ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2016 Управление, вычислительная техника и информатика № 3 (36)

УДК 519.872
DOI: 10.17223/19988605/36/6

Ю.И. Рыжиков, А.В. Уланов

ПРИМЕНЕНИЕ ГИПЕРЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ В ЗАДАЧАХ РАСЧЕТА НЕМАРКОВСКИХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Представлены возможности применения гиперэкспоненциального распределения второго порядка (H_2) с параметрами произвольного (в том числе комплексного) типа в задачах расчета немарковских систем массового обслуживания. Результаты верифицированы с помощью альтернативных методов.
Ключевые слова: случайные процессы; аппроксимация; гиперэкспоненциальное распределение; комплексные параметры распределения; немарковские системы массового обслуживания.

При исследовании немарковских процессов поступления и обслуживания заявок в многоканальных системах массового обслуживания (СМО) широко применяются распределения фазового типа (обозначаются *Ph*). К этим распределениям относятся взаимосвязанные параллельно-последовательные комбинации фаз прохождения заявок с показательно распределенными длительностями задержек в них. При фиксации номера фаз поступления или обслуживания заявок состояния СМО приобретают марковское свойство, что позволяет представить переходы между ними в виде дискретного марковского процесса с непрерывным временем. Идея метода фиктивных фаз была выдвинута еще А.К. Эрлангом. Порядком аппроксимации естественно считать количество сохраненных начальных моментов исходного распределения.

Наиболее общей формой представления фазовых распределений является схема Ньютса [1], в которой длительность каждой реализации процесса соответствует случайному времени блуждания по сети с показательной задержкой в каждом узле и одним поглощающим состоянием. При этом расчет СМО проводится в терминах кронекеровых матричных операций и, как правило, для одноканальных систем [Там же]. Машинная реализация упомянутых операций крайне неэффективна из-за необходимости выполнения большого количества вычислений с заведомо нулевым результатом. По этой причине для аппроксимации распределений с коэффициентом вариации $\upsilon > 1$, как правило, используют гиперэкспоненциальную (H_k) аппроксимацию, а в остальных случаях – эрлангову (E_k). В обоих случаях параметры распределений предполагаются исключительно вещественными.

В последнее время возрастает интерес к гиперэкспоненциальному распределению, применение которого показало высокую эффективность при решении задач суммирования рекуррентных потоков [2], расчета СМО с «нетерпеливыми» заявками [3], джексоновских сетей массового обслуживания [4], при анализе систем управления запасами [5].

В статье представлены результаты применения гиперэкспоненциального распределения второго порядка (H_2) с возможностью комплексного типа параметров, что позволяет аппроксимировать время обслуживания и интервалы между заявками входящего потока с произвольным (в том числе меньшим единицы) коэффициентом вариации и упростить расчетную схему.

1. Особенности применения H_2-распределения

Гиперэкспоненциальное распределение второго порядка относится к распределениям фазового типа и предполагает выбор случайным процессом одной из двух альтернативных фаз. С вероятностью y_1 процесс попадает в первую фазу и задерживается в ней случайное время, распределенное по экспоненциальному закону с параметром μ_1, с вероятностью $y_2 = 1 - y_1$ процесс попадает во вторую фазу, где экспоненциальная задержка имеет параметр μ_2.

Дополнительная функция H_2-распределения имеет вид

$$\overline{F}(t) = y_1 e^{-\mu_1 t} + y_2 e^{-\mu_2 t}.$$

Подбор параметров H_2-распределения возможен по методу моментов [1]. Поскольку данное распределение трехпараметрическое (четвертый параметр $y_2 = 1 - y_1$), оно позволяет выровнять три начальных момента аппроксимируемого, что принято считать вполне достаточным [6].

В зависимости от значений выравниваемых моментов параметры H_2-распределения могут принимать комплексные и «парадоксальные» значения. Исследование H_2-аппроксимации исходного гамма-распределения с коэффициентом вариации υ выявило, что:

– случай $\upsilon > 1$ дает вещественные параметры;

– при $1 > \upsilon > 1/\sqrt{2}$ параметры гиперэкспоненты вещественны, но парадоксальны: один из параметров $\{y_j\}$, $j = 1, 2$ будет отрицательным, а другой превысит единицу;

– строгое равенство $\upsilon = 1/\sqrt{2}$ недопустимо (соответствует E_2 распределению Эрланга с последовательной сменой фаз и не может быть заменено на параллельную);

– при $\upsilon < 1/\sqrt{2}$ имеем комплексные параметры H_2-аппроксимации.

Поскольку параметры гиперэкспоненты $\{y_j\}$, $j = 1, 2$, интерпретируются как вероятности выбора случайным процессом одной из двух фаз, большинство специалистов по теории массового обслуживания рассматривают лишь тот случай, когда данные параметры определены на вещественном интервале [0, 1], что соответствует аппроксимации распределений с коэффициентом вариации $\upsilon > 1$. Именно поэтому для аппроксимации распределений с коэффициентом вариации $\upsilon < 1$ гипреэкспонента не используется, а применяется распределение Эрланга E_k. Однако обширная серия вычислительных экспериментов показала, что при расчете СМО с применением H_2-аппроксимации в области комплексных значений ее параметров потенциальная патология проявляется только в промежуточных результатах – вероятностях «фиктивных» микросостояний диаграммы переходов, на которые расщепляются «физические» состояния СМО. На этапе суммирования вероятностей микросостояний ярусов их комплексные части аннигилируются и компоненты результата расчета – вероятности числа заявок в системе – становятся вещественными.

Комплексный тип параметров H_2-распределения подчеркивает *фиктивный* характер расщепления процесса на фазы. Допустимость таких параметров при исследовании случайных процессов была впервые отмечена Д. Коксом в 1955 г. [7]. В статье [8] авторы попытались дать вероятностную интерпретацию комплексных интенсивностей переходов между состояниями цепи Маркова.

Примеры различных диаграмм переходов для СМО с гиперэкспоненциальным распределением обслуживания или интервалов между заявками входящего потока приведены в [1, 3]. Дополнительным преимуществом H_2-аппркосимации по сравнению с эрланговской является более компактный вид диаграмм переходов марковизированных СМО. Например, для моделей с эрланговским обслуживанием ширина диаграммы (количество микросостояний на n-м ярусе) быстро растет по числу каналов n и порядку распределения k (табл. 1) [9].

Таблица 1

Количество микросостояний на ярусах системы $M/E_k/n$

Число каналов n	Число фаз обслуживания k				
	2	3	4	5	6
2	3	6	10	15	21
3	4	10	20	35	56
5	6	21	56	126	252
10	11	66	286	1001	3003
20	21	231	1771	10626	53130
30	31	496	5456	46376	324632

Заметим, что при этом эрланговы распределения позволяют строго выровнять первый и лишь приближенно – второй момент распределения времени обслуживания. Наименьший коэффициент вариации из включенных в табл. 1 распределений (E_6) составил $1/\sqrt{6} \approx 0{,}408$. Для расчета СМО с еще меньшим коэффициентом вариации могут потребоваться гораздо большие значения k.

С другой стороны, применение H_2-аппроксимации позволяет выровнять три начальных момента произвольного (исключая E_2) распределения, что обеспечивает более высокую точность расчета СМО. Поскольку диаграмма переходов для $M/H_2/n$ имеет ширину всего лишь $n + 1$, здесь можно рассчитывать системы с гораздо большим числом каналов. В «общий строй» можно поставить и распределение E_2 – если допустить небольшое отклонение дисперсии.

Таким образом, достоинствами H_2-аппроксимации являются:

– возможность выравнивания трех моментов исходного распределения, что, как будет показано ниже, обеспечивает приемлемую точность при расчете СМО;

– гораздо более компактный (по сравнению эрланговской аппроксимацией) вид диаграмм переходов марковизированных СМО и, как следствие, необходимость расчета вероятностей меньшего числа микросостояний для систем с малыми коэффициентами вариации времени обслуживания или интервалов между заявками входящего потока;

– удобство вычисления дополнительной функции распределения.

2. Расчет немарковских СМО

Перечислим основные этапы расчета немарковских СМО методом фиктивных фаз с помощью H_2-аппроксимации:

– расчет начальных моментов распределений обслуживания и (или) интервалов между заявками входящего потока;

– подбор параметров H_2-распределения по рассчитанным на предыдущем шаге моментам;

– построение диаграммы переходов;

– составление уравнений баланса переходов между микросостояниями диаграммы и расчет вероятностей микросостояний;

– суммирование вероятностей микросостояний по ярусам и получение распределения числа заявок в системе.

Рассмотрим возможности H_2-аппроксимации с произвольным типом параметров на примере одноканальных СМО. Выполним расчет распределения $\{p_j\}$ числа заявок в одноканальной системе M/G/1 методом вложенных цепей Маркова [1] и методом фиктивных фаз через H_2-аппроксимацию различных распределений обслуживания $B(t)$:

– гамма с параметром формы 0,5 ($\Gamma_{0,5}$) (коэффициент вариации $\upsilon \approx 1{,}41$);

– $\Gamma_{1,5}$ ($\upsilon \approx 0{,}816$);

– равномерного U на интервале [0; 2] ($\upsilon \approx 0{,}577$);

– вырожденного D ($\upsilon = 0$).

Среднее время обслуживания во всех случаях $b_1 = 1$, коэффициент загрузки системы $\rho = 0{,}7$. Результаты расчета распределения числа заявок в системе $\{p_j\}$, $j = \overline{0,20}$, приведены на рис. 1. Сплошной линией показаны результаты, полученные методом вложенных цепей Маркова, штриховой – методом фиктивных фаз через H_2-аппроксимацию.

В табл. 2 приведены параметры H_2-распределения, рассчитанные по трем начальным моментам исходного распределения $B(t)$.

Таблица 2

Параметры H_2-распределения

$B(t)$	y_1	μ_1	μ_2	$B(t)$	y_1	μ_1	μ_2
$\Gamma_{0,5}$	0,500	0,586	0,341	U	$0{,}500+i0{,}866$	$0{,}150+i0{,}866$	$0{,}150-i0{,}866$
$\Gamma_{1,5}$	–0,765	0,263	0,137	D	$0{,}500+i0{,}141$	$0{,}200+i0{,}141$	$0{,}200-i0{,}141$

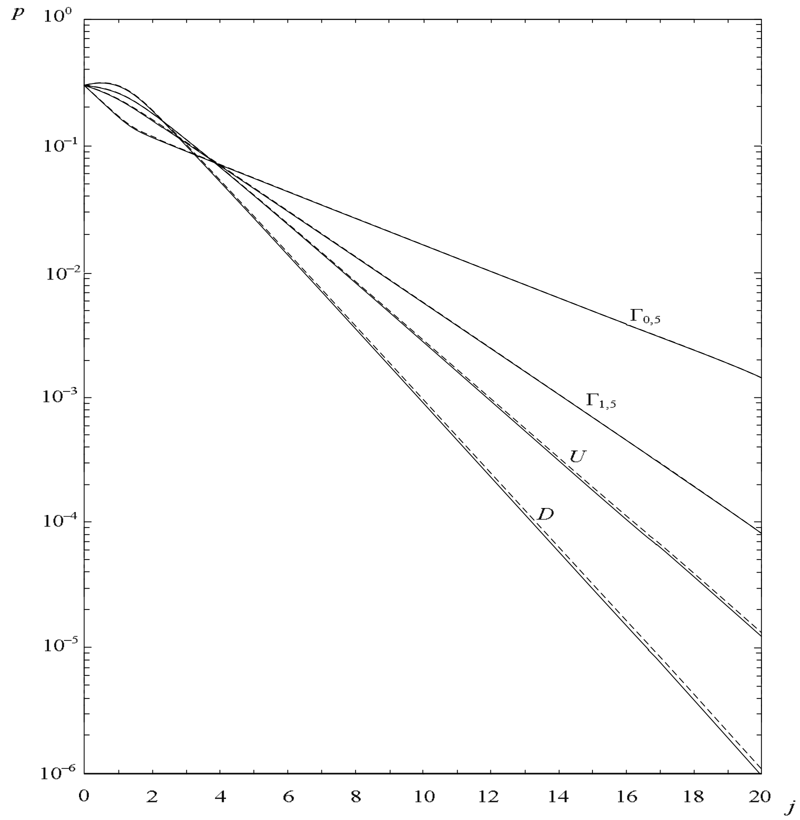

Рис. 1. Распределение числа заявок в системе $M/G/1$

Из графиков видно очень хорошее согласие результатов расчета распределения числа заявок в системе даже в области комплексных и парадоксальных параметров аппроксимирующей время обслуживания гиперэкспоненты. Расстояние Колмогорова при $Г_{0,5}$, $Г_{1,5}$, U и D обслуживании составило {0,002; 0,0002; 0,0015; 0,0018} соответственно. Относительная погрешность на «хвостах» распределений, в области малых значений вероятностей, не превысила 15%.

При этом следует особо подчеркнуть, что в области комплексных параметров (см. табл. 2), особенно при аппроксимации случайных величин с коэффициентом вариации, близким к нулю, H_2-плотность принимает отрицательные значения и вообще не удовлетворяет требованиям, предъявляемым к плотности распределения. Тем не менее расчет марковизированных СМО показывает, что «комплексность» проявляется лишь в вероятностях микросостояний ярусов диаграмм и на этапе их суммирования полностью аннигилируется. Указанный эффект сохраняется при анализе *многоканальных* немарковских СМО [1. С. 224].

Таким образом, при работе с H_2-распределением необходимо учитывать, что параметры гиперэкспоненты могут принимать комплексные значения, а качество аппроксимации следует оценивать не по критериям согласия исходного и подобранного распределений, а по точности расчета *итоговых* характеристик СМО.

Заключение

Применение гиперэкспоненциальной аппроксимации позволяет с высокой точностью проводить анализ немарковских систем обслуживания с произвольным коэффициентом вариации времени обслуживания и (или) интервалов между заявками входящего потока. При этом комплексные значения параметров гиперэкспоненты, возникающие при коэффициенте вариации $\upsilon < 1$, не влияют на конечный результат, поскольку при суммировании вероятностей микросостояний ярусов диаграммы марковизированной СМО их комплексные части аннигилируются.

Непосредственно о качестве аппроксимации субслучайных (с малым коэффициентом вариации) величин не может идти и речи, поскольку плотность гиперэкспоненты в этом случае принимает отрицательные значения и вообще не удовлетворяет требованиям, предъявляемым к плотности распределения. Качество аппроксимации здесь возможно оценить опосредованно – через сопоставление распределения числа заявок в СМО, полученного через H_2-аппроксимацию, с результатами, полученными альтернативными методами.

Применение гиперэкспоненциальной аппроксимации с комплексными параметрами также показало высокую эффективность при расчете *многоканальных* СМО с рекуррентным входящим потоком и (или) немарковским обслуживанием.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыжиков Ю.И. Алгоритмический подход к задачам массового обслуживания. СПб. : ВКА, 2013. 496 с.
2. Рыжиков Ю.И., Уланов А.В. Применение гиперэкспоненциальной аппроксимации в задачах суммирования потоков // Интеллектуальные технологии на транспорте. 2015. № 4. С. 34–39.
3. Рыжиков Ю.И., Уланов А.В. Расчет гиперэкспоненциальной системы М/H_2/n-H_2 с заявками, нетерпеливыми в очереди // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 2(27). С. 47–53.
4. Цициашвили Г.Ш. Синергетический эффект в сети с гиперэкспоненциальными распределениями времен обслуживания // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. № 1 (34). С. 65–68.
5. Назаров А.А., Бронер В.И. Система управления запасами с гиперэкспоненциальным распределением объемов потребления ресурсов // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. № 1(34). С. 43–49.
6. Кендалл М.Дж., Стьюарт А. Теория распределений : пер. с англ. М. : Наука, 1966. 587 с.
7. Cox D.R. A Use of Complex Probabilities in the Theory of Stochastic Process // Proc. of the Cambridge Phil. Soc. 1955. P. 313–323.
8. Bidabad B., Bidabad B. Complex Probability and Markov Stochastic Process // Proc. of the First Iranian Statistics Conference, Isfahan University of Technology. 1992. P. 1–8.
9. Рыжиков Ю.И. Развитие и сопоставление методов расчета многоканальных систем обслуживания // Труды всероссийской конференции «XII Всероссийское совещание по проблемам управления» ВСПУ’2014 / Ин-т пробл. управл. М., 2014. С. 5208–5219.

Рыжиков Юрий Иванович, д-р техн. наук, профессор. E-mail: ryzhbox@yandex.ru
Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского,
Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН
Уланов Александр Викторович, канд. техн. наук. E-mail: ulanov246@rambler.ru
Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского

Поступила в редакцию 3 мая 2016 г.

Ryzhikov Yuriy I. (Mozhaisky Military Space Academy, Saint-Petersburg Institute of Informatics and Automatization of Russian Academy of Science, Russian Federation), *Ulanov Alexander V.* (Mozhaisky Military Space Academy, Russian Federation).

A use of hyperexponential distribution in non-markovian queuing systems analyses.

Keywords: hyperexponential distribution; approximation; complex parameters of distributions; numerical methods; non-markovian queuing systems.

DOI: 10.17223/19988605/36/6

In this paper we consider the application of second order hyperexponential distribution (H_2) with complex-type parameters for analysis of non-markovian queuing systems. This distribution relates to the phase-type one and allows showing non-markovian queuing systems states and the transitions between them as discrete Markov process with continuous time. The complementary cumulative H_2 distribution function is

$$\overline{F}(t) = y_1 e^{-\mu_1 t} + y_2 e^{-\mu_2 t}.$$

Using of H_2 distribution for queuing system calculations is reasoned by following reasons:

– the possibility of saving the three initial moments of the original distribution that provides high accuracy in queuing system calculation;

– much more compact (compared to the Erlang approximation) view transition diagrams and as a consequence necessity to calculate the probabilities of a smaller number of microstates for systems with low coefficients of variation of the service time or the intervals between customers;

– simple calculating of complementary cumulative distribution function.

Since the parameters of H_2-distributions $\{y_j\}$, $j = 1, 2$, are interpreted as the probabilities of random select of one of two phases, most specialists in queuing theory considered only the case when these parameters are defined on a real interval [0; 1], which corresponds to the approximation of the distribution with a coefficient of variation $\upsilon > 1$.

In this article, it is showed the possibilities of the H_2-approximation in the case when the original distribution coefficient of variation $\upsilon < 1$. In this case parameters of H_2 distribution are complex. More detailed analysis of H_2-approximation of the original gamma distribution with a coefficient of variation υ shows that:

– if $\upsilon > 1$, then the parameters are real;

– if $1 > \upsilon > 1/\sqrt{2}$, then the parameters are real, but the paradox: one of the parameters $\{y_j\}$, $j = 1, 2$, is negative, and the other will exceed one;

– equality $\upsilon = 1/\sqrt{2}$ is unacceptable (because corresponds to the Erlang distribution with consistent phase-change and, accordingly, can not be replaced by parallel);

– when $\upsilon < 1/\sqrt{2}$, we have the complex parameters of H_2 distribution.

However, when calculating the queuing system with H_2-approximation in the field of complex values of the parameters of its potential pathology manifests itself only in the intermediate results – in the probabilities of "fictitious" microstate-transition diagram, which split the "physical" state of queuing systems. At the summation of probabilities of microstates tiers of complex parts are annihilated and the result of the calculation – the probability of the number of customers in the system – becomes real.

The paper compares the results of single-channel systems $M/G/1$ calculation invested by embedded Markov chain, which allows you to obtain an exact solution, with the results obtained by the fictitious phase using H_2-approximation of non-exponential service time. Various initial distribution services – deterministic, gamma with shape parameters of 1.5 or 0.5, and even in the interval [0, 2] are considered. It is shown that the accuracy of the above-mentioned result is high enough. The maximum Kolmogorov distance was 0.002, and the relative error of the probability of rare events (about 10^{-5}) did not exceed 15%.

At the same time the quality of approximation in the field of complex parameters H_2 distribution is out of question because density of H_2-distribution in this case is negative and in general does not satisfy the requirements of the probability density function. Quality of approximations here should be assessed indirectly – through comparison of the distribution of the number of customers in the queuing system, obtained through H_2-approximation, with the results obtained by alternative methods.

REFERENCES

1. Ryzhikov, Yu.I. (2013) *Algoritmicheskiy podkhod k zadacham massovogo obsluzhivaniya* [A use of algorithm approach in the queuing theory]. Saint-Petersburg: VKA.
2. Ryzhikov, Yu.I. & Ulanov, A.V. (2015) Using hyperexponential approximation in the summation of flows problems. *Intellektual'nye tekhnologii na transporte – Intelligent technologies on transport.* 4. pp. 34-39. (In Russian).
3 Ryzhikov, Yu.I. & Ulanov, A.V. (2014) The method of calculating $M/H_2/n$-H_2 queuing system with impatient customers. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 2(27). pp. 47-53. (In Russian).
4. Tsitsiashvili, G.Sh. (2016) Synergetic effect in network with hyperexponential distributions of service times. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 1(34). pp. 65-68. (In Russian).
5. Nazarov, A.A. & Broner, V.I. (2016) Inventory model with hyperexponential distribution of demand's batch size. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 1(34). pp. 43-49. (In Russian).
6. Kendall, M. & Stuart, A. (1966) *Teoriya raspredeleniy* [The advanced theory of statistics. Distribution theory]. Translated from English. Mosow: Nauka.
7. Cox, D.R. (1955) A Use of Complex Probabilities in the Theory of Stochastic Process. *Proc. of the Cambridge Phil. Soc.* pp. 313-323. DOI: 10.1017/S0305004100030231
8. Bidabad, B. & Bidabad, B. (1992) Complex Probability and Markov Stochastic Process. *Proc. of the First Iranian Statistics Conference. Isfahan: Isfahan University of Technology Publ.* pp. 1-8.
9. Ryzhikov, Yu.I. (2014) [Progress and comparison of multichannel queuing systems calculations methods]. *Proc. of the XII Russian Conference on Control Science. Moscow: Institute of Control Sciences.* pp. 5208-5219. (In Russian).