

МЕХАНИКА

УДК 533.6.011.5

DOI 10.17223/19988621/43/4

В.И. Биматов, Н.В. Савкина, В.В. Фарапонов

СВЕРХЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ
И АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОСТРОГО КОНУСА
ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ

Исследования направлены на решение задачи динамического взаимодействия реального газа с движущимся в нем телом в условиях значительного изменения кинематических параметров. Рассмотрена задача расчета нелинейных аэродинамических характеристик острого конуса. Наиболее полной среди численных моделей является модель, описываемая уравнениями Навье–Стокса, позволяющая учесть эффекты сжимаемости, вязкости и теплопроводности газа с применением нескольких моделей турбулентности и диффузии. Приведены сравнения полученных расчетов с результатами баллистических экспериментов

Ключевые слова: *сверхзвуковое обтекание, турбулентный поток, сжимаемая вязкая жидкость, коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы.*

В данной работе приведены результаты численного расчета параметров обтекания и аэродинамических характеристик острого конуса с углом при вершине $2\theta_k = 30^\circ$ для различных моделей турбулентной вязкости. Для расчета используется газодинамический подход. Геометрические параметры исследуемого тела представлены на рис. 1. Угол атаки изменялся в диапазоне от $0-40^\circ$.

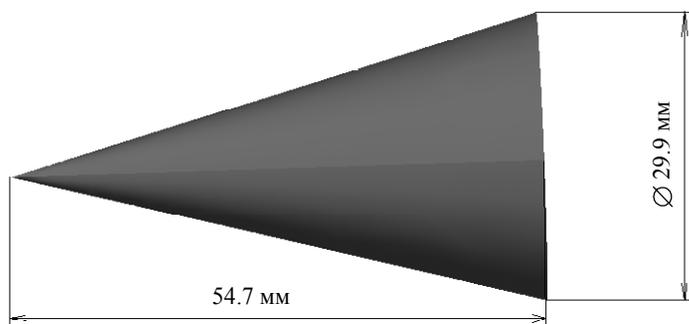


Рис. 1. Геометрия обтекаемого тела
Fig. 1. Geometry of the streamlined body

Постановка задачи

Математическое описание течения воздуха около исследуемого тела описывается системой осредненных уравнений Навье – Стокса при следующих основных допущениях.

1. Режим течения воздуха турбулентный. Для описания турбулентного характера движения воздуха используются осредненные уравнения сжимаемой вязкой жидкости и гипотеза вихревой вязкости.

2. Пренебрегаем массовыми силами.

Уравнение неразрывности имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho U) = 0 \quad (1)$$

Уравнение сохранения импульса (уравнение движения)

$$\frac{\partial(\rho U)}{\partial t} + \nabla(\rho U \otimes U) = -\nabla p + \nabla \cdot \tau, \quad (2)$$

где τ – тензор вязких напряжений:

$$\tau = \mu \left(\nabla U + (\nabla U)^T - \frac{2}{3} \delta \nabla U \right); \quad \mu_{\text{eff}} = \mu + \mu_t,$$

p – давление.

Уравнение сохранения энергии:

$$\frac{\partial(\rho h_{\text{tot}})}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla(\rho U h_{\text{tot}}) = \nabla(\lambda_{\text{eff}} \nabla T) + \nabla(U \cdot \tau), \quad \lambda_{\text{eff}} = \lambda + \frac{C_p \mu_t}{Pr_t}, \quad (3)$$

где h_{tot} – полная энтальпия: $h_{\text{tot}} = h + \frac{1}{2} U^2$, h – энтальпия: $h = C_p T$, ρ – плотность газа; U – вектор скорости; T – температура.

Исходная форма уравнения состояния имеет вид

$$\rho = \frac{p_{\text{ср}} + p}{\frac{R}{M_w} T}, \quad (4)$$

где $p_{\text{ср}}$ – рабочее давление; M_w – молекулярная масса; R – универсальная газовая постоянная.

В модели турбулентности Спаларта – Аллмареса (SA) [1] уравнение переноса определено для величины $\tilde{\nu}$, которая совпадает с турбулентной вязкостью всюду, кроме пристеночных областей:

$$\frac{\partial \rho \tilde{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_j \tilde{\nu}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\rho(v + \tilde{\nu})}{\sigma_v} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) + \frac{C_{b2} \rho}{\sigma_v} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} + \rho P_v - \rho \epsilon_v,$$

$$\mu_t = \rho \tilde{\nu} f_{v1}, \quad f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3}, \quad \chi \equiv \frac{\tilde{\nu}}{\nu}, \quad (5)$$

где P_v – скорость генерации турбулентной вязкости, а ϵ_v – скорость её диссипации.

Турбулентная вязкость моделируется слагаемым P_v :

$$P_v = C_{v1} \tilde{S} \tilde{v}, \quad \tilde{S} = |\Omega| + \frac{\tilde{v}}{(\kappa d)^2} f_{v2}, \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}, \quad (6)$$

где d – расстояние до ближайшей твёрдой поверхности.

Диссипация турбулентности ε_v моделируется следующим образом:

$$\varepsilon_v = C_{w1} f_w \left(\frac{\tilde{v}}{d} \right)^2, \quad (7)$$

$$f_w = g \left(\frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right)^{1/6}, \quad g = r + C_{w2} (r^6 + r), \quad r = \frac{\tilde{v}}{(\kappa d)^2} \frac{1}{\tilde{S}},$$

$$\kappa = 0.4187, \quad C_{b1} = 0.1355, \quad C_{b2} = 0.622, \quad \sigma_v = 2/3, \quad C_{w2} = 0.3, \quad C_{w3} = 2.0,$$

$$C_{w1} = \frac{C_{b1}}{\kappa^2} + \frac{(1 + C_{b2})}{\sigma_v}.$$

В k - ε -модели используется формула Колмогорова – Прандтля для расчёта турбулентной вязкости [1], а для k и ε определяют уравнения переноса. Уравнение для k и уравнение переноса для ε представлено в виде

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_j k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{k3}} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \rho P_k - \rho C_\mu k \omega; \quad (8)$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_j \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \rho \varepsilon), \quad \mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (9)$$

Для k - ε -модели определен стандартный рекомендуемый набор эмпирических констант (10):

$$C_\mu = 0.09, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.44, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3. \quad (10)$$

Созданная Ф. Менгером [2] комбинированная модель сдвиговых напряжений (SST-модель) объединила модель k - ε и k - ω -модель Вилкокса [3].

Уравнения SST-модели представлены в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_j k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{k3}} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \rho P_k - \rho C_\mu k \omega, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_j \omega}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\omega 3}} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + (1 - F_1) 2\rho \frac{1}{\sigma_{\omega 2} \omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} + \alpha_3 \frac{\omega}{k} \rho P_k - \rho \beta_3 \omega^2,$$

$$\mu_t = \rho \frac{k}{\omega},$$

Коэффициенты σ_{k3} , $\sigma_{\omega 3}$, α_3 и β_3 рассчитываются как $\Phi_3 = F_1 \Phi_1 + (1 - F_1) \Phi_2$, где Φ_1 и Φ_2 – коэффициенты k - ω - и k - ε -моделей соответственно. В расчетах применяются следующие значения констант:

$$C_\mu = 0.09, \quad \alpha_1 = 5/9, \quad \alpha_2 = 0.44, \quad \beta_1 = 0.075, \quad \beta_2 = 0.0828, \\ \sigma_{k1} = 2, \quad \sigma_{k2} = 1, \quad \sigma_{\omega 1} = 2, \quad \sigma_{\omega 2} = 1/0.856, \quad Pr_t = 2.$$

Размеры расчетной области выбираются относительно большими, чтобы дальние граничные условия не смогли исказить поле течения вблизи самого тела. Она представляет собой пространство в виде цилиндра, внутри которого находится модель (рис. 2).

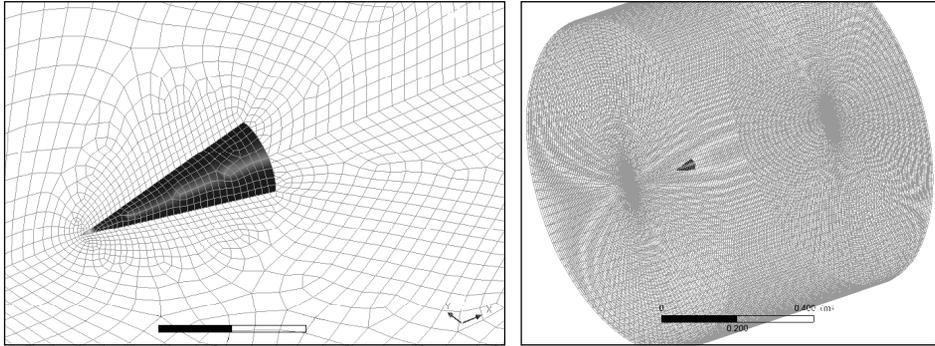


Рис. 2. Вид расчетной сетки для острого конуса
Fig. 2. View of the computational grid for a sharp cone

Условия на входной границе: величина и направление скорости набегающего потока: $U = U_0 \cos(\alpha)$; $V = 0$; $W = U_0 \sin(\alpha)$; турбулентная интенсивность: $I = 5\%$;

статические температура и давление: $T = 20\text{ }^\circ\text{C}$, $P = 1\text{ атм}$; $k_{\text{inlet}} = \frac{3}{2} I^2 U^2$;

$\varepsilon_{\text{inlet}} = \rho C_\mu \frac{k^2}{\mu_t}$, где $\mu_t = 1000 I \mu$. На выходной границе задавалось среднее статическое давление: по всему выходу $P_{\text{из}} = 0$, если $M < 1$, т.е. равенство избыточного давления воздуха нулю. По этому условию воздух может только выходить из расчетной области через указанную грань ($\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial n^2} = 0$, $\frac{\partial^2 k}{\partial n^2} = 0$).

Если $M > 1$, то граничные условия на выходе не задаются. На боковой границе задается граничное условие равенства нулю избыточного давления $p = 0$, при этом через эту грань допускается вход-выход воздуха в расчетную область. При расчете аэродинамических характеристик рассматривается 1/2 конуса. На диаметральной плоскости выставляются граничные условия симметрии:

$$W = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, \quad \phi = \{P, U, W, \rho, k, \varepsilon\}.$$

Результаты расчета

На рис. 3 представлены поля скоростей (в числах Маха), распределение давления и линии тока в плоскости симметрии для углов атаки 0° и 40° для скорости набегающего потока $M_\infty = 3.47$.

Отчетливо виден головной криволинейный скачок, отсоединенный от обтекаемого тела. За телом образуется область возвратно-циркуляционного течения. О.М. Белоцерковским [4] отмечается существование внутреннего и внешнего следов при сверхзвуковом обтекании тела вязким газом. Внутренний вязкий след об-

разован вязким пограничным слоем на теле, внешний след – криволинейным головным скачком уплотнения. С увеличением угла атаки происходит искривление этих следов в связи с образованием на наветренной стороне обтекаемого тела зоны отрыва.

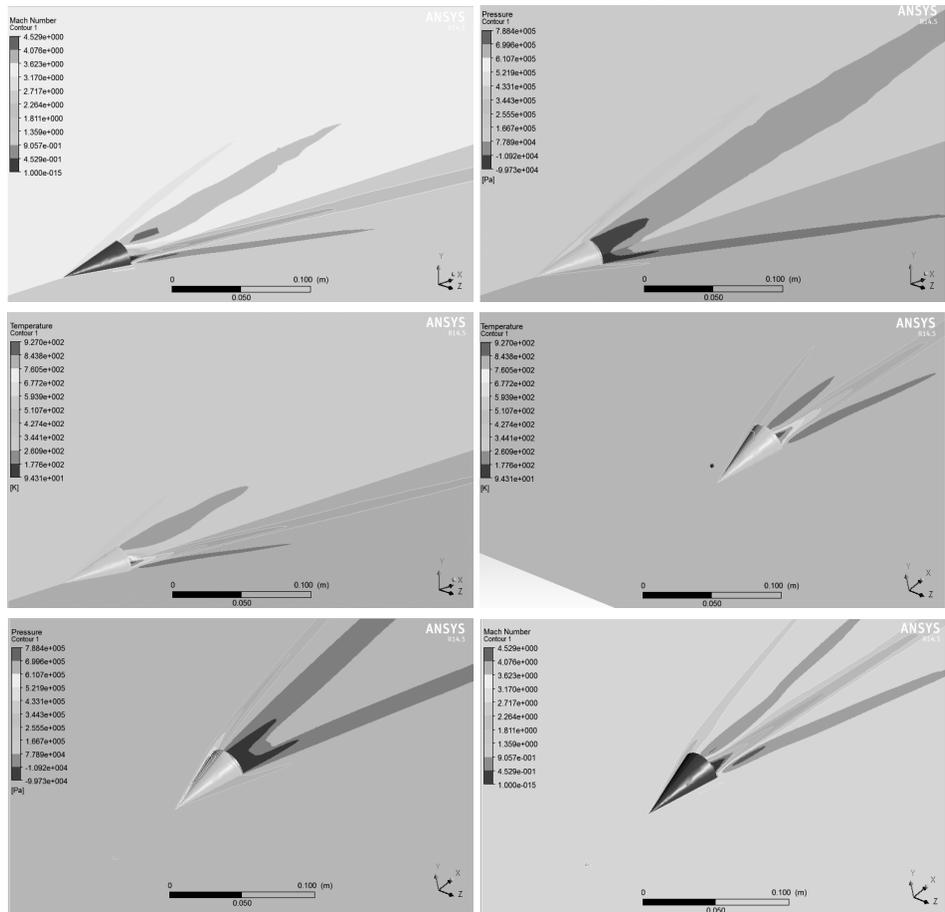


Рис. 3. Поля скоростей (в числах Маха), распределение давления и температур для углов атаки 10° и 15° ($M_\infty = 3.47$)

Fig. 3. Velocity fields (in terms of the Mach number), distribution of the pressure and temperature for attack angles of 10° and 15° ($M_\infty = 3.47$)

В таблице представлена сеточная сходимость по коэффициенту C_x как наиболее значимой аэродинамической характеристики при разных моделях турбулентности и $M_\infty = 3.47$. Видно, что наилучшей сходимостью и точностью расчета коэффициента C_x обладает SST-модель.

На рис. 4 представлены зависимости коэффициентов подъемной силы C_y и лобового сопротивления C_x от угла атаки. Сплошными линиями представлены результаты, полученные на баллистической трассе ФТИ им. Иоффе РАН [5], пунктирными линиями – результаты, полученные при численном моделировании для SST-модели. Относительное рассогласование не превысило 4–6%. Нелинейный

характер C_y проявляется при $\alpha \geq 25^\circ$. Для коэффициента C_x при $\alpha \leq 20^\circ$ наблюдается параболическая зависимость от α . С дальнейшим ростом угла атаки проявляется «завал» характеристики C_x .

Модель турбулентности	Cells	C_x	$\delta C_x, \%$
SA (Спаларта–Аллмареса)- модель	34080	0.1968	5.7419
	133410	0.1914	3.0825
	676110	0.1868	0.6959
	983030	0.1855	
Стандартная k - ε -модель	32610	0.1896	4.6941
	130440	0.18414	1.8681
	621760	0.1817	0.5504
	902560	0.1807	
SST-модель	37860	0.18849	3.2309
	151440	0.1824	1.4254
	565760	0.1798	0.4449
	846780	0.179	

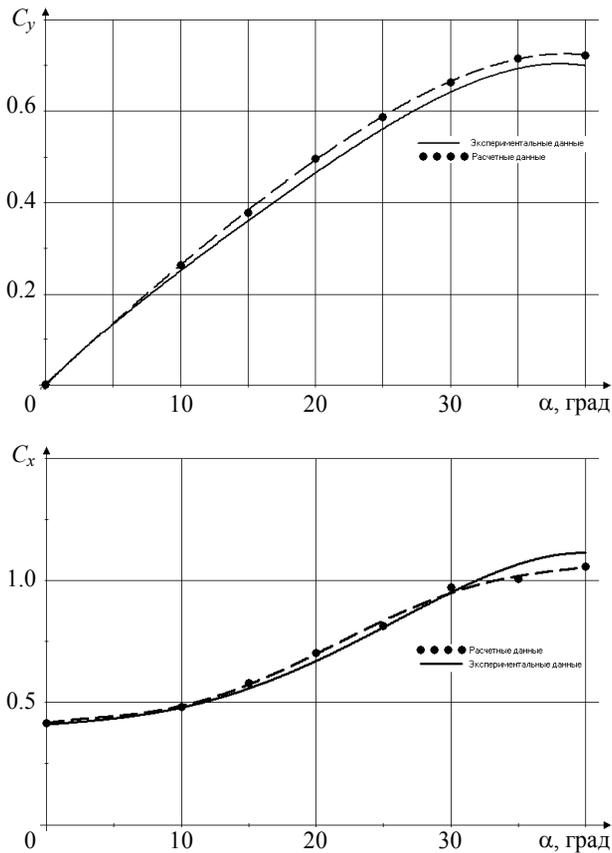


Рис. 4. Зависимость C_y и C_x от угла атаки для острого конуса
Fig. 4. C_y and C_x as functions of the attack angle for a sharp cone

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Снегирёв А.Ю.* Высокопроизводительные вычисления в технической физике. Численное моделирование турбулентных течений: учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2009. 143 с.
2. *Wilcox D.C.* Turbulence Modeling for CFD. La Canada, California: DCW Industries Inc., 1998. 477 p.
3. *Menter F.R.* Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // *AIAA Journal*. 1994. V. 32. No 8. P. 1598–1605.
4. *Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М.* Метод крупных частиц в газовой динамике. М.: Наука, 1982. 392 с.
5. *Менде Н.П.* Обратная задача нелинейной баллистики. I. Плоское движение // Препринт 1326 ФТИ АН ССР, Ленинград, 1989. 44 с.

Статья поступила 01.09.2016.

Bimatov V.I., Savkina N.V., Faraponov V.V. (2016) SUPERSONIC FLOW OVER A SHARP CONE AND ITS AERODYNAMIC CHARACTERISTICS FOR DIFFERENT MODELS OF TURBULENT VISCOSITY. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(43). pp. 35–42

DOI 10.17223/19988621/43/4

Creation of reliable methods for calculating the aircraft aerodynamic characteristics with allowance for their essentially non-linear and sometimes ambiguous dependence on the motion parameters is of great interest, both in the aspect of developing non-stationary supersonic aerodynamics and for solving some practical problems of control for the motion of bodies under study. The investigations are intended to solve the problem of dynamic interaction between a real gas and a body moving within it in conditions of a significant change in kinematic parameters. In this paper, the problem of calculating nonlinear aerodynamic characteristics of a sharp cone is considered. The most complete numerical model is that described by Navier–Stokes equations, which allows taking into account the effects of gas compressibility, viscosity, and thermal conductivity with application of several models of turbulence and diffusion. The obtained results of calculations are compared with results of ballistic experiments.

Keywords: supersonic flow, turbulent flow, compressible viscous fluid, drag and lift coefficients.

BIMATOV Vladimir Ismagilovich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russia)

E-mail: vbimatov@mail.ru

SAVKINA Nadezhda Valer'evna (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Tomsk branch), Tomsk, Russia)

E-mail: savkina@ftf.tsu.ru

FARAPONOV Valeriy Vladimirovich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russia)

E-mail: fff@ftf.tsu.ru

REFERENCES

1. *Snegirev A.Yu.* (2009) *Vysokoproizvoditel'nye vychisleniya v tekhnicheskoy fizike. Chislennoe modelirovanie turbulentnykh techeniy* [High-performance computations in engineering physics. Numerical modeling of turbulent flows]. St. Petersburg: Polytechnic University Publ.
2. *Wilcox D.C.* (1998) *Turbulence Modeling for CFD*. La Canada, California: DCW Industries Inc.
3. *Menter F.R.* (1994) Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA Journal*. 32 (8). pp. 1598–1605.

4. Belotserkovskiy O.M., Davydov Yu.M. (1982) *Metod krupnykh chastits v gazovoy dinamike* [Method of coarse particles in the gas dynamics]. Moscow: Nauka.
5. Mende N.P. (1989) *Obratnaya zadacha nelineynoy ballistiki. I. Ploskoe dvizhenie* [The inverse problem of nonlinear ballistics. I. Plane motion]. Leningrad.