

УДК 512.541

DOI 10.17223/19988621/43/2

С. Жамбаа, Т.В. Касаткина, А.М. Бубенчиков**ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОНСТАНТ В ИНТЕГРАЛЕ КРИСТОФФЕЛЯ – ШВАРЦА ПО МЕТОДУ П.П. КУФАРЕВА**

Применение формулы Кристоффеля – Шварца ограничено трудностями в нахождении прообразов вершин исходного многоугольника. Для определения констант Кристоффеля – Шварца использован метод П.П. Куфарева, который сводит проблему нахождения констант к более легкой задаче численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Описана численная реализация метода П.П. Куфарева и даны примеры гидродинамических расчетов, позволяющие оценить качество представленной математической технологии.

Ключевые слова: *конформное отображение прямолинейных многоугольников, образы и прообразы вершин, линии тока.*

Проблема констант в интеграле Кристоффеля – Шварца

Внешность односвязного многоугольника с заданным расположением вершин в области Z отображается на верхнюю полуплоскость W формулой Кристоффеля – Шварца

$$\frac{\partial Z}{\partial W} = \prod_{k=1}^n (W - a_k)^{\alpha_k} . \quad (1)$$

Само это отображение, сводящееся к вычислению интеграла по контуру, лежащему в области W , не представляет особых затруднений, но интеграл вида (1) получен в предположении, что известны прообразы вершин (a_k). Однако в действительности задаются лишь вершины многоугольника Z_k , а точки a_k остаются неизвестными. Это обстоятельство представляет главную трудность при практическом осуществлении конформного отображения. Многими авторами [2, 3] предпринимались попытки решить проблему параметров a_k , но при следовании обычным путем, задача всегда сводилась к нахождению корней сложной системы нелинейных уравнений между этими величинами. Однако еще в 1947 г. профессором Томского университета П.П. Куфаревым [4] был предложен совершенно необычный способ нахождения параметров в интеграле Кристоффеля – Шварца.

Краткое описание метода П.П. Куфарева

Метод Куфарева [5] применим к многоугольникам, имеющим хотя бы один прямолинейный разрез, то есть к таким, например, как показано на рис. 1. Причем последнее звено (4–5) не должно в точности доходить до вещественной оси. Имеются, таким образом, как внешние (1–5), так и внутренние (6–9) вершины, пронумерованные соответственно.

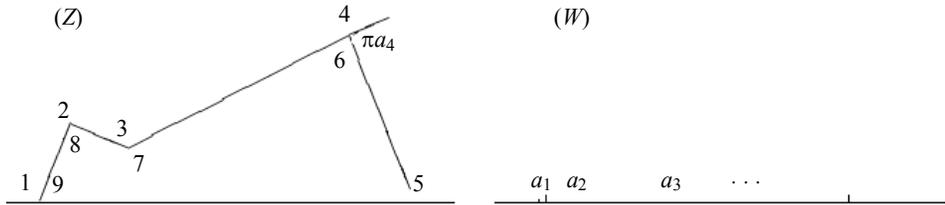


Рис. 1. Отображение внешности многоугольника на верхнюю полуплоскость
 Fig. 1. Mapping of the polygon exterior on the upper half plane

Прообраз вершины разреза (5), обозначим через λ . Тогда, учитывая, что показатель степени α для этой вершины равен единице, в уравнении (1) должен появиться множитель $(W - \lambda)$ т.е.

$$\frac{\partial Z}{\partial W} = (W - \lambda) \prod_{k=1}^n (W - a_k)^{\alpha_k}. \quad (2)$$

В методе Куфарева прообразы вершин многоугольника $a_k = a_k(t)$, $\lambda = \lambda(t)$ рассматриваются как функции некоторого параметра t и одновременно с уравнением (2) привлекается еще одно дифференциальное уравнение, называемое уравнением Левнера, которое имеет вид

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = - \prod_{k=1}^n (W - a_k)^{\alpha_k} = \frac{1}{\lambda - W} \frac{\partial Z}{\partial W}. \quad (3)$$

Задача состоит в нахождении таких зависимостей $\lambda = \lambda(t)$ и $a_k = a_k(t)$, чтобы уравнения (2) и (3) выполнялись одновременно, то есть из уравнения (3) должно следовать уравнение (2). Чтобы получить необходимые соотношения, рассмотрим функцию

$$\Phi(W, t) = \ln \frac{\partial Z}{\partial W}. \quad (4)$$

Вычисляя для нее частную производную по переменной t и дифференцируя равенство (3) по W , находим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial^2 Z / \partial t \partial W}{\partial Z / \partial W}, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial t \partial W} = \frac{1}{(\lambda - W)^2} \frac{\partial Z}{\partial W} + \frac{1}{\lambda - W} \frac{\partial^2 Z}{\partial W^2}. \quad (5)$$

Из двух формул (5) следует, что функция $\Phi(W, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{(\lambda - W)^2} + \frac{1}{\lambda - W} \frac{\partial \Phi}{\partial W}. \quad (6)$$

С другой стороны, исходя из формулы (1), имеем

$$\begin{aligned} \Phi(W, t) &= \ln \left(\frac{\partial Z}{\partial W} \right) = \ln(W - \lambda) + \sum_{k=1}^n \alpha_k \ln(W - a_k), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= - \frac{\dot{\lambda}}{W - \lambda} - \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k \dot{a}_k}{W - a_k}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial W} = \frac{1}{W - \lambda} + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{W - a_k}. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя частные производные функции $\Phi(W, t)$ из формулы (7) в (6), получаем

$$-\frac{\dot{\lambda}}{W-\lambda}-\sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k \dot{a}_k}{W-a_k}=\frac{1}{(\lambda-W)^2}+\frac{1}{\lambda-W}\left[\frac{1}{W-\lambda}+\sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{W-a_k}\right]. \quad (8)$$

Сгруппируем члены в последнем выражении следующим образом:

$$\frac{1}{W-\lambda}\left(\dot{\lambda}-\sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{\lambda-a_k}\right)+\sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{W-a_k}\left(\dot{a}_k-\frac{1}{a_k-\lambda}\right)=0. \quad (9)$$

Так как равенство (9) должно выполняться при произвольных значениях W , то отсюда можно найти

$$\dot{a}_k=\frac{1}{a_k-\lambda}, \quad \dot{\lambda}=-\sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{\lambda-a_k}, \quad \lambda=-\sum_{k=1}^n \alpha_k a_k+\text{const}, \quad k=1, \dots, n. \quad (10)$$

Формулы (10) являются необходимыми и достаточными условиями тождественности уравнений (2) и (3) [5]. Они представляют собой дифференциальные уравнения для нахождения прообразов вершин многоугольника. Эти прообразы изменяются вместе с параметром t согласно уравнениям (10).

Свойство преобразования Куфарева

Посмотрим, что происходит с вершинами многоугольника в плоскости Z . Запишем полную производную от Z по t , допуская, что W также зависит от t . Тогда получим

$$\frac{dZ}{dt}=\frac{\partial Z}{\partial t}+\frac{\partial Z}{\partial W} \dot{W}=\frac{\partial Z}{\partial W}\left(\dot{W}+\frac{1}{\lambda-W}\right). \quad (11)$$

Здесь использована формула (3). Если в (11) положить $W=a_k$, то, в силу (10), правая часть (11) будет равна нулю. Это означает, что вершины многоугольника в плоскости Z , не совпадающие с концом разреза λ , не зависят от параметра t и остаются неподвижными.

Далее, если подставить в уравнение (11) $W=\lambda$ и учесть, что $\partial Z/\partial W$ содержит множитель $(W-\lambda)$, то получим

$$\left.\frac{dZ}{dt}\right|_{W=\lambda}=\frac{\partial Z}{\partial W} \frac{1}{\lambda-W}=\prod_{k=1}^n\left(a_k-\lambda\right)^{\alpha_k}. \quad (12)$$

Если через L обозначим длину разреза, то

$$\frac{dL}{dt}=\left|\frac{dZ}{dt}\right|_{W=\lambda}=\prod_{k=1}^n\left|a_k-\lambda\right|^{\alpha_k}. \quad (13)$$

Приведенные рассуждения приводят к следующему выводу:

Если при $t=t_0$ известны константы Кристоффеля – Шварца (прообразы a_k) при отображении верхней полуплоскости на многоугольник, то уравнения (10) и (13) описывают изменения этих констант при добавлении к n -угольнику прямолинейного разреза длины $L(t)$. Это замечательное свойство метода Куфарева можно использовать для определения констант Кристоффеля – Шварца практически любого односвязного многоугольника, составленного из прямолинейных разрезов, выпускаемых в определенной последовательности.

Интегрирование дифференциальных уравнений (10) и (13) следует производить до того момента t , для которого длина соответствующего разреза достигнет заданного значения.

Проблема начальных условий

При численном интегрировании дифференциальных уравнений (10) и (13) имеется небольшое затруднение. Прообраз вершины разреза λ заключен между двумя величинами $a_i < \lambda < a_{i+1}$, причем в начальный момент, когда длина выпускаемого разреза еще равна нулю, эти три точки совпадают и, при этом, правая часть трех уравнений из системы (10) обращается в бесконечность. Эта трудность преодолевается тем, что начальный шаг по t можно взять настолько малым, что за этот промежуток времени счета все остальные прообразы a_k практически не меняются, за исключением трех особых точек a_i , λ и a_{i+1} . Последние три дифференциальных уравнения можно решить аналитическим способом. Запишем их в виде

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{1}{a_i - \lambda}, \quad \lambda = \lambda_0 - \alpha_i a_i - \alpha_{i+1} a_{i+1}, \quad \frac{da_{i+1}}{dt} = \frac{1}{a_{i+1} - \lambda}. \quad (14)$$

Легко показать, что эта система уравнений имеет следующее решение:

$$a_i = \lambda_0 - \sqrt{\frac{1 + \alpha_{i+1}}{1 + \alpha_i}} \sqrt{2t}, \quad \lambda = \lambda_0 + \frac{\alpha_i - \alpha_{i+1}}{\sqrt{(1 + \alpha_i)(1 + \alpha_{i+1})}} \sqrt{2t}, \quad a_{i+1} = \lambda_0 + \sqrt{\frac{1 + \alpha_i}{1 + \alpha_{i+1}}} \sqrt{2t}. \quad (15)$$

Здесь видно, что при малом шаге t , смещаются все три точки в соответствии с показателями степеней α .

Численная реализация

Систему дифференциальных уравнений П.П. Куфарова (10) удобнее записывать в векторной форме:

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \mathbf{M}(\alpha) \frac{1}{\vec{b}}, \quad b_k = a_k - \lambda, \quad \frac{dL}{dt} = \prod_{k=1}^n |b_k|^{\alpha_k}. \quad (16)$$

Здесь матрица $\mathbf{M}(\alpha)$ зависит только от показателей степеней и имеет простой вид. Для четырех подвижных точек система уравнений (16) будет, например, следующей:

$$\begin{pmatrix} \dot{b}_1 \\ \dot{b}_2 \\ \dot{b}_3 \\ \dot{b}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_1 & 1 + \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 1 + \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 1 + \alpha_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/b_1 \\ 1/b_2 \\ 1/b_3 \\ 1/b_4 \end{pmatrix}, \quad \dot{L} = |b_1|^{\alpha_1} |b_2|^{\alpha_2} |b_3|^{\alpha_3} |b_4|^{\alpha_4}. \quad (17)$$

Если в данном примере в начальный момент известны величины b_1 и b_4 , а $b_2 = b_3 = 0$, то нужно использовать формулы (15) для их начального сдвига. После этого численное интегрирование системы (17) можно осуществлять известными способами. Хороший результат дает и метод Эйлера с мелким шагом.

При проведении последовательности разрезов нужно каждый раз повторять решение системы (16) с увеличенным на две единицы числом подвижных точек. Состояние прообразов вершин и показателей степени интеграла (2) сохраняется в соответствующих двухстрочных матрицах \mathbf{D} . Среди входных параметров программного модуля содержится предыдущая матрица \mathbf{D}_n , и необходимая информация о проводимом разрезе. На выходе возвращается новая матрица \mathbf{D}_{n+1} . Этот же модуль рисует и образы линий $\text{Im}(W) = \text{const}$ в плоскости Z (линии тока), для чего применяется численное интегрирование по переменной W в формуле (2).

Результаты счета

На рис. 2 показан результат расчета линий тока, обтекающих многоугольник, образованный тремя последовательными разрезами.

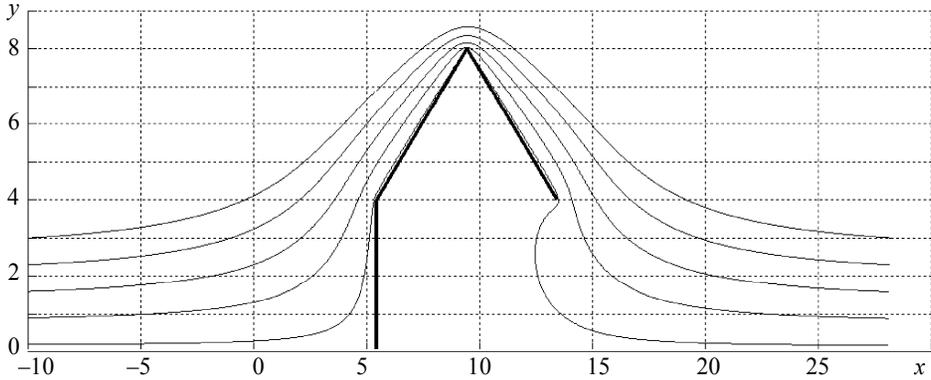


Рис. 2. Линии тока вокруг семиугольника с тремя разрезами над верхней полуплоскостью
 Fig.2. Streamlines around a heptagon with three cuts on the upper half plane

Матрица D_3 , полученная после третьего разреза, содержит следующие элементы:

$$D_3 = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.25 & 0.5 & 1 & -0.5 & -0.25 & -0.5 \\ -21.8902 & -20.1356 & -10.2456 & 0 & 0.6142 & 0.6438 & 0.6556 \end{pmatrix}.$$

В верхней строчке находятся показатели при вершинах, а в нижней — прообразы вершин b_k многоугольника в возрастающем порядке. Точка $\lambda = 0$ делит номера вершин на внешние и внутренние. Прообразы внутренних вершин (справа от нуля) очень близки, и при увеличении длины третьего разреза они практически сольются в одну общую вершину с показателем степени $\alpha = -1.25$. Это обстоятельство, характерное для метода П.П. Куфарева, позволяет применять его необычный метод для аппроксимации областей, не имеющих форму разреза. В таких случаях остается только внешняя часть многоугольника в плоскости Z , в то время как его внутренняя часть стягивается в точку.

На рис. 3 представлен другой случай течения вокруг профиля в виде разреза.

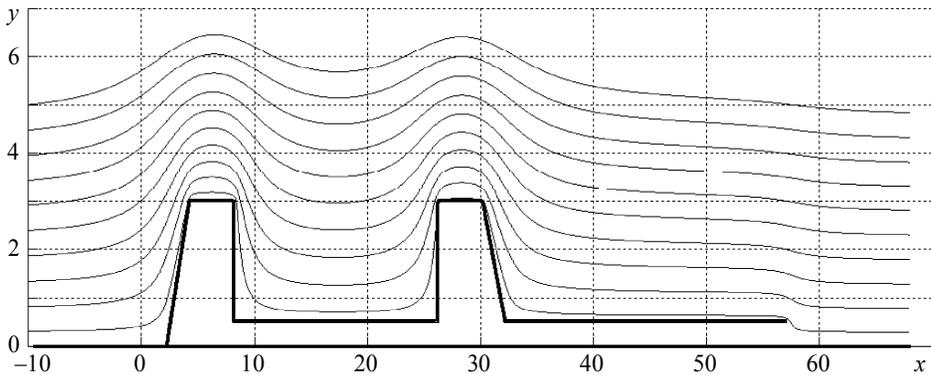


Рис. 3. Обтекание многоугольника в виде более сложного разреза
 Fig. 3. Streamlines around a polygon in the form of a more complex shape

Прообразы внутренних вершин данного разреза слились в одну точку, и поэтому течение имеет такой же вид, как и для контура без разреза.

Заключение

Определение постоянных в интеграле Кристоффеля – Шварца по методу П.П. Куфарева имеет надежную теоретическую основу, и свойства этого метода подтверждаются вычислениями. Теория метода П.П. Куфарева не входит в справочники и учебную литературу. Она описана только в двух малодоступных работах [4, 5], и поэтому ее целесообразно развивать и обобщать в различных направлениях. Так, например, в книге И.А. Александрова [5] показывается, что таким способом можно отображать также и круговые многоугольники. Кроме большого теоретического значения метод П.П. Куфарева должен быть интересным и для широкого круга специалистов, применяющих интеграл Кристоффеля – Шварца в своих практических расчетах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Koppenfels W., Stallmann F.* Praxis der konformen abbildung. Berlin; Göttingen; Heidelberg: Springer-Verlag, 1959. 375 с.
2. *Фильчаков П.Ф.* Численные и графические методы прикладной математики. Киев: Наукова думка, 1970. 796 с.
3. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. Л.; М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1949. 695 с.
4. *Куфарев П.П.* Об одном методе определения параметров в интеграле Кристоффеля – Шварца // ДАН СССР. 1947. Т. 57. С. 535–537.
5. Александров И.А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976. 344 с.

Статья поступила 27.05.2016 г.

Jambaa S., Kasatkina T.V., Bubenchikov A.M. (2016) ON THE DETERMINATION OF CONSTANTS IN THE SCHWARZ – CHRISTOFFEL INTEGRAL BY P.P. KUFAREV'S METHOD. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*.5(43). pp. 21–27

DOI 10.17223/19988621/43/2

Schwarz – Christoffel's integral maps simple-connected polygonal domains onto the upper half-plane and is successfully used in various applications related to problems of hydrodynamics, electrodynamics, and elasticity theory. The main difficulty in the practical use of this integral is in the determination of parameters entering into it. This paper investigates P.P. Kufarev's method (1947) for the numerical determination of parameters involved in the Schwarz–Christoffel transformation. In this method, the difficult problem of determining parameters is reduced to an easier one, namely, to numerical integration of a system of ordinary differential equations. These equations describe the motion of preimages of polygon vertices.

The paper presents an analysis of Kufarev's equations and describes properties of this transformation. The problem of initial conditions and a way to solve it are also considered. Determining constants in the Schwarz–Christoffel integral by Kufarev's method has a reliable theoretical basis, and the properties of this method are corroborated by calculations.

Keywords: conformal mapping of rectilinear polygons, direct images and counter images of vertices, streamlines.

JAMBAA Soninbayar (School of Engineering and Applied Sciences, National University of Mongolia, Ulaanbaatar, Mongolia, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: jsoninbayar@yahoo.com

KASATKINA Tat'yana Vasilyevna (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: tkasatkina@mail.tsu.ru

BUBENCHIKOV Aleksey Mikhailovich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: alexy121@mail.ru

REFERENCES

1. Koppenfels W., Stallmann F. (1959) *Praxis der konformen Abbildung*. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag.
2. Fil'chakov P.F. (1972) *Chislennyye i graficheskiye metody prikladnoi matematiki* [Numerical and graphical methods of applied mathematics]. Kiev: Naukova Dumka.
3. Kantorovich L.V., Krylov V.I. (1949) *Priblizhennyiye metody vysshego analiza* [Approximate methods of higher analysis]. Leningrad, Moscow: Gos. izd-vo tekhniko-teoreticheskoy literatury.
4. Kufarev P.P. (1947) Ob odnom metode opredeleniya parametrov v integrale Kristoffelya – Shvarza [A method for determining the parameters of the Schwarz – Christoffel integral]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 57. pp. 535–537.
5. Aleksandrov I.A. (1976) *Parametricheskie prodolzheniya v teorii odnolistnykh funktsiy* [Parametric continuations in the theory of one-sheeted functions]. Moscow: Nauka.