УДК 519.872
DOI: 10.17223/19988605/37/6

А.А. Назаров, Е.А. Фёдорова

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В УСЛОВИИ БОЛЬШОЙ ЗАГРУЗКИ НА ПРИМЕРЕ RQ-СИСТЕМЫ M|M|1

Работа выполнена в рамках проекта Министерства образования и науки РФ №1.511.2014/К.

В работе предлагаются три метода модификации асимптотического анализа в условии большой загрузки RQ-систем. Описание методов проведено на примере RQ-системы M|M|1. Предложены «промежуточная» асимптотика, имеющая вид гипергамма распределения, модификация «промежуточной» асимптотики в виде сдвига аргумента на параметр δ и полусумма распределений модифицированной и второй асимптотики. Представлены результаты численного анализа предложенных модификаций.
Ключевые слова: RQ-система; метод асимптотического анализа; большая загрузка; гипергамма-распределение.

Retrial Queueing System (системы массового обслуживания с повторными вызовами, или RQ-системы) – математические модели, широко применяемые для анализа и оптимизации различных телекоммуникационных систем, сетей мобильной связи, call-центров и других технических и экономических систем [1–6]. Характерной чертой таких моделей является наличие повторных обращений заявок к прибору после неудачной попытки обслуживания спустя некоторое случайное время. Такие ситуации могут быть вызваны не только отсутствием свободных серверов в моменты поступления заявок в систему, но техническими причинами.

Возникновение моделей RQ-систем прежде всего связывают с работами американских ученых R.I. Wilkinson [1] и J.W. Cohen [2] середины XX в., которые были посвящены практическим задачам, возникающим в телефонных сетях, и описанию влияния эффекта повторных вызовов на производительность технических систем. Первые подходы к математическому описанию RQ-систем были предприняты G. Gosztony [3] и A. Elldin [4].

Наиболее полное и детальное описание RQ-систем и их сравнение с классическими СМО было отражено в монографиях J.R. Artalejo, A. Gomez-Corral, G.I. Falin и J.G.C. Templeton [7, 8]. Ими получены аналитические результаты для RQ-систем M|M|1, M|GI|1, M|M|C и других систем с пуассоновским входящим потоком, а также рассмотрены разнообразные методы для исследования таких систем и проведено детальное сравнение RQ-систем с их классическими аналогами [9].

На сегодняшний день исследованию RQ-систем посвящено большое количество работ [7], однако аналитических формул получено немного (лишь для систем с простейшим входящим потоком) [8]. В основном возникающие задачи решаются численными методами или с помощью имитационного моделирования [10–12], и как следствие, результаты таких исследований имеют узкое применение.

Ранее в работах [13, 14] был предложен метод асимптотического анализа (первого и второго порядков) для исследования RQ-систем при условии большой загрузки. Предложенным методом были исследованы системы с различными типами входящего потока и дисциплиной обслуживания (в том числе RQ-система MMPP|GI|1 [15]). Было показано, что асимптотика первого порядка имеет вид гамма-распределения вне зависимости от типа системы, но область ее применения достаточно узка. Асимптотика второго порядка позволила расширить область применения результатов в 4 раза, однако асимптотическая формула не обладает единообразием и требуется ее достаточно трудоемкий вывод для каждой системы.

В связи с этим в данной статье предлагаются способы модификации метода асимптотического анализа в условии большой загрузки RQ-систем, позволяющие увеличить точность асимптотического метода. Описание методов приведено на примере простейшей RQ-системы M|M|1 для возможности сравнения асимптотических результатов с известным точным. В дальнейшем предложенные модификации могут быть применены для исследования различных RQ-систем, в том числе с непуассоновским входящим потоком.

1. Математическое описание RQ-системы M|M|1

Рассмотрим однолинейную RQ-систему (рис. 1), на вход которой поступает простейший поток заявок с параметром λ, время обслуживания каждой заявки распределено по экспоненциальному закону с параметром μ. Если поступившая заявка застает прибор свободным, то она занимает его для обслуживания. Если прибор занят, то заявка переходит в источник повторных вызовов (ИПВ), где осуществляет случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром σ. Из ИПВ после случайной задержки заявка вновь обращается к обслуживающему прибору с повторной попыткой его захвата. Если прибор свободен, то заявка из ИПВ занимает его для обслуживания, в противном случае она мгновенно возвращается в источник повторных вызовов для реализации следующей задержки.

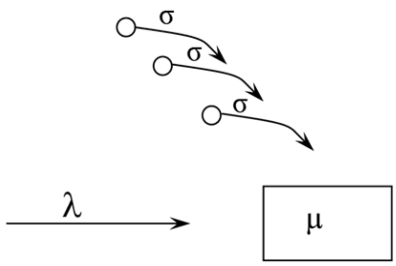

Рис. 1. RQ-система M|M|1

Пусть $i(t)$ – число заявок в ИПВ, а $k(t)$ определяет состояние прибора следующим образом:

$$k(t)=\begin{cases}0, \text{ если прибор свободен},\\ 1, \text{ если прибор занят.}\end{cases}$$

Обозначим $P\{k(t) = k,\ i(t) = i\} = P(k,i,t)$ вероятность того, что прибор в момент времени t находится в состоянии k и в источнике повторных вызовов находится i заявок.

Причем процесс $\{k(t),\ i(t)\}$ изменения состояний данной системы во времени является марковским. Тогда ставится задача нахождения распределения вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов такой системы.

Для распределения вероятностей $P(k,i,t)$ состояний рассматриваемой RQ-системы составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P(0,i,t)}{\partial t}=\mu P(1,i,t)-(\lambda+i\sigma)P(0,i,t),\\[2mm] \dfrac{\partial P(1,i,t)}{\partial t}=\lambda P(0,i,t)+(i+1)\sigma\cdot P(0,i+1,t)-(\lambda+\mu)P(1,i,t)+\lambda P(1,i-1,t).\end{cases} \tag{1}$$

Перейдем к стационарным частичным характеристическим функциям $H(k,u)=\sum\limits_i e^{jui}P(k,i)$, где $P(k,i)=\lim\limits_{t\to\infty}P(k,i,t)$, а j – мнимая единица.

Введем параметр $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}$, характеризующий загрузку системы. Тогда система (1) в стационарном режиме для характеристических функций перепишется в следующем виде:

$$\begin{cases}H(1,u)-\rho H(0,u)=-\dfrac{\sigma}{\mu}j\dfrac{\partial H(0,u)}{\partial u},\\[2mm] \rho H(0,u)+\left(\rho\left(e^{ju}-1\right)-1\right)H(1,u)=j\dfrac{\sigma}{\mu}e^{-ju}\dfrac{\partial H(0,u)}{\partial u}.\end{cases} \tag{2}$$

2. Метод асимптотического анализа в условии большой загрузки

В работах [13–15] для решения системы уравнений (2) был предложен метод асимптотического анализа в условиях большой загрузки, т.е. при $\rho\uparrow 1$, который заключается в следующем.

Вводятся обозначения $\varepsilon=1-\rho$ (тогда в условии большой загрузки $\varepsilon\downarrow 0$), $u=\varepsilon w$, $H(0,u)=\varepsilon F_0(w,\varepsilon)$, $H(1,u)=F_0(w,\varepsilon)$.

Таким образом, система (2) принимает вид

$$\begin{cases} F_1(w,\varepsilon)-(1-\varepsilon)\varepsilon F_0(w,\varepsilon)+j\dfrac{\sigma}{\mu}\dfrac{\partial F_0(w,\varepsilon)}{\partial w}=0, \\ (1-\varepsilon)\varepsilon F_0(w,\varepsilon)+\left((1-\varepsilon)\left(e^{jw\varepsilon}-1\right)-1\right)F_1(w,\varepsilon)-j\dfrac{\sigma}{\mu}e^{-jw\varepsilon}\dfrac{\partial F_0(w,\varepsilon)}{\partial w}=0. \end{cases} \tag{3}$$

Далее используются следующие разложения:

$$F_k(w,\varepsilon)=F_k(w)+\varepsilon\cdot f_k(w)+O(\varepsilon^2), \tag{4}$$

где $O(\varepsilon^2)$ – бесконечно малая величина порядка ε^2.

Допредельная характеристическая функция $H(u)=H(1,u)+H(0,u)$ в условиях большой загрузки может быть приближенно определена равенством

$$H(u)\approx F_1\left(\frac{u}{1-\rho}\right)+O(\varepsilon^2).$$

Обозначим $h_1(u)$ асимптотическую характеристическую функцию первого порядка, которая равна

$$h_1(u)=F_1\left(\frac{u}{1-\rho}\right).$$

В [13] было доказано, что $h_1(u)$ удовлетворяет следующей теореме.

Теорема 1. Асимптотическая характеристическая функция числа заявок в ИПВ в RQ-системе M|M|1 имеет вид характеристической функции гамма-распределения

$$h_1(u)=\left(1-j\frac{u}{\beta}\right)^{-\alpha} \tag{5}$$

с параметрами формы $\alpha=\dfrac{\mu}{\sigma}+1$ и масштаба $\beta=1-\rho$.

В качестве критерия допустимости асимптотических результатов использовалось условие: расстояние Колмогорова $\Delta\le 0,05$.

С помощью численного анализа было показано, что метод асимптотического анализа первого порядка в условиях большой загрузки может быть применим при значениях загрузки $\rho\ge 0,95$, что является достаточно узкой областью применимости. Поэтому также была получена асимптотическая характеристическая функция второго порядка $h_2(u)$:

$$h_2(u)=F_1\left(\frac{u}{1-\rho}\right)+(1-\rho)\left[F_0\left(\frac{u}{1-\rho}\right)+f_1\left(\frac{u}{1-\rho}\right)\right].$$

Для получения этой асимптотики второго порядка вместо разложений функций (4) необходимо было рассмотреть разложения

$$F_k(w,\varepsilon)=F_k(w)+\varepsilon\cdot f_k(w)+\varepsilon^2\cdot\varphi_k(w)+O(\varepsilon^3)$$

и, подставив их в систему (3), решить систему пяти дифференциальных уравнений.

Тогда допредельная характеристическая функция может быть определяется равенством

$$H(u)=h_2(u)+O(\varepsilon^3).$$

Была доказана следующая теорема о виде функции $h_2(u)$ [14].

Теорема 2. Асимптотическая характеристическая функция второго порядка распределения вероятностей числа заявок в ИПВ в RQ-системе M|M|1 имеет вид

$$h_2(u)=\left(1-j\frac{u}{1-\rho}\right)^{-\frac{\mu+\sigma}{\sigma}}\left\{1+(1-\rho)\left[-\frac{ju}{1-\rho}+\frac{\mu}{\sigma}\ln\left(1-\frac{ju}{1-\rho}\right)-\left(\frac{\mu}{\sigma}+1\right)\frac{\dfrac{ju}{1-\rho}-\dfrac{\left(\dfrac{ju}{1-\rho}\right)^2}{2}}{1-\dfrac{ju}{1-\rho}}\right]\right\}.$$

Численный анализ показал, что область применения асимптотики второго порядка $\rho > 0{,}8$, т.е. увеличивается в 4 раза (по сравнению с (5)). Однако для более сложных RQ-систем, например MMPP|GI|1, приходилось решать систему из семи и более дифференциальных уравнений, что достаточно трудоемко.

3. Гипергамма-асимптотика

Заметив, что в ходе доказательства теоремы 1 была найдена и функция $F_0(w)$, было предложено провести численный анализ «промежуточной» асимптотики $h^*(u)$:

$$h^*(u)=F_1\left(\frac{u}{1-\rho}\right)+(1-\rho)F_0\left(\frac{u}{1-\rho}\right).$$

В работе [13] показано выполнение следующих равенств:

$$\begin{cases} F_0(w)=C(1-jw)^{-\frac{\mu}{\sigma}}, \\ F_1(w)=C(1-jw)^{-\frac{\mu}{\sigma}-1}. \end{cases}$$

Имеем условие нормировки $h(0)=H_0(0)+H_1(0)=1$. Так как $H_1(u)\approx F_1(u)$, а $H_0(u)\approx(1-\rho)F_0(u)$, то получаем $h(0)=(1-\rho)F_0(0)+F_1(0)=(1-\rho)C+C\equiv 1$. Отсюда $C=\dfrac{1}{2-\rho}$.

Тогда имеем

$$h^*(u)=\frac{1}{2-\rho}\left(1-j\frac{u}{1-\rho}\right)^{-\frac{\mu}{\sigma}-1}+\frac{1-\rho}{2-\rho}\left(1-j\frac{u}{1-\rho}\right)^{-\frac{\mu}{\sigma}}.$$

Заметим, что слагаемые функции $h^*(u)$ являются характеристическими функциями гамма-распределения:

$$\Gamma_1(u)=\left(1-\frac{ju}{\beta}\right)^{-\alpha},\ \Gamma_0(u)=\left(1-\frac{ju}{\beta}\right)^{-\alpha+1},\ \text{где } \alpha=\frac{\mu}{\sigma}+1 \text{ и } \beta=1-\rho.$$

Таким образом, получили, что «промежуточная» асимптотическая характеристическая функция распределения числа заявок в ИПВ имеет вид взвешенной суммы двух характеристических функций гамма-распределения

$$h^*(u)=q\Gamma_1(u)+(1-q)\Gamma_0(u), \qquad (6)$$

где $q=\dfrac{1}{2-\rho}$.

Будем называть такое распределение *гипергамма-распределением* (по аналогии с гиперэкспоненциальным).

В табл. 1 приведены Δ1, Δp, Δ2 – расстояния Колмогорова между точным распределением и первой асимптотикой, гипергамма-распределением и второй асимптотикой соответственно.

Из табл. 1 видно, что гипергамма-асимптотика значительно точнее асимптотики первого порядка, но уступает асимптотике второго порядка.

Т а б л и ц а 1

Расстояние Колмогорова между точным и асимптотическими распределениями

Значения параметров системы		ρ = 0,7	ρ = 0,8	ρ = 0,9	ρ = 0,95
σ = 10	Δ1	0,251	0,170	0,086	**0,043**
	Δp	0,097	0,060	0,028	**0,014**
	Δ2	**0,035**	**0,022**	**0,009**	**0,005**
σ = 2	Δ1	0,266	0,179	0,091	**0,046**
	Δp	0,157	0,104	**0,050**	**0,025**
	Δ2	0,088	**0,047**	**0,016**	**0,005**
σ = 1	Δ1	0,304	0,208	0,106	**0,053**
	Δp	0,220	0,147	0,074	**0,037**
	Δ2	0,124	**0,052**	**0,013**	**0,003**

Однако вывод асимптотической формулы второго порядка для более сложных RQ-систем затруднителен, тогда как «промежуточная» асимптотика не требует дополнительных выкладок, так как ее форма одинакова для RQ-систем с различными типами входящего потока и дисциплины обслуживания, а параметры гипергамма-распределения совпадают с параметрами первой асимптотики. Поэтому целесообразность ее использования для большинства практических задач очевидна.

4. Модификация гипергамма-асимптотики

Известно, что $H_1(0)=R_1=\rho$, $H_0(0)=R_0=1-\rho$. Однако в полученной «промежуточной» асимптотике (6)

$$qГ_1(0)=q\neq R_1 \text{ и } (1-q)Г_0(0)=1-q\neq R_0 .$$

Перейдем от характеристических функций к функциям распределения вероятностей, обозначив их соответственно $\tilde{Г}_0(x)$ и $\tilde{Г}_1(x)$. Тогда $q\tilde{Г}_1(\infty)=q\neq R_1$ и $(1-q)\tilde{Г}_0(\infty)=1-q\neq R_0$.

В связи с этим предлагается модифицировать асимптотику следующим образом:

$$\begin{cases} F_1(x)=q\left[\tilde{\Gamma}_1(x+\delta)-\tilde{\Gamma}_1(\delta)\right], \\ F_0(x)=\pi+(1-q)\left[\tilde{\Gamma}_0(x+\delta)-\tilde{\Gamma}_0(\delta)\right], \end{cases}$$

где $F_1(x)$ и $F_0(x)$ – модифицированные частичные асимптотические функции распределения, а параметры δ и π могут быть найдены из условия нормировки:

$$\begin{cases} F_1(\infty)=q\left[1-\tilde{\Gamma}_1(\delta)\right]=\rho, \\ F_0(\infty)=\pi+(1-q)\left[1-\tilde{\Gamma}_0(\delta)\right]=1-\rho. \end{cases} \tag{7}$$

Из первого уравнения (7) имеем

$$\tilde{\Gamma}_1(\delta)=1-\frac{\rho}{q}=\frac{q-\rho}{q}.$$

Подставляя введенные ранее обозначения, нетрудно получить

$$\tilde{\Gamma}_1(\delta)=(1-\rho)^2. \tag{8}$$

Выразим величину π из второго уравнения (11):

$$\pi=\frac{(1-\rho)^2+(1-\rho)\tilde{\Gamma}_0(\delta)}{2-\rho}.$$

Подставляя (8), получим следующее выражение:

$$\pi=\frac{\tilde{\Gamma}_1(\delta)+(1-\rho)\tilde{\Gamma}_0(\delta)}{2-\rho}=q\tilde{\Gamma}_1(\delta)+(1-q)\tilde{\Gamma}_0(\delta). \tag{9}$$

Модифицированная асимптотическая функция распределения записывается как сумма

$$F(x)=F_1(x)+F_0(x).$$

Учитывая полученные выражения (11)–(13), имеем следующее равенство:

$$F(x) = q\tilde{\Gamma}_1(x+\delta) + (1-q)\tilde{\Gamma}_0(x+\delta).$$

Проведем численный анализ модификации асимптотики и сравним ее с результатами, полученными ранее асимптотики (табл. 2, где ΔM – расстояние Колмогорова между точным распределением и модифицированной асимптотикой).

Таблица 2

Расстояние Колмогорова между точным, асимптотическими и модифицированным распределениями

Значения параметров системы		ρ = 0,5	ρ = 0,6	ρ = 0,7	ρ = 0,8	ρ = 0,9	ρ = 0,95
σ = 10	Δ1	0,378	0,321	0,251	0,170	0,086	**0,043**
	Δp	0,180	0,137	0,097	0,060	0,028	**0,014**
	Δ*M*	0,065	0,059	**0,050**	**0,038**	**0,022**	**0,012**
	Δ2	**0,042**	**0,041**	**0,035**	**0,022**	**0,009**	**0,005**
σ = 2	Δ1	0,432	0,342	0,266	0,179	0,091	**0,046**
	Δp	0,271	0,213	0,157	0,104	**0,050**	**0,025**
	Δ*M*	0,079	0,077	0,068	**0,050**	**0,031**	**0,017**
	Δ2	0,192	0,139	0,088	**0,047**	**0,016**	**0,005**
σ = 1	Δ1	0,487	0,394	0,304	0,208	0,106	**0,053**
	Δp	0,364	0,291	0,220	0,147	0,074	**0,037**
	Δ*M*	0,093	0,087	0,074	**0,052**	**0,030**	**0,016**
	Δ2	0,313	0,214	0,124	**0,052**	**0,013**	**0,003**

Данные табл. 2 показывают, что «модифицированное» распределение существенно улучшает результаты «промежуточной» асимптотики. При этом для построения модифицированного распределения необходимо лишь найти величину сдвига δ из условия (8).

Рассмотрим комбинацию «модифицированного» распределения и второй асимптотики

$$Pm^{(2)} = \frac{1}{2}\left(Pm + P^{(2)}\right).$$

Будем называть такое распределение «модификация-2». Проведем численный анализ модификации асимптотики и сравним ее с результатами, полученными ранее.

Таблица 3

Расстояние Колмогорова между точным, асимптотическими и модифицированными распределениями

Значения параметров системы		ρ = 0,5	ρ = 0,6	ρ = 0,7	ρ = 0,8	ρ = 0,9	ρ = 0,95
σ = 10	Δ1	0,378	0,321	0,251	0,170	0,086	**0,043**
	Δp	0,180	0,137	0,097	0,060	0,028	**0,014**
	Δ*M*	0,065	0,059	**0,050**	**0,038**	**0,022**	**0,012**
	Δ2	**0,042**	**0,041**	**0,035**	**0,022**	**0,009**	**0,005**
	Δ*M*2	**0,034**	**0,024**	**0,018**	**0,013**	**0,009**	**0,005**
σ = 2	Δ1	0,432	0,342	0,266	0,179	0,091	**0,046**
	Δp	0,271	0,213	0,157	0,104	**0,051**	**0,025**
	Δ*M*	0,079	0,077	0,068	**0,050**	**0,031**	**0,017**
	Δ2	0,192	0,139	0,088	**0,047**	**0,016**	**0,005**
	Δ*M*2	0,111	0,073	**0,039**	**0,019**	**0,013**	**0,008**
σ = 1	Δ1	0,487	0,394	0,304	0,208	0,106	**0,053**
	Δp	0,364	0,291	0,220	0,147	0,074	**0,037**
	Δ*M*	0,093	0,087	0,074	**0,052**	**0,030**	**0,016**
	Δ2	0,313	0,214	0,124	**0,052**	**0,013**	**0,003**
	Δ*M*2	0,150	0,087	**0,046**	**0,022**	**0,012**	**0,007**

В результате численного анализа был замечен интересный результат: «модификация-2» точнее второй асимптотики. При этом предложенная модификация применима для значений загрузки $\rho \geq 0{,}7$, а при больших значениях параметра задержки σ – для значений загрузки $\rho \geq 0{,}5$.

Заключение

Таким образом, в работе предложены три модификации метода асимптотического анализа в условии большой загрузки RQ-систем: «промежуточная» асимптотика, имеющая вид гипергамма-распределения; модификация «промежуточной» асимптотики в виде сдвига распределения на параметр δ; полусумма распределений модифицированной и второй асимптотики. В статье также представлены результаты численного сравнения предложенных асимптотик с известным точным, позволяющие сделать заключения об области применения каждого метода.

Обобщая вышесказанное, можно сделать вывод, что для практических задач, не требующих высокой точности аппроксимации, целесообразно использование результатов «промежуточной» асимптотики в силу ее простоты построения (имеет единую форму вне зависимости от типа входящего потока) и достаточно широкой области применимости ($\rho \geq 0,8$), а для задач, требующих более высокой точности аппроксимации, целесообразно применять предлагаемые в работе модификации 1 и 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wilkinson R.I. Theories for toll traffic engineering in the USA // The Bell System Technical Journal. 1956. V. 35, No. 2. P. 421–507.
2. Cohen J.W. Basic problems of telephone trafic and the influence of repeated calls // Philips Telecommunication Review. 1957. V. 18, No. 2. P. 49–100.
3. Gosztony G. Repeated call attempts and their efect on trafic engineering // Budavox Telecommunication Review. 1976. V. 2. P. 16–26.
4. Elldin A., Lind G. Elementary Telephone Trafic Theory. Ericsson Public Telecommunications, 1971.
5. Kuznetsov D.Yu., Nazarov A.A. Analysis of non-Markovian models of communication networks with adaptive protocols of multiple random access // Avtomatika i Telemekhanika. 2001. V. 5. P. 124–146.
6. Nazarov A.A., Tsoj S.A. Common approach to studies of Markov models for data transmission networks controlled by the static random multiple access protocols // Avtomatika i Vychislitel'naya Tekhnika. 2004. V. 4. P. 73–85.
7. Artalejo J.R., Gomez-Corral A. Retrial Queueing Systems. A Computational Approach. Springer, 2008.
8. Falin G.I., Templeton J.G.C. Retrial queues. London : Chapman & Hall, 1997.
9. Artalejo J.R., Falin G.I. Standard and retrial queueing systems: A comparative analysis // Revista Matematica Complutense. 2002. V. 15. P. 101–129.
10. Neuts M.F., Rao B.M. Numerical investigation of a multiserver retrial model // Queueing Systems. 2002. V. 7, No. 2. P. 169–189.
11. Ridder A. Fast simulation of retrial queues // Third Workshop on Rare Event Simulation and Related Combinatorial Optimization Problems. Pisa, 2000. P. 1–5.
12. Kim C.S., Mushko V.V., Dudin A. Computation of the steady state distribution for multi-server retrial queues with phase type service process // Annals of Operations Research. 2012. V. 201, No. 1. P. 307–323.
13. Moiseeva E., Nazarov A. Asymptotic Analysis of RQ-systems M/M/1 on Heavy Load Condition // Proceedings of the IV International Conference Problems of Cybernetics and Informatics. Baku, Azerbaijan, 2012. P. 164–166.
14. Назаров А.А., Фёдорова Е.А. Метод асимптотического анализа в условии большой загрузки 2-го порядка на примере исследования RQ-системы M|M|1 // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2013) : материалы XII всерос. науч.-практ. конф. с междунар. участием им. А.Ф. Терпугова : в 2 ч. Томск : Изд-во Том. ун-та, 2013. Ч. 2. С. 59–65.
15. Моисеева Е.А., Назаров А.А. Исследование RQ-системы MMPP|GI|1 методом асимптотического анализа // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 4 (25). С. 84–94.

Назаров Анатолий Андреевич, д-р техн. наук, профессор. E-mail: nazarov.tsu@gmail.com
Фёдорова Екатерина Александровна, канд. физ.-мат. наук. E-mail: moiskate@mail.ru
Томский государственный университет

Поступила в редакцию 14 августа 2016 г.

Nazarov Anatoly A., Fedorova Ekaterina A. (Tomsk State University, Russian Federation).

Modification of the asymptotic analysis method under heavy load condition on the example of the study of the retrial queueing system M|M|1.

Key words: retrial queueing system; asymptotic analysis method; heavy load; hypergamma distribution.

DOI: 10.17223/19988605/37/6

In the paper, three methods of the asymptotic analysis modification are offered for retrial queueing systems under heavy load condition as mathematical models of telecommunication systems. The characteristic feature of these models is existence of repeated attempts of calls to get service after a random time. There are a large number of papers devoted to retrial queues researching, but mainly problems are solved by numerical methods and simulation. Analytical results are obtained only for systems with Poisson input process.

Earlier we proposed the method of asymptotic analysis (first and second order) for retrial queueing systems researching under heavy load condition [13, 14]. It has been shown that the first order asymptotics has the form of gamma distributions for all types of the system, but its application range is quite narrow. The asymptotics of second order has allowed to extend the application range of the results by 4 times, but the asymptotic formula has not unified form and it needs time-taking rather laborious formula derivations for each system. Therefore, we suggest ways to modify the method of the asymptotic analysis under heavy load condition to increase the method accuracy.

The method is described on the example of the simplest retrial queue M|M|1 in order to compare the results with the known exact distribution. The system of differential Kolmogorov equations for Markov process $\{k(t), i(t)\}$ is composed, then it is rewritten for characteristic functions in steady state.

The parameter $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ is the load rate of the system. The principle of asymptotic analysis method under heavy load condition (where $\rho \uparrow 1$) is briefly described. Asymptotic characteristic functions of the first and second order are presented.

Note that during the derivation of the first order asymptotic formula the function $F_0(w)$ was obtained. We propose to study "intermediate" asymptotics $h^*(u)$, which has the form of a weighted sum of two gamma distribution characteristic functions:

$$h^*(u) = q\Gamma_1(u) + (1-q)\Gamma_0(u) ,$$

where $\Gamma_1(u) = \left(1 - \frac{ju}{\beta}\right)^{-\alpha}$, $\Gamma_0(u) = \left(1 - \frac{ju}{\beta}\right)^{-\alpha+1}$, $q = \frac{1}{2-\rho}$, $\alpha = \frac{\mu}{\sigma} + 1$ и $\beta = 1 - \rho$.
We suggest to call this distribution as *hypergamma distribution* (like a hyperexponential distribution).

The numerical analysis shows that hypergamma asymptotics is more accurately than the first order asymptotics, but it is worth than the second order asymptotics. However, the derivation of the second order asymptotic formula for more complex retrial queues is difficult, whereas "intermediate" asymptotics does not require additional calculations, because its shape is the same for all retrial queues and hypergamma distribution parameters are obtained in the first order asymptotic formula theorem.

Then a modification of hypergamma asymptotics of shifting the argument to the parameter δ is proposed:

$$F(x) = q\tilde{\Gamma}_1(x+\delta) + (1-q)\tilde{\Gamma}_0(x+\delta) ,$$

where δ is found from the condition $\tilde{\Gamma}_1(\delta) = (1-\rho)^2$.

The numerical analysis shows that "modified" distribution significantly improves results of hypergamma asymptotics.

In the paper conclusion a combination of "modified" distribution and the second asymptotics $Pm^{(2)} = \frac{1}{2}\left(Pm + P^{(2)}\right)$. is considered. As a result of numerical analysis, it was observed that this modification is more accurately than the second order asymptotics and can be applied for load rate $\rho \geq 0.7$ and even $\rho \geq 0.5$ for large values of delay parameter σ.

In summary, it can be concluded that for practical tasks which does not require high accuracy of approximation, it is useful to apply the "intermediate" asymptotics results because of its simplicity of construction and rather broad area of applicability ($\rho \geq 0.8$), and for applications requiring higher accuracy of approximation, it is advisable to apply the proposed modifications 1 and 2. In the future, the modifications can be applied to the study of various retrial queueing systems including with non Poisson incoming process.

REFERENCES

1. Wilkinson, R.I. (1956) Theories for toll traffic engineering in the USA. *The Bell System Technical Journal.* 35(2). pp. 421-507. DOI: 10.1002/j.1538-7305.1956.tb02388.x.
2. Cohen, J.W. (1957) Basic problems of telephone traffic and the influence of repeated calls. *Philips Telecommunication Review.* 18(2). pp. 49-100.
3. Gosztony, G. (1976) Repeated call attempts and their efect on trafic engineering. *Budavox Telecommunication Review.* 2. pp. 16-26.
4. Elldin, A. & Lind, G. (1971) *Elementary Telephone Traffic Theory*. Ericsson Public Telecommunications.
5. Kuznetsov, D.Yu., Nazarov, A.A. (2001) Analysis of non-Markovian models of communication networks with adaptive protocols of multiple random access. *Automation and Remote Control.* 62(5). pp. 124-146. DOI: 10.1023/A:1010231008994.
6. Nazarov, A.A. & Tsoj, S.A. (2004) Common approach to studies of Markov models for data transmission networks controlled by the static random multiple access protocols. *Avtomatika i Vychislitel'naya Tekhnika – Automatic Control And Computer Sciences.* 4. pp. 73-85. (In Russian).
7. Artalejo, J.R. & Gomez-Corral, A. (2008) *Retrial Queueing Systems. A Computational Approach.* Springer.
8. Falin, G.I. & Templeton, J.G.C. (1997) *Retrial queues*. London: Chapman & Hall.
9. Artalejo, J.R. & Falin, G.I. (2002) Standard and retrial queueing systems: A comparative analysis. *Revista Matematica Complutense.* 15. pp. 101-129. DOI: 10.5209/rev_REMA.2002.v15.n1.16950
10. Neuts, M.F. & Rao, B.M. (2002) Numerical investigation of a multiserver retrial model. *Queueing Systems.* 7(2). pp. 169-189. DOI: 10.1007/BF01158473
11. Ridder, A. (2000) Fast simulation of retrial queues. *Third Workshop on Rare Event Simulation and Related Combinatorial Optimization Problems*. Pisa. pp. 1-5.
12. Kim, C.S., Mushko, V.V. & Dudin, A. (2012) Computation of the steady state distribution for multi-server retrial queues with phase type service process. *Annals of Operations Research*. 201(1). pp. 307-323. DOI: 10.1007/s10479-012-1254-7
13. Moiseeva, E. & Nazarov, A. (2012) Asymptotic Analysis of RQ-systems M/M/1 on Heavy Load Condition. *Problems of Cybernetics and Informatics*. Proc. of the Fourth International Conference. Baku, Azerbaijan. pp. 164-166.
14. Nazarov, A. & Fedorova, E. (2013) [The second order asymptotic analysis method under heavy load condition on example of the retrial queue M|M|1 research]. *Informatsionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie (ITMM-2013)* [Information technology and mathematical modeling (ITMM 2013)]. Proc. of the 12th All-Russian Conference with International Participation. Vol. 2. Tomsk. pp. 59-65. (In Russian).
15. Moiseeva, E. & Nazarov, A. (2013) Researching of Retrial Queueing system MMPP|GI|1 by using asymptotic analysis method on heavy load condition. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 4(25). pp. 84-94. (In Russian).