ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2016 Управление, вычислительная техника и информатика № 3 (36)

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 519.21:517.977
DOI: 10.17223/19988605/36/1

К.Б. Мансимов, Р.О. Масталиев

ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ КВАЗИОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ОДНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ

Рассматривается задача оптимального управления нелинейными стохастическими процессами, математическая модель которых описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито. При предположении выпуклости области управления получены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.
Ключевые слова: стохастическая система; оптимальное управление; квазиособые управления; линеаризованное условие оптимальности.

Принцип максимума Понтрягина для стохастических задач оптимального управления получен в работах [1–3 и др.]. В работе [4] получено необходимое условие оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина в задаче управления стохастическими системами с запаздывающим аргументом и рассмотрен случай вырождения условия максимума (особый случай).

Предлагаемая работа посвящена выводу необходимых условий оптимальности квазиособых управлений в задаче оптимального управления, описываемых стохастическими системами.

1. Постановка задачи

Пусть (Ω, F, P) – полное вероятностное пространство; $w(t)$ – n-мерный стандартный винеровский процесс, определенный на полном вероятном пространстве (Ω, F, P); $L_F^2(t_0, t_1; R^n)$ – пространство измеримых по (t, ω) случайных процессов $x(t,\omega)$: $[t_0, t_1]$:$\Omega \to R^n$, для которых $E\int_{t_0}^{t_1} \|x(t)\|^2 dt < +\infty$.

Здесь и в дальнейшем знак E – математическое ожидание.

Пусть динамика стохастического управляемого процесса на фиксированном отрезке времени $T = [t_0, t_1]$ описывается системой дифференциальных уравнений

$$dx(t) = f(t, x(t), u(t))dt + \sigma(t, x(t))dw(t), \quad t \in T = [t_0, t_1], \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

где $f(t, x, u)$ – заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (x, u) до второго порядка включительно; $\sigma(t, x)$: $T \times R^n \to R^{n\times n}$ – $(n \times n)$-матричная функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по x до второго порядка включительно, причем

$$u(t) \in U_d \equiv \{u(\cdot) \in L_F^2(t_0, t_1; R^r) | u(t) \in U \subset R^r\}, \tag{3}$$

где U – заданное непустое, ограниченное и выпуклое множество. U_d назовем множеством допустимых управлений.

В дальнейшем предполагается, что каждому допустимому управлению $u(t) \in L_F^2\left(t_0, t_1;\, R^r\right)$ соответствует единственное решение $x(t)$ системы (1)–(2) с п.н. непрерывными траекториями, определенными на T .

Целью управления является минимизация терминального критерия качества

$$I(u) = E\{h(x(t_1))\}, \tag{4}$$

где $h(x)$ – заданная дважды непрерывно дифференцируемая скалярная функция.

Основной задачей является вывод необходимых условий оптимальности первого и второго порядков для выпуклой области управлений.

2. Необходимое условие оптимальности первого порядка

Предположим, что $(u(t),\, x(t))$ – фиксированный допустимый процесс. Через $(\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t),\, \bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t))$ обозначим произвольный допустимый процесс. Запишем формулу для приращения функционала:

$$\Delta I(u) = I(\bar{u}) - I(u) = E\{h(\bar{x}(t_1)) - h(x(t_1))\}. \tag{5}$$

Приращение $\Delta x(t)$ траектории $x(t)$ удовлетворяет системе

$$\begin{gathered} d\Delta x(t) = d\left[\bar{x}(t) - x(t)\right] = \left(f\left(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\right) - f\left(t, x(t), u(t)\right)\right)dt + \\ +\left(\sigma\left(t, \bar{x}(t)\right) - \sigma\left(t, x(t)\right)\right)dw(t),\ t \in T, \end{gathered} \tag{6}$$

$$\Delta x(t_0) = 0\,. \tag{7}$$

Пусть $\psi(t) \in L_F^2\left(t_0, t_1;\, R^n\right)$ – случайный процесс, стохастический дифференциал которого имеет вид

$$d\psi(t) = \alpha(t)dt + \beta(t)dw(t).$$

Здесь по определению $\alpha(t) - n$-мерная непрерывная вектор-функция, $\beta(t) \in L_F^2\left(t_0, t_1; R^{n\times n}\right)$.

Тогда на основании формулы Ито (см. например, [5]) получается

$$\begin{gathered} d\left(\psi'(t)\Delta x(t)\right) = d\psi'(t)\Delta x(t) + \psi'(t)d\Delta x(t) + \beta(t)\left[\sigma\left(t, \bar{x}(t)\right) - \sigma\left(t, x(t)\right)\right]dt = d\psi'(t)\Delta x(t) + \\ +\psi'(t)\left\{\left(f\left(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\right) - f\left(t, x(t), u(t)\right)\right)dt + \left(\sigma\left(t, \bar{x}(t)\right) - \sigma\left(t, x(t)\right)\right)dw(t)\right\} + \\ +\beta(t)\left[\sigma\left(t, \bar{x}(t)\right) - \sigma\left(t, x(t)\right)\right]dt. \end{gathered} \tag{8}$$

Здесь и в дальнейшем ($'$) – знак транспонирования.

Положим

$$\begin{gathered} H(t, x, u, \psi) = \psi' f(t, x, u),\ H_x[t] = H_x\left(t, x(t), u(t), \psi(t)\right),\ H_u[t] = H_u\left(t, x(t), u(t), \psi(t)\right), \\ H_{xx}[t] = H_{xx}\left(t, x(t), u(t), \psi(t)\right),\ H_{uu}[t] = H_{uu}\left(t, x(t), u(t), \psi(t)\right), \\ f_x[t] = f_x(t, x(t), u(t)),\ f_u[t] = f_u(t, x(t), u(t)),\ \sigma_x[t] = \sigma_x\left(t, x(t)\right),\ \sigma_{xx}[t] = \sigma_{xx}\left(t, x(t)\right). \end{gathered}$$

Используя формулу Тейлора, тождества (8можно записать в следующем виде:

$$\begin{gathered} d\left(\psi'(t)\Delta x(t)\right) = d\psi'(t)\Delta x(t) + H_x'[t]\Delta x(t)dt + H_u'[t]\Delta u(t)dt + \\ +\frac{1}{2}\Delta x'(t)H_{xx}[t]\Delta x(t)dt + \Delta u'(t)H_{ux}[t]\Delta x(t)dt + \frac{1}{2}\Delta u'(t)H_{uu}[t]\Delta u(t)dt + \\ +o_1\left(\left\|\Delta z(t)\right\|^2\right)dt + \psi'(t)\left(\sigma\left(t, \bar{x}(t)\right) - \sigma\left(t, x(t)\right)\right)dw(t) + \beta(t)\sigma_x[t]\Delta x(t)dt + \\ +\frac{1}{2}\,\Delta x'(t)\beta(t)\sigma_{xx}[t]\Delta x(t)dt + \beta(t)o_2\left(\left\|\Delta x(t)\right\|^2\right)dt. \end{gathered} \tag{9}$$

Здесь величины $o_i(.) = 1, 2$ определяются, соответственно, из разложения

$$H\left(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\psi(t)\right)-H\left(t,x(t),u(t),\psi(t)\right)=H_x'[t]\Delta x(t)+H_u'[t]\Delta u(t)+$$
$$+\frac{1}{2}\Delta x'(t)H_{xx}[t]\Delta x(t)+\Delta u'(t)H_{ux}[t]\Delta x(t)+\frac{1}{2}\Delta u'(t)H_{uu}[t]\Delta u(t)+o_1\left(\|\Delta z(t)\|^2\right),$$
$$\sigma\left(t,\bar{x}(t)\right)-\sigma\left(t,x(t)\right)=\sigma_x'[t]\Delta x(t)+\frac{1}{2}\Delta x'(t)\sigma_{xx}[t]\Delta x(t)+o_2\left(\|\Delta x(t)\|^2\right),$$

где $\Delta z(t)=\left(\Delta u(t),\Delta x(t)\right)'$.

С учетом (7) и (9) формула приращения (5) принимает следующий вид:

$$\Delta I(u)=E\Bigg\{h_x'\left(x(t_1)\right)\Delta x(t_1)+\frac{1}{2}\Delta x'(t_1)h_{xx}\left(x(t_1)\right)\Delta x(t_1)+\psi'(t_1)\Delta x(t_1)-\int_{t_0}^{t_1}d\psi'(t)\Delta x(t)-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}H_x'[t]\Delta x(t)dt-\int_{t_0}^{t_1}H_u'[t]\Delta u(t)dt-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\Delta x'(t)H_{xx}[t]\Delta x(t)dt-\int_{t_0}^{t_1}\Delta u'(t)H_{ux}[t]\Delta x(t)dt- \tag{10}$$
$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\Delta u'(t)H_{uu}[t]\Delta u(t)dt-\int_{t_0}^{t_1}\beta(t)\sigma_x[t]\Delta x(t)dt-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\Delta x'(t)\beta(t)\sigma_{xx}[t]\Delta x(t)dt\Bigg\}+\eta(\Delta u).$$

Здесь по определению

$$\eta(\Delta u)=E\left\{-\int_{t_0}^{t_1}o_1\left(\|\Delta z(t)\|^2\right)dt-\int_{t_0}^{t_1}\beta(t)o_2\left(\|\Delta x(t)\|^2\right)dt+o_3\left(\|\Delta x(t_1)\|^2\right)\right\},$$

где $o_3\left(\|\Delta x(t_1)\|^2\right)$ определяется из разложения

$$h\left(\bar{x}(t_1)\right)-h\left(x(t_1)\right)=h_x'\left(x(t_1)\right)\Delta x(t_1)+\frac{1}{2}\Delta x'(t_1)h_{xx}\left(x(t_1)\right)\Delta x(t_1)+o_3\left(\|\Delta x(t_1)\|^2\right).$$

Если предположить, что случайные процессы $\psi(t)\in L_F^2\left(t_0,t_1;R^n\right)$, $\beta(t)\in L_F^2\left(t_0,t_1;R^{n\times n}\right)$ являются решением сопряженной системы

$$\begin{cases} d\psi(t)=-\left(H_x[t]+\beta(t)\sigma_x[t]\right)dt+\beta(t)dw(t), \\ \psi(t_1)=-h_x\left(x(t_1)\right), \end{cases}$$

то формула приращения (10) примет следующий вид:

$$\Delta I(u)=E\Bigg\{-\int_{t_0}^{t_1}H_u'[t]\Delta u(t)dt+\frac{1}{2}\Delta x'(t_1)h_{xx}\left(x(t_1)\right)\Delta x(t_1)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\Delta x'(t)H_{xx}[t]\Delta x(t)dt-$$
$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\Delta x'(t)\beta(t)\sigma_{xx}[t]\Delta x(t)dt-\int_{t_0}^{t_1}\Delta u'(t)H_{ux}[t]\Delta x(t)dt-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\Delta u'(t)H_{uu}[t]\Delta u(t)dt\Bigg\}+\eta(\Delta u). \tag{11}$$

Специальное приращение оптимального управления $u(t)$ в силу выпуклости области управления U можно определить по формуле

$$\Delta u(t;\varepsilon)=\varepsilon\left[v(t)-u(t)\right],\quad t\in T, \tag{12}$$

где $v(t)\in L_F^2\left(t_0,t_1;R^r\right)-$ произвольный вектор, а $\varepsilon\in[0,1]$ – произвольное число.

Обозначим через $\Delta x(t;\varepsilon)-$ специальное приращение траектории $x(t)$, отвечающее приращению $\Delta u(t;\varepsilon)$ управления $u(t)$.

Из (6), используя условие Липшица, при помощи леммы Гронуолла–Белмана (см. например, [6]) получается оценка

$$E\|\Delta x(t;\varepsilon)\|^2\le N\varepsilon^2, \tag{13}$$

где $N=\text{const}>0$.

Лемма. Пусть $\ell(t)$ является решением задачи

$$d\ell(t) = \left(f'_x[t]\ell(t) + f'_u[t]\left(v(t) - u(t)\right)\right)dt + \sigma_x[t]\ell(t)dw(t), \tag{14}$$

$$\ell(t_0) = 0.$$

Тогда справедливо разложение

$$\Delta x_\varepsilon(t) = \varepsilon\ell(t) + o(\varepsilon;t). \tag{15}$$

Принимая во внимание (15) и оценку (13), из (11) получим, что

$$\Delta I_\varepsilon(u) = I\left(u(t) + \Delta u_\varepsilon(t)\right) - I\left(u(t)\right) = -\varepsilon E\left\{\int_{t_0}^{t_1} H'_u[t]\left(v(t) - u(t)\right)dt\right\} +$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\left[\ell'(t_1)h_{xx}\left(x(t_1)\right)\ell(t_1) - \int_{t_0}^{t_1}\ell'(t)H_{xx}[t]\ell(t)dt - \int_{t_0}^{t_1}\ell'(t)\beta(t)\sigma_{xx}[t]\ell(t)dt - \right. \tag{16}$$

$$\left. -\int_{t_0}^{t_1} l'(t)\beta(t)\sigma_{xx}[t]l(t)dt - 2\int_{t_0}^{t_1} l'(t)H_{xu}[t](u(t) - v(t))dt - \int_{t_0}^{t_1}(u(t) - v(t))'H_{uu}[t](v(t) - u(t))dt\right] + o\left(\varepsilon^2\right).$$

Из разложения (16) в силу произвольности ε сразу следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. При сделанных предположениях для оптимальности допустимого управления $u(t)$, $t \in T$, в задаче (1)–(4) необходимо, чтобы неравенство

$$E\int_{t_0}^{t_1} H'_u[t](v(t) - u(t))dt \le 0 \tag{17}$$

выполнялось для всех $v(t) \in L_F^2\left(t_0, t_1; R^r\right)$.

Неравенство (17) является линеаризованным интегральным условием максимума для задачи (1)–(4).

Можно доказать, что оно имеет место тогда и только тогда, когда почти для всех $\theta \in [t_0, t_1)$ и $v \in L_F^2\left(t_0, t_1; R^r\right)$ выполняется неравенство

$$H'_u[\theta]\left(v - u(\theta)\right) \le 0. \tag{18}$$

Здесь и в дальнейшем $\theta \in [t_0, t_1)$ – произвольная точка Лебега управления $u(t)$.

Неравенство (18) есть поточечный линеаризованный принцип максимума в рассматриваемой задаче и представляет собой необходимое условие оптимальности первого порядка.

Перейдем к изучению случая вырождения линеаризованного условия максимума.

3. Необходимые условия оптимальности квазиособых управлений

Будем исследовать случай вырождения линеаризованного условия максимума (18). По аналогии с [7] введем следующее определение.

Определение. Допустимое управление $u(t)$ назовем квазиособым, если вдоль процесса $(u(t), x(t))$ для всех $v \in U_d$ и $\theta \in [t_0, t_1)$ выполняется следующее условие:

$$H'_u[\theta]\left(v - u(\theta)\right) = 0, \text{ п.н.} \tag{19}$$

Ясно, что в квазиособом случае линеаризованное необходимое условие оптимальности (18) теряет свое содержательное значение, в связи с чем надо иметь новые необходимые условия оптимальности, работающие в квазиособом случае.

Пусть $u(t)$, $t \in T$, – квазиособое оптимальное управление. Тогда из разложения (16) в силу (19) и произвольности $\varepsilon \in [0,1]$ следует, что

$$E\left\{\ell'(t_1)h_{xx}\left(x(t_1)\right)\ell(t_1) - \int_{t_0}^{t_1}\ell'(t)\left[H_{xx}[t] + \beta(t)\sigma_{xx}[t]\right]\ell(t)dt - \right.$$

$$\left. -2\int_{t_0}^{t_1}\left(v(t) - u(t)\right)' H_{ux}[t]\ell(t)dt - \int_{t_0}^{t_1}\left(v(t) - u(t)\right)' H_{uu}[t]\left(v(t) - u(t)\right)dt\right\} \ge 0. \tag{20}$$

Теорема 2. Если $u(t)$, $t \in T$, – квазиособое управление, то для его оптимальности в задаче (1)–(4) необходимо, чтобы неравенство (20) выполнялось для всех $v(t) \in U_d$, $t \in T$.

Неравенство (20) является довольно общим, но вместе с тем неявным необходимым условием оптимальности квазиособых управлений. Однако с его помощью удается получить ряд необходимых условий оптимальности квазиособых управлений, выраженных непосредственно через параметры задачи (1)–(4).

Уравнение (14) является линейным неоднородным стохастическим дифференциальным уравнением. Поэтому, применяя результаты, например, работ [8] получаем, что решение $\ell(t)$ задачи (14) допускает представление

$$\ell(t) = \int_{t_0}^{t} Q(t,\tau)\big(v(\tau) - u(\tau)\big)d\tau . \tag{21}$$

Здесь по определению

$$Q(t,\tau) = R(t,\tau) f_u[\tau],$$

где $(n \times n)$ матрица $R(\tau,s)$ является решением задачи

$$dR(t,s) = f_x'[t]R(t,s) + \sigma_x[t]R(t,s)dw(t),$$

$$R(s,s) = E_n \text{ } (E_n - (n \times n)\text{- мерная единичная матрица}).$$

С помощью представления (21) следуя схеме предложенный, например, в [9–11] доказывается справедливость тождеств:

$$\begin{gathered} \ell'(t_1)h_{xx}\big(x(t_1)\big)\ell(t_1) = \\ = \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\big(v(\tau) - u(\tau)\big)' Q(t_1,\tau)h_{xx}\big(x(t_1)\big)Q(t_1,s)\big(v(s) - u(s)\big)d\tau ds, \end{gathered} \tag{22}$$

$$\begin{gathered} \int_{t_0}^{t_1} \ell'(t)\big[H_{xx}[t] + \beta(t)\sigma_{xx}[t]\big]\ell(t)dt = \\ = \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\big(v(\tau) - u(\tau)\big)'\left[\int_{\max(\tau,s)}^{t_1} Q(t,\tau)\big[H_{xx}[t] + \beta(t)\sigma_{xx}[t]\big]Q(t,s)dt\right]\big(v(s) - u(s)\big)ds\,d\tau, \end{gathered} \tag{23}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\big(v(t) - u(t)\big)' H_{ux}[t]\ell(t)dt = \int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1}\big(v(\tau) - u(\tau)\big)' H_{ux}[\tau]Q(\tau,t)d\tau\right]\big(v(t) - u(t)\big)dt. \tag{24}$$

Пусть по определению

$$K(\tau,s) = -Q(t_1,\tau)h_{xx}(x(t_1))Q(t_1,s) + \int_{\max(\tau,s)}^{t_1} Q(t,\tau)\big[H_{xx}[t] + \beta(t)\sigma_{xx}[t]\big]Q(t,s)dt.$$

Заметим что, матричная функция $K(\tau,s)$ является стохастическим аналогом, матричной функции, которая впервые введена в детерминированном случае в работах К.Б. Мансимова (см., например [9–11 и др.]).

Принимая во внимание тождества (22)–(24), неравенство (20) преобразуем к виду

$$\begin{gathered} E\left\{\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\big(v(\tau) - u(\tau)\big)' K(\tau,s)\big(v(s) - u(s)\big)ds\,d\tau + \right. \\ \left. +2\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1}\big(v(\tau) - u(\tau)\big)' H_{ux}[\tau]Q(\tau,t)d\tau\right]\big(v(t) - u(t)\big)dt + \int_{t_0}^{t_1}(v(t) - u(t))'H_{uu}[t](v(t) - u(t))dt\right\} \le 0. \end{gathered} \tag{25}$$

Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Если $u(t)$, $t \in T$, – квазиособое управление в задаче (1)–(4), то для его оптимальности необходимо, чтобы неравенство (25) выполнялось для всех $v(t) \in U_d, t \in T$.

Неравенство (25) является общим интегральным необходимым условием оптимальности для квазиособых управлений.

Кроме того, определяя $v(t)$ конкретным образом, можно получить поточечные условия оптимальности квазиособых управлений.

Следствие. Если $u(t), t \in T,$ – квазиособое управление в задаче (1)–(4), то для его оптимальности необходимо, чтобы неравенство

$$\left(v - u(\theta)\right)' H_{uu}[\theta]\left(v - u(\theta)\right) \le 0 \tag{26}$$

выполнялось почти для всех $\theta \in [t_0, t_1)$ и $v \in U_d$.

Для доказательства неравенства (26) достаточно в (25) $v(t)$ определить по формуле

$$v_\delta(t) = \begin{cases} v, & t \in [\theta, \theta + \delta) = T_\delta, \\ u(t), & t \in T \setminus T_\delta, \end{cases}$$

где $\delta > 0$ – достаточно малое произвольное число.

Заключение

При помощи стохастического аналога метода приращений получено линеаризованное необходимое условие оптимальности, а также исследован квазиособый случай. Установлены необходимые условия оптимальности квазиособых управлений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аркин В.И., Саксонов М.Т. К теории стохастического принципа максимума в задачах с непрерывным временем // Модели и методы стохастической оптимизации. М. : ЦЭМИ, 1983. С. 3–26.
2. Kushner H.J. On the stochastic maximum principle: Fixed time of control // J. Math. Anal. Appl. 1965. V. 11. P. 78–92.
3. Hafayed M. Filippov approach in stochastic maximum principle without differentiability assumptions // Electronic journal of differential equations. 2010. V. 2010, No. 97. P. 1–13.
4. Агаева Ч.А. Необходимые условия оптимальности особых управлений в стохастических системах с запаздывающим аргументом. Баку, 1990. 20 с. Деп.в ВИНИТИ 19.06.1990. № 3495-890.
5. Гихман И.И., Скороход А.В. Управляемые случайные процессы. Киев : Наукова думка, 1977. 250 с.
6. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М. : Факториал, 2002. 824 с.
7. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М. : Наука, 1973. 256 с.
8. Bismut J.M. Linear quadratic optimal stochastic control with random coefficients // SIAM. J. Control andoptimization. 1976. V. 14, No. 3. P. 419–444.
9. Мансимов К.Б. Особые управления в системах с запаздыванием. Баку : ЭЛМ, 1999. 176 с.
10. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами Гурса – Дарбу. Баку : ЭЛМ, 2010. 336 с.
11. Абдуллаев А.А., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности в процессах, описываемых системой интегральных уравнений типа Вольтерра. Баку : Элм, 2013. 224 с.

Мансимов Камиль Байрамали оглы, д-р физ.-мат. наук, профессор. E-mail: mansimov@front.ru
Бакинский государственный университет, Институт систем управления НАН Азербайджана (г. Баку)
Масталиев Рашад Огтай оглы, д-р философии по математике. E-mail: mastaliyevrashad@gmail.com
Институт систем управления НАН Азербайджана (г. Баку)

Поступила в редакцию 10 мая 2016 г.

Mansimov Kamil B. (Baku State University, Institute of Control Systems (Cybernetics) of Azerbaijan National Academy of Sciences, Azerbaijan), *Mastaliyev Rashad O.* (Institute of Control Systems (Cybernetics) of Azerbaijan National Academy of Sciences, Azerbaijan).

On optimal quasi-singular controls in stochastic control problem.

Keywords: stochastic system; optimal control; quasi-singular control; linearized optimality conditions.

DOI: 10.17223/19988605/36/1

In the report we consider a stochastic optimal control problem whose mathematical model is given by stochastic differential equation Ito.

Let (Ω, F, P) be a complete probability space. $w(t)$ be n dimensional standard Winer process determined on the space (Ω, F, P). $L_F^2(t_0, t_1; R^n)$ be a space of measurable with respect by (t, ω) random processes $x(t, \omega)$: $[t_0, t_1]:\Omega \to R^n$ such that $E\int_{t_0}^{t_1}\|x(t)\|^2 dt < +\infty$.

Here and follows sign E is mathematical expectation.

Let on a fixed time interval $[t_0, t_1] = T$ the control process be described by the following stochastic differential system:

$$dx(t) = f(t, x(t), u(t))dt + \sigma(t, x(t))dw(t),\ t \in T,$$

$$x(t_0) = x_0.$$

Here $f(t,x,u)$ is the given n dimensional vector-function continuous in totality of variables together with partial derivatives with respect by (x, u) to second order inclusively, $\sigma(t, x)$ is a matrix function of sizes $(n \times n)$ continues in totality of variables together with partial derivatives with respect by x to second order inclusively.

$$u(t) \in U_d \equiv \left\{u(\cdot) \in L_F^2(t_0, t_1; R^r) \middle| u(t) \in U \subset R^r\right\},$$

where U is the given nonempty, bounded and convex set. Call U_d set of admissible controls.

Our goal by minimize the functional

$$I(u) = E\{h(x(t_1))\},$$

on the set of admissible controls. Here $h(x)$ is the given twice continuously differentiable scalar function. By means of the stochastic analogue of the method suggested and developed in the papers of K.B. Mansimov, we get a linearized necessary optimality condition, and also study the quasi-singular case. Necessary optimality condition of quasi-singular controls is established. Then investigated particular cases.

REFERENCES

1. Arkin, V.I. & Saksonov, M.T. (1983) K teorii stokhasticheskogo printsipa maksimuma v zadachakh s nepreryvnym vremenem [On the theory of stochastic maximum principle in problems with continuous time]. In: Arkin, V.I. & Katyshev, P.K. (eds) *Modeli i metody stokhasticheskoy optimizatsii* [Models and methods of stochastic optimization]. Moscow: TSEMI. pp. 3-26.
2. Kushner, H.J. (1965) On the stochastic maximum principle: Fixed time of control. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 11. pp. 78-92. DOI: 10.1016/0022-247X(65)90070-3
3. Hafayed, M. (2010) Filippov approach in stochastic maximum principle without differentiability assumptions. *Electronic Journal of Differential Equations*. 2010(97). pp.1-13.
4. Agayeva, Ch.A. (1990) *Neobkhodimye usloviya optimal'nosti osobykh upravleniy v stokhasticheskikh sistemakh s zapazdyvayushchim argumentum* [Necessary optimality conditions for singular controls in stochastic systems with delay]. Baku: VINITI 19.06.1990. №3495-890.
5. Gikhman, I.I. & Skorokhod, A.V. (1977) *Upravlyaemye sluchaynye protsessy* [Controllable random processes]. Kiev: Naukova dumka.
6. Vasilyev, F.P. (2002) *Metody optimizatsii* [Optimization methods]. Moscow: Factorial.
7.Gabasov, R. & Kirillova, F.M. (1973) *Osobye optimal'nye upravleniya* [Special optimal control]. Moscow: Nauka.
8. Bismut, J.M. (1976) Linear quadratic optimal stochastic control with random coefficients. *SIAM. Journal on Control and Optimization*. 14(3). pp. 419-444. DOI: 10.1137/0314028
9. Mansimov, K.B. (1999) *Osobye upravleniya v sistemakh s zapazdyvaniem* [Singular controls in systems with delay]. Baku: ELM.
10. Mansimov, K.B. & Mardanov, M.J. (2010) *Kachestvennaya teoriya optimal'nogo upravleniya sistemami Gursa – Darbu* [Quality theory of optimal control of Goursat-Darboux systems]. Baku: ELM.
11. Abdullayev, A.A & Mansimov, K.B. (2013) *Neobkhodimye usloviya optimal'nosti v protsessakh, opisyvaemykh sistemoy integral'nykh uravneniy tipa Vol'terra* [Necessary optimality conditions in the processes described by the system of Volterra integral equations]. Baku: Elm.