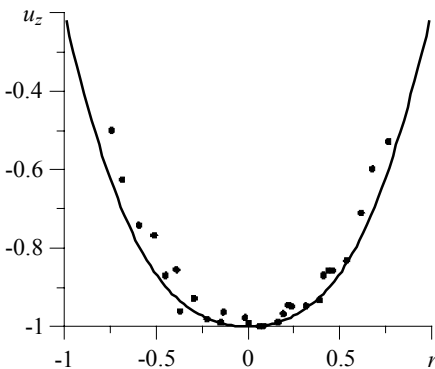
$$\left. \frac{\partial u_t}{\partial n} \right|_w = -\beta u_t|_w; \quad u_n = 0. \quad (3)$$

Здесь  $u_t$ ,  $u_n$  – касательная и нормальная составляющие вектора скорости на стенке соответственно,  $n$  – нормаль к поверхности стенки. Очевидно, что при  $\beta = 0$  имеем условие полного скольжения, а в случае  $\beta \rightarrow \infty$  – условие прилипания. Следует отметить, что коэффициент скольжения среды  $\beta$ , вероятно, зависит от многих факторов и определяется из сопоставления результатов расчета модели с опытными данными.

При решении задачи использовались следующие граничные условия. На входе задавалось постоянное безразмерное значение аксиальной скорости  $u_z = -1$ , на стенках аппарата использовались условия скольжения (3), причем на верхних поверхностях горизонтальных полок ставились условия прилипания для моделирования эффекта застойных зон. В выходном сечении ставились условия Неймана для всех составляющих вектора скорости.

Решение системы уравнений переноса импульса проводилось методом расщепления в переменных «скорость – давление». Для построения пространственного разностного шаблона использовалась разнесенная шахматная сетка с применением контрольного объема. Разностный аналог уравнений переноса импульса и концентрации решался при помощи метода факторизации. Конвективные и диффузионные слагаемые в этих уравнениях записывались с помощью известной экспоненциальной схемы.

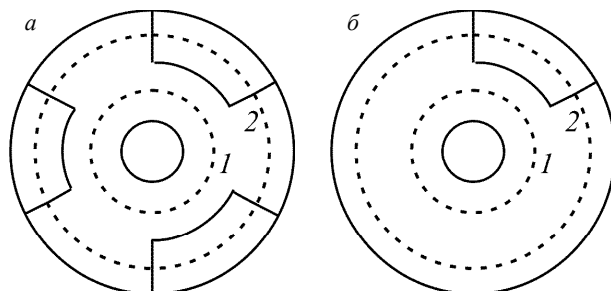
Работоспособность и адекватность предложенного подхода проверялась путем сравнения результатов расчета с экспериментальными данными [6] для установившегося течения полистироловых частиц в вертикальной цилиндрической трубе. Результат сравнения численных и опытных данных для вертикальной составляющей вектора скорости представлен на рис. 2.



**Рис. 2.** Распределение вертикальной скорости в круглой трубе при установившемся режиме течения в сравнении с опытными данными [6]. Расчет проведен при параметрах  $Re = 10$ ;  $\beta = 10$ ;  $n = 1.2$

**Fig. 2.** Comparison of the axial velocity distribution of the steady flow in a cylindrical pipe and experimental data [6]. Flow parameters are  $Re = 10$ ;  $\beta = 10$ ; and  $n = 1.2$

Из графика сравнения видно хорошее совпадение расчетного профиля скорости и обобщенных экспериментальных значений. На рис. 3 показаны схематично сечения контроля составляющих скорости при симметричной установке трех препятствий (*a*) и одного препятствия (*б*) на правой стенке в аппарате.

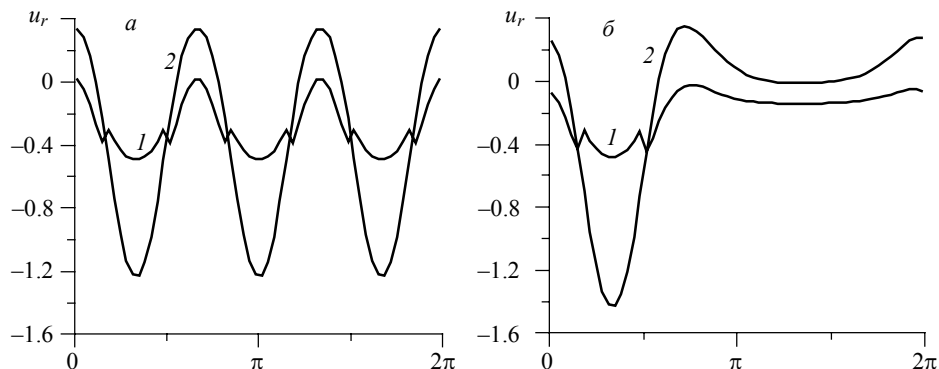


**Рис. 3.** Схема сечений по угловой координате  $\varphi$  при  $z = z_2$ : сечение  $1 - r = r_1/2$ ; сечение  $2 - r = (r_1+r_2)/2$ : *a* – три симметричных тарелки; *б* – одна тарелка

**Fig. 3.** Sketch of the sections through the angular coordinate  $\varphi$  at  $z = z_2$ : section  $1, r = r_1/2$ ; section  $2, r = (r_1+r_2)/2$ : (*a*) three symmetrical plates and (*б*) one plate

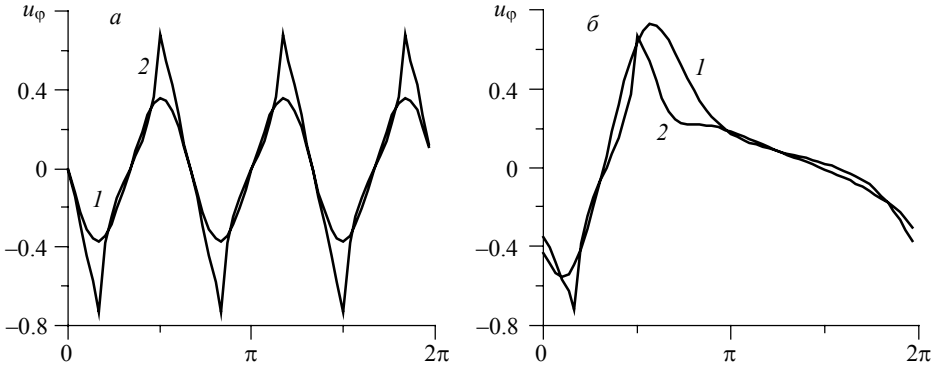
На рис. 4 – 6 показано распределение проекций вектора скорости на уровне передней по потоку стенки в зависимости от угловой координаты для аппарата с тремя полками (*a*) и одной полкой (*б*). Профили скорости в сечениях *1, 2*, приведенных на рис. 3, показывают, что происходит существенное увеличение переноса импульса в радиальном направлении к внутренней стенке аппарата. Полученные симметричные распределения профилей скорости для геометрии с тремя полками позволяют также сделать вывод о достоверности численного расчета.

На рис. 7 показаны изолинии проекций скорости в плоскости  $r - \varphi$  при  $z = z_1+z_2$  (средняя поперечная движению плоскость тарелок), полученные при расчете гидродинамики сыпучего материала с аналогичными параметрами потока.



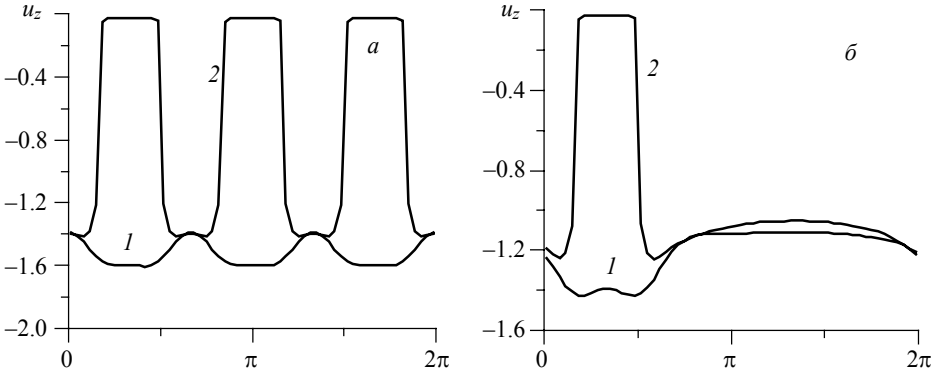
**Рис. 4.** Профиль радиальной скорости при  $Re = 20$ ;  $\beta = 10$ ;  $n = 1.2$  в сечениях *1 – 2*, показанных на рис. 3: *a* – три симметричных тарелки; *б* – одна тарелка

**Fig. 4.** Radial velocity profile at  $Re = 20$ ,  $\beta = 10$ , and  $n = 1.2$  in sections *1–2* shown in Fig. 3: (*a*) three symmetrical plates and (*б*) one plate



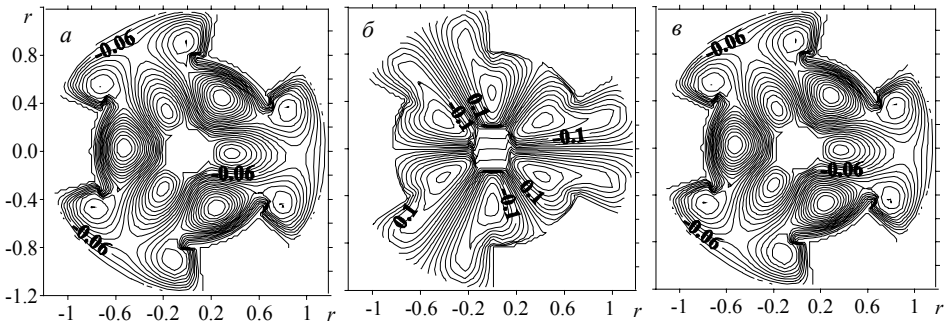
**Рис. 5.** Профиль окружной скорости при  $Re = 20$ ;  $\beta = 10$ ;  $n = 1.2$  в сечениях  $1 - 2$ , показанных на рис. 3: *a* – три симметричных тарелки; *б* – одна тарелка

**Fig. 5.** Peripheral velocity profile at  $Re = 20$ ,  $\beta = 10$ , and  $n = 1.2$  in sections  $1 - 2$  shown in Fig. 3: (a) three symmetrical plates and (b) one plate



**Рис. 6.** Профиль аксиальной скорости при  $Re = 20$ ;  $\beta = 10$ ;  $n = 1.2$  в сечениях  $1 - 2$ , показанных на рис. 3: *a* – три симметричных тарелки; *б* – одна тарелка

**Fig. 6.** Axial velocity profile at  $Re = 20$ ,  $\beta = 10$ , and  $n = 1.2$  in sections  $1 - 2$  shown in Fig. 3: (a) three symmetrical plates and (b) one plate



**Рис. 7.** Изолинии проекций вектора скорости в аппарате с тремя симметричными полками при  $Re = 20$ ;  $\beta = 10$ ;  $n = 1.2$ : *a*, *б*, *в* – проекции скорости  $u_r$ ,  $u_\phi$ ,  $u_z$  соответственно

**Fig. 7.** Contours of the velocity vector projections in the apparatus with three symmetrical plates at  $Re = 20$ ,  $\beta = 10$ , and  $n = 1.2$ : (a–в) velocity projections  $u_r$ ,  $u_\phi$ ,  $u_z$ , respectively

Из представленных графиков и изолиний проекций вектора скорости можно видеть, что при выбранной геометрии аппарата наибольшие градиенты скорости возникают вблизи боковых стенок препятствий. При установке одной тарелки возмущения скорости близки к возмущениям в потоке при установке трех препятствий.

Представленные результаты показывают адекватность предложенного метода расчета гидродинамики зернистых материалов при инерционном режиме течения. Разработанная трехмерная модель движения может использоваться для получения полей скорости в пневматических аппаратах с плотным слоем при моделировании процесса смешения и усреднения сыпучих материалов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Марценко А.А., Марценко М.С., Шваб А.В. Моделирование гидродинамики высококонцентрированной гранулированной среды в смесительном бункере // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 4 (24). С. 126–132.
2. Ширко И.В. Механика гранулированных сред: Теория быстрых движений / пер. с англ. М.: Мир, 1985.
3. Росляк А.Т., Бирюков Ю.А., Пачин В.Н. Пневматические методы и аппараты порошковой технологии. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1990.
4. Шваб А.В., Марценко М.С., Рыжих Ю.Н. Моделирование гидродинамики и процесса усреднения высококонцентрированной гранулированной среды в аппаратах порошковой технологии // Инженерно-физический журнал. 2011. Т. 84. № 4. С. 676–681.
5. Шульман З.П. Конвективный теплоперенос реологически сложных жидкостей. М.: Энергия, 1975.
6. Savage S. Gravity flow of cohesionless granular materials in chutes and channels // J. Fluid Mech. 1979. V. 92. Part 1. P. 53–96.

Статья поступила 16.06.2016 г.

Martsenko A.A., Shvab A.V. THE DYNAMICS OF A DENSE LAYER OF GRANULAR MEDIUM IN THE CIRCULATING PNEUMATIC APPARATUS. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(42). pp. 115–122

DOI 10.17223/19988621/42/10

The dynamics of the dense layer of a granular medium in a circulation pneumatic apparatus is considered. The model of a rapid flow of the dense granular medium is based on the assumption of incompressibility and constant concentration of the material. The rheology of the dilatant granular medium is described by a power-law model. The essential feature of the proposed model of the granular medium motion is setting the boundary conditions at the solid surface. The calculated granular medium velocity profile is in a good agreement with the experimental data. The calculations of the three-dimensional flow in the circulating pneumatic apparatus with symmetrical obstacles in the working part are presented. It is shown that the installation of the plates significantly increases the momentum transfer rate in the circumferential and radial directions. The model of the rapid motion allows calculating the distribution function of the residence time of the particles in the apparatus. The resulting three-dimensional distribution of the velocity field can be used for the simulation of the mixture component homogenization process.

Keywords: granular medium, circulating pneumatic apparatus, slip conditions, kinetic energy equation.

SHVAB Alexander Veniaminovich (Doctor of Physics and Mathematics, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).  
E-mail avshvab@inbox.ru

MARTSENKO Anastasia Alexandrovna (National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: martsenko@t-sk.ru

## REFERENCES

1. Martsenko A.A., Martsenko M.S., Shvab A.V. (2013) Modelirovanie gidrodinamiki vysokokontsentrirovannoy granulirovannoy sredy v smesitel'nom bunkere [Modeling the hydrodynamics of highly concentrated granulated media in the blending silo]. *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(24). pp. 126–132.
2. Shirko I.V. (1985) *Mekhanika granulirovannykh sred. Teoriya bystrykh dvizheniy* [Mechanics of granular media. Theory of fast motions]. Moscow: Mir.
3. Roslyak A.T., Biryukov Yu.A., Pachin V.N. (1990) *Pnevmaticheskie metody i apparaty poroshkovoy tekhnologii* [Pneumatic methods and apparatuses of powder technology]. Tomsk: Izd. Tomsk Univ.
4. Shvab A.V., Martsenko M.S., Ryzhikh Yu.N. (2011) Modeling the hydrodynamics and the process of averaging a highly concentrated granulated medium in powder technology apparatuses. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 84(4). pp. 730–735. DOI 10.1007/s10891-011-0528-2.
5. Shul'man Z.P. (1975) *Konvektivnyy teplomassoperenos reologicheskikh slozhnykh zhidkostey* [Convective heat and mass transfer in liquids with complicated rheological properties]. Moscow: Energiya.
6. Savage S. (1979) Gravity flow of cohesionless granular materials in chutes and channels. *J. Fluid Mech.* 92(1). pp. 53–96.