ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИКЛАДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

УДК 519.1, 519.151

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ МАТРОИДОВ В ТЕРМИНАХ ПОВЕРХНОСТЕЙ[1]

А. В. Ильев*, В. П. Ильев**,***

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, г. Омск, Россия,
**Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, Россия,
***Омский государственный университет, г. Омск, Россия

Изучаются матроиды конечного ранга и конечномерные комбинаторные геометрии. Предложено определение матроида в терминах поверхностей различного ранга, удовлетворяющих заданным аксиомам инцидентности. Доказана эквивалентность этого определения определению матроида в терминах независимых множеств. В случае обыкновенного матроида его характеризация представляет собой эквивалентное определение комбинаторной геометрии.

Ключевые слова: *матроид, поверхность, ранг, комбинаторная геометрия.*

DOI 10.17223/20710410/33/1

A CHARACTERIZATION OF MATROIDS IN TERMS OF SURFACES

A. V. Il'ev*, V. P. Il'ev**,***

*Sobolev Institute of Mathematics, Omsk, Russia,
**Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia,
***Omsk State University, Omsk, Russia

E-mail: artyom_iljev@mail.ru, iljev@mail.ru

In the paper, the matroids of finite rank and finite-dimensional combinatorial geometries are studied. A definition of a matroid in terms of different rank surfaces satisfying some incidence axioms is proposed. This definition is equivalent to the definition of a matroid in terms of independent sets. In case of a simple matroid its characterization can be viewed as an equivalent definition of a combinatorial geometry.

Keywords: *matroid, surface, rank, combinatorial geometry.*

Введение

Впервые определение конечного матроида было дано в 1935 г. Х. Уитни [1]. В дальнейшем было предложено множество эквивалентных определений матроида. Например, в [2] приведены тринадцать различных эквивалентных определений матроида

[1]Работа первого автора выполнена при поддержке Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013–2020 гг., п. I.1.1.3. «Теоретико-модельные и алгебро-геометрические свойства алгебраических систем».

Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 15-11-10009).

(не считая их вариантов). Достаточно полный обзор определений матроида содержится также в [3, 4]. Большая часть этих определений может быть отнесена к следующим двум группам.

Первая группа определений. Матроид определяется как булева решётка 2^U всех подмножеств конечного множества U с выделенным семейством подмножеств.

К этой группе относится данное Уитни определение в терминах независимых множеств, где выделено непустое семейство $\mathcal{A} \subseteq 2^U$, обладающее следующими свойствами:

- (A1) если $A \in \mathcal{A}$, $B \subseteq A$, то $B \in \mathcal{A}$ (*наследственность*);

- (A2) для любых $A, B \in \mathcal{A}$, таких, что $|B| = |A| + 1$, существует элемент $b \in B \setminus A$, для которого $A \cup \{b\} \in \mathcal{A}$ (*пополнение*).

Обозначается такой матроид обычно как $M = (U, \mathcal{A})$.

Множества семейства $\mathcal{A}$ называются *независимыми*, а все остальные подмножества U — *зависимыми* множествами матроида M. Максимальные по включению независимые множества матроида M называются *базами*, а минимальные по включению зависимые множества — *циклами* матроида M. Семейства всех баз и всех циклов матроида обозначаются $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ соответственно.

Для любого множества $X \subseteq U$ *базой множества* $X \subseteq U$ называется любое его максимальное по включению независимое подмножество. Базы множества U являются базами матроида. Нетрудно показать, что в матроиде все базы любого множества имеют одинаковую мощность.

Ранговой функцией матроида $M = (U, \mathcal{A})$ называется отображение $r : 2^U \to \mathbb{Z}_+$, значением которой $r(X)$ для множества $X \subseteq U$ является мощность любой базы множества X. Ранг множества U называется *рангом матроида.*

К первой группе относятся также хорошо известные определения матроида в терминах баз (выделено семейство $\mathcal{B}$), циклов (выделено семейство $\mathcal{C}$) и другие.

Вторая группа определений. Матроид определяется как булева решетка 2^U всех подмножеств конечного множества U с заданным на 2^U отображением.

Наиболее известными определениями второй группы являются определение в терминах ранговой функции и следующее определение в терминах оператора замыкания.

Матроид — это пара $M = (U, \varphi)$, где U — непустое конечное множество, φ — отображение булевой решётки 2^U всех подмножеств множества U в себя, которое ставит в соответствие любому множеству $X \subseteq U$ его замыкание $\overline{X}$ и обладает следующими свойствами:

- (φ1) $X \subseteq \overline{X}$ для любого $X \subseteq U$ (*направленность*);

- (φ2) для любых $X, Y \subseteq U$ если $X \subseteq Y$, то $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$ (*монотонность*);

- (φ3) $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$ для любого $X \subseteq U$ (*идемпотентность*);

- (φ4) для любых элементов $u, v \in U$ и любого подмножества $X \subseteq U$ если $u \notin \overline{X}$ и $u \in \overline{X \cup \{v\}}$, то $v \in \overline{X \cup \{u\}}$ (*свойство замены*).

Матроид $M = (U, \varphi)$ называется *обыкновенным*, если он, кроме того, обладает свойством (φ5):

- (φ5) $\overline{\varnothing} = \varnothing$ и $\overline{\{u\}} = \{u\}$ для любого $u \in U$.

Подмножество $X \subseteq U$ называется *замкнутым*, если $X = \overline{X}$. Замкнутые множества матроида $M = (U, \varphi)$ называют его *листами* или *поверхностями.*

Наряду с конечными матроидами изучают также матроиды общего вида, основное множество U в которых может быть бесконечным. Как правило, в таких матроидах накладывают некоторые ограничения на ранг. Например, *матроид конечного ранга* в терминах независимых множеств определяется как булева решётка 2^U всех подмножеств произвольного (возможно, бесконечного) множества U с выделенным семейством $\mathcal{A} \subseteq 2^U$, обладающим свойствами (A1), (A2) и

- (A3) существует такое число $r \in \mathbb{N}$, что для любого $A \in \mathcal{A}$ выполнено $|A| \leqslant r$ (*свойство конечности ранга*).

Заметим, что класс матроидов конечного ранга представляет собой объединение всех классов матроидов фиксированного ранга k по всем $k \in \mathbb{N}$.

В определении матроида конечного ранга в терминах оператора замыкания свойство конечности ранга выглядит следующим образом:

- (φ6) для любого $A \subseteq U$ существует такое $B \subseteq A$, что $|B| < \infty$ и $\overline{B} = \overline{A}$.

Определение в терминах оператора замыкания часто принимают в качестве определения комбинаторной геометрии, отождествляя комбинаторные геометрии и обыкновенные матроиды [5–7], а именно: *комбинаторная геометрия* — это пара $M = (U, \varphi)$, где U — непустое множество; φ — отображение булевой решётки 2^U всех подмножеств множества U в себя, которое ставит в соответствие любому множеству $X \subseteq U$ его замыкание $\overline{X}$ и обладает свойствами (φ1)–(φ6). Если в этом определении не требовать выполнения условия (φ5), то получим определение *комбинаторной предгеометрии*. Таким образом, комбинаторная предгеометрия и матроид — это один и тот же объект.

Известны и другие определения комбинаторной геометрии. Например, в [8] даётся такое определение комбинаторной геометрии в терминах поверхностей (аналогичное определение матроида в терминах поверхностей можно найти в [3, 9]).

Комбинаторная геометрия — это пара $M = (U, \mathcal{F})$, где U — непустое конечное множество *точек*; $\mathcal{F}$ — непустое семейство его подмножеств (*поверхностей*), обладающих следующими свойствами:

- (F1) если $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, то $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$;
- (F2) $\varnothing \in \mathcal{F}$, $U \in \mathcal{F}$, а также $\{x\} \in \mathcal{F}$ для любого $x \in U$;
- (F3) для любой поверхности $F \in \mathcal{F}$ $(F \neq U)$ поверхности, которые покрывают F, образуют разбиение оставшихся точек.

Здесь «*E покрывает F*» означает, что $F \subset E$, причём $F \subset G \subset E$ не выполнено ни для какой поверхности $G \in \mathcal{F}$.

Как показано в [3, 8, 9], это определение эквивалентно предыдущему и поэтому может рассматриваться как эквивалентное определение обыкновенного матроида в терминах поверхностей. Как видно, оно также относится к первой группе определений.

Весьма естественно выглядело бы определение комбинаторной геометрии как геометрической конфигурации, т. е. системы поверхностей различного ранга, удовлетворяющих заданным аксиомам инцидентности. В наибольшей степени этим требованиям отвечает определение, данное Дж. Мейсоном в [10] (оно приведено в следующем пункте), однако это определение задаёт объекты более широкого класса, чем класс обыкновенных и даже класс матроидов общего вида. Более подробно об этом сказано далее.

Хотя изучению вопросов, связанных с комбинаторными геометриями, посвящена обширная литература (см., например, [9, 11–18]), ни в одной из работ не содержится общего геометрического определения комбинаторной предгеометрии (геометрии), которое было бы эквивалентно определению матроида (обыкновенного матроида).

В настоящей работе предложено геометрическое определение конечномерной комбинаторной предгеометрии, эквивалентное определению матроида общего вида конечного ранга. Дано также аналогичное определение комбинаторной геометрии.

1. Матроиды как геометрические конфигурации: предварительные сведения

По-видимому, первым, кто выявил геометрические свойства матроида, был С. Маклейн. Уже в 1936 г. в работе [19] он предложил геометрическую интерпретацию обыкновенных матроидов как n-мерных схематических геометрических фигур. Его определения этих фигур выглядят следующим образом.

Определение 1. *Схематическая плоская фигура* — это система, состоящая из конечного числа *точек* и некоторых множеств этих точек, называемых *прямыми*, обладающая следующими свойствами:

- (P1) любая пара точек лежит на единственной прямой;
- (P2) каждая прямая содержит по меньшей мере две точки;
- (P3) никакая прямая не содержит все точки;
- (P4) существуют по крайней мере две различные точки.

Определение 2. *Схематическая пространственная фигура* — это система, состоящая из конечного числа *точек* и некоторых множеств этих точек, называемых *прямыми* и *плоскостями*, обладающая свойствами (P1)–(P4) и, кроме того, следующими свойствами:

- (S1) любые три точки, не лежащие на одной прямой, лежат в единственной плоскости;
- (S2) каждая плоскость содержит по меньшей мере три точки, не лежащие на одной прямой;
- (S3) никакая плоскость не содержит все точки;
- (S4) если плоскость содержит две точки прямой, то она содержит все точки данной прямой.

Далее Маклейн указывает, что аналогично можно определить *схематическую n-мерную фигуру*, которая состоит из конечного числа *точек* и *k-мерных плоскостей* для $k = 1, \dots, n-1$, но точного определения не даёт. Маклейн утверждает, что существует взаимно однозначное соответствие между матроидами ранга $n+1$ и схематическими n-мерными фигурами, но не приводит доказательства.

Поскольку в работе [19] в явном виде не сформулировано определение в n-мерном случае, то возник вопрос о существовании полностью геометрического определения комбинаторной геометрии в терминах поверхностей определённого ранга. В литературе удалось найти несколько определений в терминах поверхностей (см. введение), но в явном виде ранг поверхности присутствует только в следующем определении.

Определение 3 [10]. *Комбинаторная геометрия* — это конечное множество поверхностей с соответствующим рангом $k \geqslant 0$, таких, что всякая k-поверхность и 1-поверхность (точка), не лежащая на ней, лежат в единственной $(k+1)$-поверхности.

Однако если поверхностям комбинаторной геометрии в определении Мейсона поставить в соответствие поверхности обыкновенного матроида, а под рангом поверхности понимать значение ранговой функции на множестве всех точек данной поверхности, то данное в работе Мейсона определение комбинаторной геометрии не эквивалентно ранее приведённому определению обыкновенного матроида в терминах поверхностей, что подтверждается следующим примером.

Пример 1. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ — множество точек.

Поверхность ранга 0: $\varnothing$.

Поверхности ранга 1: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$, $\{7\}$ — точки.

Поверхности ранга 2: $\{1,2,3\}$, $\{1,4,5\}$, $\{1,6,7\}$, $\{2,4,7\}$, $\{2,5,6\}$, $\{3,4,6\}$, $\{3,5,7\}$.

Поверхности ранга 3: $\{1,2,3,4,5,6\}$, $\{1,2,3,7\}$, $\{1,2,4,7\}$, $\{1,2,6,7\}$, $\{1,3,5,7\}$, $\{1,3,6,7\}$, $\{1,4,5,7\}$, $\{1,4,6,7\}$, $\{1,5,6,7\}$, $\{2,3,4,7\}$, $\{2,3,5,7\}$, $\{2,4,5,7\}$, $\{2,4,6,7\}$, $\{2,5,6,7\}$, $\{3,4,5,7\}$, $\{3,4,6,7\}$, $\{3,5,6,7\}$.

Поверхность ранга 4: само множество $U = \{1,2,3,4,5,6,7\}$.

Легко видеть, что этот набор поверхностей удовлетворяет определению Мейсона, но не является обыкновенным матроидом, поскольку в нём нарушена аксиома (F1). Например, пересечение поверхностей $\{1,2,3,7\}$ и $\{1,2,4,7\}$ — множество $\{1,2,7\}$ — не является поверхностью.

Естественно возникает задача дополнить определение Мейсона до эквивалентного определению обыкновенного матроида, после чего отделить комбинаторные предгеометрии от геометрий аналогично определениям матроида и обыкновенного матроида в терминах замыкания. Это и сделано в данной работе. Кроме того, в отличие от Маклейна, который ведёт речь только о конечных матроидах фиксированного ранга, мы даём геометрическое определение как конечных, так и бесконечных матроидов конечного ранга.

2. Геометрические свойства матроидов

В общем случае определение матроида конечного ранга в терминах независимых множеств выглядит следующим образом.

Определение 4 [5]. *Матроид* — это пара $M = (U, \mathcal{A})$, где U — непустое (возможно, бесконечное) множество; $\mathcal{A}$ — непустое семейство его подмножеств (называемых *независимыми*), обладающее следующими свойствами:

- (A1) если $A \in \mathcal{A}$, $B \subseteq A$, то $B \in \mathcal{A}$ (наследственность);

- (A2) для любых $A, B \in \mathcal{A}$, таких, что $|B| = |A| + 1$, существует элемент $b \in B \setminus A$, для которого $A \cup \{b\} \in \mathcal{A}$ (пополнение);

- (A3) существует такое число $r \in \mathbb{N}$, что для любого $A \in \mathcal{A}$ выполнено $|A| \leqslant r$ (конечность ранга).

Пусть $M = (U, \mathcal{A})$ — матроид, где $\mathcal{A}$ — семейство его независимых множеств. Фиксируем $A \in \mathcal{A}$ — независимое множество мощности k. Определим *поверхность ранга* k как множество

$$F(A) = A \cup \{u \in U : A \cup u \notin \mathcal{A}\}.$$

Лемма 1. Пусть $A, B \in \mathcal{A}$, $|A| = |B|$, причём $A \neq B$ и $B \subseteq F(A)$. Тогда $F(A) = F(B)$.

Доказательство.

1) Докажем, что $F(A) \subseteq F(B)$. Предположим противное, т.е. существует $a \in F(A) \setminus F(B)$. Это означает, что $B \cup \{a\} \in \mathcal{A}$.

Воспользуемся свойством пополнения (A2): $|B \cup \{a\}| = |A| + 1$, поэтому существует $b \in (B \cup \{a\}) \setminus A$, такой, что $A \cup \{b\} \in \mathcal{A}$. С другой стороны, $A \cup \{b\} \subseteq F(A)$ — противоречие с определением $F(A)$. Следовательно, $F(A) \subseteq F(B)$.

2) Докажем, что $F(B) \subseteq F(A)$. Предположим противное, т.е. существует $b \in F(B) \setminus F(A)$. Это означает, что $B \cup \{b\} \notin \mathcal{A}$ и $A \cup \{b\} \in \mathcal{A}$.

Так как $|A \cup \{b\}| = |B| + 1$, в силу свойства (A2) существует $a \in (A \cup \{b\}) \setminus B$, такой, что $B \cup \{a\} \in \mathcal{A}$. Поскольку $B \cup \{b\} \notin \mathcal{A}$, то $a \neq b$. Кроме того, в п. 1 доказано, что $F(A) \subseteq F(B)$. Поэтому $B \cup \{a\} \subseteq F(B)$, т.е. получаем противоречие с определением $F(B)$. Это означает, что $F(B) \subseteq F(A)$. Таким образом, $F(B) = F(A)$. ■

Следствие 1. Поверхность ранга k однозначно определяется любым независимым множеством мощности k, содержащимся в этой поверхности.

Следствие 1 даёт возможность говорить о поверхности ранга k без указания конкретного независимого множества мощности k, определяющего эту поверхность. Таким образом, семейство поверхностей матроида определяется по следующему правилу:

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq U : \exists A \in \mathcal{A}\ (F = F(A))\}. \tag{1}$$

Лемма 2. Пусть $M = (U, \mathcal{A})$ — матроид, $A \subseteq U$ — подмножество его элементов мощности k, не лежащее ни в какой поверхности ранга, меньшего k. Тогда $A \in \mathcal{A}$.

Доказательство. От противного. Пусть $A \notin \mathcal{A}$ — множество мощности k, такое, что для любого независимого множества B мощности, меньшей k, выполнено $A \not\subseteq F(B)$. Но из множества A можно выделить максимальное по включению независимое подмножество A'. Его мощность $|A'| < k$, и $A \subseteq F(A')$ по определению поверхности, т. е. A лежит в поверхности ранга, меньшего k, — противоречие. ■

Теорема 1. Для всякого матроида $M = (U, \mathcal{A})$, поверхности которого определены в соответствии с правилом (1), выполнены свойства (G1)–(G5):

- (G1) поверхность ранга 0 существует;
- (G2) никакая поверхность ранга k не лежит в поверхности ранга $k - 1$;
- (G3) всякая поверхность ранга k и точка, не лежащая на ней, лежат в единственной поверхности ранга $k + 1$;
- (G4) любые k точек, не лежащие ни в какой поверхности ранга, меньшего k, лежат в единственной поверхности ранга k;
- (G5) существует такое число $r \in \mathbb{N}$, что ранг любой поверхности не превосходит r.

Доказательство. Свойство (G1) следует из независимости $\varnothing$. Поверхностью ранга 0 является $F(\varnothing)$.

Свойство (G2) доказывается от противного. Предположим, что существуют такие независимые множества A и B, что $|A| = k - 1$, $|B| = k$ и $F(B) \subseteq F(A)$. Тогда в силу свойства пополнения (A2) существует элемент $b \in B \setminus A$, такой, что $A \cup \{b\} \in \mathcal{A}$. Но поскольку $A \cup \{b\} \subseteq F(A)$, получаем противоречие с определением $F(A)$.

Докажем свойство (G3). Пусть $F(A)$ — поверхность ранга k и элемент $b \notin F(A)$. Это означает, что $A \cup \{b\} \in \mathcal{A}$. Поэтому в силу следствия 1 $F(A \cup \{b\})$ — единственная поверхность ранга $k + 1$, содержащая поверхность $F(A)$ и элемент b.

Докажем свойство (G4). Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ — произвольное множество, которое не лежит ни в какой поверхности ранга, меньшего k. По лемме 2 оно независимо и, следовательно, лежит в единственной поверхности ранга k в силу следствия 1.

Свойство (G5) следует из свойства (A3) матроида. ■

3. Основные свойства комбинаторных предгеометрий

Определение комбинаторной предгеометрии в конечном случае выглядит так.

Определение 5. *Комбинаторная предгеометрия* — это пара $(U, \mathcal{F})$, где U — непустое конечное множество *точек*; $\mathcal{F}$ — семейство его подмножеств — *поверхностей*, каждой из которых приписан *ранг* $k \in \mathbb{Z}_+$, обладающих следующими свойствами:

- (G1) поверхность ранга 0 существует;
- (G2) никакая поверхность ранга k не лежит в поверхности ранга $k - 1$;
- (G3) всякая поверхность ранга k и точка, не лежащая на ней, лежат в единственной поверхности ранга $k + 1$;
- (G4) любые k точек, не лежащие ни в какой поверхности ранга, меньшего k, лежат в единственной поверхности ранга k.

Чтобы определить класс конечномерных *комбинаторных предгеометрий*, включающий как конечные, так и бесконечные объекты, в определении 5 нужно потребовать выполнение свойства (G5):

- (G5) существует такое число $r \in \mathbb{N}$, что ранг любой поверхности не превосходит r.

Замечание 1. Несложно проверить, что система аксиом (G1)–(G5) *независима*, т. е. любая из них не является следствием остальных аксиом.

Замечание 2. В любой комбинаторной предгеометрии существует единственная поверхность ранга 0 (это легко доказывается применением аксиом (G1) и (G4) для $\varnothing$).

Определение 6. Множество точек $\{a_1, \ldots, a_k\}$ называется *независимым множеством* точек комбинаторной предгеометрии, если оно не лежит ни в какой поверхности ранга, меньшего k, т. е. семейство $\mathcal{A}$ независимых множеств точек определяется следующим образом:

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq U : \forall F \in \mathcal{F} \ ((r(F) < |A|) \Rightarrow (A \nsubseteq F))\}. \tag{2}$$

Заметим, что $\varnothing$ — независимое множество по определению.

Лемма 3. Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ — независимое множество точек, F — поверхность ранга k, такая, что $A \subseteq F$. Тогда для любой точки $a \notin F$ множество $A \cup \{a\}$ является независимым множеством точек.

Доказательство. В поверхности ранга, меньшего k, множество $A \cup \{a\}$ лежать не может, потому что это противоречило бы независимости множества A. По свойству (G4) F — единственная поверхность ранга k, в которой лежит A. Таким образом, множество $A \cup \{a\}$ не лежит ни в какой поверхности ранга, меньшего $k + 1$, а значит, оно независимо по определению. ■

Теперь докажем основные свойства независимых множеств точек комбинаторной предгеометрии.

Теорема 2. Во всякой комбинаторной предгеометрии семейство $\mathcal{A}$, определённое по правилу (2), обладает следующими свойствами:

1) любое подмножество независимого множества точек само является независимым множеством (наследственность);
2) если A и B — произвольные независимые множества точек, для которых выполнено $|B| = |A| + 1$, то существует точка $b \in B \setminus A$, такая, что $A \cup \{b\}$ — независимое множество (пополнение);
3) существует число $r \in \mathbb{N}$, такое, что для любого $A \in \mathcal{A}$ выполнено $|A| \leqslant r$ (конечность ранга).

Доказательство. Пусть $(U, \mathcal{F})$ — комбинаторная предгеометрия. В силу свойства (G5) для неё существует такое число $r \in \mathbb{N}$, что ранг любой поверхности данной комбинаторной предгеометрии не превосходит r.

1) Докажем свойство наследственности. Пусть $k \in \{1, \ldots, r\}$. Докажем, что любое подмножество независимого множества $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$, состоящее из $k - 1$ точек, является независимым.

Предположим противное, т. е. существует точка a_i, такая, что множество точек

$$A_i = A \setminus \{a_i\} = \{a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_k\}$$

не является независимым множеством. В этом случае по определению должна существовать поверхность F ранга $l < k - 1$, в которой лежало бы A_i.

Точка a_i не лежит в F, иначе всё множество A лежало бы в F — поверхности ранга, меньшего k, что противоречит независимости множества A. Тогда по свойству (G3) существует единственная поверхность H ранга $l+1$, в которой F и a_i, а значит, и всё множество A лежат в H. Поскольку $l < k-1$, то $l+1 < k$, и получается, что множество A лежит в поверхности ранга, меньшего k, что противоречит независимости A.

Рассуждая аналогичным образом, можно показать, что любые подмножества множества A, состоящие из $k-2$, $k-3$, …, 1 точки, независимы.

2) Докажем свойство пополнения. Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_k, c_1, \ldots, c_l\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_k, b_{k+1}, c_1, \ldots, c_l\}$ — независимые множества, где $k, l \in \mathbb{Z}_+$; $k+l+1 \leqslant r$ и $a_i \neq b_j$ для любых $i \in \{1, \ldots, k\}$, $j \in \{1, \ldots, k+1\}$. Тогда $A \cap B = \{c_1, \ldots, c_l\}$.

Предположим противное, что для любой точки $b_j \in B \setminus A$ множество $A \cup \{b_j\}$ не является независимым, т. е. существует некоторая поверхность ранга, меньшего $k+l+1$, в которой лежит $A \cup \{b_j\}$.

Поскольку A независимо, оно не лежит ни в какой поверхности ранга, меньшего $k+l$. Однако в силу аксиомы (G4) существует единственная поверхность F ранга $k+l$, которая содержит множество A. С учётом предположения, что $A \cup \{b_j\}$ не является независимым множеством, оно также должно лежать в F.

Таким образом, для любой точки $b_j \in B \setminus A$ множество $A \cup \{b_j\}$ лежит в F, а значит, всё множество B лежит в F — поверхности ранга $k+l$, что противоречит независимости B.

3) Свойство конечности ранга следует из (G3) и (G5). ■

4. Взаимно однозначное соответствие между матроидами и комбинаторными предгеометриями

Эквивалентность определения матроида конечного ранга приведённому в предыдущем пункте определению конечномерной комбинаторной предгеометрии вытекает из следующей теоремы.

Теорема 3 (Основная теорема).

1) Пусть $M = (U, \mathcal{A})$ — матроид, где U — непустое множество его элементов; $\mathcal{A}$ — семейство его независимых множеств. Тогда семейство $\mathcal{F}$, определённое по правилу (1), обладает свойствами (G1)–(G5), причём имеет место равенство (2).

2) Пусть $(U, \mathcal{F})$ — комбинаторная предгеометрия, где U — непустое множество точек, а $\mathcal{F}$ — семейство её поверхностей. Тогда семейство $\mathcal{A}$, определённое по правилу (2), обладает свойствами (A1)–(A3), причём имеет место равенство (1).

Доказательство.

1) Свойства (G1)–(G5) следуют из теоремы 1, а равенство (2) — из леммы 2.

2) Свойства (A1)–(A3) следуют из теоремы 2.

Чтобы доказать равенство (1), сначала покажем, что всякая поверхность ранга k содержит в себе независимое множество точек мощности k. Предположим противное, что для некоторой поверхности F максимальная мощность её независимого подмножества равна $k-1$. Тогда по свойству (G4) существует единственная поверхность H ранга $k-1$, определённая для некоторого независимого множества $A \subseteq F$ мощности $k-1$. Заметим, что F не содержит точек, не лежащих в H, поскольку если существует точка $a \in F \setminus H$, то в силу леммы 3 множество $A \cup \{a\}$ является независимым вопреки максимальности множества A в поверхности F. Таким образом, $F \subseteq H$, что противоречит аксиоме (G2). Аналогично с использованием аксиомы (G3) можно показать, что мощность максимального независимого подмножества поверхности F не может быть меньше $k-1$.

Теперь докажем равенство (1), т. е. тот факт, что любая поверхность F ранга k может быть определена при помощи независимого множества точек $A \subseteq F$ мощности k по правилу

$$F = A \cup \{u \in U : A \cup \{u\} \notin \mathcal{A}\}.$$

В силу свойства (G4) поверхность F задаётся множеством A единственным образом. По лемме 3 все точки $u \in U$, такие, что $A \cup \{u\}$ не является независимым множеством, лежат в F. При этом других точек поверхность F содержать не может, поскольку это противоречит понятию независимого множества точек. ■

Теперь дадим определения обыкновенного матроида и комбинаторной геометрии.

Определение 7. Обыкновенный матроид — это пара $M = (U, \mathcal{A})$, где U — непустое множество; $\mathcal{A}$ — непустое семейство его независимых подмножеств, обладающее свойствами (A1)–(A3) и, кроме того, следующими свойствами:

- (A4) для любого $u \in U$ выполнено $\{u\} \in \mathcal{A}$;
- (A5) для любых $u, v \in U$ если $u \neq v$, то $\{u, v\} \in \mathcal{A}$.

Определение 8. *Комбинаторная геометрия* — это комбинаторная предгеометрия, для которой выполнено свойство (G6):

- (G6) $\varnothing$ и все точки являются поверхностями.

Замечание 3. В любой комбинаторной геометрии поверхностями ранга 1 являются точки, и только они.

Из следующей теоремы вытекает эквивалентность предложенного определения комбинаторной геометрии определению обыкновенного матроида.

Теорема 4. Существует взаимно однозначное соответствие между обыкновенными матроидами и комбинаторными геометриями.

Доказательство.

1) Пусть $M = (U, \mathcal{A})$ — обыкновенный матроид, где U — непустое множество его элементов; $\mathcal{A}$ — семейство его независимых подмножеств. По теореме 3 семейство $\mathcal{F}$, определённое по правилу (1), обладает свойствами (G1)–(G5), причём имеет место равенство (2).

Докажем свойство (G6). По свойству наследственности $\varnothing \in \mathcal{A}$. Таким образом, поверхность ранга 0 совпадает с пустым множеством в силу свойства (A4). Аналогично, поскольку все одноэлементные множества являются независимыми, для любого из них определяемая им поверхность ранга 1 совпадает с самим одноэлементным множеством в силу свойства (A5).

2) Пусть $(U, \mathcal{F})$ — комбинаторная геометрия, где U — непустое множество точек, а $\mathcal{F}$ — семейство её поверхностей. По теореме 3 семейство $\mathcal{A}$, определённое по правилу (2), обладает свойствами (A1)–(A3), причём имеет место равенство (1).

Докажем свойство (A4). В силу замечания 2 и свойств (G2) и (G4) комбинаторной геометрии $\varnothing$ является единственной поверхностью ранга 0. Поскольку никакая точка не лежит в поверхности ранга 0, любое множество комбинаторной геометрии, состоящее из единственной точки, является независимым. Таким образом, свойство (A4) доказано.

Теперь докажем свойство (A5). Применив аксиомы (G3) и (G4) к $\varnothing$ и точкам, легко сделать вывод, что в комбинаторной геометрии поверхностями ранга 1 являются все точки, и только они. Отсюда следует, что любое множество, состоящее из двух точек, независимо, поскольку оно не лежит ни в какой поверхности ранга, меньшего 2. ■

Заключение

Соответствие между матроидами конечного ранга и конечномерными комбинаторными предгеометриями, установленное в теореме 3, является взаимно однозначным. Поэтому определение комбинаторной предгеометрии можно рассматривать как эквивалентное определение матроида в терминах поверхностей заданного ранга. Аналогично, из теоремы 4 следует, что определение комбинаторной геометрии является эквивалентным определением обыкновенного матроида в данных терминах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Whitney H.* On the abstract properties of linear dependence // Amer. J. Math. 1935. V. 57. P. 509–533.
2. *Brylawski T.* Appendix of matroid cryptomorphisms // Theory of Matroids. Encyclopedia of Mathematics and its Applications 26 / ed. N. White. Cambridge: Cambridge University Press, 1986. P. 298–312.
3. *Schrijver A.* Combinatorial Optimization. V. B. Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer Verlag, 2003. 1881 p.
4. *Welsh D. J. A.* Matroid Theory. London, N. Y., San Francisco: Academic Press, 1976. 433 p.
5. *Айгнер М.* Комбинаторная теория. М.: Мир, 1982. 558 с.
6. *Рыбников К. А.* Введение в комбинаторный анализ. М.: Изд-во МГУ, 1985. 308 с.
7. *Crapo H. H. and Rota G.-C.* On the Foundations of Combinatorial Theory. II. Combinatorial Geometries. Cambridge, MA: MIT Press, 1970. 293 p.
8. *Van Lint J. H. and Wilson R. M.* A Course in Combinatorics. N. Y.: Cambridge University Press, 2001. 602 p.
9. *Gordon G. and McNulty J.* Matroids: a Geometric Introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. 410 p.
10. *Mason J. H.* Matroids as the study of geometrical configurations // Higher Combinatorics / ed. M. Aigner. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1977. P. 133–176.
11. *Bruhn H., Diestel R., Kriesell M., et al.* Axioms for infinite matroids // Adv. Math. 2013. V. 239. P. 18–46.
12. *Delucchi E.* Combinatorial Geometries in Algebra and Topology. Habilitationsschrift. Universität Bremen, 2011. 160 p.
13. *Gelfand I. M., Goresky R. M., McPherson R. D., and Serganova V.* Combinatorial geometries, convex polyhedra and Schubert cells // Adv. Math. 1987. V. 63. P. 301–316.
14. *Oxley J.* Matroid Theory. N. Y.: Oxford University Press, 1992. 532 p.
15. *Pitsoulis L. S.* Topics in Matroid Theory. N. Y.: Springer Verlag, 2014. 127 p.
16. Theory of Matroids. Encyclopedia of Mathematics and its Applications 26 / ed. N. White. Cambridge: Cambridge University Press, 1986. 316 p.
17. Combinatorial Geometries. Encyclopedia of Mathematics and its Applications 29 / ed. N. White. Cambridge: Cambridge University Press, 1987. 212 p.
18. Matroid Applications. Encyclopedia of Mathematics and its Applications 40 / ed. N. White. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. 363 p.
19. *Mac Lane S.* Some interpretations of abstract linear dependence in terms of projective geometry // Amer. J. Math. 1936. V. 58. P. 236–240.

REFERENCES

1. *Whitney H.* On the abstract properties of linear dependence. Amer. J. Math., 1935, vol. 57, pp. 509–533.

2. *Brylawski T.* Appendix of matroid cryptomorphisms. Theory of Matroids. Encyclopedia of Mathematics and its Applications 26, ed. N. White. Cambridge, Cambridge University Press, 1986, pp. 298–312.
3. *Schrijver A.* Combinatorial Optimization, vol. B. Berlin, Heidelberg, N. Y., Springer Verlag, 2003. 1881 p.
4. *Welsh D. J. A.* Matroid Theory. London, N. Y., San Francisco, Academic Press, 1976. 433 p.
5. *Aigner M.* Combinatorial Theory. Berlin, Heidelberg, N. Y., Springer Verlag, 1979.
6. *Rybnikov K. A.* Vvedenie v kombinatornyy analiz [Introduction to Combinatorial Analysis]. Moscow, MSU Publ., 1985. (in Russian)
7. *Crapo H. H. and Rota G.-C.* On the Foundations of Combinatorial Theory. II. Combinatorial Geometries. Cambridge, MA, MIT Press, 1970. 293 p.
8. *Van Lint J. H. and Wilson R. M.* A Course in Combinatorics. N. Y., Cambridge University Press, 2001. 602 p.
9. *Gordon G. and McNulty J.* Matroids: a Geometric Introduction. Cambridge, Cambridge University Press, 2012. 410 p.
10. *Mason J. H.* Matroids as the study of geometrical configurations. Higher Combinatorics, ed. M. Aigner. Dordrecht, Reidel Publishing Company, 1977, pp. 133–176.
11. *Bruhn H., Diestel R., Kriesell M., et al.* Axioms for infinite matroids. Adv. Math., 2013, vol. 239, pp. 18–46.
12. *Delucchi E.* Combinatorial Geometries in Algebra and Topology. Habilitationsschrift. Universität Bremen, 2011. 160 p.
13. *Gelfand I. M., Goresky R. M., McPherson R. D., and Serganova V.* Combinatorial geometries, convex polyhedra and Schubert cells. Adv. Math., 1987, vol. 63, pp. 301–316.
14. *Oxley J.* Matroid Theory. N. Y., Oxford University Press, 1992. 532 p.
15. *Pitsoulis L. S.* Topics in Matroid Theory. N. Y., Springer Verlag, 2014. 127 p.
16. Theory of Matroids. Encyclopedia of Mathematics and its Applications 26, ed. N. White. Cambridge, Cambridge University Press, 1986. 316 p.
17. Combinatorial Geometries. Encyclopedia of Mathematics and its Applications 29, ed. N. White. Cambridge, Cambridge University Press, 1987. 212 p.
18. Matroid Applications. Encyclopedia of Mathematics and its Applications 40, ed. N. White. Cambridge, Cambridge University Press, 1992. 363 p.
19. *Mac Lane S.* Some interpretations of abstract linear dependence in terms of projective geometry. Amer. J. Math., 1936, vol. 58, pp. 236–240.