

УДК 519.1

НОВАЯ УНИВЕРСАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ЭКСПОНЕНТОВ ГРАФОВ¹

В. М. Фомичев

*Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, г. Москва, Россия**Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», г. Москва, Россия**Институт проблем информатики ФИЦ ИУ РАН, г. Москва, Россия*

Получена новая универсальная оценка экспонентов n -вершинных примитивных орграфов через характеристики содержащихся в орграфе контуров $C_1, \dots, C_k$ длины $l_1, \dots, l_k$ соответственно, где $(l_1, \dots, l_k) = 1$. Показано, что $\exp \Gamma \leq n(r+1) + g(l_1, \dots, l_k) + L$, где r — число компонент связности орграфа $C_1 \cup \dots \cup C_k$; $g(l_1, \dots, l_k)$ — число Фробениуса; L — линейная комбинация длин определённых контуров орграфа Γ . Дано уточнение оценки для некоторых частных случаев. Приведены примеры оценок экспонентов орграфов. Полученная универсальная оценка для многих n -вершинных примитивных орграфов улучшает известные оценки. Порядок её величины варьируется от $O(n)$ до $O(n^2)$. Оценка принимает наибольшие значения порядка $O(n^2)$, только если кратчайший контур примитивной системы имеет длину порядка $O(n)$. На графах Виландта полученная оценка совпадает с оценкой Виландта.

Ключевые слова: число Фробениуса, примитивный граф, экспонент графа.

DOI 10.17223/20710410/33/6

THE NEW UNIVERSAL ESTIMATION FOR EXPONENTS OF GRAPHS

V. M. Fomichev

*Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russia**National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, Russia**The Institute of Informatics Problems of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia***E-mail:** fomichev@nm.ru

It is shown that, for a n -vertex primitive digraph Γ with a system of directed circuits $C_1, \dots, C_k$ of lengths $l_1, \dots, l_k$ respectively, $\exp \Gamma \leq n(r+1) + g(l_1, \dots, l_k) + L$, where r is the number of connected components in the digraph $C_1 \cup \dots \cup C_k$, $g(l_1, \dots, l_k)$ is the Frobenius's number, and L is a linear combination of the lengths of some directed circuits in Γ . This estimation is mostly better than other estimations known for many cases. Some more precise expressions of it are given for some particular types of graphs. The value of the estimation varies from $O(n)$ to $O(n^2)$ as n increases indefinitely and equals $O(n^2)$, only if the length of the shortest directed circuit is $O(n)$. For Wielandt's graphs, this estimation coincides with the Wielandt's one.

Keywords: Frobenius's number, primitive graph, exponent of graph.

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 16-01-00226.

Введение

Введём основные обозначения:

- $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$;
- (l, λ) — наибольший общий делитель натуральных чисел l, λ ;
- $\langle l_1, \dots, l_k \rangle$ — аддитивная полугруппа, порождённая множеством натуральных чисел $l_1, \dots, l_k$;
- $g(l_1, \dots, l_k)$ — число Фробениуса для натуральных аргументов $l_1, \dots, l_k$;
- $V(\hat{C})$ — множество вершин системы контуров $\hat{C}$ в графе;
- $w(a, b)$ — путь из вершины a в вершину b в графе;
- $w \cdot w'$ — конкатенация путей w и w' , где совпадают последняя вершина пути w и первая вершина пути w' ;
- $\text{len } w$ — длина пути w в графе.

В соответствии с известным критерием сильносвязный граф является примитивным тогда и только тогда, когда содержит систему контуров, имеющих взаимно простые длины. Абсолютная оценка экспонента [1] примитивного n -вершинного орграфа Γ использует только число вершин:

$$\exp \Gamma \leq n^2 - 2n + 2. \quad (1)$$

Так как в примитивном графе имеются контуры, универсальной можно считать также следующую оценку [2, с. 227]: если в Γ имеется контур длины l , то

$$\exp \Gamma \leq n + l(n - 2). \quad (2)$$

Последующие результаты уточняли универсальные оценки экспонента с учётом длин имеющихся в орграфе контуров. Если, в частности, в орграфе Γ имеется d петель [2, с. 408], то $\exp \Gamma \leq 2n - d - 1$. Если в орграфе Γ известны длины l и λ двух простых контуров C и Z [3, с. 408], где $(l, \lambda) = 1$, $1 < \lambda < l \leq n$, $n > 2$ и h — число общих вершин контуров C и Z , то $\exp \Gamma \leq l\lambda - 2l - 3\lambda + 3n$ при $h = 0$ и $\exp \Gamma \leq l\lambda - l - 3\lambda + h + 2n$ при $h > 0$. Список уточнений имеет продолжение [4].

Данная работа посвящена получению новой универсальной оценки экспонентов n -вершинных примитивных орграфов. Оценка использует длины ряда контуров, содержащихся в примитивном орграфе. Полученная универсальная оценка по сравнению с оценками (1) и (2) использует больше информации о графе и, как правило, улучшает их.

1. Универсальная оценка экспонента с использованием длин контуров графа

Обозначим: $\hat{C} = \{C_1, \dots, C_k\}$ — система контуров в орграфе Γ длин $l_1, \dots, l_k$ соответственно, $k \in \mathbb{N}$; $\Gamma(\hat{C}) = C_1 \cup \dots \cup C_k$ — часть орграфа Γ .

Систему $\hat{C}$ назовём примитивной, если $(l_1, \dots, l_k) = 1$. Систему контуров $\hat{C}$ назовём связной, если граф $\Gamma(\hat{C})$ связный. В орграфе Γ контуры C и C' назовём смежными (записываем $C \sim C'$), если они имеют общую вершину.

Лемма 1. Если $\hat{C}$ — связная система контуров орграфа Γ , то в орграфе $\Gamma(\hat{C})$ имеется контур, обходящий однократно каждый контур системы $\hat{C}$.

Доказательство². Индукция по числу контуров связной системы. При $k = 1$ утверждение тривиально. Если при $k = 2$ контуры C_1 и C_2 длин l_1 и l_2 смежные и i — их общая вершина, то искомым контур C есть $C_1(i) \cdot C_2(i)$.

²Лемма доказана совместно с Я. Э. Аvezовой.

Пусть $k \geq 2$ и лемма выполнена для любой связной системы менее k контуров. По условию контур C_1 смежный с другим контуром системы (пусть $C_1 \sim C_2$). Тогда либо C_1 , либо C_2 является смежным с некоторым из остальных контуров системы (пусть это C_3). Следовательно, система контуров $\{C_1, C_2, C_3\}$ является связной. Рассуждая аналогично, построим связную систему контуров $\{C_1, \dots, C_{k-1}\}$. По предположению индукции в $\Gamma(\hat{C})$ существует контур C' , однократно обходящий каждый из контуров $C_1, \dots, C_{k-1}$. По условию контур C_k смежный с некоторым из контуров $C_1, \dots, C_{k-1}$, значит, $C_k \sim C'$ и по предположению индукции в $\Gamma(\hat{C})$ существует контур C , обходящий однократно контуры C' и C_k . ■

Контур Z , обходящий однократно каждый контур связной системы $\hat{C}$, назовём квазиэйлеровым $\hat{C}$ -контуром, при этом $\text{len } Z = l_1 + \dots + l_k$ в силу леммы 1.

Следствие 1. В орграфе $\Gamma(\hat{C})$ множеству $\{\hat{C}_1, \dots, \hat{C}_r\}$ компонент связности соответствует множество $\{Z_1, \dots, Z_r\}$ (в общем случае не единственное) независимых контуров, $1 \leq r \leq k$, где Z_j — квазиэйлеров $\hat{C}_j$ -контур, $j = 1, \dots, r$.

Доказательство. Следует из леммы 1 и свойств разбиений множеств. ■

Пусть далее $l_1 \leq \dots \leq l_k$, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r$, где $\lambda_j = \text{len } Z_j$, $j = 1, \dots, r$. При $(l_1, \dots, l_k) = 1$ обозначим $g(l_1, \dots, l_k)$ число Фробениуса (наибольшее число, не принадлежащее полугруппе $\langle l_1, \dots, l_k \rangle$ при $k > 1$; $g(1) = -1$).

Теорема 1. Пусть n -вершинный орграф Γ содержит примитивную систему контуров $\hat{C} = \{C_1, \dots, C_k\}$ длин $l_1, \dots, l_k$ соответственно и компонента связности $\hat{C}_j$ орграфа $\Gamma(\hat{C})$ содержит квазиэйлеров $\hat{C}_j$ -контур Z_j длины λ_j , $j = 1, \dots, r$. Тогда

$$\exp \Gamma \leq n(r+1) + g(l_1, \dots, l_k) - \sum_{j=1}^r (l_j + (j-1)\lambda_j).$$

Доказательство. Для вершин a, b орграфа Γ обозначим: $w(a, a_j)$ — кратчайший путь из a до ближайшей вершины a_j контура Z_j ; $w(a_j, b)$ — кратчайший путь из a_j до b , $j = 1, \dots, r$; $mC(i)$ — контур, полученный при m -кратном проходе контура C из вершины i , где $m \geq 0$; $0C(i)$ — пустой контур.

Без ограничения общности положим, что контур Z_j содержит вершины контуров $C_{t_{j-1}+1}, \dots, C_{t_j}$, и только этих контуров, где $0 = t_0 < \dots < t_r = k$ и $\text{len } Z_j = \lambda_j = l_{t_{j-1}+1} + \dots + l_{t_j}$ в силу леммы 1, $j = 1, \dots, r$. Перенумеруем все вершины контура Z_j числами от 1 до λ_j , где нумерация начинается с вершины a_j , и обозначим:

- 1) путь $w(\tau, \theta) = (\tau, \tau+1, \dots, \theta)$ при $\tau \leq \theta$, путь $w(\tau, \theta)$ пустой при $\tau = \theta$;
- 2) ξ_i — наименьший номер вершины, принадлежащей контуру C_i , $i = t_{j-1}+1, \dots, t_j$;
- 3) $v_j = \max\{\xi_{t_{j-1}+1}, \dots, \xi_{t_j}\}$.

Так как $l_{t_{j-1}+1} \leq \dots \leq l_{t_j}$, то $v_j \leq \lambda_j - l_{t_{j-1}+1} + 1$. Положив для определённости $\xi_{t_{j-1}+1} \geq \dots \geq \xi_{t_j}$ (в общем случае не исключено любое упорядочение этих номеров), определим путь $w(Z_j)$ при неотрицательных целых числах $m_{t_j}, \dots, m_{t_{j-1}+1}$:

$$w(Z_j) = w(1, \xi_{t_j}) \cdot m_{t_j} C_{t_j}(\xi_{t_j}) \cdot \dots \cdot w(\xi_{t_{j-1}+2}, \xi_{t_{j-1}+1}) \cdot m_{t_{j-1}+1} C_{t_{j-1}+1}(\xi_{t_{j-1}+1}).$$

Отсюда при любом порядке указанных номеров для длины пути $w(Z_j)$ выполнено

$$\begin{aligned} \text{len } w(Z_j) &= \text{len } w(1, \xi_{t_j}) + \dots + \text{len } w(\xi_{t_{j-1}+2}, \xi_{t_{j-1}+1}) + \\ &+ m_{t_j} l_{t_j} + \dots + m_{t_{j-1}+1} l_{t_{j-1}+1} = v_j - 1 + S_j, \end{aligned} \quad (3)$$

где $v_j - 1 \leq \lambda_j - l_{t_{j-1}+1}$; $S_j = m_{t_j} l_{t_j} + \dots + m_{t_{j-1}+1} l_{t_{j-1}+1}$.

Построим путь $w(a, b)$ в Γ для любых вершин a, b :

$$w(a, b) = w(a_0, a_1) \cdot w(Z_1) \cdot w(a_1, a_2) \cdot w(Z_2) \cdot \dots \cdot w(a_{r-1}, a_r) \cdot w(Z_r) \cdot w(a_r, b).$$

Здесь $a_0 = a$; $w(a_j, a_{j+1})$ — кратчайший путь из вершины a_j до ближайшей вершины a_{j+1} графа $C_{t_{j+1}} \cup \dots \cup C_k$, $j = 0, \dots, r-1$; $w(a_r, b)$ — кратчайший путь из a_r до вершины b . Заметим, что $\text{len } w(a_r, b) \leq n-1$, и с учётом разбиения графа $\Gamma(\hat{C})$ на компоненты связности

$$\text{len } w(a_j, a_{j+1}) \leq n - (\lambda_{j+1} + \dots + \lambda_r), \quad j = 0, \dots, r-1.$$

Тогда при $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r$ получаем

$$\text{len } w(a, b) \leq n(r+1) - \sum_{j=1}^r j\lambda_j - 1 + \sum_{j=1}^r \text{len } w(Z_j).$$

Из равенств (3) для $j = 1, \dots, r$ следует, что при $l_1 \leq \dots \leq l_k$

$$\sum_{j=1}^r \text{len } w(Z_j) = \sum_{j=1}^r (\lambda_j - l_j) + \sum_{j=1}^r S_j,$$

где $\sum_{j=1}^r S_j = \sum_{i=1}^k m_i l_i$ с учётом разбиения графа $\Gamma(\hat{C})$ на компоненты связности. В силу примитивности системы контуров $\hat{C}$ сумма $\sum_{i=1}^k m_i l_i$ в зависимости от набора неотрицательных целых коэффициентов $m_1, \dots, m_k$ принимает любое значение, большее $g(l_1, \dots, l_k)$. Следовательно, $\text{len } w(a, b) \leq n(r+1) + g(l_1, \dots, l_k) - \sum_{j=1}^r (l_j + (j-1)\lambda_j)$. ■

Следствие 2. Если примитивная система контуров $\hat{C}$ является связной, то

$$\exp \Gamma \leq 2n - l_1 + g(l_1, \dots, l_k).$$

Доказательство. В оценке теоремы 1 следует положить $r = 1$. ■

Следствие 3. Если в условиях теоремы 1 $|V(\hat{C})| = n$, то

$$\exp \Gamma \leq nr + g(l_1, \dots, l_k) - \sum_{j=1}^r (l_j + (j-2)\lambda_j).$$

Доказательство. Если $|V(\hat{C})| = n$, то $n = \lambda_1 + \dots + \lambda_r$ и вершина a принадлежит компоненте связности орграфа $\Gamma(\hat{C})$. Значит, $\text{len } w(a, a_1) = n - (\lambda_1 + \dots + \lambda_r) = 0$. Следовательно, оценку $\text{len } w(a, b)$, приведённую в доказательстве теоремы 1, а также оценку экспонента орграфа Γ в условиях следствия 3 можно уменьшить на величину $n - (\lambda_1 + \dots + \lambda_r)$. ■

Примитивную систему контуров $\hat{C}$ назовём минимальной, если любая её собственная подсистема не примитивная. Система $\hat{C}$ минимальная примитивная, если и только если $l_j \notin \langle l_1, \dots, l_{j-1} \rangle$ при $j = 2, \dots, k$ [5, с. 21].

Пример 1. Оценка экспонента перемешивающего орграфа регистра с одной обратной связью.

Рассмотрим перемешивающий оргграф Γ преобразования автономного двоичного регистра левого сдвига длины 8 с функцией обратной связи $f(x_1, \dots, x_8) = x_1 \oplus x_3 x_4 x_6$. Зададим оргграф Γ списком дуг $E_\Gamma = \{(i, i-1) : i = 2, \dots, 8\} \cup \{(1, 8), (3, 8), (4, 8), (6, 8)\}$. Следовательно, список всех простых контуров есть $\{C_1 = (8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1), C_2 = (8, 7, 6, 5, 4, 3), C_3 = (8, 7, 6, 5, 4), C_4 = (8, 7, 6)\}$, длины контуров равны соответственно 8, 6, 5 и 3.

В оргграфе Γ имеются примитивные системы контуров $\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$, $\{C_1, C_2, C_3\}$, $\{C_1, C_2, C_4\}$, $\{C_1, C_3, C_4\}$, $\{C_1, C_3\}$, $\{C_1, C_4\}$, $\{C_2, C_3\}$ и $\{C_3, C_4\}$, все они являются связными. Минимальными являются системы контуров $\{C_1, C_3\}$, $\{C_1, C_4\}$, $\{C_2, C_3\}$ и $\{C_3, C_4\}$. Используя формулу числа Фробениуса для двух аргументов

$$g(l_1, l_2) = l_1 l_2 - l_1 - l_2, \quad (4)$$

получаем в соответствии со следствием 2, что оценка равна: 38 для системы $\{C_1, C_3\}$, 26 для системы $\{C_1, C_4\}$, 30 для системы $\{C_2, C_3\}$ и 20 для системы $\{C_3, C_4\}$. Наименьшая оценка экспонента достигается для системы контуров $\{C_3, C_4\}$: $\exp \Gamma \leq 20$.

Заметим, что абсолютная оценка Виландта (1) принимает значение 50, оценка (2) принимает значение 26 при $l = 3$.

Пример 2. Оценка экспонента перемешивающего оргграфа регистра с двумя обратными связями.

Рассмотрим перемешивающий оргграф Γ преобразования автономного двоичного регистра левого сдвига длины 8 с функциями обратной связи $f_8(x_1, \dots, x_8) = x_1 \oplus x_5$ и $f_3(x_1, \dots, x_8) = x_1 x_4$, которые определяют значения соответственно 8-й и 3-й координатных функций преобразования.

Зададим оргграф Γ списком дуг $E_\Gamma = \{(i, i-1) : i = 2, \dots, 8\} \cup \{(1, 8), (5, 8), (1, 3)\}$. Тогда список всех простых контуров есть $\{C_1 = (8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1), C_2 = (8, 7, 6, 5), C_3 = (3, 2, 1)\}$, длины контуров равны соответственно 8, 4 и 3.

В оргграфе Γ имеются примитивные системы контуров $\{C_1, C_2, C_3\}$, $\{C_1, C_3\}$ и $\{C_2, C_3\}$. Системы $\{C_1, C_2, C_3\}$ и $\{C_1, C_3\}$ являются связными, система $\{C_2, C_3\}$ несвязная. Минимальными являются системы контуров $\{C_1, C_3\}$ и $\{C_2, C_3\}$. Используя формулу (4), получаем в соответствии со следствием 2, что оценка равна 26 для связной системы $\{C_1, C_3\}$ и 19 для несвязной системы $\{C_2, C_3\}$, во втором случае в оценке теоремы 1 следует положить $r = 2$, $l_1 = \lambda_2 = 3$, $l_2 = 4$. Наименьшая оценка экспонента достигается для системы контуров $\{C_2, C_3\}$: $\exp \Gamma \leq 19$.

Оценки (1) и (2) принимают те же значения, что и в примере 1.

Пример 3. Сравнение полученной оценки с оценкой Виландта в случае n -вершинного графа Виландта.

В n -вершинном графе Виландта имеется связная система двух контуров длины $n-1$ и n . Тогда в соответствии со следствием 2

$$\exp \Gamma \leq 2n - (n-1) + g(n, n-1) = n^2 - 2n + 2,$$

что совпадает с абсолютной оценкой Виландта.

Оценим возможные значения величины k для минимальной примитивной системы. Обозначим p_i простое число с номером i (числа берутся в порядке возрастания), $i = 1, 2, \dots$, то есть $p_1 = 2$, $p_2 = 3$ и т. д.

Теорема 2. В n -вершинном оргграфе Γ при $n > 2$ минимальная примитивная система имеет не более k простых контуров, где k — наибольший номер, при котором $p_2 \dots p_k \leq n$.

Доказательство. Наибольшее значение k достигается при наименьших взаимно простых длинах контуров $l_1, \dots, l_k$, где $l_k \leq n$. Наименьшие числа, составляющие множество k взаимно простых чисел, имеют следующий вид [6, с. 9–10]: $l_i = p_1 \dots p_k / p_i$, $i = 1, \dots, k$. Тогда $l_k = p_2 \dots p_k \leq n$. ■

Следствие 4. В условиях теоремы 1

$$\exp \Gamma - g(l_1, \dots, l_k) + \sum_{j=1}^r (l_j + (j-1)\lambda_j) \leq \begin{cases} 3n, & 3 \leq n \leq 14, \\ 4n, & 15 \leq n \leq 104, \\ 5n, & 105 \leq n \leq 1154, \\ \lfloor \ln n \rfloor n, & 1155 \leq n. \end{cases}$$

Доказательство. В таблице для некоторых интервалов значений n приведены оценки k и r , полученные с помощью теоремы 2.

$3 \leq n \leq 14$	$15 \leq n \leq 104$	$105 \leq n \leq 1154$	$1155 \leq n \leq 15014$	$15015 \leq n \leq 255254$	$255255 \leq n \leq 4849844$
$1 \leq r \leq k = 2$	$1 \leq r \leq k \leq 3$	$1 \leq r \leq k \leq 4$	$1 \leq r \leq k \leq 5$	$1 \leq r \leq k \leq 6$	$1 \leq r \leq k \leq 7$

Оценки следствия 4 вытекают из теоремы 1 и из таблицы, так как $k \leq \lfloor \ln n \rfloor - 1$ при $n \geq 1155$. ■

Следствие 5. При $n \rightarrow \infty$ выполнена асимптотическая оценка $k = o(\ln n)$.

Доказательство. Воспользуемся известной оценкой [7] $p_k > k \ln k$. Тогда из теоремы 2 следует

$$n \geq \prod_{j=2}^k j \ln j.$$

Отсюда $k! < n$ при $k > 3$. Используя формулу Стирлинга и логарифмируя неравенство $(k/e)^k < n$, получаем, что $k(\ln k - 1) < \ln n$ при $k \rightarrow \infty$. Следовательно, $k = o(\ln n)$ при $n \rightarrow \infty$. ■

Замечание 1. Оценки и алгоритмы вычисления чисел Фробениуса для любого числа аргументов, требуемые при оценивании экспонентов орграфов, можно найти в ряде публикаций [8, 9].

Выводы

- 1) Для получения оценки экспонента графа в соответствии с теоремой 1 и её следствиями можно использовать любую примитивную систему контуров. Наименьшие значения оценок достигаются при одной из минимальных примитивных систем.
- 2) Порядок величины полученной универсальной оценки экспонента n -вершинного примитивного орграфа варьируется от $O(n)$ до $O(n^2)$ при $n \rightarrow \infty$. Оценки теоремы 1 и её следствий принимают значения порядка $O(n^2)$, только если кратчайший контур примитивной системы имеет длину порядка $O(n)$.
- 3) На множестве графов Виландта полученная оценка совпадает с абсолютной оценкой Виландта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wielandt H. Unzerlegbare nicht negative Matrizen // Math. Zeitschr. 1950. N. 52. S. 642–648.
2. Сачков В. Н., Тараканов В. Е. Комбинаторика неотрицательных матриц. М.: ТВП, 2000. 448 с.

3. Фомичев В. М. Оценки экспонентов примитивных графов // Прикладная дискретная математика. 2011. № 2(12). С. 101–112.
4. Когос К. Г., Фомичев В. М. Положительные свойства неотрицательных матриц // Прикладная дискретная математика. 2012. № 4(18). С. 116–121.
5. Фомичев В. М. Эквивалентные по Фробениусу примитивные множества чисел // Прикладная дискретная математика. 2014. № 1(23). С. 20–26.
6. Кязжин С. Н., Фомичев В. М. О примитивных наборах натуральных чисел // Прикладная дискретная математика. 2012. № 2(16). С. 5–14.
7. Rosser B. The n -th prime is greater than $n \log n$ // Proc. London Math. Soc. 1939. V. 45. P. 21–44.
8. Alfonsin J. R. The Diophantine Frobenius Problem. Oxford University Press, 2005.
9. Фомичев В. М. Оценка экспонента некоторых графов с помощью чисел Фробениуса для трёх аргументов // Прикладная дискретная математика. 2014. № 2(24). С. 88–96.

REFERENCES

1. Wielandt H. Unzerlegbare nicht negative Matrizen. Math. Zeitschr., 1950, n. 52, s. 642–648.
2. Sachkov V. N. and Tarakanov V. E. Kombinatorika neotritsatel'nykh matrits [Combinatorics of Non-Negative Matrices]. Moscow, TVP Publ., 2000. (in Russian)
3. Fomichev V. M. Otsenki eksponentov primitivnykh grafov [The estimates of exponents for primitive graphs]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2011, no. 2(12), pp. 101–112. (in Russian)
4. Kogos K. G. and Fomichev V. M. Polozhitel'nye svoystva neotritsatel'nykh matrits [Positive properties of non-negative matrices]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2012, no. 4(18), pp. 116–121. (in Russian)
5. Fomichev V. M. Ekvivalentnye po Frobeniusu primitivnye mnozhestva chisel [Primitive sets of numbers being equivalent by Frobenius]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2014, no. 1(23), pp. 20–26. (in Russian)
6. Kyazhin S. N. and Fomichev V. M. O primitivnykh naborakh natural'nykh chisel [About primitive systems of natural numbers]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2012, no. 2(16), pp. 5–14. (in Russian)
7. Rosser B. The n -th prime is greater than $n \log n$. Proc. London Math. Soc., 1939, vol. 45, pp. 21–44.
8. Alfonsin J. R. The Diophantine Frobenius Problem. Oxford University Press, 2005.
9. Fomichev V. M. Otsenka eksponenta nekotorykh grafov s pomoshch'yu chisel Frobeniusa dlya trekh argumentov [Estimates for exponent of some graphs by Frobenius's numbers of three arguments]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2014, no. 2(24), pp. 88–96. (in Russian)