МАТЕМАТИКА

УДК 517.9
DOI 10.17223/19988621/43/1

А.А. Жалнина

ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ ОБЛАСТИ НА РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОБТЕКАНИИ ПРЕПЯТСТВИЯ ПОТОКОМ СМЕСИ ВЯЗКИХ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Изучается зависимость решения неоднородной краевой задачи для нелинейной системы дифференциальных уравнений составного типа, моделирующей обтекание компактного препятствия потоком смеси вязких сжимаемых жидкостей. Полученные результаты могут служить основой для исследования свойств функционалов от этих решений (например, функционала сопротивления), в частности для вычисления производной по области от функционала и последующего построения численного алгоритма поиска оптимальной формы тела, обтекаемого потоком смеси.

Ключевые слова: *смесь вязких сжимаемых жидкостей*, *обтекание препятствия*, *неоднородная краевая задача*, *сопряженная задача*.

Авторами [1] построено сильное обобщенное решение неоднородной краевой задачи, моделирующей обтекание препятствия потоком смеси вязких сжимаемых жидкостей. Настоящая статья посвящается исследованию зависимости решения данной краевой задачи от формы области течения. Эти результаты имеют важное значение для анализа свойств функционалов (скажем, функционала сопротивления) от решений краевой задачи и, следовательно, для решения задачи об оптимизации формы области течения.

Постановка задачи заключается в следующем. Область течения смеси вязких сжимаемых жидкостей представляет собой область $\Omega = B \setminus S$ евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ точек $x = (x_1, x_2, x_3)$, внешнюю по отношению к обтекаемому препятствию S (которое предполагается компактным множеством) и ограниченную замкнутой поверхностью Σ. Пусть $x \mapsto \vec{T}(x)$ обозначает векторное поле класса $C^2(\mathbb{R}^3)$, равное нулю в окрестности границы Σ. Определим отображение $x \mapsto y = \vec{T}_\varepsilon(x) = x + \varepsilon \vec{T}(x)$, задающее возмущение формы обтекаемого препятствия S. Для малых ε отображение $x \mapsto \vec{T}_\varepsilon(x)$ является диффеоморфизмом области течения Ω на область $\Omega_\varepsilon = B \setminus S_\varepsilon$, где $S_\varepsilon = \vec{T}_\varepsilon(S)$ – возмущенное обтекаемое препятствие.

Стационарное движение в области Ω_ε смеси вязких сжимаемых жидкостей описывается следующими уравнениями [2]:

$$\sum_{j=1}^{2} L_{ij}(\vec{u}_\varepsilon^{(j)}) + \mathrm{Re}\,\rho_{i\varepsilon}(\vec{u}_\varepsilon^{(i)}\cdot\nabla)\vec{u}_\varepsilon^{(i)} + \frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Ma}^2}\nabla p_{i\varepsilon}(\rho_{i\varepsilon}) + \vec{J}^{(i)} = 0 \text{ на } \Omega_\varepsilon, i=1,2, \quad (1)$$

$$\mathrm{div}(\rho_{i\varepsilon}\vec{u}_\varepsilon^{(i)}) = 0 \text{ в } \Omega_\varepsilon, i=1,2, \quad (2)$$

где $\vec{u}_\varepsilon^{(1)}$, $\vec{u}_\varepsilon^{(2)}$ обозначают поля скоростей компонент смеси; $\rho_{1\varepsilon}$, $\rho_{2\varepsilon}$ – функции плотностей компонент, а соответствующие давления $p_{i\varepsilon} = p_{i\varepsilon}(\rho_{i\varepsilon}), i=1,2,$ предполагаются известными достаточно гладкими функциями своей плотности; через Re и Ma обозначены числа Рейнольдса и Маха соответственно; L_{ij}, $i,j=1,2,$ обозначают дифференциальные операторы второго порядка

$$L_{ij}(\vec{u}^{(j)}) = -\mu_{ij}\Delta\vec{u}^{(j)} - (\mu_{ij}+\lambda_{ij})\nabla\,\mathrm{div}\,\vec{u}^{(j)}, i,j=1,2,$$

причем постоянные (безразмерные) коэффициенты вязкости μ_{ij}, λ_{ij} удовлетворяют условиям

$$\mu_{11}>0,\quad 4\mu_{11}\mu_{22}-(\mu_{12}+\mu_{21})^2>0,\quad \lambda_{11}+2\mu_{11}>0,$$
$$4(\lambda_{11}+2\mu_{11})(\lambda_{22}+2\mu_{22})-(\lambda_{12}+2\mu_{12}+\lambda_{21}+2\mu_{21})^2>0.$$

Слагаемые $\vec{J}^{(i)} = (-1)^{(i)}a(\vec{u}_\varepsilon^{(2)}-\vec{u}_\varepsilon^{(1)}),\ a=\mathrm{const}>0,\ i=1,2,$ характеризуют интенсивность обмена импульсами между компонентами смеси [3, 4]. Уравнения (1) и (2) отражают соответственно законы сохранения импульсов и массы компонент смеси.

Для постановки граничных условий используем заданные векторные поля $\vec{U}^{(j)}, j=1,2,$ класса $C^3(\mathbb{R}^3)$, обращающиеся в нуль в окрестности множества S. С помощью вектор-функций $\vec{U}^{(j)}$ на границе Σ области B выделим участки «втекания»:

$$\Sigma_{\mathrm{in}}^j = \{x\in\Sigma : \vec{U}^{(j)}\vec{n}<0\},\ j=1,2,$$

и участки «вытекания» (см. рис. 1):

$$\Sigma_{\mathrm{out}}^j = \{x\in\Sigma : \vec{U}^{(j)}\vec{n}>0\},\ j=1,2.$$

Будем предполагать выполненными следующие условия:

Условие 1. Множества $\Gamma^j = cl\Sigma_{in}^j \cap (\Sigma\setminus\Sigma_{in}^j),\ j=1,2,$ («характеристические» части поверхности) представляют собой замкнутые одномерные многообразия, такие, что $\Sigma = \Sigma_{\mathrm{in}}^j \cup \Gamma^j \cup \Sigma_{\mathrm{out}}^j$ и, кроме того,

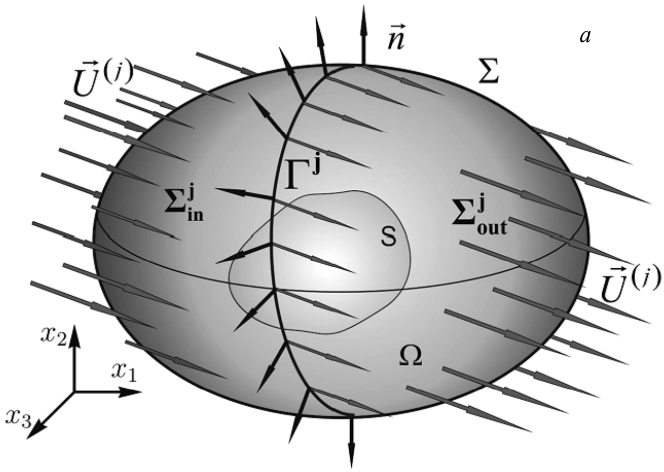
$$\int_\Sigma \vec{U}^{(j)}\vec{n}\,ds = 0,\ j=1,2;\quad \vec{U}^{(j)}\nabla(\vec{U}^{(j)}\vec{n}) > C > 0 \text{ на } \Gamma^j, j=1,2,$$

где $C>0$ – некоторая постоянная.

К уравнениям (1), (2) присоединим граничные условия

$$\vec{u}_\varepsilon^{(j)} = \vec{U}^{(j)} \text{ на } \Sigma,\qquad \vec{u}_\varepsilon^{(j)} = 0 \text{ на } \partial S_\varepsilon,\ \rho_{j\varepsilon} = \rho_{j\varepsilon}^0 \text{ на } \Sigma_{\mathrm{in}}^j, j=1,2, \quad (3)$$

где $\rho_{j\varepsilon}^0, j=1,2,$ – заданные положительные постоянные.



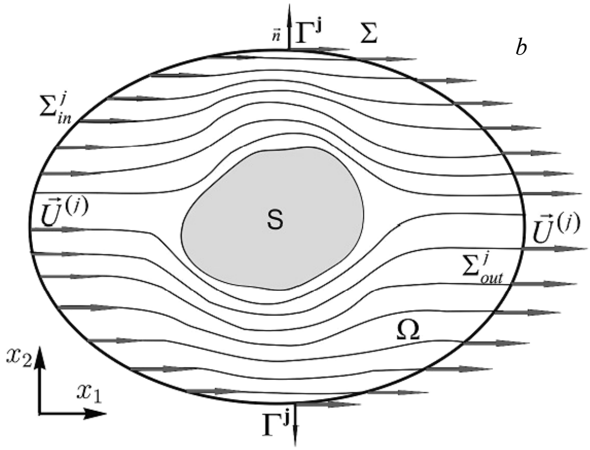


Рис. 1. Схемы обтекания препятствия *j*-й компонентой смеси:
a – трехмерный поток; *b* – плоское сечение
Fig. 1. Schemes of aflow around an obstacle *j*th component
of the mixture: *a*) a three-dimensional flow; *b*) plane section

Сила сопротивления набегающему потоку со стороны препятствия S_ε выражается посредством формулы

$$J_D(S_\varepsilon) = -\vec{U}^\infty \sum_{i=1}^{2} \int_{\partial S_\varepsilon} \left(\sum_{j=1}^{2} \left[\mu_{ij} \left(\nabla \vec{u}_\varepsilon^{(j)} + \left(\nabla \vec{u}_\varepsilon^{(j)} \right)^T \right) + \lambda_{ij} \operatorname{div} \vec{u}_\varepsilon^{(j)} I \right] - \frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Ma}^2} p_i(\rho_\varepsilon) I \right) \cdot \vec{n} ds, \quad (4)$$

где $\vec{U}^\infty$ – постоянный вектор, имитирующий скорость потока на «бесконечности». Проблема минимизации этого функционала означает решение задачи выбора оптимальной формы обтекаемого препятствия.

Задачу (1) – (3) удобно свести к краевой задаче в невозмущенной области Ω для однопараметрического семейства дифференциальных уравнений с возмущенными коэффициентами. С этой целью вводятся функции $\vec{u}^{(i)}$ и $\rho_i, i=1,2$, определенные в Ω согласно формулам:

$$\vec{u}^{(i)}(x) = N(x)\vec{u}_\varepsilon^{(i)}(x+\varepsilon\vec{T}(x)), \rho_i(x) = \rho_{i\varepsilon}(x+\varepsilon\vec{T}(x)), x\in\Omega, i=1,2,$$

где $\boldsymbol{N}(x) = (\det M(x))M^{-1}(x)$, $M(x) = I+\varepsilon D\vec{T}(x)$, $D\vec{T}(x) = \left\{\dfrac{\partial T_i(x)}{\partial x_j}\right\}$ – матрица Якоби отображения $x \mapsto \vec{T}(x)$.

В результате такого преобразования задача (1) – (3) трансформируется в задачу

$$\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\Delta\vec{u}^{(j)} - \nabla q_i = \sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\mathcal{A}(\vec{u}^{(j)};N) + \operatorname{Re}\mathcal{B}(\rho_i,\vec{u}^{(i)},\vec{u}^{(i)};N) + (-1)^i\mathcal{S}(\vec{u}^{(2)}-\vec{u}^{(1)};N) \text{ в } \Omega,$$

$$\operatorname{div}\vec{u}^{(i)} = \sum_{j=1}^{2}g\sigma_{ij}p_j - \sum_{j=1}^{2}g\gamma_{ij}q_j \text{ в } \Omega, \tag{5}$$

$$\vec{u}^{(i)}\cdot\nabla\rho_i + \rho_i\sum_{j=1}^{2}g\sigma_{ij}p_j = \rho_i\sum_{j=1}^{2}g\gamma_{ij}q_j \text{ в } \Omega,$$

$$\vec{u}^{(i)} = \vec{U}^{(i)} \text{ на } \Sigma, \vec{u}^{(i)} = 0 \text{ на } \partial S, \rho_i = \rho_i^0 \text{ на } \Sigma_{\text{in}}^i, i=1,2.$$

Здесь $g = g(x;N) = \sqrt{\det \boldsymbol{N}(x)}$; линейные операторы $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и нелинейное отображение $\mathcal{S}$ определены по формулам

$$\mathcal{A}(\vec{u};\boldsymbol{N}) = \Delta\vec{u} - \left(\boldsymbol{N}^T\right)^{-1}\operatorname{div}\left(g^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{N}^T\nabla\left(\boldsymbol{N}^{-1}\vec{u}\right)\right),$$

$$\mathcal{B}(\rho,\vec{u},\vec{w};\boldsymbol{N}) = \rho\left(\boldsymbol{N}^T\right)^{-1}\left(\vec{u}\,\nabla\left(\boldsymbol{N}^{-1}\vec{w}\right)\right),$$

$$\mathcal{S}(\vec{u};\boldsymbol{N}) = g\cdot a\left(\boldsymbol{N}^T\right)^{-1}\boldsymbol{N}^{-1}\,\vec{u};$$

$q_i = -\sum_{j=1}^{2}g^{-1}(\mu_{ij}+\lambda_{ij})\operatorname{div}\vec{u}^{(j)} + \dfrac{\operatorname{Re}}{\operatorname{Ma}^2}p_i(\rho_i), i=1,2,$ – эффективные вязкие давления; γ_{ij} – элементы матрицы $\varkappa^{-1}$, обратной к матрице $\varkappa$, элементы которой есть $\mu_{ij}+\lambda_{ij}, i,j=1,2$; $\sigma_{ij} = \dfrac{\operatorname{Re}}{\operatorname{Ma}^2}\gamma_{ij}$.

Решение задачи (5) строится в виде возмущения специальным образом выбранного достаточно гладкого течения $\vec{u}_*^{(i)}, \rho_i^*, q_i^{(*)}$, т. е.

$$\vec{u}^{(i)} = \vec{u}_*^{(i)} + \vec{v}^{(i)}, \rho_i = \rho_i^* + \varphi_i, q_i = q_i^* + \pi_i + \Lambda\cdot p_i(\rho_i^*) + \sum_{j=1}^{2}(\mu_{ij}+\lambda_{ij})m_j,$$

где $\rho_i^* = \rho_i^0 = const$, $\Lambda = \dfrac{\operatorname{Re}}{\operatorname{Ma}^2}$, m_j – постоянные, служащие инструментом контроля масс компонентов смеси в области Ω. В итоге основным объектом исследования становится задача для возмущений [1]:

$$\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\Delta\vec{v}^{(j)}-\nabla\pi_i=\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\mathcal{A}(\vec{u}^{(j)};N)+\mathrm{Re}\,\mathcal{B}(\rho_i,\vec{u}^{(i)},\vec{u}^{(i)};N)+(-1)^i\mathcal{S}(\vec{u}^{(2)}-\vec{u}^{(1)};N)\text{ в }\Omega,$$

$$\mathrm{div}\,\vec{v}^{(i)}=g\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{\overset{*}{\rho}_i}\tau_{ij}\varphi_j-g\Phi_i[\vec{\theta}]-gm_i\text{ в }\Omega,\tag{6}$$

$$\vec{u}^{(i)}\cdot\nabla\varphi_i+\tau_{ii}\varphi_i=\Psi_i[\vec{\theta}]+gm_i\rho_i\text{ в }\Omega,$$

$$\vec{v}^{(i)}=0\text{ на }\partial\Omega,\quad \varphi_i=0\text{ на }\Sigma^i_{\mathrm{in}},\quad \Pi\pi_i=\pi_i\ (\Pi q=q-\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega q\,dx),\ i=1,2;$$

$$\vec{m}=(m_1,m_2)^T,\ \vec{m}=(kI-A)^{-1}\vec{f},\ A=\{a_{ij}\}^2_{i,j=1},\ \vec{f}=(f_1,f_2)^T,$$

$$k=\int_\Omega g\,dx,\ a_{ij}=\frac{1}{\overset{*}{\rho}_i}\int_\Omega g\rho_j\zeta_i^{(j)}dx,\ f_i=\frac{1}{\overset{*}{\rho}_i}\int_\Omega(\sum_{j=1}^{2}\zeta_i^{(j)}\Psi_j[\vec{\theta}]-g\Phi_i[\vec{\theta}])dx;$$

$$-\mathrm{div}(\vec{u}^{(i)}\cdot\zeta_j^{(i)})+\tau_{ii}\cdot\zeta_j^{(i)}=\tau_{ji}g\text{ в }\Omega,\ \zeta_j^{(i)}=0\text{ на }\Sigma^{(i)}_{\mathrm{out}},\ i,j=1,2.$$

Здесь постоянные параметры τ_{ij} связаны известным образом с коэффициентами вязкости μ_{ij},λ_{ij} и заданными граничными значениями ρ_i^0; $\Phi_i[\vec{\theta}],\Psi_i[\vec{\theta}]$ – известные функции компонент вектора $\vec{\theta}=(\vec{v}^{(1)},\vec{v}^{(2)};\pi_1,\pi_2,\varphi_1,\varphi_2)$, выражения которых приведены в [1], где также доказана теорема существования

Теорема 1. *Пусть поверхность* Σ *и векторные поля* $\vec{U}^{(1)},\vec{U}^{(2)}$ *удовлетворяют условию 1. Тогда найдутся такие числа* $\sigma^*>1$ *и* $\tau^*\in(0,1)$, *что если матрица* $\boldsymbol{N}$ *выбрана из условия* $\|I-\boldsymbol{N}\|_{C^2(\Omega)}\le\tau^2,\tau\in(0,\tau^*]$, $p_j(\rho_j)\in C^3(0,\infty),j=1,2,$ *а параметры задачи таковы, что* $\frac{1}{\Lambda}\le\tau^2$, $\mathrm{Re}\le\tau^2$, $a\le\tau^2$, $|\tau_{12}|\le\tau$, $|\tau_{21}|\le\tau$, $\tau_{ii}\ge\sigma^*$, $i=1,2$, $\tau\in(0,\tau^*]$, *то задача* (*6*) *имеет решение* $\vec{\theta}=(\vec{v}^{(1)},\vec{v}^{(2)};\pi_1,\pi_2,\varphi_1,\varphi_2)$, $m_i,\zeta_i^{(j)},i,j=1,2,$ *такое, что* $\vec{\theta}\in V^{s,r}\times X^{s,r}$, $m_i\in\mathbb{R}$, $\zeta_i^{(j)}\in X^{s,r}$, *где показатели* $s\in(0,1)$, $r\in(1,\infty)$ *удовлетворяют условиям* $s\cdot r>3$, $2s-\frac{3}{r}<1$. *При этом вектор* $\vec{\theta}$ *принадлежит шару* B_τ *радиуса* τ *с центром в нуле пространства* $V^{s,r}\times X^{s,r}$.

Здесь $V^{s,r},X^{s,r}$ обозначают пространства

$$X^{s,r}=W^{s,r}(\Omega)\cap W^{1,2}(\Omega),\ V^{s,r}=W^{s+1,r}(\Omega)\cap W^{2,2}(\Omega),$$

причем $W^{l,p}(\Omega)$ (l – целое неотрицательное число, $1\le p<\infty$) – стандартное пространство С.Л. Соболева [5], состоящее из измеримых в Ω функций, имеющих обобщенные производные в Ω до порядка l включительно, суммируемые со степенью p. Для вещественных $s\in(0,1)$, $r\in(1,\infty)$ функциональное пространство $W^{s,r}(\Omega)$ получается методом вещественной интерполяции [6] между $L^r(\Omega)$ и $W^{1,r}(\Omega)$ и состоит из измеримых функций с конечной нормой

$$\|u\|_{W^{s,r}(\Omega)} = \|u\|_{L^r(\Omega)} + |u|_{s,r,\Omega},\ |u|_{s,r,\Omega} = \int\limits_{\Omega\times\Omega} |x-y|^{-3}\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^s}\right)^r dxdy.$$

В общем случае пространство $W^{l+s,r}(\Omega)$, $0<s<1$, $1\le r<\infty$, $l\ge 0$ – целое число, определяется как пространство измеримых функций с конечной нормой

$$\|u\|_{W^{l+s,r}(\Omega)} = \|u\|_{W^{l,r}(\Omega)} + \sup_{|\alpha|=l}\|D^\alpha u\|_{W^{s,r}(\Omega)}.$$

Через $W_0^{s,r}(\Omega)$, $0\le s\le 1$ обозначается замкнутое подпространство $W^{s,r}(\mathbb{R}^3)$, состоящее из всех функций $u\in W^{s,r}(\mathbb{R}^3)$, обращающихся в нуль вне области Ω. Для $0<s<1$, $1<r<\infty$ обозначим через $\mathcal{W}_0^{s,r}(\Omega)$ интерполяционное пространство $[W_0^{0,r}(\Omega), W_0^{1,r}(\Omega)]_{s,r}$ с нормой, определенной методом вещественной интерполяции.

Пусть $0\le s\le 1$, $1<r<\infty$, $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$. Через $\mathcal{W}^{-s,r}(\Omega)$ обозначим замыкание $L^r(\Omega)$ относительно нормы:

$$\|v\|_{\mathcal{W}^{-s,r}(\Omega)} = \sup_{\substack{u\in\mathcal{W}_0^{s,r'}(\Omega)\\ \|u\|_{\mathcal{W}_0^{s,r'}(\Omega)}=1}} \left|\int\limits_\Omega u\cdot v dx\right|.$$

Как известно [7], пространство $\mathcal{W}^{-s,r}(\Omega)$ для $0<s<1$, $1<r<\infty$ топологически и алгебраически изоморфно Банахову пространству $\left(\mathcal{W}_0^{s,r'}(\Omega)\right)'$, сопряженному $\mathcal{W}_0^{s,r'}(\Omega)$, и может быть отождествлено с ним.

Для любых $0\le s\le 1$, $1<r<\infty$ Банахово пространство $\mathbb{W}^{-s,r}(\Omega)$ представляет собой замыкание $L^r(\Omega)$ по норме

$$\|v\|_{\mathbb{W}^{-s,r}(\Omega)} = \|\mathcal{L}_v\|_{(W^{s,r'}(\Omega))'},$$

где $\mathcal{L}_v(u) = \langle v,u\rangle = \int\limits_\Omega v(x)\cdot u(x)dx$ – непрерывный функционал на пространстве $W^{s,r'}(\Omega)$, непрерывно вложенном в $L^{r'}(\Omega)$. Известно [7], что если Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с границей класса C^1, то $\mathbb{W}^{-s,r}(\Omega)$ алгебраически и топологически изоморфно двойственному пространству $(W^{s,r'}(\Omega))'$ и может быть отождествлено с ним. Введем, кроме того, функциональные пространства

$$\mathcal{U}^{s,r} = \mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)\times W^{s,r}(\Omega)\times\mathbb{R},\ \mathcal{V}^{s,r} = W^{s+1,r}(\Omega)\times W^{s,r}(\Omega)\times\mathbb{R},$$

$$Z^{s,r} = \mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)\cap L^2(\Omega),$$

$$\mathcal{E}^{s,r} = Z^{s,r}\times X^{s,r}\times\mathbb{R},\ \mathcal{F}^{s,r} = V^{s,r}\times X^{s,r}\times\mathbb{R},$$

Принадлежность векторной величины $\vec{F}$ прямому произведению пространств $W_1 \times W_2 \times W_3$ следует понимать в том смысле, что $\vec{F}$ составлен из трех компонентов (векторных или скалярных), разделенных точкой с запятой $\vec{F} = (F_1; F_2; F_3)$ и при этом $F_1 \in W_1, F_2 \in W_2, F_3 \in W_3$. Если $W_1 = W_2 = W_3 = W$, то пишем $\vec{F} \in W$ и компоненты вектора разделяем запятой.

Зависимость решений от формы области

Важнейшим этапом исследования задачи оптимизации формы является доказательство единственности решения задачи (6) и дифференцируемости ее решения относительно параметра ε. Для этого прежде всего необходимо исследовать зависимость этих решений от матрицы $\boldsymbol{N}$, полностью определяемой деформацией области течения. На данном этапе структура матрицы $\boldsymbol{N}$ не имеет значения и поэтому полученные ниже результаты справедливы для произвольной гладкой матричнозначной функции $\boldsymbol{N}(x), x \in \Omega$.

1. Задача для разностей. Для разности $\vec{q}_0 - \vec{q}_1$,

$$\vec{q}_i = (\vec{v}_i^{(1)}, \vec{v}_i^{(2)}; \pi_1^i, \pi_2^i, \varphi_1^i, \varphi_2^i, \zeta_{1i}^{(1)}, \zeta_{2i}^{(1)}, \zeta_{1i}^{(2)}, \zeta_{2i}^{(2)}; m_1^i, m_2^i), \ i = 0,1,$$

решений задачи (6), полученных в сответствии с теоремой 1 и соответствующих различным матрицам $\boldsymbol{N}_0$ и $\boldsymbol{N}_1$, введем обозначения

$$\vec{w}^{(j)} = \vec{v}_0^{(j)} - \vec{v}_1^{(j)}, \ \omega_j = \pi_j^0 - \pi_j^1, \ \psi_j = \varphi_j^0 - \varphi_j^1, n_j = m_j^0 - m_j^1, \xi_j^{(k)} = \zeta_{j0}^{(k)} - \zeta_{j1}^{(k)}, \quad k, j = 1, 2. \tag{7}$$

Из (6) следует, что вектор-функция

$$\vec{q}_0 - \vec{q}_1 = (\vec{w}^{(1)}, \vec{w}^{(2)}; \omega_1, \omega_2, \psi_1, \psi_2, \xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}; n_1, n_2)$$

является решением следующей линейной задачи:

$$\sum_{j=1}^{2} \mu_{ij} \Delta \vec{w}^{(j)} - \nabla \omega_i = \sum_{j=1}^{2} \mu_{ij} \mathcal{A}_0(\vec{w}^{(j)}) + \mathrm{Re}\, \mathcal{L}(\psi_i, \vec{w}^{(i)}) + \mathcal{D}_i + (-1)^i (\mathcal{E} + \mathcal{S}_0(\vec{w}^{(2)} - \vec{w}^{(1)})) \tag{8}$$

$$\operatorname{div} \vec{w}^{(i)} = \sum_{j=1}^{2} \alpha_{ij} \psi_j + \sum_{j=1}^{2} \beta_{ij} \omega_j + \gamma_i n_i + \delta_i d\,; \tag{9}$$

$$\vec{u}_0^{(i)} \cdot \nabla \psi_i + \tau_{ii} \psi_i = -\vec{w}^{(i)} \cdot \nabla \varphi_i^1 + \sum_{j=1}^{2} \hat{\alpha}_{ij} \psi_j + \sum_{j=1}^{2} \hat{\beta}_{ij} \omega_j + \hat{\gamma}_i n_i + \hat{\delta}_i d \text{ в } \Omega\,; \tag{10}$$

$$-\operatorname{div}(\vec{u}_0^{(i)} \xi_j^{(i)}) + \tau_{ii} \xi_j^{(i)} = \operatorname{div}(\vec{w}^{(i)} \zeta_{j1}^{(i)}) + \tau_{ji} d \text{ в } \Omega\,; \tag{11}$$

$$\vec{w}^{(i)} = 0 \text{ на } \Omega, \ \ \psi_i = 0 \text{ на } \Sigma_{\mathrm{in}}^i, \ \ \omega_i = \Pi \omega_i, \xi_j^{(i)} = 0 \text{ на } \Sigma_{\mathrm{out}}^i\,; \tag{12}$$

$$n_i = \sum_{k=1}^{2} \chi_{ik}^0 \int_{\Omega} \left[\tilde{\delta}_k d + \sum_{j=1}^{2} (\tilde{\alpha}_{kj} \psi_j + \tilde{\beta}_{kj} \omega_j + \tilde{\gamma}_{kj} \xi_j^{(k)}) \right] dx, \ \ i, j = 1, 2. \tag{13}$$

В записи данных уравнений используются обозначения:

$$\mathcal{A}_k(\vec{w}) = \mathcal{A}(\vec{w};\boldsymbol{N}_k),\quad \mathcal{B}_k(\rho,\vec{u},\vec{w}) = \mathcal{B}(\rho,\vec{u},\vec{w};\boldsymbol{N}_k),\quad \mathcal{S}_k(\vec{w}) = \mathcal{S}(\vec{w};\boldsymbol{N}_k),\quad k=0,1,$$

$$\mathcal{L}(\psi_i,\vec{w}^{(i)}) = \mathcal{B}_0(\psi_i,\vec{u}_0^{(i)},\vec{u}_0^{(i)}) + \mathcal{B}_0(\rho_i^1,\vec{w}^{(i)},\vec{u}_0^{(i)}) + \mathcal{B}_0(\rho_i^1,\vec{u}_1^{(i)},\vec{w}^{(i)}),$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{S}_0(\vec{u}_1^{(2)} - \vec{u}_1^{(1)}) - \mathcal{S}_1(\vec{u}_1^{(2)} - \vec{u}_1^{(1)}),$$

$$\mathcal{D}_i = \sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\left(\mathcal{A}_0(\vec{u}_1^{(j)}) - \mathcal{A}_1(\vec{u}_1^{(j)})\right) + \mathrm{Re}\left(\mathcal{B}_0(\rho_i^1,\vec{u}_1^{(i)},\vec{u}_1^{(i)}) - \mathcal{B}_1(\rho_i^1,\vec{u}_1^{(i)},\vec{u}_1^{(i)})\right),$$

$$d = g_0 - g_1,\ g_k = \sqrt{\det \boldsymbol{N}_k}.$$

Символы χ_{ik}^0 обозначают элементы матрицы $(k(N_0)I - A(N_0,\vec{\theta}_0))^{-1}$. Коэффициенты $\alpha_{ij},\beta_{ij},\gamma_i,\delta_i$, $\hat{\alpha}_{ij},\hat{\beta}_{ij},\hat{\gamma}_i,\hat{\delta}_i$, $\tilde{\alpha}_{ij},\tilde{\beta}_{ij},\tilde{\gamma}_{ij},\tilde{\delta}_i$, $i,j=1,2$, в правых частях уравнений (9), (10) и (13) зависят от решений $\vec{q}_0$ и $\vec{q}_1$ и рассматриваются как известные функции. Выражения для этих коэффициентов весьма громоздкие, в силу чего здесь не приводятся. Мы укажем лишь оценки для них, которые потребуются в дальнейшем. Именно, при выполнении условий теоремы 1 справедливы неравенства

$$\begin{gathered}\left\{\|\alpha_{ij}\|_{X^{s,r}},i\neq j,\|\beta_{ij}\|_{X^{s,r}},\|\delta_i\|_{X^{s,r}},\|\hat{\alpha}_{ij}\|_{X^{s,r}},\|\hat{\beta}_{ij}\|_{X^{s,r}},\|\hat{\delta}_i\|_{X^{s,r}}\right\} \le c\tau,\\ \left\{\|\tilde{\alpha}_{ij}\|_{X^{s,r}},\|\tilde{\beta}_{ij}\|_{X^{s,r}},\|\tilde{\gamma}_{ij}\|_{X^{s,r}},\|\tilde{\delta}_i\|_{X^{s,r}}\right\} \le c\tau, \\ \left\{\|\alpha_{ii}\|_{X^{s,r}},\|\gamma_i\|_{X^{s,r}},\|\hat{\gamma}_i\|_{X^{s,r}}\right\} \le c,\quad i,j=1,2,\end{gathered}\tag{14}$$

где параметр τ обозначает радиус шара в пространстве $V^{s,r}\times X^{s,r}$, которому принадлежат решения $\vec{\theta}_0$ и $\vec{\theta}_1$. Через c обозначена постоянная, зависящая только от области Ω, векторных полей $\vec{U}^{(1)},\vec{U}^{(2)}$ и параметров r,s, τ_{11}, τ_{22}. В дальнейшем зависимость той или иной постоянной от $\Omega,\vec{U}^{(1)},\vec{U}^{(2)},\tau_{11},\tau_{22}$ будем коротко называть зависимостью от данных задачи.

2. Сопряженная задача. Задача (8) – (13) для разности $\vec{q}_0 - \vec{q}_1$ имеет ту особенность, что к уравнениям (10), входящим в состав этой задачи, неприменимы известные результаты [7] о транспортных уравнениях, в силу того, что слагаемое $\vec{w}^{(i)}\cdot\nabla\varphi_i^1$ не удовлетворяет нужным условиям гладкости (не является ни гладким ни ограниченным). Однако из теоремы существования вытекает принадлежность слагаемых $\vec{w}^{(i)}\cdot\nabla\varphi_i^1$ пространству $\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)$, и поэтому возникает возможность трактовать разность $\vec{q}_0 - \vec{q}_1$ как очень слабое решение задачи (8) – (13). В связи с этим сформулируем сопряженную задачу следующим образом.

Для заданных векторных полей $\vec{H}^{(i)}$, скалярных полей G_i,F_i,M_{1i},M_{2i} и констант $s_i,i=1,2$ найти векторные поля $\vec{w}_*^{(i)}$, скалярные поля $\omega_i^*,\psi_i^*,\xi_i^{(j)*}$ и константы n_i^*, $i,j=1,2$, такие, что

$$\sum_{j=1}^{2}\mu_{ji}\left(\Delta\vec{w}_*^{(j)}-\nabla\omega_j^*-\mathcal{A}_0(\vec{w}_*^{(j)})\right)-\mathrm{Re}\,\mathcal{H}_i(\vec{w}_*^{(i)})+(-1)^{i+1}\mathcal{S}_0(\vec{w}_*^{(2)}-\vec{w}_*^{(1)})+$$
$$+\psi_i^*\cdot\nabla\varphi_i^1+\sum_{j=1}^{2}\zeta_{j1}^{(i)}\cdot\nabla\xi_j^{(i)*}=\vec{H}^{(i)}\ \text{в}\ \Omega; \tag{15}$$

$$div\vec{w}_*^{(i)}=\Pi\sum_{k=1}^{2}\left[\hat{\beta}_{ki}\psi_k^*+\sum_{j=1}^{2}(n_k^*\chi_{kj}^0\tilde{\beta}_{ji}+\mu_{kj}\beta_{ji}\omega_k^*)\right]+\Pi G_i\ \text{в}\ \Omega; \tag{16}$$

$$-\mathrm{div}(\psi_i^*\vec{u}_0^{(i)})+\tau_{ii}\psi_i^*=\mathrm{Re}\mathcal{M}_i(\vec{w}_*^{(i)})+\sum_{k=1}^{2}\left[\hat{\alpha}_{ki}\psi_k^*+\sum_{j=1}^{2}(n_k^*\chi_{kj}^0\tilde{\alpha}_{ji}+\mu_{kj}\alpha_{ji}\omega_k^*)\right]+F_i\ \text{в}\ \Omega; \tag{17}$$

$$\vec{u}_0^{(i)}\nabla\xi_j^{(i)*}+\tau_{ii}\xi_j^{(i)*}=\tilde{\gamma}_{ij}\sum_{k=1}^{2}n_k^*\chi_{ki}^0+M_{ji}\ \text{в}\ \Omega\,; \tag{18}$$

$$n_i^*=\int_\Omega\left(\gamma_i\sum_{j=1}^{2}\mu_{ji}\omega_j^*+\hat{\gamma}_i\psi_i^*\right)dx+s_i\,; \tag{19}$$

$$\vec{w}_*^{(i)}=0\ \text{на}\ \partial\Omega,\ \ \psi_i^*=0\ \text{на}\ \Sigma_{\mathrm{out}}^i,\ \ \xi_j^{(i)*}=0\ \text{на}\ \Sigma_{\mathrm{in}}^i,\ \ \Pi\omega_i^*=\omega_i^*,\ \ i,j=1,2. \tag{20}$$

Здесь линейные операторы $\mathcal{H}_i$ и $\mathcal{M}_i$ определены формулами

$$\mathcal{H}_i(\vec{h})=\rho_i^1\nabla(\boldsymbol{N}_0^{-1}\vec{u}_0^{(i)})\boldsymbol{N}_0^{-1}\vec{h}-(\boldsymbol{N}_0^T)^{-1}\,\mathrm{div}(\rho_i^1\vec{u}_1^{(i)}\otimes(N_0^{-1}\vec{h})),$$
$$\mathcal{M}_i(\vec{h})=(\vec{u}_0^{(i)}\ \nabla(\boldsymbol{N}_0^{-1}\vec{u}_0^{(i)}))\cdot\boldsymbol{N}_0^{-1}\vec{h},\ \ i=1,2.$$

Дальнейшее содержание этого раздела посвящается доказательству существования и единственности сильных и слабых решений сопряженной задачи (15) – (20). Эти результаты позволяют вывести оценки норм разностей $\vec{w}^{(i)}$, ω_i, $\psi_i,\xi_i^{(j)}$ и n_i .

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и дополнительно параметры* s,r *таковы, что* $\frac{1}{2}<s<1$, $(1-s)r>3$. *Тогда найдутся числа* c,σ_c *и* τ_c, *зависящие от данных задачи и параметров* s, r, *такие, что если* $min\{\tau_{11},\tau_{22}\}>\sigma_c$ *и* $0<\tau\le\tau_c$, *то для каждой вектор-функции* $\vec{f}=(\vec{f}^{(1)},\vec{f}^{(2)})$, $\vec{f}^{(i)}=(\vec{H}^{(i)};G_i,F_i,M_{1i},M_{2i};s_i)\in\mathcal{U}^{s,r}$, *задача* (15) – (20) *имеет единственное решение* $\vec{h}=(\vec{h}^{(1)},\vec{h}^{(2)})$, $\vec{h}^{(i)}=(\vec{w}_*^{(i)};\omega_i^*,\psi_i^*,\xi_1^{(i)*},\xi_2^{(i)*};n_i^*)\in\mathcal{V}^{s,r}$, *удовлетворяющее неравенству*

$$\|\vec{h}\|_{\mathcal{V}^{s,r}}\le c\|\vec{f}\|_{\mathcal{E}^{s,r}}\,. \tag{21}$$

Если наложить более ограничительное условие на правую часть $\vec{f}$, *а именно* $\vec{f}\in\mathcal{E}^{s,r}$, *то решение* $\vec{h}$ *принадлежит классу* $\mathcal{F}^{s,r}$ *и при этом имеет место неравенство*

$$\|\vec{h}\|_{\mathcal{F}^{s,r}}\le c\|\vec{f}\|_{\mathcal{E}^{s,r}}\,. \tag{22}$$

Схема доказательства теоремы 2. Уравнения (15) – (19) сопряженной задачи представим в символическом виде:

$$A[\vec{h}_*]-B[\vec{h}_*]=\vec{F},\ \vec{h}_*=(\vec{h}_*^{(1)},\vec{h}_*^{(2)}),\ \vec{h}_*^{(i)}=(\vec{w}_*^{(i)};\omega_i^*,\psi_i^*,\xi_1^{(i)*},\xi_2^{(i)*};n_i^*)$$

где интегро-дифференциальные операторы A и B определяются посредством формул

$$A[\vec{h}_*]=(A_1[\vec{h}_*],A_2[\vec{h}_*]),$$

$$A_i[\vec{h}_*]=\begin{Bmatrix} \sum\limits_{j=1}^{2}\mu_{ji}\left(\Delta\vec{w}_*^{(j)}-\nabla\omega_j^*\right)+\sum\limits_{j=1}^{2}\zeta_{j1}^{(i)}\cdot\nabla\xi_j^{(i)*} \\ \operatorname{div}\vec{w}_*^{(i)} \\ -\operatorname{div}(\psi_i^*\vec{u}_0^{(i)})+\tau_{ii}\psi_i^*-\sum\limits_{k=1}^{2}\sum\limits_{j=1}^{2}\mu_{kj}\alpha_{ji}\omega_k^* \\ \vec{u}_0^{(i)}\nabla\xi_1^{(i)*}+\tau_{ii}\xi_1^{(i)*} \\ \vec{u}_0^{(i)}\nabla\xi_2^{(i)*}+\tau_{ii}\xi_2^{(i)*} \\ n_i^*-\int\limits_{\Omega}\left(\gamma_i\sum\limits_{j=1}^{2}\mu_{ji}\omega_j^*+\hat{\gamma}_i\psi_i^*\right)dx \end{Bmatrix},$$

$$B[\vec{h}_*]=(B_1[\vec{h}_*],B_2[\vec{h}_*]),\tag{23}$$

$$B_i[\vec{h}_*]=\begin{Bmatrix} \sum\limits_{j=1}^{2}\mu_{ji}\mathcal{A}_0(\vec{w}_*^{(j)})+\operatorname{Re}\mathcal{H}_i(\vec{w}_*^{(i)})+(-1)^i\mathcal{S}_0(\vec{w}_*^{(2)}-\vec{w}_*^{(1)})-\psi_i^*\cdot\nabla\varphi_i^1 \\ \Pi\sum\limits_{k=1}^{2}\left[\hat{\beta}_{ki}\psi_k^*+\sum\limits_{j=1}^{2}(n_k^*\chi_{kj}^0\tilde{\beta}_{ji}+\mu_{kj}\beta_{ji}\omega_k^*)\right] \\ \operatorname{Re}\mathcal{M}_i(\vec{w}_*^{(i)})+\sum\limits_{k=1}^{2}\left[\hat{\alpha}_{ki}\psi_k^*+\sum\limits_{j=1}^{2}(n_k^*\chi_{kj}^0\tilde{\alpha}_{ji}+\mu_{kj}\alpha_{ji}\omega_k^*)\right] \\ \tilde{\gamma}_{i1}\sum\limits_{k=1}^{2}n_k^*\chi_{ki}^0 \\ \tilde{\gamma}_{i2}\sum\limits_{k=1}^{2}n_k^*\chi_{ki}^0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Рассмотрим следующую краевую задачу, присоединяя к системе уравнений

$$A[\vec{h}_*]=\vec{F}\tag{24}$$

граничные условия

$$\vec{w}_*^{(j)}=0 \text{ на } \partial\Omega,\quad \psi_i^*=0 \text{ на } \Sigma_{\text{out}}^i,\ \ \xi_1^{(i)*}=0,\xi_2^{(i)*}=0 \text{ на } \Sigma_{\text{in}}^i,\ \ \Pi\omega_i^*=\omega_i^*,\ \ i=1,2.\tag{25}$$

Нетрудно видеть, что для каждой правой части $\vec{F}=(\vec{F}^{(1)},\vec{F}^{(2)})$, $\vec{F}^{(i)}=(\vec{H}^{(i)};G_i,F_i,M_{1i},M_{2i};s_i)$ из пространства $\mathcal{U}^{s,r}$ краевая задача (24), (25) распадается на несколько независимых линейных граничных задач, а именно, функции $\xi_j^{(i)*}$, $i,j=1,2,$ определяются независимо как решения следующей задачи для транспортного уравнения

$$\vec{u}_0^{(i)} \nabla \xi_j^{(i)*} + \tau_{ii} \xi_j^{(i)*} = M_{ji} \text{ в } \Omega, \xi_j^{(i)*} = 0 \text{ на } \Sigma_{\text{in}}^i, i, j = 1, 2.$$

После этого компоненты $\vec{w}_*^{(i)}, \omega_i^*$, $i = 1, 2$, находятся как решения задач типа Стокса, т.е.

$$\sum_{j=1}^{2} \mu_{ji} (\Delta \vec{w}_*^{(j)} - \nabla \omega_j^*) = \vec{H}^{(i)} - \sum_{j=1}^{2} \zeta_{j1}^{(i)} \cdot \nabla \xi_j^{(i)*} \text{ в } \Omega,$$

$$\operatorname{div} \vec{w}_*^{(i)} = \Pi G_i \text{ в } \Omega,$$

$$\vec{w}_*^{(i)} = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad \Pi \omega_i^* = \omega_i^*, \ i = 1, 2.$$

Следующий шаг – определение компонент ψ_i^* как решения краевой задачи

$$-\operatorname{div}(\psi_i^* \vec{u}_0^{(i)}) + \tau_{ii} \psi_i^* = \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \mu_{kj} \alpha_{ji} \omega_k^* + F_i \text{ в } \Omega, \quad \psi_i^* = 0 \text{ на } \Sigma_{\text{out}}^i, \ i = 1, 2.$$

Завершает процедуру построения решения задачи (24), (25) нахождение постоянных n_i^* по формулам

$$n_i^* = \int_{\Omega} \left(\gamma_i \sum_{j=1}^{2} \mu_{ji} \omega_j^* + \hat{\gamma}_i \psi_i^* \right) dx + s_i, i = 1, 2.$$

На основании известных результатов о транспортных уравнениях и линейной задачи типа Стокса [1, 7] можем утверждать существование таких констант c и σ_c, зависящих от данных задачи Ω, $\vec{U}^{(1)}, \vec{U}^{(2)}$ и параметров r, s, что если $\min\{\tau_{11}, \tau_{22}\} \geq \sigma_c$, то задача (24), (25) однозначно разрешима в пространствах $\mathcal{V}^{s,r}$ и справедливо неравенство

$$\left\| \vec{h}_* \right\|_{\mathcal{V}^{s,r}} \leq c \left\| \vec{F} \right\|_{\mathcal{U}^{s,r}}. \tag{26}$$

Сказанное выше мы трактуем в виде существования (обратного) ограниченного линейного оператора $A^{-1} : \mathcal{U}^{s,r} \to \mathcal{V}^{s,r}$, сопоставляющего элементу $\vec{F} \in \mathcal{U}^{s,r}$ единственное решение $\vec{h}_* = A^{-1}[\vec{F}]$ краевой задачи (24), (25).

Обратимся теперь к интегрально-дифференциальному оператору B, заданному формулами (23), и отметим следующие его свойства.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и, кроме того,* $\frac{1}{2} < s < 1$, $(1-s)r > 3$. *Тогда* B *– ограниченный линейный оператор из* $\mathcal{V}^{s,r}$ *в* $\mathcal{U}^{s,r}$ *и из* $\mathcal{F}^{s,r}$ *в* $\mathcal{E}^{s,r}$, *и при этом выполняются неравенства*

$$\left\| B\vec{h} \right\|_{\mathcal{U}^{s,r}} \leq c \cdot \tau \left\| \vec{h} \right\|_{\mathcal{V}^{s,r}}; \tag{27}$$

$$\left\| B\vec{h} \right\|_{\mathcal{E}^{s,r}} \leq c \cdot \tau \left\| \vec{h} \right\|_{\mathcal{F}^{s,r}}. \tag{28}$$

Здесь постоянная c *зависит только от* Ω, *векторных полей* $\vec{U}^{(1)}, \vec{U}^{(2)}$ *и параметров* r, s.

Сейчас мы можем завершить доказательство существования и единственности решения сопряженной задачи.

Пусть выполнены условия теоремы 2. Сопряженная задача (15) – (20) может быть записана в виде операторного уравнения

$$(I - A^{-1}B)\vec{h} = A^{-1}\vec{f} .$$

В силу (26), (27) линейные операторы $A^{-1} : \mathcal{U}^{s,r} \to \mathcal{V}^{s,r}$ и $A^{-1}B : \mathcal{V}^{s,r} \to \mathcal{V}^{s,r}$ ограничены, причем

$$\left\| A^{-1}B \right\|_{L(\mathcal{V}^{s,r})} \le c_V \cdot \tau , \qquad (29)$$

где постоянная c_V зависит только от данных задачи и параметров r, s. На основании условий теоремы 1 параметр τ удовлетворяет условиям $0 < \tau \le \tau^*(\tau_{11}, \tau_{22})$. Выберем постоянную τ_c так, чтобы выполнялись неравенства

$$0 < \tau_c \le \tau^*(\tau_{11}, \tau_{22}), \; \tau_c \cdot c_V \le q < 1.$$

Из (29) следует, что для $\tau \in (0; \tau_c]$ норма $\left\| A^{-1}B \right\|_{L(\mathcal{V}^{s,r})}$ отделена от единицы и на основании известной теоремы оператор $(I - A^{-1}B)^{-1}$ существует и ограничен

$$\left\| (I - A^{-1}B)^{-1} \right\|_{L(\mathcal{V}^{s,r})} \le \frac{1}{1-q}.$$

Таким образом, для указанных значений τ и любых $\vec{f} \in \mathcal{U}^{s,r}$ сопряженная задача (15) – (20) имеет единственное решение $\vec{h} \in \mathcal{V}^{s,r}$, и для него имеет место неравенство (21).

Пусть теперь правая часть $\vec{f}$ задачи (15) – (20) принадлежит пространству $\mathcal{E}^{s,r}$. Так как оператор A^{-1} решения задачи (24), (25) является ограниченным линейным оператором, действующим из $\mathcal{E}^{s,r}$ в $\mathcal{F}^{s,r}$, то в силу оценок (26), (28) имеем

$$\left\| A^{-1}B \right\|_{L(\mathcal{F}^{s,r})} \le c_F \cdot \tau .$$

Если параметр τ подчинен условию $\tau \in (0; \tau_c]$, где

$$0 < \tau_c \le \tau^*(\tau_{11}, \tau_{22}), \; \tau_c \cdot c_F \le q < 1,$$

то подобно предыдущему случаю получаем, что при условии $\vec{f} \in \mathcal{E}^{s,r}$ решение $\vec{h}$ задачи (15) – (20) принадлежит классу $\mathcal{F}^{s,r}$ и справедлива оценка (22). Теорема 2 доказана.

3. Оценки разностей. Для $s \in (0,1)$, $r \in (1,\infty)$ обозначим через $\langle \cdot , \cdot \rangle_1$ и $\langle \cdot , \cdot \rangle_0$ соотношение двойственности между парами пространств $\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)$, $\mathcal{W}_0^{1-s,r'}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-s,r'}(\Omega)$, $W^{s,r}(\Omega)$ соответственно.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда векторные поля* $\vec{w}^{(j)}, j=1,2$, *скалярные поля* ω_j, ψ_j, $\xi_j^{(i)}, i,j=1,2,$ *и постоянные* $n_j, j=1,2,$, *определенные по формулам* (7) *принадлежат соответственно пространствам* $\mathcal{W}_0^{1-s,r'}(\Omega)$, $\mathbb{W}^{-s,r'}(\Omega)$, $\mathbb{R}$ *и удовлетворяют тождеству*

$$\sum_{i=1}^{2}\Big[\langle \vec{H}^{(i)},\vec{w}^{(i)}\rangle_1+\langle \omega_i,G_i\rangle_0+\langle \psi_i,F_i\rangle_0+\langle \xi_1^{(i)},M_{1i}\rangle_0+\langle \xi_2^{(i)},M_{2i}\rangle_0+n_i s_i\Big]=$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\left[\vec{w}_*^{(i)}(\mathcal{D}_i+(-1)^i\mathcal{E})+d\left(\hat{\delta}_i\psi_i^*+\sum_{j=1}^{2}(\tau_{ji}\xi_j^{(i)*}+n_i^*\chi_{ij}^0\tilde{\delta}_j+\mu_{ij}\delta_j\omega_i^*)\right)\right]dx, \tag{30}$$

где $\vec{f}^{(i)}=(\vec{H}^{(i)};G_i,F_i,M_{1i},M_{2i};s_i),\ i=1,2,$ – *произвольные функции из* $\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)\times W^{s,r}(\Omega)\times\mathbb{R}$, *а* $(\vec{w}_*^{(i)};\omega_i^*,\psi_i^*,\xi_1^{(i)*},\xi_2^{(i)*};n_i^*), i=1,2,$ – *соответствующее решение сопряженной задачи* (15) – (20).

Доказательство. Поскольку множество $L^r(\Omega)\times W^{1,r}(\Omega)\times\mathbb{R}$ содержится в $\mathcal{E}^{s,r}$ и плотно в $\mathcal{U}^{s,r}=\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)\times W^{s,r}(\Omega)\times\mathbb{R}$, то для любого элемента $\vec{f}=(\vec{f}^{(1)},\vec{f}^{(2)})$, $\vec{f}^{(i)}=(\vec{H}^{(i)};G_i,F_i,M_{1i},M_{2i};s_i)$ из пространства $\mathcal{U}^{s,r}$ найдется последовательность $\vec{f}_n=(\vec{f}_n^{(1)},\vec{f}_n^{(2)})$, $\vec{f}_n^{(i)}=(\vec{H}_n^{(i)};G_{in},F_{in},M_{1in},M_{2in};s_{in})$, $\vec{f}_n^{(i)}\in L^r(\Omega)\times W^{1,r}(\Omega)\times\mathbb{R}$, такая, что

$$\vec{f}_n\to\vec{f}\ \text{в}\ \mathcal{U}^{s,r},\ n\to\infty. \tag{31}$$

Поэтому докажем тождество (30) сначала для вектор-функции $\vec{f}$ из пространства $L^r(\Omega)\times W^{1,r}(\Omega)\times\mathbb{R}$. В этом случае соответствующее решение $(\vec{w}_*^{(i)},\omega_i^*,\psi_i^*,\xi_1^{(i)*},\xi_2^{(i)*},n_i^*)$, $i=1,2,$ сопряженной задачи (15) – (20) принадлежит классу $V^{s,r}\times X^{s,r}\times\mathbb{R}=\mathcal{F}^{s,r}$ (в частности, это означает, что векторные поля $\vec{w}_*^{(i)}$ обладают непрерывными производными первого порядка и производными второго порядка, суммируемыми с квадратом, и скалярные функции $\omega_i^*,\psi_i^*,\xi_1^{(i)*},\xi_2^{(i)*}$ непрерывны и обладают производными первого порядка, суммируемыми с квадратом). В силу теоремы 1 можем утверждать, что $\vec{w}^{(i)},\vec{v}_k^{(i)},\vec{u}_k^{(i)}\in V^{s,r}$, $\omega_i,\psi_i,\xi_j^{(i)},\rho_i^k,\pi_i^k,\varphi_i^k,\zeta_{jk}^{(i)}\in X^{s,r}$, $i,j=1,2,$ $k=0,1$. Непрерывность вложений $V^{s,r}$ в $C^1(\Omega)$ обеспечивает непрерывную дифференцируемость в Ω векторных полей $\vec{w}^{(i)},\vec{v}_k^{(i)},\vec{u}_k^{(i)}$ и, разумеется, принадлежность их $W^{2,2}(\Omega)$. Непрерывность вложения $X^{s,r}$ в $C(\Omega)$ влечет непрерывность скалярных функций $\omega_i,\psi_i,\xi_j^{(i)}$, ρ_i^k, π_i^k, φ_i^k, $\zeta_{jk}^{(i)}$, принадлежащих также пространствам $W^{1,2}(\Omega)$. Отсюда следует, что уравнения (8) – (11), (13) выполнены в сильном смысле. Умножая эти уравнения соответственно на решение $\vec{w}_*^{(i)},\omega_i^*,\psi_i^*,\xi_1^{(i)*},\xi_2^{(i)*},n_i^*, i=1,2,$ сопряженной задачи (15) – (20), соответствующее элементу $\vec{f}\in L^r(\Omega)\times W^{1,r}(\Omega)\times\mathbb{R}$, и интегрируя по частям, приходим к тождеству

$$\sum_{i=1}^{2}\left[\int_{\Omega}\left(\vec{w}^{(i)}\vec{H}^{(i)}+\omega_i G_i+\psi_i F_i+\xi_1^{(i)}M_{1i}+\xi_2^{(i)}M_{2i}\right)dx+n_i s_i\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\left[\vec{w}_*^{(i)}(\mathcal{D}_i+(-1)^i\mathcal{E}^{s,r})+d\left(\hat{\delta}_i\psi_i^*+\sum_{j=1}^{2}(\tau_{ji}\xi_j^{(i)*}+n_i^*\chi_{ij}^0\tilde{\delta}_j+\mu_{ij}\delta_j\omega_i^*)\right)\right]dx. \quad (32)$$

Заметим, что вектор-функции $(\vec{H}^{(i)};\omega_i,\psi_i,\xi_1^{(i)},\xi_2^{(i)})$ и $(\vec{w}^{(i)};G_i,F_i,M_{1i},M_{2i})$ принадлежат двойственным пространствам $\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)\times\mathbb{W}^{-s,r'}(\Omega)$, и $\mathcal{W}_0^{1-s,r'}(\Omega)\times W^{s,r}(\Omega)$, соответственно. Действительно, $\vec{H}^{(i)}\in\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)$ поскольку $\vec{H}^{(i)}\in L^r(\Omega)$ и имеет место ограниченное вложение $L^r(\Omega)$ в $\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)$. Скалярные поля $\omega_i,\psi_i,\xi_1^{(i)},\xi_2^{(i)}$ есть элементы $W^{s,r}(\Omega)$, а в силу вложений $W^{s,r}(\Omega)\subset L^r(\Omega)\subset\mathbb{W}^{-s,r'}(\Omega)$ ($r>3,\ 1<r'=\dfrac{r}{r-1}<r$) получаем, что эти функции принадлежат $\mathbb{W}^{-s,r'}(\Omega)$.

Далее, векторное поле $\vec{w}^{(i)}\in V^{s,r}$ и, следовательно, $\vec{w}^{(i)}\in C^1(\Omega)$. Кроме того $\vec{w}^{(i)}$ принимает нулевое значение на $\partial\Omega$. Таким образом, ясно, что $\vec{w}^{(i)}\in W_0^{1,r'}(\Omega)$. Так как $\mathcal{W}_0^{1-s,r'}(\Omega)$ – интерполяционное пространство $[L^{r'}(\Omega),W_0^{1,r'}(\Omega)]_{1-s,r'}$ и $W_0^{1,r'}(\Omega)\subset L^{r'}(\Omega)$, то $W_0^{1,r'}(\Omega)\subset\mathcal{W}_0^{1-s,r'}(\Omega)$. Итак, имеет место включение $\vec{w}^{(i)}\in\mathcal{W}_0^{1-s,r'}(\Omega)$. С другой стороны, элементы G_i,F_i,M_{1i},M_{2i} принадлежат, очевидно, $W^{s,r}(\Omega)$. В силу вышесказанного, интегралы в левой части тождества (32) могут быть записаны в терминах форм двойственности и, таким образом, тождество (30) леммы 2 доказано для вектор-функций $(\vec{H}^{(i)};G_i,F_i,M_{1i},M_{2i};s_i)$ из более узкого функционального пространства $L^r(\Omega)\times W^{1,r}(\Omega)\times\mathbb{R}$, т.е. имеем право написать

$$\sum_{i=1}^{2}\left\{\langle\vec{H}_n^{(i)},\vec{w}^{(i)}\rangle_1+\langle\omega_i,G_{in}\rangle_0+\langle\psi_i,F_{in}\rangle_0+\langle\xi_1^{(i)},M_{1in}\rangle_0+\langle\xi_2^{(i)},M_{2in}\rangle_0+n_i s_{in}\right\}=$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\left\{\vec{w}_{n*}^{(i)}(\mathcal{D}_i+(-1)^i\mathcal{E})+d\left(\hat{\delta}_i\psi_{in}^*+\sum_{j=1}^{2}(\tau_{ji}\xi_{jn}^{(i)*}+n_{in}^*\chi_{ij}^0\tilde{\delta}_j+\mu_{ij}\delta_j\omega_{in}^*)\right)\right\}dx, \quad (33)$$

где $\vec{h}_n^{(i)}=(\vec{w}_{n*}^{(i)};\omega_{in}^*,\psi_{in}^*,\xi_{1n}^{(i)*},\xi_{2n}^{(i)*};n_{in}^*)$, $i=1,2,$ – решение задачи (15) – (20), соответствующее «правой части» $\vec{f}_n^{(i)}$, $i=1,2$. Из (31) в силу теоремы 2 имеем, что

$$\vec{h}_n=(\vec{h}_n^{(1)},\vec{h}_n^{(2)})\to\vec{h}=(\vec{h}^{(1)},\vec{h}^{(2)})\text{ в }\mathcal{V}^{s,r},\ n\to\infty. \quad (34)$$

Совершая в (33) предельный переход при $n\to\infty$, получаем в силу (31) и (34) заявленное в лемме 2 тождество (30). Лемма 2 доказана.

Доказанное в лемме 2 тождество (30) означает, что разность $\vec{q}_0-\vec{q}_1$ является очень слабым решением линейной задачи (8) – (13).

Лемма 3. *Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда имеет место неравенство*

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\left\|\vec{w}^{(i)}\right\|_{\mathcal{W}_0^{1-s,r'}}+\|\psi_i\|_{\mathbb{W}^{-s,r'}}+\|\omega_i\|_{\mathbb{W}^{-s,r'}}+\left\|\xi_1^{(i)}\right\|_{\mathbb{W}^{-s,r'}}+\left\|\xi_2^{(i)}\right\|_{\mathbb{W}^{-s,r'}}+|n_i|\right)\le$$
$$\le c\left(\|d\|_{L^1(\Omega)}+\|\mathcal{D}_1\|_{L^1(\Omega)}+\|\mathcal{D}_2\|_{L^1(\Omega)}+\|\mathcal{E}\|_{L^1(\Omega)}\right), \qquad (35)$$

где постоянная c *зависит от данных задачи и параметров* r, s .

Доказательство. Обращаясь к тождеству (30), заметим, что поскольку коэффициенты $\hat{\delta}_i, \tilde{\delta}_i, \delta_i$ ограничены по модулю константой, зависящей только от данных задачи и r, s (см. (14)), то правая часть этого тождества может быть оценена величиной

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\left\|\vec{w}_*^{(i)}\right\|_{C(\Omega)}+\left\|\psi_i^*\right\|_{C(\Omega)}+\left\|\omega_i^*\right\|_{C(\Omega)}+\left\|\xi_1^{(i)*}\right\|_{C(\Omega)}+\left\|\xi_2^{(i)*}\right\|_{C(\Omega)}+|n_i^*|\right)\times$$
$$\times\left(\|d\|_{L^1(\Omega)}+\|\mathcal{D}_1\|_{L^1(\Omega)}+\|\mathcal{D}_2\|_{L^1(\Omega)}+\|\mathcal{E}\|_{L^1(\Omega)}\right)\cdot c. \qquad (36)$$

Кроме того, в силу теоремы вложения и оценки (21) имеем

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\left\|\vec{w}_*^{(i)}\right\|_{C(\Omega)}+\left\|\psi_i^*\right\|_{C(\Omega)}+\left\|\omega_i^*\right\|_{C(\Omega)}+\left\|\xi_1^{(i)*}\right\|_{C(\Omega)}+\left\|\xi_2^{(i)*}\right\|_{C(\Omega)}+|n_i^*|\right)\le$$
$$\le c\left\|\vec{h}\right\|_{\mathcal{V}^{s,r}}\le c\left\|\vec{f}\right\|_{\mathcal{U}^{s,r}} \qquad (37)$$

Из (36) и (37) получим

$$\left|\sum_{i=1}^{2}\left\{\langle\vec{H}^{(i)},\vec{w}^{(i)}\rangle_1+\langle\omega_i,G_i\rangle_0+\langle\psi_i,F_i\rangle_0+\langle\xi_1^{(i)},M_{1i}\rangle_0+\langle\xi_2^{(i)},M_{2i}\rangle_0+n_is_i\right\}\right|\le$$
$$\le c\sum_{i=1}^{2}\left(\|d\|_{L^1(\Omega)}+\|\mathcal{D}_i\|_{L^1(\Omega)}+\|\mathcal{E}\|_{L^1(\Omega)}\right)\left\|\vec{f}\right\|_{\mathcal{U}^{s,r}} \qquad (38)$$

Из неравенства (38), очевидно, следует оценка (35). Лемма 3 доказана.

Из неравенства (35) вытекает, во-первых, единственность решения задачи (6). Кроме того, из (35) следует, что отображение, сопоставляющее матричнозначной функции N решение $\vec{q}$ неоднородной краевой задачи (6) является Липшицевым в слабой норме.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жалнина А.А.*, *Кучер Н.А.* О корректности неоднородной краевой задачи для уравнений смесей вязких сжимаемых жидкостей // Сиб. журн. индустр. матем. 2015. Т. 18. № 3. С. 26–39. DOI 10.17377/sibjim.2015.18.303.
2. *Rajagopal K.R.*, *Tao L.* Mechanics of mixtures. Singapore: World Sci., 1995.
3. *Крайко А.Н.*, *Нигматулин Р.И.* Механика многофазных сред // Итоги науки и техники. Сер. гидромеханика. 1972. Т. 6. С. 93–174.
4. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987.
5. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
6. *Берг Й.*, *Лефстрем Й.* Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
7. *Plotnikov P.*, *Sokolowski J.* Compressible Navier-Stokes equations: Theory and shape optimization. Basel: Springer, 2012. DOI 10.1007/978-3-0348-0 367-0.

Статья поступила 16.07.2016 г.

Zhalnina A.A. (2016) DOMAIN SHAPE INFLUENCE ON THE SOLUTION OF THE PROBLEM ABOUT THE FLOW OF A MIXTURE OF COMPRESSIBLE VISCOUS FLUIDS AROUND AN OBSTACLE *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(43). pp. 5–20

DOI 10.17223/19988621/43/1

In this paper, it is studied how the solution of the boundary value problem for the motion equations of a mixture of compressible viscous fluids depends on the shape of the domain. Such a problem arises in connection with the problem of searching for the optimum shape of the obstacle which is flown around by a stream of the mixture. The solution is reduced to studying the dependence of solutions of a nonlinear system of compound-type partial differential equations on the matrix setting the deformation of the domain. Properties of coefficients of the linear system obtained for a difference of two possible solutions (corresponding to two different matrices) allow one to construct only its very weak solutions. Therefore, there appears the necessity to consider the conjugate problem and to construct its solutions (weak and strong ones). The basic results of the work are estimations allowing one to assert that the mapping associating the solution of the abovementioned boundary value problem to the matrix is a Lipschitz mapping. In particular, this implies the uniqueness of the solution of the inhomogeneous boundary value problem for the initial system of equations. On the basis of the obtained results, differentiability of the functional reflecting the drag force of the streamlined obstacle can be established, as well as an explicit formula representing the derivative of the functional.

Keywords: mixture of viscous compressible fluids, flow around an obstacle, inhomogeneous boundary value problem, transposed problem.

ZHALNINA Alexandra Anatolevna (Kemerovo State University, Kemerovo, Russia)
E-mail: qwert1776@yandex.ru

REFERENCES

1. Zhalnina A.A., Kucher N.A. (2015) On the Well-Posedness of an Inhomogeneous Boundary Value Problem for the Equations of Mixtures of Viscous Compressible Fluids. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 9(4). pp. 598–610. DOI 10.17377/sibjim.2015.18.303.
2. Rajagopal K.R., Tao L. (1995) *Mechanics of Mixtures*. Singapore: World Sci. Publ.
3. Kraiko A.N., Nigmatulin R.I. (1972) Mekhanika mnogofaznykh sred [Mechanics of Multiphase Media]. *Itogi Nauki. Gidromechanika*. 6. pp. 93–174.
4. Nigmatulin R.I. (1987) *Dinamika mnogofaznykh sred* [Dynamics of Multiphase Media]. Vol. 1. Moscow: Nauka Publ.
5. Sobolev S.L. (1991) *Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*. Providence: AMS.
6. Bergh J., Löfström J. (1976) "*Interpolation Spaces: An Introduction*". A Series of Comprehensive Studies in Mathematics. Berlin, New York: Springer-Verlag.
7. Plotnikov P.I., Sokolowski J. (2012) Compressible Navier – Stokes Equations: Theory and Shape Optimization. Basel: Springer. DOI 10.1007/978-3-0348-0 367-0.