МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ВЕСТНИК
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2016 **№ 6(44)**

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учредитель:
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский Томский государственный университет»

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), К.М. Моисеева (отв. секретарь по разделу «Механика»), И.А. Александров, В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.М. Гришин, А.Н. Ищенко, В.В. Конев, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, С.В. Панько, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер, Н.Р. Щербаков.

EDITORIAL COUNCIL
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

EDITORIAL BOARD
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Elena G. Lazareva (Executive Editor of the Mathematics Section), Kseniya M. Moiseeva (Executive Editor of the Mechanics Section), Igor A. Aleksandrov, Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimatov, Aleksey M. Bubenchikov, Igor M. Vasenin, Anatoliy M. Grishin, Aleksandr N. Ishchenko, Viktor V. Konev, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Sergey V. Panko, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager, Nikolay R. Shcherbakov.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д.36, корп. 2, к. 417
Электронный адрес: http://vestnik.tsu.ru/mathematics
Контактный тел./факс: (3822) 529-740
E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru
H-index: http://elibrary.ru, http://Math-Net.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Кыров В.А. Псевдогельмгольцева и дуальногельмгольцева плоскости, наделённые финслеровыми геометриями 5
Мустафаева Е.Ю., Алиев Н.А. Об одном методе исследования задачи Стеклова для 3-мерного уравнения Лапласа с нелокальными граничными условиями 19
Розов А.В., Соколов Е.В. О нильпотентной аппроксимируемости свободных произведений нильпотентных групп с центральными объединенными подгруппами 34

МЕХАНИКА

Азин А.В., Пономарев С.В., Рикконен С.В., Храмцов А.М. Математическое моделирование режимов работы пьезодвигателя 45
Банзула Ю.Б., Борзенко Е.И., Карязов С.В., Шрагер Г.Р. Кинематика течения вязкой жидкости в канале с затвором 54
Филимонов С.А., Необъявляющий П.А., Михиенкова Е.И. Применение гибридного алгоритма моделирования для исследования системы удаления вредных газов алюминиевого производства 64
Халиманович В.И. Влияние золотого покрытия на механические свойства микропроволоки, используемой для вязания крупногабаритных трансформируемых антенн 80
Чуруксаева В.В., Старченко А.В. Численное исследование двухфазного течения жидкости с легкими частицами в открытых каналах 88
Шагапов В.Ш., Хасанов М.К., Рафикова Г.Р. Вытеснение метана из газогидратного пласта при закачке диоксида углерода 104

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ 115

CONTENTS

MATHEMATICS

Kyrov V.F. The pseudo-Helmholtz and dual Helmholtz planes with the Finsler geometry 5
Mustafayeva Y. Y., Aliyev N.A. On a method of investigating the Steklov problem for the 3-dimensional Laplace equation with non-local boundary-value conditions 19
Rozov A.V., Sokolov E.V. On the residual nilpotence of free products of nilpotent groups with central amalgamated subgroups 34

MECHANICS

Azin A.V., Khramtsov A.M., Ponomarev S.V., Rikkonen S.V. Mathematical modeling of piezo motor operation modes 45
Banzula Yu.B., Borzenko E.I., Karyazov, S.V., Shrager G.R. The kinematics of a viscous fluid flow in a channel with a valve 54
Filimonov S.A., Neob"yavlyayushchiy P.A., Mikhienkova E.I. An application of hybrid simulation algorithm for a research of the disposal system of noxious gases in aluminium production.. 64
Khalimanovich V.I. Effect of a gold coating on the mechanical properties of a мicrowire, applied for knitting of the large transformable antennas.. 80
Churuksaeva V.V., Starchenko A.V. Numerical investigation of a two-phase flow of fluid with light particles in open channels.. 88
Shagapov V.Sh., Khasanov M.K., Rafikova G.R. Displacement of methane from a gas hydrate reservoir in the process of carbon dioxide injection.. 104

BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS.. 115

МАТЕМАТИКА

УДК 514.756:514.763.6
DOI 10.17223/19988621/44/1

В.А. Кыров

ПСЕВДОГЕЛЬМГОЛЬЦЕВА И ДУАЛЬНОГЕЛЬМГОЛЬЦЕВА ПЛОСКОСТИ, НАДЕЛЁННЫЕ ФИНСЛЕРОВЫМИ ГЕОМЕТРИЯМИ

Известна полная классификация двумерных феноменологически симметричных геометрий. Она содержит как хорошо известные геометрии (евклидова, псевдоевклидова, симплектическая, сферическая и т.д.), так и неизвестные (собственно гельмгольцева, псевдогельмгольцева, дуальногельмгольцева и симплициальная). Простой анализ доказывает однородность метрической функции псевдогельмгольцевой и дуальногельмгольцевой геометрий. Поэтому данные геометрии принадлежат классу финслеровых пространств. В данной работе применяются методы финслеровой геометрии для исследования псевдогельмгольцевой и дуальногельмгольцевой двумерных геометрий: проверяются финслеровы аксиомы, находится финслеров метрический тензор, финслеровы основной и дополнительный тензоры, вычисляются финслеров скаляр и специальный тензор кривизны.

Ключевые слова. *Метрическая функция*, *псевдогельмгольцева геометрия*, *дуальногельмгольцева геометрия*, *финслерова геометрия.*

Известна классификация Г.Г. Михайличенко двумерных феноменологически симметричных геометрий [1], то есть геометрий, для которых шесть взаимных расстояний между четырьмя произвольными точками функционально связаны. Расстояние понимается в обобщенном смысле как значение некоторой функции, для которой метрические аксиомы не обязательно выполняются. Было доказано, что феноменологически симметричные геометрии наделены максимальной подвижностью, то есть для них существуют группы движений максимальной размерности равной трем [2, 3]. Классификация таких двумерных геометрий содержит как хорошо известные геометрии (евклидова, псевдоевклидова, симплектическая, сферическая и т.д.), так и неизвестные (собственно гельмгольцева, псевдогельмгольцева, дуальногельмгольцева и симплициальная). В данной работе применяются методы изучения финслеровых пространств для исследования псевдогельмгольцевой и дуальногельмгольцевой двумерных геометрий. Эта статья является продолжением работы [4], опубликованной автором, в которой исследуется собственно гельмгольцева двумерная геометрия как финслерово пространство.

1. Псевдогельмгольцева и дуальногельмгольцева плоскости

Возьмем в арифметической плоскости R^2 метрические функции [1]:

$$f(x,y)=[(x^1-y^1)^2-(x^2-y^2)^2]e^{2\beta \operatorname{ar(c)th}\frac{x^2-y^2}{x^1-y^1}},$$

где $\beta = \text{const}$, $\beta \neq 0$, $\beta \neq 1$, $x^1 \neq y^1$, причем при $\left|\frac{u^2}{u^1}\right| < 1$ берем $\operatorname{arth}\frac{u^2}{u^1} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+u^2/u^1}{1-u^2/u^1}$, а при $\left|\frac{u^2}{u^1}\right| > 1$ – $\operatorname{arcth}\frac{u^2}{u^1} = \frac{1}{2}\ln\frac{u^2/u^1-1}{u^2/u^1+1}$ и

$$g(x,y) = (x^1 - y^1)^2 e^{2\frac{x^2-y^2}{x^1-y^1}},$$

где $x^1 \neq y^1$.

Рассмотрим касательную плоскость $T_x(R^2)$ к R^2 в произвольной точке $x = (x^1, x^2)$. Обозначим через $T(R^2)$ касательное расслоение. Зададим в прямом произведении $R^2 \times T(R^2)$ метрическую функцию

$$f(u) = \sqrt{(u^1)^2 - (u^2)^2}\, e^{\beta \operatorname{ar(c)th}\frac{u^2}{u^1}}, \tag{1}$$

где $u \in T_x(R^2)$, $u^1 \neq 0$. Касательный вектор $u \in T_x(R^2)$ называется *неизотропным* по отношению к функции (1), если для него определено значение этой функции. Множество неизотропных касательных векторов относительно метрической функции (1) в точке x обозначим через $D^f{}_x(R^2) \subset T_x(R^2)$. Пусть $D^f(R^2) \subset T(R^2)$ – расслоение неизотропных касательных векторов. Очевидно, метрическая функция (1) определена в прямом произведении $R^2 \times D^f(R^2)$.

Аналогично в прямом произведении $R^2 \times T(R^2)$ задаем метрическую функцию

$$g(u) = u^1 e^{\frac{u^2}{u^1}}, \tag{2}$$

где $u \in T_x(R^2)$, $u^1 \neq 0$, и определяем *неизотропный* по отношению к функции (2) касательный вектор $u \in T_x(R^2)$ как вектор, для которого определено значение этой функции. Множество так определенных неизотропных касательных векторов в точке x обозначим через $D^g{}_x(R^2) \subset T_x(R^2)$. Введем обозначение $D^g(R^2) \subset T(R^2)$ для расслоения таких неизотропных касательных векторов. Очевидно, метрическая функция (2) определена в прямом произведении $R^2 \times D^g(R^2)$.

Определение 1. Тройка ($R^2, D^f(R^2), f$) задает псевдогельмгольцеву двумерную геометрию (плоскость), а тройка ($R^2, D^g(R^2), g$) – дуальногельмгольцеву двумерную геометрию (плоскость).

Теорема 1. Метрические функции (1) и (2) положительно однородны степени один.

Доказательство. Действительно,

$$f(\lambda u) = \sqrt{(\lambda u^1)^2 - (\lambda u^2)^2}\, e^{\beta \operatorname{ar(c)th}\frac{\lambda u^2}{\lambda u^1}} = \lambda f(u), \quad g(\lambda u) = (\lambda u^1) e^{\frac{\lambda u^2}{\lambda u^1}} = \lambda g(u),$$

для любого $\lambda > 0$. □

Таким образом, псевдогельмгольцева и дуальногельмгольцева двумерные геометрии являются финслеровыми пространствами [5].

Очевидно, метрическая функция (1) положительна в области $\left|\frac{u^2}{u^1}\right| < 1$, то есть $f(u) > 0$, причем $u \in D^f(R^2)$.

Теорема 2. Псевдогельмгольцева геометрия является положительно определенной двумерной финслеровой геометрией в области $\left|\frac{u^2}{u^1}\right| < 1$, при $|\beta| > 1$.

Доказательство. Вычисляем производные первого порядка:

$$\frac{\partial f^2}{\partial u^1} = 2(u^1 - \beta u^2) e^{2\beta\,\mathrm{ar(c)th}\frac{u^2}{u^1}},$$

$$\frac{\partial f^2}{\partial u^2} = 2(-u^2 + \beta u^1) e^{2\beta\,\mathrm{ar(c)th}\frac{u^2}{u^1}},$$

потом производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 f^2}{\partial u^1 \partial u^1} = 2\frac{(u^1)^2 + (2\beta^2 - 1)(u^2)^2 - 2\beta u^1 u^2}{(u^1)^2 - (u^2)^2} e^{2\beta\,\mathrm{ar(c)th}\frac{u^2}{u^1}},$$

$$\frac{\partial^2 f^2}{\partial u^1 \partial u^2} = 2\frac{\beta((u^1)^2 + (u^2)^2) - 2\beta^2 u^1 u^2}{(u^1)^2 - (u^2)^2} e^{2\beta A\,\mathrm{ar(c)th}\frac{u^2}{u^1}},$$

$$\frac{\partial^2 f^2}{\partial u^2 \partial u^2} = 2\frac{(2\beta^2 - 1)(u^1)^2 + (u^2)^2 - 2\beta u^1 u^2}{(u^1)^2 - (u^2)^2} e^{2\beta\,\mathrm{ar(c)th}\frac{u^2}{u^1}}.$$

Затем вычисляется определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f^2}{\partial u^1 \partial u^1} & \dfrac{\partial^2 f^2}{\partial u^1 \partial u^2} \\ \dfrac{\partial^2 f^2}{\partial u^2 \partial u^1} & \dfrac{\partial^2 f^2}{\partial u^2 \partial u^2} \end{vmatrix} = 4(\beta^2 - 1) e^{4\beta\,\mathrm{ar(c)th}\frac{u^2}{u^1}},$$

который положителен при $|\beta| > 1$. Элемент в левом верхнем углу данного определителя, очевидно, равный

$$\frac{\partial^2 f^2}{\partial u^1 \partial u^1} = 2\frac{(u^1 - \beta u^2)^2 + (\beta^2 - 1)(u^2)^2}{(u^1)^2 - (u^2)^2} e^{2\beta\,\mathrm{ar(c)th}\frac{u^2}{u^1}},$$

также положителен, если $|\beta| > 1$ и $\left|\frac{u^2}{u^1}\right| < 1$. Таким образом, из приведенных рассуждений следует, что при $|\beta| > 1$ в области $\left|\frac{u^2}{u^1}\right| < 1$ квадратичная форма

$$\frac{\partial f^2}{\partial u^i \partial u^j} \xi^i \xi^j = 2 g_{ij} \xi^i \xi^j \qquad (3)$$

положительно определена. Если же еще учесть положительность метрической функции (1), то приходим к утверждению теоремы 2. □

Метрическая функция (2) положительна, то есть $g(u) > 0$, в области где $u^1 > 0$, причем $u \in D^g(R^2)$.

Теорема 3. Дуальногельмгольцева геометрия является положительно определенной двумерной финслеровой геометрией в области $u^1 > 0$.

Доказательство. Вычисляем производные первого порядка:

$$\frac{\partial g^2}{\partial u^1} = 2(u^1 - u^2)e^{2\frac{u^2}{u^1}},$$

$$\frac{\partial g^2}{\partial u^2} = 2u^1 e^{2\frac{u^2}{u^1}},$$

потом производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 g^2}{\partial u^1 \partial u^1} = 2\frac{(u^1)^2 + 2(u^2)^2 - 2u^1u^2}{(u^1)^2} e^{2\frac{u^2}{u^1}},$$

$$\frac{\partial^2 g^2}{\partial u^1 \partial u^2} = -2\frac{2u^2 - u^1}{u^1} e^{2\frac{u^2}{u^1}},$$

$$\frac{\partial^2 g^2}{\partial u^2 \partial u^2} = 4e^{2\frac{u^2}{u^1}}.$$

Затем вычисляется определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 g^2}{\partial u^1 \partial u^1} & \dfrac{\partial^2 g^2}{\partial u^1 \partial u^2} \\ \dfrac{\partial^2 g^2}{\partial u^2 \partial u^1} & \dfrac{\partial^2 g^2}{\partial u^2 \partial u^2} \end{vmatrix} = 4e^{4\frac{u^2}{u^1}} > 0.$$

Элемент в левом верхнем углу данного определителя, очевидно, равен

$$\frac{\partial^2 g^2}{\partial u^1 \partial u^1} = 2\frac{(u^1 - u^2)^2 + (u^2)^2}{(u^1)^2} e^{2\frac{u^2}{u^1}} > 0.$$

Видно, что квадратичная форма (3), в которой берем вместо f метрическую функцию g, положительно определена. Учитывая дополнительно положительность метрической функции (2) в области $u^1 > 0$, приходим к утверждению теоремы 3. □

2. Псевдогельмгольцево двумерное многообразие

Это многообразие определено в работе автора [6], и локальное его изучение было темой кандидатской диссертации. Ниже все индексы принимают значения 1 и 2. Рассмотрим касательную плоскость $T_x(M)$ к двумерному многообразию M в произвольной точке x и касательное расслоение $T(M)$. В прямом произведении $M \times T(M)$ зададим метрическую функцию, которая в координатной окрестности

$U \subset M$ имеет явный вид

$$f(x,u)=\sqrt{(a_iu^i)^2-(b_iu^i)^2}\,e^{\beta \operatorname{ar(c)th}\frac{b_iu^i}{a_iu^i}}, \tag{4}$$

где $u \in T_x(M)$, а $a_i = a_i(x)$, $b_i = b_i(x)$ – функции класса C^3, $\beta = \text{const}$, $\beta \neq 0$, $\beta \neq 1$. В каждой точке x векторы a_iu^i, b_iu^i линейно независимы, то есть $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Касательный вектор $u \in T_x(M)$ называется *неизотропным*, если для него определено значение метрической функции (4). Множество неизотропных касательных векторов в точке x обозначим через $D^f{}_x(M) \subset T_x(M)$. Пусть $D^f(M) \subset T(M)$ – расслоение неизотропных касательных векторов.

Определение 2. Тройка ($M, D^f(M), f$) задает геометрию двумерного псевдогельмгольцева многообразия.

Заметим, что для псевдогельмгольцевой плоскости $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$.

Теорема 4. Метрическая функция (4) положительно однородна степени один.

Доказательство. Действительно,

$$f(x,\lambda u)=\sqrt{(a_i\lambda u^i)^2-(b_i\lambda u^i)^2}\,e^{\beta \operatorname{ar(c)th}\frac{b_i\lambda u^i}{a_i\lambda u^i}}=\lambda f(x,u),$$

для любого $\lambda > 0$. □

Итак, двумерное псевдогельмгольцево многообразие является финслеровым пространством [5].

Метрическая функция (4) положительна, то есть $f(x,u) > 0$, в области $\left|\dfrac{b_iu^i}{a_ju^j}\right| < 1$, где $u \in D^f{}_x(M)$.

Теорема 5. Псевдогельмгольцево двумерное многообразие ($M, D^f(M), f$) является положительно определенным двумерным финслеровым пространством в области $\left|\dfrac{b_iu^i}{a_ju^j}\right| < 1$ при $|\beta| > 1$.

Доказательство. Сначала вычисляем производные первого порядка:

$$\frac{\partial f^2(x,u)}{\partial u^i}=2[(a_i+\beta b_i)(1)-(b_i+\beta a_i)(2)]e^{2\beta \operatorname{ar(c)th}\frac{(2)}{(1)}},$$

где для удобства введены сокращающие обозначения

$$(1)=a_ku^k,\ \ (2)=b_ku^k.$$

Потом вычисляются компоненты финслерова метрического тензора

$$g_{ij}(x,u)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f^2(x,u)}{\partial u^i \partial u^j} \tag{5}$$

псевдогельмгольцева двумерного многообразия:

$$g_{ij}=\frac{A_{ij}(1)^2+B_{ij}(2)^2+C_{ij}(1)(2)}{(1)^2-(2)^2}e^{2\beta \operatorname{ar(c)th}\frac{(2)}{(1)}}, \tag{6}$$

где

$$A_{ij} = a_i a_j + \beta a_i b_j + \beta b_i a_j + (2\beta^2 - 1) b_i b_j,$$

$$B_{ij} = (2\beta^2 - 1) a_i a_j + \beta a_i b_j + \beta b_i a_j + b_i b_j,$$

$$C_{ij} = -2\beta(a_i a_j + \beta a_i b_j + \beta b_i a_j + b_i b_j).$$

Затем вычисляется определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = (\beta^2 - 1)(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 e^{4\beta \operatorname{ar(c)th}\frac{u^2}{u^1}}. \qquad (7)$$

Видно, что он положителен, если $|\beta| > 1$. Несложно преобразовать элемент в верхнем левом углу данного определителя:

$$g_{11} = \frac{((a_1 + \beta b_1)(1) - \beta a_1(2))^2 + ((\beta a_1 + b_1)(2) - \beta b_1(1))^2 - a_1{}^2(2)^2 - b_1{}^2(1)^2}{(1)^2 - (2)^2} e^{2\beta \operatorname{ar(c)th}\frac{(2)}{(1)}}.$$

Можно доказать его положительность в области $\left|\dfrac{b_i u^i}{a_j u^j}\right| < 1$ при $|\beta| > 1$. Из полученных результатов следует, что квадратичная форма (3) положительно определена. Учитывая еще положительность метрической функции (4) в области $\left|\dfrac{b_i u^i}{a_j u^j}\right| < 1$, приходим к утверждению теоремы 5. □

Предложение 1. Контравариантный финслеров метрический тензор псевдогельмгольцева двумерного многообразия задается формулой

$$g^{ij} = \frac{A^{ij}(1)^2 + B^{ij}(2)^2 + C^{ij}(1)(2)}{(\beta^2 - 1)(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2((1)^2 - (2)^2)} e^{-2\beta \operatorname{ar(c)th}\frac{(2)}{(1)}}, \qquad (8)$$

где $A^{11} = A_{22}$, $A^{21} = -A_{12}$, $A^{22} = A_{11}$, $B^{11} = B_{22}$, $B^{21} = -B_{12}$, $B^{22} = B_{11}$, $C^{11} = C_{22}$, $C^{21} = -C_{12}$, $C^{22} = C_{11}$.

Доказательство. Контравариантный финслеров метрический тензор g^{ij} определяется из формулы $g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$, где δ^i_k – символ Кронекера, g_{jk} – финслеров метрический тензор псевдогельмгольцева двумерного многообразия, определенный формулой (6) . Тогда

$$g^{22} = \frac{A_{11}(1)^2 + B_{11}(2)^2 + C_{11}(1)(2)}{(\beta^2 - 1)(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2((1)^2 - (2)^2)} e^{-2\beta \operatorname{ar(c)th}\frac{(2)}{(1)}},$$

$$g^{21} = -\frac{A_{21}(1)^2 + B_{21}(2)^2 + C_{21}(1)(2)}{(\beta^2 - 1)(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2((1)^2 - (2)^2)} e^{-2\beta \operatorname{ar(c)th}\frac{(2)}{(1)}},$$

$$g^{11} = \frac{A_{22}(1)^2 + B_{22}(2)^2 + C_{22}(1)(2)}{(\beta^2 - 1)(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2((1)^2 - (2)^2)} e^{-2\beta \operatorname{ar(c)th}\frac{(2)}{(1)}}.$$

Если ввести обозначения:

$$A^{11} = A_{22}, \ A^{21} = -A_{12}, \ A^{22} = A_{11},$$
$$B^{11} = B_{22}, \ B^{21} = -B_{12}, \ B^{22} = B_{11},$$
$$C^{11} = C_{22}, \ C^{21} = -C_{12}, \ C^{22} = C_{11},$$

то для компонент контравариантного метрического тензора получим формулу (8). □

Основной и дополнительные финслеровы тензоры [5] определяются формулами

$$C_{ijk}(x,u) = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}(x,u)}{\partial u^k} = \frac{1}{4}\frac{\partial^3 f^2(x,u)}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k}, \quad A_{ijk}(x,u) = f(x,u)C_{ijk}(x,u). \tag{9}$$

Очевидна полная симметрия по индексам:

$$C_{ijk} = C_{ikj} = C_{kji} = C_{jik} \text{ и } A_{ijk} = A_{ijk} = A_{kji} = A_{jik}.$$

Предложение 2. Основной и дополнительный финслеровы тензоры псевдогельмгольцева двумерного многообразия в области $\left|\frac{b_i u^i}{a_j u^j}\right| < 1$ при $|\beta| > 1$ имеют явный вид:

$$C_{ijk} = \frac{2\beta(\beta^2-1)p_{ijk}}{((1)^2-(2)^2)^2} e^{2\beta \operatorname{ar(c)th}\frac{(2)}{(1)}}, \quad A_{ijk} = \frac{2\beta(\beta^2-1)p_{ijk}}{((1)^2-(2)^2)^{3/2}} e^{3\beta \operatorname{ar(c)th}\frac{(2)}{(1)}}, \tag{10}$$

где введено сокращающее тензорное обозначение:

$$p_{ijk} = (b_k(1) - a_k(2))(b_j(1) - a_j(2))(b_i(1) - a_i(2)).$$

Доказательство. Для доказательства необходимо вычислить производные от компонент метрического тензора (6) и привести подобные. □

В области $\left|\frac{b_i u^i}{a_j u^j}\right| < 1$ при $|\beta| > 1$ можно определить единичный вектор, а также ковариантный нормальный к нему вектор:

$$l^i = \frac{u^i}{f(x,u)}, \quad m_i = -\varepsilon_{ik} l^k, \text{ где } \varepsilon_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\Delta} \\ -\sqrt{\Delta} & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Учитывая (7), приходим к выражениям для единичного вектора и ковариантного нормального вектора псевдогельмгольцева двумерного многообразия в области $\left|\frac{b_i u^i}{a_j u^j}\right| < 1$ с условием $|\beta| > 1$:

$$l^i = \frac{u^i e^{-\beta \operatorname{ar(c)th}\frac{(2)}{(1)}}}{\sqrt{(1)^2-(2)^2}}, \quad m_i = \frac{\sqrt{(\beta^2-1)}(b_i(1) - a_i(2)) e^{\beta \operatorname{ar(c)th}\frac{(2)}{(1)}}}{\sqrt{(1)^2-(2)^2}}.$$

В финслеровой геометрии доказано соотношение

$$A_{ijk} = J m_i m_j m_k, \tag{12}$$

где J – скаляр [5].

Предложение 3. Финслеров скаляр J псевдогельмгольцева двумерного многообразия в области $\left|\dfrac{b_i u^i}{a_j u^j}\right| < 1$ при $|\beta| > 1$ вычисляется по формуле

$$J = \frac{2\beta}{\sqrt{\beta^2 - 1}} = \text{const}.$$

Доказательство. Найдем сначала тройное произведение

$$m_i m_j m_k = \frac{(\beta^2-1)^{3/2}(b_i(1)-a_i(2))(b_j(1)-a_j(2))(b_k(1)-a_k(2))e^{3\beta\,\mathrm{ar(c)th}\frac{(2)}{(1)}}}{((1)^2-(2)^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{(\beta^2-1)^{3/2}\, p_{ijk} e^{3\beta\,\mathrm{ar(c)th}\frac{(2)}{(1)}}}{((1)^2-(2)^2)^{3/2}}.$$

Затем найденное и выражение для тензора A_{ijk}, вычисленное в предложении 2, подставим в формулу (12), получаем явное выражение для скаляра J. □

Следует отметить, что в теории двумерных финслеровых пространств этот скаляр, который для двумерного псевдогельмгольцева многообразия принимает постоянное значение, является важной характеристикой. Заметим, что для римановых двумерных многообразий этот скаляр равен нулю.

По тензорам (9) строятся новые тензоры:

$$C^i_{jk} = g^{il} C_{jlk}\,, \quad A^i_{jk}(x,u) = f(x,u) C^i_{jk}(x,u). \tag{13}$$

В явном виде для двумерного псевдогельмгольцева многообразия в области $\left|\dfrac{b_i u^i}{a_j u^j}\right| < 1$ с $|\beta| > 1$ они имеют вид

$$C^i_{jk} = \frac{-2\beta(b_k(1)-a_k(2))(b_j(1)-a_j(2))((a^i+\beta b^i)(1)-(b^i+\beta a^i)(2))}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)((1)^2-(2)^2)^2},$$

$$A^i_{jk} = \frac{-2\beta(b_k(1)-a_k(2))(b_j(1)-a_j(2))((a^i+\beta b^i)(1)-(b^i+\beta a^i)(2))}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)((1)^2-(2)^2)^{3/2}} e^{\beta\,\mathrm{Ar(c)th}\frac{(2)}{(1)}}, \tag{14}$$

где $a^2 = a_1, b^2 = b_1$, $a^1 = a_2, b^1 = b_2$.

С помощью второго тензора из (13) можно определить финслеров специальный тензор кривизны [5]:

$$S^i_{jkh} = A^i_{kr} A^r_{jh} - A^i_{rh} A^r_{jk}. \tag{15}$$

Теорема 6. Финслеров специальный тензор кривизны для псевдогельмгольцева двумерного многообразия равен нулю.

Доказательство. Действительно, воспользуемся выражением (14) для тензора A^i_{jk} при вычислении финслерова специального тензора кривизны (15):

$$S^i_{jkh} = \frac{4\beta^2}{(a_1b_2 - a_2b_1)^2((1)^2-(2)^2)^3} e^{2\beta \operatorname{ar(c)th}\frac{(2)}{(1)}} \times$$

$$\times((a^i+\beta b^i)(1)-(b^i+\beta a^i)(2))((a^r+\beta b^r)(1)-(b^r+\beta a^r)(2))\times$$

$$\times[((b_j(1)-a_j(2))(b_k(1)-a_k(2))(b_h(1)-a_h(2))(b_r(1)-a_r(2))-$$

$$-(b_j(1)-a_j(2))(b_k(1)-a_k(2))(b_h(1)-a_h(2))(b_r(1)-a_r(2))]=0.$$

Проведенные вычисления доказывают, что $S^i_{jkl}=0$. □

В работе [6] проводилось исследование кривизны двумерного псевдогельмгольцева многообразия, построенной через согласованную связность. Найден соответствующий тензор кривизны:

$$R^i_{jkl} = -\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \Gamma^i_{sk}\Gamma^s_{jl} + \Gamma^i_{sl}\Gamma^s_{jk},$$

где символы Кристоффеля согласованной связности определяются по формуле

$$\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2}h^{lk}\left(\frac{\partial h_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial h_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k}\right) - \beta h^{lk}\left(\lambda_{jkl} + \lambda_{kij} - \lambda_{ijk}\right),$$

причем $h_{ij} = a_ia_j - b_ib_j + \beta(a_ib_j - a_jb_i)$, $\lambda_{ijk} = b_j\dfrac{\partial a_i}{\partial x^k} - a_j\dfrac{\partial b_i}{\partial x^k}$. Оказалось, что тензор R^i_{jkl} тождественно не обращается в нуль.

3. Дуальногельмгольцево двумерное многообразие

Это многообразие, как и псевдогельмгольцево, также определено в работе автора [6]. Пусть M – двумерное многообразие. Рассмотрим $\forall x \in M$ касательную плоскость $T_x(M)$ и касательное расслоение $T(M)$. В прямом произведении $M \times T(M)$ зададим метрическую функцию, которая в координатной окрестности $U \subset M$ имеет явный вид

$$g(x,u) = (a_iu^i)e^{\frac{b_iu^i}{a_iu^i}}, \qquad (16)$$

где $u \in T_x(M)$, а $a_i = a_i(x)$, $b_i = b_i(x)$ – функции класса C^3. Векторы a_iu^i, b_iu^i линейно независимы, то есть $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Касательный вектор $u \in T_x(M)$ называется *неизотропным*, если для него определено значение метрической функции (16). Множество неизотропных касательных векторов в точке x обозначим через $D^g{}_x(M) \subset T_x(M)$. Пусть $D^g(M) \subset T(M)$ – расслоение неизотропных касательных векторов.

Определение 3. Тройка ($M, D^g(M), g$) задает геометрию двумерного дуальногельмгольцева многообразия.

Заметим, что для дуальногельмгольцевой плоскости $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$. Справедлива теорема, аналогичная теореме 4.

Теорема 7. Метрическая функция (16) положительно однородна степени один.

Таким образом, двумерное дуальногельмгольцево многообразие является финслеровым пространством [5].

Метрическая функция (16) положительна, то есть $g(x,u)>0$ в области $a_i u^i > 0$, где $u \in D^g{}_x(M)$.

Теорема 8. Дуальногельмгольцево двумерное многообразие ($M, D^g(M), g$) является положительно определенным двумерным финслеровым пространством в области $a_i u^i > 0$.

Доказательство. Сначала вычисляем производные первого порядка:

$$\frac{\partial g^2(x,u)}{\partial u^i} = 2[(a_i + b_i)(1) - a_i(2)]e^{2\frac{(2)}{(1)}},$$

причем

$$(1) = a_k u^k, \ \ (2) = b_k u^k.$$

Потом вычисляются компоненты финслерова метрического тензора по формулам (5) дуальногельмгольцева двумерного многообразия:

$$g_{ij} = \frac{A_{ij}(1)^2 + B_{ij}(2)^2 + C_{ij}(1)(2)}{(1)^2} e^{2\frac{(2)}{(1)}}, \tag{17}$$

где

$$A_{ij} = a_i a_j + a_i b_j + b_i a_j + 2b_i b_j,\ B_{ij} = 2a_i a_j,\ C_{ij} = -2(a_i a_j + a_i b_j + b_i a_j).$$

Вычисляется определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 e^{4\frac{(2)}{(1)}} > 0. \tag{18}$$

Можно доказать положительность элемента в верхнем левом углу:

$$g_{11} = \frac{((a_1+b_1)^2 - b_1{}^2)((1)-(2))^2 + 2b_1{}^2(2)^2 + (2a_1{}^2 - (a_1+b_1)^2 + b_1{}^2)(2)^2}{(1)^2} e^{2\frac{(2)}{(1)}} > 0.$$

Из полученных результатов и положительности метрической функции (16) в области $a_i u^i > 0$ следует, что квадратичная форма (3) положительно определена. □

Предложение 4. Контравариантный финслеров метрический тензор дуальногельмгольцева двумерного многообразия задается формулой

$$g^{ij} = \frac{A^{ij}(1)^2 + B^{ij}(2)^2 + C^{ij}(1)(2)}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 (1)^2} e^{-2\frac{(2)}{(1)}},$$

где $A^{11} = A_{22}$, $A^{21} = -A_{12}$, $A^{22} = A_{11}$, $B^{11} = B_{22}$, $B^{21} = -B_{12}$, $B^{22} = B_{11}$, $C^{11} = C_{22}$, $C^{21} = -C_{12}$, $C^{22} = C_{11}$.

Доказательство. Контравариантный финслеров метрический тензор g^{ij} определяется из формулы $g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$, где δ^i_k – символ Кронекера, g_{ij} – дуальногельмгольцев финслеров метрический тензор. Тогда

$$g^{22} = \frac{A_{11}(1)^2 + B_{11}(2)^2 + C_{11}(1)(2)}{(a_1b_2 - a_2b_1)^2(1)^2} e^{-2\frac{(2)}{(1)}},$$

$$g^{21} = -\frac{A_{21}(1)^2 + B_{21}(2)^2 + C_{21}(1)(2)}{(a_1b_2 - a_2b_1)^2(1)^2} e^{-2\frac{(2)}{(1)}},$$

$$g^{11} = \frac{A_{22}(1)^2 + B_{22}(2)^2 + C_{22}(1)(2)}{(a_1b_2 - a_2b_1)^2(1)^2} e^{-2\frac{(2)}{(1)}}.$$

Если ввести обозначения: $A^{11} = A_{22}$, $A^{21} = -A_{12}$, $A^{22} = A_{11}$, $B^{11} = B_{22}$, $B^{21} = -B_{12}$, $B^{22} = B_{11}$, $C^{11} = C_{22}$, $C^{21} = -C_{12}$, $C^{22} = C_{11}$, то для компонент контравариантного метрического тензора получим искомую формулу. □

Предложение 5. Основной и дополнительный финслеровы тензоры дуальногельмгольцева двумерного многообразия задаются формулами

$$C_{ijk} = \frac{2p_{ijk}}{(1)^4} e^{2\frac{(2)}{(1)}}, \quad A_{ijk} = \frac{2p_{ijk}}{(1)^3} e^{3\frac{(2)}{(1)}}, \tag{19}$$

где введено сокращающее тензорное обозначение

$$p_{ijk} = (b_i(1) - a_i(2))(b_j(1) - a_j(2))(b_k(1) - a_k(2)).$$

Доказательство. Для доказательства необходимо воспользоваться формулами (9). □

По формулам (11) вычисляем единичный вектор и ковариантный нормальный к нему вектор для дуальногельмгольцева двумерного многообразия, причем используем выражение (18) для определителя:

$$l^i = \frac{u^i e^{-\frac{(2)}{(1)}}}{(1)}, \quad m_i = \frac{(b_i(1) - a_i(2)) e^{\frac{(2)}{(1)}}}{(1)}.$$

Предложение 6. Финслеров скаляр J дуальногельмгольцева двумерного многообразия равен 2.

Доказательство. Находим тройное произведение

$$m_i m_j m_k = \frac{(b_i(1) - a_i(2))(b_j(1) - a_j(2))(b_k(1) - a_k(2)) e^{3\frac{(2)}{(1)}}}{(1)} = \frac{p_{ijk} e^{3\frac{(2)}{(1)}}}{(1)}.$$

Подставляем найденное произведение и выражение для тензора A_{ijk}, вычисленное в предложении 5, в формулу (12), получаем явное выражение для скаляра J. □

Далее по формулам (13) с использованием выражений для второго тензора из (19) вычисляем тензоры

$$C^i_{jk} = \frac{2(b_j(1) - a_j(2))(b_k(1) - a_k(2))((a^i + b^i)(1) - a^i(2))}{(a_1b_2 - a_2b_1)(1)^4},$$

$$A^i_{jk} = \frac{2(b_k(1) - a_k(2))(b_j(1) - a_j(2))((a^i + b^i)(1) - a^i(2))}{(a_1b_2 - a_2b_1)(1)^3} e^{\frac{(2)}{(1)}}, \tag{20}$$

где $a^2 = -a_1, b^2 = b_1$, $a^1 = -a_2, b^1 = b_2$. Затем находим финслеров специальный тензор кривизны.

Теорема 9. Финслеров специальный тензор кривизны для дуальногельмгольцева двумерного многообразия равен нулю.

Доказательство. Действительно, воспользуемся выражением (20) для тензора A^i_{jk} при вычислении финслерова специального тензора кривизны (15):

$$S^i_{jkh} = \frac{4}{(a_1b_2 - a_2b_1)^2(1)^6} e^{2\frac{(2)}{(1)}} \times$$

$$\times((a^i + b^i)(1) - a^i(2))((a^r + b^r)(1) - a^r(2)) \times$$

$$\times[(b_j(1) - a_j(2))(b_k(1) - a_k(2))(b_h(1) - a_h(2))(b_r(1) - a_r(2)) -$$

$$-(b_j(1) - a_j(2))(b_k(1) - a_k(2))(b_h(1) - a_h(2))(b_r(1) - a_r(2))] = 0.$$

Проведенные вычисления доказывают, что $S^i_{jkl} = 0$. □

В работе [6] проводилось исследование кривизны двумерного дуальногельмгольцева многообразия, построенной через согласованную связность. Найден соответствующий тензор кривизны:

$$R^i_{jkl} = -\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \Gamma^i_{sk}\Gamma^s_{jl} + \Gamma^i_{sl}\Gamma^s_{jk},$$

где символы Кристоффеля согласованной связности определяются по формуле

$$\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2}h^{lk}\left(\frac{\partial h_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial h_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k}\right) - h^{lk}\left(\lambda_{jkl} + \lambda_{kij} - \lambda_{ijk}\right),$$

причем $h_{ij} = a_i a_j + a_i b_j - a_j b_i$, $\lambda_{ijk} = b_j \dfrac{\partial a_i}{\partial x^k} - a_j \dfrac{\partial b_i}{\partial x^k}$. Оказалось, что тензор кривизны R^i_{jkl} тождественно не обращается в нуль.

Заключение

Из данных исследований и работы [4] следует, что в классификации Михайличенко двумерных феноменологически симметричных геометрий [1] геометрии собственно гельмгольцева, псевдогельмгольцева и дуальногельмгольцева, задаваемые метрическими функциями

$$f(x, y) = [(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2]e^{2\gamma \operatorname{arctg}\frac{x^2 - y^2}{x^1 - y^1}},$$

$$f(x, y) = [(x^1 - y^1)^2 - (x^2 - y^2)^2]e^{2\beta \operatorname{ar(c)th}\frac{x^2 - y^2}{x^1 - y^1}},$$

$$f(x, y) = (x^1 - y^1)e^{\frac{x^2 - y^2}{x^1 - y^1}},$$

где $\gamma = \text{const}$, $\gamma \neq 0$, $\beta = \text{const}$, $\beta \neq 0$, $\beta \neq 1$, являются финслеровыми. Других финслеровых неримановых геометрий в той классификации нет.

В работе В.Х. Лева [7] приводится классификация трехмерных феноменологически симметричных геометрий, среди которых есть собственно гельмгольцева, псевдогельмгольцева и дуальногельмгольцева трехмерные геометрии с метрическими функциями

$$f(x,y)=[(x^1-y^1)^2+(x^2-y^2)^2]e^{2\gamma\,\mathrm{arctg}\frac{x^2-y^2}{x^1-y^1}+2z^1+2z^2},$$

$$f(x,y)=[(x^1-y^1)^2-(x^2-y^2)^2]e^{2\beta\,\mathrm{ar(c)th}\frac{x^2-y^2}{x^1-y^1}+2z^1+2z^2},$$

$$f(x,y)=(x^1-y^1)e^{\frac{x^2-y^2}{x^1-y^1}+2z^1+2z^2}.$$

Для этих метрических функций не выполняется основное свойство финслеровой геометрии – свойство однородности, то есть данные геометрии не являются финслеровыми.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Михайличенко Г.Г.* Двумерные геометрии // ДАН СССР. 1981. Т. 260. № 4. С. 803–805.
2. *Михайличенко Г.Г.* О групповой и феноменологической симметриях в геометрии // ДАН СССР. 1983. Т. 269. № 2. С. 284–288.
3. *Богданова Р.А.* Группы движений двумерных гельмгольцевых геометрий как решение функционального уравнения // Сибирский журнал индустриальной математики. 2009. Т. 12. № 4. С. 12–22.
4. *Кыров В.А.* Собственно гельмгольцева плоскость как финслерова геометрия // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 4(42). С. 15–22.
5. *Рунд Х.* Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М.: Наука, 1981.
6. *Кыров В.А.* Гельмгольцевы пространства размерности два // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46. № 6. С. 1343–1361.
7. *Лев В.Х.* Трехмерные геометрии в теории физических структур // Вычислительные системы. Новосибирск: ИМ СОАН СССР, 1988. Вып. 125. С. 90 – 103.

Статья поступила 31.10.2016 г.

Kyrov V.A. THE PSEUDO-HELMHOLTZ AND DUAL HELMHOLTZ PLANES WITH THE FINSLER GEOMETRY. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 6(44). pp. 5–18

DOI 10.17223/19988621/44/1

There exists the complete classification of two-dimensional phenomenologically symmetric geometries, i.e., geometries for which the six mutual distances between the four arbitrary points are functionally connected. In these geometries, the distance is understood in a generalized sense as the value of a function called the metric function. Axioms of a metric are not obligatorily satisfied. For all these geometries, groups of motion are three-dimensional. The classification of such two-dimensional geometries includes both well-known geometries (Euclidean, pseudo-Euclidean, symplectic, spherical, etc.), and unknown ones (the properly Helmholtz, pseudo-Helmholtz, dual Helmholtz, and simplicial geometries).

In this paper, we use methods of Finsler geometry to study the pseudo-Helmholtz and dual Helmholtz two-dimensional phenomenologically symmetric geometries. In particular, in the first section, we introduce the definition of pseudo-Helmholtz and dual Helmholtz planes, and then prove that they are positive definite Finsler spaces (homogeneity and positivity of the metric function, as well as the positive definiteness of the Finsler metric tensor are verified), though, in contrast to the actual Helmholtz geometry, with some restrictions on the domain. In the second section, the psevdo-Helmholtz two-dimensional manifold is defined and it is proved that it is a positive definite Finsler space for $|\beta| > 1$ in a certain domain. Then, the metric tensor g_{ij}, basic Finsler tensor C_{ijk}, and additional tensor A_{ijk} are calculated. With these tensors, the Finsler scalar J is obtained and it is proved that the special Finsler curvature tensor S^i_{jkl} for the two-dimensional pseudo-Helmholtz manifold is zero. In the third section, the dual Helmholtz two-dimensional manifold is defined and it is proved that it is a positive definite Finsler space in the domain of definition. Then, as in the second section, the metric tensor, basic Finsler tensor C_{ijk}, and additional A_{ijk} tensor are calculated. Then, it is proved that $J = 2$ and the special Finsler curvature tensor $S^i_{jkl} = 0$.

Keywords: metric function, pseudo-Helmholtz geometry, dual Helmholtz geometry, Finsler geometry.

KYROV Vladimir Alexandrovich (Candidate of Physics and Mathematics, Gorno-Altaisk State University, Gorno-Altaisk, Russian Federation)
E-mail: kyrovVA@yandex.ru

REFERENCES

1. Mikhaylitchenko G.G. (1981) Geometries a deux dimensions dans la theorie de structures. *Comptes Rendus de L'Academie des Sciencen. Paris.* 293(2). pp. 529–531
2. Michailichenko G.G. (1983) On group and phenomenological simmetries in geometry. *Soviet Math. Dokl.* 27(2). pp. 325–326.
3. Bogdanova R.A. (2009) Gruppy dvizheniy dvumernykh gel'mgol'tsevykh geometriy kak reshenie funktsional'nogo uravneniya [Groups of motions of two-dimensional Helmholtz geometries as a solution of a functional equation]. *Sibirskii Zhurnal Industrial'noi Matematiki*. 12(4). pp. 12–22.
4. Kyrov V.A. (2016) Sobstvenno gel'mgol'tseva ploskost' kak finslerova geometriya [The properly Helmholtz plane as Finsler geometry]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(42). pp. 15–22. DOI 10.17223/19988621/42/2.
5. Rund H. (1959) *The differential geometry of Finsler spaces*. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag.
6. Kyrov V.A. (2005) Two-dimensional Helmholtz spaces. *Siberian Mathematical Journal.* 46(6). pp. 1082–1096. DOI 10.1007/s11202-005-0103-1.
7. Lev V.H. (1988) Trekhmernye geometrii v teorii fizicheskikh struktur [Three-dimensional geometries in the theory of physical structures]. *Vychislitel'nye sistemy – Computation Systems*. 125. Novosibirsk: Institute of Mathematics Publ. pp. 90–103.

УДК 517.956.223
DOI 10.17223/19988621/44/2

Е.Ю. Мустафаева, Н.А. Алиев

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧИ СТЕКЛОВА ДЛЯ 3-МЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Рассматривается фредгольмовость спектральной задачи Стеклова для 3-мерного уравнения Лапласа с однородными нелокальными граничными условиями, где спектральный параметр появляется только в граничном условии. Данная однородная граничная задача сводится к однородному интегральному уравнению Фредгольма второго рода с несингулярным ядром, зависящим от спектрального параметра.

Ключевые слова: *задача Стеклова, спектральная задача, нелокальные граничные условия, трехмерное уравнение Лапласа, основные соотношения, регуляризация, фредгольмовость.*

1. Введение

Как известно, задача Стеклова в одномерном случае является однородной краевой задачей для одномерного уравнения Лапласа, т.е. вторая производная равна нулю при однородных линейных краевых условиях, содержащих спектральный параметр. Эта задача легко решается, и определяется счетное число собственных значений и собственных функций. Сведение задачи Стеклова для уравнения Коши – Римана с нелокальными однородными граничными условиями, содержащими спектральный параметр, к однородному интегральному уравнению Фредгольма второго рода с невырожденным ядром приведено в [1]. Далее, та же задача с простыми глобальными членами с параметром в граничном условии была изучена в [2]. Продолжение этой работы рассматривается в [3], где интеграл охватывает всю границу рассматриваемой области.

Задача Стеклова для двумерного уравнения Лапласа с простыми локальными граничными условиями рассмотрена в [4]. Следует отметить, что в этой работе метод исследования является новым, т.е. он основывается на необходимых условиях, полученных в этой работе. Та же задача для двумерного уравнения Лапласа с нелокальными граничными условиями со спектральным параметром, также содержащими глобальные члены (интегралы), была рассмотрена в [5]. Аналогичная проблема, где спектральный параметр появляется только в одном из граничных условий, содержащих нелокальные и глобальные члены, рассматривалась в [6]. Работы [7, 8] также посвящены изучению таких задач для двумерного уравнения Лапласа.

Излагаемая работа посвящена изучению решений задачи Стеклова для трехмерного уравнения Лапласа с нелокальными граничными условиями. Отметим, что трудности, возникающие при увеличении размерности рассматриваемого уравнения, не сопоставимы с трудностями в предыдущих работах.

Метод исследования заключается в следующем. На основе фундаментального решения уравнения Лапласа и с помощью второй формулы Грина и аналога этой формулы получаем аналитическое представление как для решения, так и для его частных производных. Из этих формул мы также получаем необходимые условия.

Далее, первое необходимое условие, которое получается из второй формулы Грина, не содержит сингулярностей. А остальные необходимые условия, которые получаются из аналога второй формулы Грина, содержат сингулярные члены. Эти сингулярности не регуляризируются по общим правилам, приведенным в [9, 10]. Поскольку эти сингулярные уравнения находятся в спектре, регуляризация этих сингулярностей осуществляется по оригинальной схеме. Кроме того, комбинируя полученные регулярные отношения с заданными граничными условиями, получим достаточные условия для фредгольмовости поставленной задачи.

2. Постановка задачи

Рассмотрим трехмерное уравнение Лапласа в области $D \subset R^3$, выпуклой по направлению оси Ox_3:

$$Lu = \Delta u(x) = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_3^2} = 0, \tag{2.1}$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in D,$$

с нелокальными граничными условиями

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')} + \sum_{j=1}^{2}\left[\alpha_{j1}^{(k)}(x')\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} + \alpha_{j2}^{(k)}(x')\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\right]\Bigg|_{x_3=\gamma_j(x')} =$$

$$= \lambda u(x', \gamma_k(x')), \quad x' \in S,\ k = 1,2, \tag{2.2}$$

$$u(x) = f_0(x), \quad x \in L = \overline{\Gamma}_1 \cap \overline{\Gamma}_2\,. \tag{2.3}$$

Задача (2.1) – (2.3), содержащая параметр в граничных условиях, – это так называемая задача Стеклова. Здесь S – проекция области D на плоскость $Ox_1x_2 = Ox'$, коэффициенты $\alpha_{jk}^{(i)}(x') \in C(S)$, $i,\ j,\ k = 1,2;$ граница $\Gamma = \partial D$ – поверхность Ляпунова, $\lambda \in C$ – комплекснозначный параметр; L – экватор, соединяющий верхнюю и нижнюю полуповерхности Γ_1 и Γ_2:

$$\Gamma_k = \{\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) : \xi_3 = \gamma_k(\xi'),\ \xi' = (\xi_1, \xi_2) \in S\}\ ,\ k = 1,2\,,$$

где $\xi_3 = \gamma_k(\xi_1, \xi_2), k = 1,2$, уравнения полуповерхностей Γ_1 и Γ_2 (выпуклость области D в направлении Ox_3 обеспечивает существование таких уравнений), функции $\gamma_k(\xi'), k = 1,2$, дважды дифференцируемы по обеим переменным ξ_1, ξ_2; коэффициенты $\alpha_{ij}^{(k)}(x')$ удовлетворяют условию Гельдера в S.

Задача (2.1) – (2.3) сводится к однородному интегральному уравнению (или спектральному уравнению), из которого определяются собственные значения и собственные функции.

3. Необходимые условия

Фундаментальное решение трехмерного уравнения Лапласа имеет вид [11]

$$U(x - \xi) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x - \xi|}. \tag{3.1}$$

Умножим уравнение (2.1) на фундаментальное решение (3.1) и проинтегрируем по области D:

$$\int_D \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2} U(x-\xi)dx = 0\,. \tag{3.2}$$

Интегрируя по частям, получим следующее:

$$\sum_{j=1}^{3} \int_D \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2} U(x-\xi)dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \int_\Gamma \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} U(x-\xi) - u(x) \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_j} \right) \cos(\nu_x, x_j)dx + \int_D u(x)\delta(x-\xi)dx\,. \tag{3.3}$$

Так как $U(x-\xi)$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа, то

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 U(x-\xi)}{\partial x_j^2} = \Delta_x U(x-\xi) = \delta(x-\xi)$$

является функцией Дирака. Учитывая это и подставляя (3.3) в (3.2), получим **первое основное соотношение**:

$$\int_\Gamma \left(\frac{\partial u(x)}{\partial \nu_x} U(x-\xi) - u(x) \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial \nu_x} \right) dx = -\int_D u(x)\delta(x-\xi)dx = \begin{cases} -u(\xi), & \xi \in D, \\ -\dfrac{1}{2}u(\xi), & \xi \in \Gamma. \end{cases} \tag{3.4}$$

Первое выражение в (3.4) дает представление общего решения уравнения (2.1), второе выражение в (3.4) является **первым необходимым условием.**

Рассмотрим первое необходимое условие ($\xi \in \Gamma$):

$$-\frac{1}{2}u(\xi) = \int_\Gamma \left(\frac{\partial u(x)}{\partial \nu_x} U(x-\xi) - u(x) \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial \nu_x} \right) dx\,. \tag{3.5}$$

Так как

$$\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_i} = -\frac{x_i - \xi_i}{4\pi|x-\xi|^3} = -\frac{\cos(x-\xi, x_i)}{4\pi|x-\xi|^2}\,,$$

то получаем соотношение из (3.5)

$$\frac{1}{2}u(\xi) = -\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma u(x)\frac{\cos(x-\xi,\nu_x)}{|x-\xi|^2} + \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \frac{1}{|x-\xi|}\frac{\partial u(x)}{\partial \nu_x}dx, \quad \xi \in \Gamma, \tag{3.6}$$

где все подынтегральные выражения имеют слабую особенность, т.е. порядок сингулярности не превышает кратность интеграла.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 3.1. *Пусть область $D \subset R^3$ ограничена и выпукла по направлению x_3, ее граница Γ – поверхность Ляпунова. Тогда полученное первое необходимое условие (3.6) регулярно*.

Умножая (2.1) на $\dfrac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_i}$, $i = \overline{1,3}$, и интегрируя по области D, получим остальные три основных соотношения:

$$\int_{\Gamma}\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial \nu_x}dx+\int_{\Gamma}\frac{\partial u(x)}{\partial x_m}\left[\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_i}\cos(\nu_x,x_m)-\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_m}\cos(\nu_x,x_i)\right]dx+$$

$$+\int_{\Gamma}\frac{\partial u(x)}{\partial x_l}\left[\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_i}\cos(\nu_x,x_l)-\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_l}\cos(\nu_x,x_i)\right]dx=$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_i}, & \xi\in D,\\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_i}, & \xi\in\Gamma,\end{cases}\quad i=\overline{1,3}, \tag{3.7}$$

где числа i, m, l образуют перестановку чисел 1,2,3.

Вторые соотношения в (3.7) – остальные три необходимых условия ($\xi\in\Gamma$, $i=\overline{1,3}$):

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_i}=\int_{\Gamma}\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial \nu_x}dx+$$

$$+\int_{\Gamma}\frac{\partial u(x)}{\partial x_m}\left[\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_i}\cos(\nu_x,x_m)-\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_m}\cos(\nu_x,x_i)\right]dx+$$

$$+\int_{\Gamma}\frac{\partial u(x)}{\partial x_l}\left[\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_i}\cos(\nu_x,x_l)-\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_l}\cos(\nu_x,x_i)\right]dx, \tag{3.8}$$

где числа i,m,l образуют перестановку чисел 1,2,3.

Учитывая, что $\dfrac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_i}=-\dfrac{x_i-\xi_i}{4\pi|x-\xi|^3}=-\dfrac{\cos(x-\xi,x_i)}{4\pi|x-\xi|^2}$, и вводя обозначение

$$K_{ij}(x,\xi)=\cos(x-\xi,x_i)\cos(\nu_x,x_j)-\cos(x-\xi,x_j)\cos(\nu_x,x_i), \tag{3.9}$$

можем переписать **2-е, 3-е** и **4-е необходимые условия** (3.8) в виде

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_i}=\int_{\Gamma}\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial \nu_x}dx-\int_{\Gamma}\frac{\partial u(x)}{\partial x_m}\frac{K_{im}(x,\xi)}{4\pi|x-\xi|^2}dx-\int_{\Gamma}\frac{\partial u(x)}{\partial x_l}\frac{K_{il}(x,\xi)}{4\pi|x-\xi|^2}dx, \tag{3.10}$$

где числа i,m,l образуют перестановку чисел 1,2,3.

Раскроем первые два поверхностных интеграла в $(i+1)$ -м соотношении (3.10) ($i=1,2,3$) по верхней и нижней полуповерхностям Γ_k , $k=1,2$:

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi_i}\Big|_{\xi_3=\gamma_k(\xi')}=\sum_{j=1}^{2}(-1)^{j-1}\int_{S}\frac{\partial u(x)}{\partial x_m}\Big|_{x_3=\gamma_j(x')}\frac{K_{im}(x,\xi)}{4\pi|x-\xi|^2}\Big|_{\substack{x_3=\gamma_j(x')\\ \xi_3=\gamma_k(\xi')}}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+$$

$$+\sum_{j=1}^{2}(-1)^{j-1}\int_{S}\frac{\partial u(x)}{\partial x_l}\Big|_{x_3=\gamma_j(x')}\frac{K_{il}(x,\xi)}{4\pi|x-\xi|^2}\Big|_{\substack{x_3=\gamma_j(x')\\ \xi_3=\gamma_k(\xi')}}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+$$

$$+\int_{\Gamma}\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial \nu_x}\Big|_{\xi_3=\gamma_k(\xi')}dx\ .$$

Выделим только сингулярные слагаемые во втором, третьем и четвертом необходимых соотношениях ($i=\overline{1,3}$) для $k = 1, 2$:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi_i}\Big|_{\xi_3=\gamma_k(\xi')}=(-1)^k\int_S \frac{\partial u(x)}{\partial x_m}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{K_{im}(x,\xi)}{4\pi|x-\xi|^2}\Bigg|_{\substack{x_3=\gamma_k(x')\\ \xi_3=\gamma_k(\xi')}}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+$$

$$+(-1)^k\int_S \frac{\partial u(x)}{\partial x_l}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{K_{il}(x,\xi)}{4\pi|x-\xi|^2}\Bigg|_{\substack{x_3=\gamma_k(x')\\ \xi_3=\gamma_k(\xi')}}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+\ldots, \tag{3.11}$$

где многоточие обозначает сумму несингулярных слагаемых.

Введем обозначения:

$$K_{ij}^{(k)}(x',\xi')==K_{ij}(x,\xi)\Bigg|_{\substack{x_3=\gamma_k(x')\\ \xi_3=\gamma_k(\xi')}},\ k=1,2. \tag{3.12}$$

Рассмотрим $|x-\xi|^2\Bigg|_{\substack{x_3=\gamma_k(x')\\ \xi_3=\gamma_k(\xi')}}$, k=1,2 :

$$|x-\xi|^2\Bigg|_{\substack{x_3=\gamma_k(x')\\ \xi_3=\gamma_k(\xi')}}=|x'-\xi'|^2+(\gamma_k(x')-\gamma_k(\xi'))^2=|x'-\xi'|^2\left[1+\sum_{m=1}^{2}\left(\frac{\partial\gamma_k(x')}{\partial x_m}\right)^2\cos^2(x'-\xi',x_m)+\right.$$

$$\left.+2\frac{\partial\gamma_k(x')}{\partial x_1}\frac{\partial\gamma_k(x')}{\partial x_2}\cos(x'-\xi',x_1)\cos(x'-\xi',x_2)+O(|x'-\xi'|)\right]. \tag{3.13}$$

Введем обозначение

$$P_k(x',\xi')=1+\sum_{m=1}^{2}\left(\frac{\partial\gamma_k(x')}{\partial x_m}\right)^2\cos^2(x'-\xi',x_m)+$$

$$+2\frac{\partial\gamma_k(x')}{\partial x_1}\frac{\partial\gamma_k(x')}{\partial x_2}\cos(x'-\xi',x_1)\cos(x'-\xi',x_2)+O(|x'-\xi'|),$$

откуда можем переписать (3.13) следующим образом:

$$|x-\xi|^2\Bigg|_{\substack{x_3=\gamma_k(x')\\ \xi_3=\gamma_k(\xi')}}=|x'-\xi'|^2\,P_k(x',\xi'). \tag{3.14}$$

Замечание. Заметим, что для $\xi'=x'$ имеем

$$P_k(x',x')=1+\left(\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_2}\right)^2+2\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_1}\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_2}\neq 0\ ,\ k=1,2\,.$$

При помощи обозначений (3.12), (3.14) перепишем необходимые условия (3.11) следующим образом (k=1, 2):

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi_i}\Big|_{\xi_3=\gamma_k(\xi')}=(-1)^k\int_S \frac{\partial u(x)}{\partial x_m}\Bigg|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{1}{4\pi|x'-\xi'|^2}\frac{K_{im}^{(k)}(x',\xi')}{P_k(x',\xi')}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+$$

$$+(-1)^k\int_S \frac{\partial u(x)}{\partial x_l}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{1}{4\pi|x'-\xi|'^2}\frac{K_{il}^{(k)}(x',\xi')}{P_k(x',\xi')}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+\ldots, \tag{3.15}$$

где $i=1,2,3,$ а числа i,l,m образуют перестановку чисел 1,2,3.

Таким образом, нами доказана

Теорема 3.2. *Пусть выполняются условия теоремы 3.1. Тогда необходимые условия (3.15) являются сингулярными.*

Чтобы выделить сингулярные члены в подынтегральных выражениях необходимых условий (3.15), сначала разложим все коэффициенты при производных по формуле Тейлора в точке $\xi' = x'$:

$$\frac{K_{ij}^{(k)}(x',\xi')}{P_k(x',\xi')} = \frac{K_{ij}^{(k)}(x',x')}{P_k(x',x')} + \sum_{p=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_p}\left(\frac{K_{ij}^{(k)}(x',x')}{P_k(x',x')} \right)(x_p - \xi_p) + \ldots \ .$$

Подставляя полученную формулу Тейлора для $\dfrac{K_{ij}^{(k)}(x',\xi')}{P_k(x',\xi')}$ в необходимые условия (3.15) и учитывая, что члены $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{K_{im}^{(k)}(x',x')}{P_k(x',x')} \right) \dfrac{(x_j - \xi_j)}{4\pi |x' - \xi'|^2}, j = 1,2$, имеют слабую особенность, выделим только сингулярные члены. Тогда необходимые условия (3.15) примут окончательный вид для регуляризации:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi_i}\Big|_{\xi_3 = \gamma_k(\xi')} = (-1)^k \int_S \frac{1}{4\pi |x' - \xi'|^2} \times$$

$$\times \left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_m}\Big|_{x_3 = \gamma_k(x')} \frac{K_{im}^{(k)}(x',x')}{P_k(x',x')} + \frac{\partial u(x)}{\partial x_l}\Big|_{x_3 = \gamma_k(x')} \frac{K_{il}^{(k)}(x',x')}{P_k(x',x')} \right] \times$$

$$\times \frac{dx'}{\cos(\nu_x, x_3)} + \ldots, \ i = 1,2,3; \ k = 1,2, \tag{3.16}$$

где многоточие обозначает члены со слабой сингулярностью, а числа i, m, l образуют перестановку чисел 1, 2, 3.

4. Регуляризация необходимых условий

Вернемся к первому необходимому условию (3.5) и раскроем каждый поверхностный интеграл по верхней и нижней полуповерхностям $\Gamma_k = \{\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) : \xi_3 = \gamma_k(\xi')\}$, $\xi' = (\xi_1, \xi_2) \in S = pr_{\xi_3 = 0}\Gamma_k$, $k = 1,2$:

$$\frac{1}{2}u(\xi)\Big|_{\xi_3 = \gamma_k(\xi')} = -\sum_{i=1}^{2} (-1)^i \frac{1}{4\pi} \int_S u(x)\Big|_{x_3 = \gamma_i(x')} \frac{\cos(x - \xi, \nu_x)}{|x - \xi|^2}\Bigg|_{\substack{\xi_3 = \gamma_k(\xi') \\ x_3 = \gamma_i(x')}} \frac{dx'}{\cos(\nu_x, x_3)} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} (-1)^i \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{|x - \xi|} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_x}\Bigg|_{\substack{\xi_3 = \gamma_k(\xi') \\ x_3 = \gamma_i(x')}} \frac{dx'}{\cos(\nu_x, x_3)}, \quad \xi \in \Gamma_k. \tag{4.1}$$

Очевидно, когда $k \neq i$ в (4.1), соответствующий интеграл не является сингулярным. Когда $k = i$ в первой сумме в (4.1), тогда соответствующий интеграл имеет устранимую особенность при $x \to \xi$ и во второй сумме из (4.1) соответствующий интеграл имеет слабую особенность, так как порядок сингулярности меньше порядка кратности интеграла. Поэтому, обозначая несингулярные члены многоточием в (4.1) и учитывая (3.14), получаем первое необходимое условие в виде (для $k=1,2$)

$$\frac{1}{2}u(\xi)\Big|_{\xi_3=\gamma_k(\xi')} = (-1)^{k-1}\frac{1}{4\pi}\int_S u(x)\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{\cos(x-\xi,\nu_x)\Big|_{\substack{\xi_3=\gamma_k(\xi')\\ x_3=\gamma_k(x')}}}{P_k(x',\xi')|x'-\xi'|^2}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+$$

$$+(-1)^k\frac{1}{4\pi}\int_S\frac{1}{P_k(x',\xi')|x'-\xi'|}\frac{\partial u(x)}{\partial\nu_x}\Big|_{\substack{\xi_3=\gamma_k(\xi')\\ x_3=\gamma_k(x')}}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+\dots. \tag{4.2}$$

Теперь построим линейную комбинацию необходимых условий (3.16) ($i=1,2,3$; $k=1,2$):

$$\sum_{j=1}^{2}\beta_{j3}^{(k)}\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_3}\Big|_{\xi_3=\gamma_j(\xi')}+\sum_{j=1}^{2}\left[\beta_{j1}^{(k)}(\xi')\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_1}\Big|_{\xi_3=\gamma_j(\xi')}+\beta_{j2}^{(k)}(\xi')\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_2}\Big|_{\xi_3=\gamma_j(\xi')}\right]=$$

$$=\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\beta_{j3}^{(k)}(\xi')\int_S\frac{1}{2\pi|x'-\xi'|^2}\left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\Big|_{x_3=\gamma_j(x')}\frac{K_{31}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\Big|_{x_3=\gamma_j(x')}\frac{K_{32}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}\right]\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+\dots+$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\beta_{j1}^{(k)}(\xi')(-1)^j\left(\int_S\frac{1}{2\pi|x'-\xi'|^2}\left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\Big|_{x_3=\gamma_j(x')}\frac{K_{12}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_j(x')}\frac{K_{13}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}\right]\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}\right)+\dots+$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\beta_{j2}^{(k)}(\xi')(-1)^j\left(\int_S\frac{1}{2\pi|x'-\xi'|^2}\left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\Big|_{x_3=\gamma_j(x')}\frac{K_{21}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_j(x')}\frac{K_{23}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}\right]\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}\right)+\dots. \tag{4.3}$$

Полагая, что функции $\beta_{ji}^{(k)}(\xi')$ удовлетворяют условию Гельдера, и вычитая и прибавляя $\beta_{ji}^{(k)}(x')$ из $\beta_{ji}^{(k)}(\xi')$, получаем слабые сингулярности в интегралах с выражениями $\dfrac{\beta_{ji}^{(k)}(\xi')-\beta_{ji}^{(k)}(x')}{2\pi|x'-\xi'|^2}$. Отбрасывая члены со слабыми сингулярностями и группируя подобные слагаемые, получаем из (4.3) следующее:

$$\sum_{j=1}^{2}\beta_{j3}^{(k)}\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_3}\Big|_{\xi_3=\gamma_j(\xi')}+\sum_{j=1}^{2}\left[\beta_{j1}^{(k)}(\xi')\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_1}\Big|_{\xi_3=\gamma_j(\xi')}+\beta_{j2}^{(k)}(\xi')\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_2}\Big|_{\xi_3=\gamma_j(\xi')}\right]=$$

$$=\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\int_S\frac{1}{2\pi|x'-\xi'|^2\cos(\nu_x,x_3)}\left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\Big|_{x_3=\gamma_j(x')}\left(\beta_{j3}^{(k)}(x')\frac{K_{31}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}+\beta_{j2}^{(k)}(x')\frac{K_{21}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}\right)+\right.$$

$$+\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\Big|_{x_3=\gamma_j(x')}\left(\beta_{j3}^{(k)}(x')\frac{K_{32}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}+\beta_{j1}^{(k)}(x')\frac{K_{12}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}\right)+$$

$$\left.+\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_j(x')}\left(\beta_{j1}^{(k)}(x')\frac{K_{13}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}+\beta_{j2}^{(k)}(x')\frac{K_{23}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}\right)\right]dx'+\ldots=$$

$$=\int_S\frac{1}{2\pi|x'-\xi'|^2\cos(\nu_x,x_3)}\times$$

$$\times\left[\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\Big|_{x_3=\gamma_j(x')}\left(\beta_{j3}^{(k)}(x')\frac{K_{31}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}+\beta_{j2}^{(k)}(x')\frac{K_{21}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}\right)+\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\Big|_{x_3=\gamma_j(x')}\left(\beta_{j3}^{(k)}(x')\frac{K_{32}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}+\beta_{j1}^{(k)}(x')\frac{K_{12}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}\right)+$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_j(x')}\left(\beta_{j1}^{(k)}(x')\frac{K_{13}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}+\beta_{j2}^{(k)}(x')\frac{K_{23}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}\right)\right]dx'+\ldots\,. \quad (4.4)$$

Если мы будем использовать граничные условия (2.2) и приравняем коэффициенты при частных производных $\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\Big|_{x_3=\gamma_j(x')}$ в подынтегральном выражении из (4.4) соответствующим коэффициентам в (2.2), то получим 2 системы, каждая из 6 уравнений и с 6 неизвестными ($\beta_{ji}^{(k)}(x'),\ i=1,2,3;\ j=1,2$), $k=1,2$:

$$(-1)^j\left(\beta_{j3}^{(k)}(x')\frac{K_{31}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}+\beta_{j2}^{(k)}(x')\frac{K_{21}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}\right)=\alpha_{j1}^{(k)}(x'),$$

$$(-1)^j\left(\beta_{j3}^{(k)}(x')\frac{K_{32}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}+\beta_{j1}^{(k)}(x')\frac{K_{12}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}\right)==\alpha_{j2}^{(k)}(x'),$$

$$(-1)^j\left(\beta_{j3}^{(k)}(x')\frac{K_{32}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}+\beta_{j1}^{(k)}(x')\frac{K_{12}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}\right)=\delta_{jk},\ k=1,2. \quad (4.5)$$

Положим, что неоднородная система (4.5) имеет единственное решение $\beta_{11}^{(k)}(x')$, $\beta_{12}^{(k)}(x')$, $\beta_{13}^{(k)}(x')$, $\beta_{21}^{(k)}(x'),\beta_{22}^{(k)}(x'),\beta_{23}^{(k)}(x')$ для каждого *k*=1,2. Тогда, подставляя граничные условия (2.2) в (4.4), получаем

$$\sum_{j=1}^{2}\beta_{j3}^{(k)}\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_3}\Big|_{\xi_3=\gamma_j(\xi')}+\sum_{j=1}^{2}\left[\beta_{j1}^{(k)}(\xi')\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1}\Big|_{\xi_3=\gamma_j(\xi')}+\beta_{j2}^{(k)}(\xi')\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2}\Big|_{\xi_3=\gamma_j(\xi')}\right]=$$

$$=-\int_S\frac{\lambda u(x',\gamma_k(x'))}{2\pi|x'-\xi'|^2}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+\ldots\,. \quad (4.6)$$

Подставляя первое необходимое условие (4.2) в (4.6) и изменяя порядок интегрирования, получаем **два регулярных соотношения** для $k=1,2$:

$$\sum_{j=1}^{2}\beta_{j3}^{(k)}\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_3}\Big|_{\xi_3=\gamma_j(\xi')}+\sum_{j=1}^{2}\left[\beta_{j1}^{(k)}(\xi')\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_1}\Big|_{\xi_3=\gamma_j(\xi')}+\beta_{j2}^{(k)}(\xi')\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_2}\Big|_{\xi_3=\gamma_j(\xi')}\right]=$$

$$=\lambda\int_S\frac{u(\eta',\gamma_k(\eta'))d\eta'}{2\pi\cos(\nu_\eta,\eta_3)}\int_S\frac{1}{2\pi|\eta'-x'|^2|x'-\xi'|^2}\frac{\cos(\eta-x,\nu_\eta)\Big|_{\substack{x_3=\gamma_k(x')\\ \eta_3=\gamma_k(\eta')}}}{P_k(\eta',x')}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}-$$

$$-\lambda\int_S\sum_{j=1}^{3}\left[\frac{\partial u(\eta)}{\partial\eta_j}\cos(\nu_\eta,\eta_j)\right]\Big|_{\eta_3=\gamma_k(\eta')}\frac{d\eta'}{\cos(\nu_\eta,\eta_3)}\times$$

$$\times\int_S\frac{1}{2\pi P_k(\eta',x')|x'-\xi'|^2|\eta'-x'|}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+\ldots.\tag{4.7}$$

Внутренние интегралы в правой части (4.7) являются сингулярными, но они не содержат неизвестной функции $u(\xi)=u(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ и сходятся в смысле Коши. Поэтому регуляризируем соотношения (4.7) и таким образом устанавливаем следующую теорему.

Теорема 4.1. *Если система (4.5) имеет единственное решение* $\beta_{11}^{(k)}(x'),\beta_{12}^{(k)}(x'),\beta_{13}^{(k)}(x')$, $\beta_{21}^{(k)}(x'),\beta_{22}^{(k)}(x'),\beta_{23}^{(k)}(x')$ *для каждого k = 1, 2 и функции* $\beta_{ji}^{(k)}(\xi')$ *удовлетворяют свойству Гельдера, то соотношения (4.7) являются регулярными.*

5. Фредгольмовость задачи

Из курса математического анализа известны формулы

$$\frac{\partial u(x',\gamma_k(x'))}{\partial x_j}=\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}+\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{\partial\gamma_k(x')}{\partial x_j},\quad j=1,2;\ k=1,2;\ x'\in S,$$

откуда имеем

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}=\frac{\partial u(x',\gamma_k(x'))}{\partial x_j}-\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{\partial\gamma_k(x')}{\partial x_j}.\tag{5.1}$$

$$j=1,2;\ k=1,2;\ x'\in S.$$

Подставим соотношения из (5.1) в левые части (4.7):

$$\sum_{j=1}^{2}\beta_{j3}^{(k)}\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_3}\Big|_{\xi_3=\gamma_j(\xi')}+\sum_{j=1}^{2}\left[\beta_{j1}^{(k)}(\xi')\left(\frac{\partial u(\xi',\gamma_j(\xi'))}{\partial\xi_1}-\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_3}\Big|_{\xi_3=\gamma_j(\xi')}\frac{\partial\gamma_j(\xi')}{\partial\xi_1}\right)+\right.$$

$$\left.+\beta_{j2}^{(k)}(\xi')\left(\frac{\partial u(\xi',\gamma_j(\xi'))}{\partial\xi_2}-\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_3}\Big|_{\xi_3=\gamma_j(\xi')}\frac{\partial\gamma_j(\xi')}{\partial\xi_2}\right)\right]=$$

$$=\lambda\int_S\frac{u(\eta',\gamma_k(\eta'))d\eta'}{2\pi\cos(\nu_\eta,\eta_3)}\int_S\frac{1}{2\pi|\eta'-x'|^2|x'-\xi'|^2}\frac{\cos(\eta-x,\nu_\eta)\Big|_{\substack{x_3=\gamma_k(x')\\ \eta_3=\gamma_k(\eta')}}}{P_k(\eta',x')}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}-$$

$$-\lambda\int_S\left[\frac{\partial u(\eta)}{\partial\eta_3}+\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{\partial u(\eta',\gamma_k(\eta'))}{\partial\eta_j}-\frac{\partial u(\eta)}{\partial\eta_3}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{\partial\gamma_k(\eta')}{\partial\eta_j}\right)\right]\cos(\nu_\eta,\eta_3)\Big|_{\eta_3=\gamma_k(\eta')}\times$$

$$\times\frac{d\eta'}{\cos(\nu_\eta,\eta_3)}\int_S\frac{1}{2\pi P_k(\eta',x')|x'-\xi'|^2|\eta'-x'|}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+\ldots\ . \tag{5.2}$$

После группировки в (5.2), получим следующую систему интегродифференциальных уравнений по отношению к неизвестным $\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_3}\Big|_{\xi_3=\gamma_j(\xi')}$, $j=1,2$:

$$A_{k1}(\xi')\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_3}\Big|_{\xi_3=\gamma_1(\xi')}+A_{k2}(\xi')\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_3}\Big|_{\xi_3=\gamma_2(\xi')}=F_k(\xi'),\ k=1,2, \tag{5.3}$$

где
$$A_{kj}(\xi')=\left(\beta_{j3}^{(k)}(\xi')-\beta_{j1}^{(k)}(\xi')\frac{\partial\gamma_j(\xi')}{\partial\xi_1}-\beta_{j2}^{(k)}(\xi')\frac{\partial\gamma_j(\xi')}{\partial\xi_2}\right), \tag{5.4}$$

$$F_k(\xi')=-\sum_{j=1}^{2}\left(\beta_{j1}^{(k)}(\xi')\frac{\partial u(\xi',\gamma_j(\xi'))}{\partial\xi_1}+\beta_{j2}^{(k)}(\xi')\frac{\partial u(\xi',\gamma_j(\xi'))}{\partial\xi_2}\right)+$$

$$+(-1)^k\lambda\int_S\frac{u(\eta',\gamma_k(\eta'))d\eta'}{2\pi\cos(\nu_\eta,\eta_3)}\int_S\frac{1}{2\pi|\eta'-x'|^2|x'-\xi'|^2}\frac{\cos(\eta-x,\nu_\eta)\Big|_{\substack{x_3=\gamma_k(x')\\ \eta_3=\gamma_k(\eta')}}}{P_k(\eta',x')}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}-$$

$$-\lambda\int_S\left[\frac{\partial u(\eta)}{\partial\eta_3}+\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{\partial u(\eta',\gamma_k(\eta'))}{\partial\eta_j}-\frac{\partial u(\eta)}{\partial\eta_3}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{\partial\gamma_k(\eta')}{\partial\eta_j}\right)\right]\cos(\nu_\eta,\eta_3)\Big|_{\eta_3=\gamma_k(\eta')}\times$$

$$\times\frac{d\eta'}{\cos(\nu_\eta,\eta_3)}\int_S\frac{1}{2\pi P_k(\eta',x')|x'-\xi'|^2|\eta'-x'|}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+\ldots\ .$$

$$F_k=F_k\left(u\big|_{\Gamma_1},u\big|_{\Gamma_2},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_1},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_2},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_1},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_2},\frac{\partial u}{\partial x_3}\Big|_{\Gamma_1},\frac{\partial u}{\partial x_3}\Big|_{\Gamma_2}\right), \tag{5.5}$$

т.е. правые части (5.5) системы (5.3) – функции восьми неизвестных: граничных значений неизвестной функции $u(x',\gamma_k(x'))=u\big|_{\Gamma_k}$, $k=1,2$, их производных $\frac{\partial u\big|_{\Gamma_k}}{\partial x_j}$ (k,j=1,2) и граничных значений производной $\frac{\partial u}{\partial x_3}\Big|_{\Gamma_k}$,$k=1,2$.

Итак, из регуляризированных необходимых условий (4.7) получили систему (5.3) интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода относительно $\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_3}\Big|_{\xi_3=\gamma_j(\xi')}$, $j=1,2$.

Теперь оставим систему (5.3) на время и рассмотрим граничные условия (2.2). Подставим выражения (5.1) для $\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}$ и $\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}$ в (2.2), $k=1,\ 2$, откуда получим систему по отношению к двум неизвестным $\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_1(x')}$ и $\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_2(x')}$:

$$\left(-\sum_{j=1}^{3}\alpha_{j1}^{(2)}(x')\frac{\partial\gamma_1(x')}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_1(x')}+\left(1-\sum_{j=1}^{3}\alpha_{j2}^{(2)}(x')\frac{\partial\gamma_2(x')}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_2(x')}=$$

$$=\lambda u(x',\gamma_2(x'))-\sum_{j=1}^{3}\left(\alpha_{j1}^{(2)}(x')\frac{\partial u(x',\gamma_1(x'))}{\partial x_j}+\alpha_{j2}^{(2)}(x')\frac{\partial u(x',\gamma_2(x'))}{\partial x_j}\right). \tag{5.6}$$

Введем обозначения при $i,k=1,2$:

$$C_{ik}(x')=\left(0.5[1-(-1)^k]-\sum_{j=1}^{3}\alpha_{ji}^{(k)}(x')\frac{\partial\gamma_i(x')}{\partial x_j}\right),$$

$$B_i(x')=\lambda u(x',\gamma_i(x'))-\sum_{j=1}^{2}\left[\alpha_{ij}^{(1)}(x')\frac{\partial u(x',\gamma_1(x'))}{\partial x_j}+\alpha_{ij}^{(2)}(x')\frac{\partial u(x',\gamma_2(x'))}{\partial x_j}\right].$$

Тогда система (5.6) будет переписана в виде

$$C_{i1}(x')\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_1(x')}+C_{i2}(x')\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_2(x')}=B_i(x'),\ i=1,2. \tag{5.7}$$

Потребуем, чтобы определитель неоднородной линейной системы (5.7) удовлетворял условию

$$\Delta(x')=\begin{vmatrix}C_{11}(x') & C_{12}(x')\\ C_{21}(x') & C_{22}(x')\end{vmatrix}\neq 0. \tag{5.8}$$

Если коэффициенты $\alpha_{ij}^{(k)}(x'), i,j,k=1,2$, и граничные уравнения $\gamma_1(x')$ и $\gamma_2(x')$ удовлетворяют условию (5.8), то по формуле Крамера имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_1(x')}&=\frac{1}{\Delta(x')}\begin{vmatrix}B_1(x') & C_{12}(x')\\ B_2(x') & C_{22}(x')\end{vmatrix},\\ \frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_2(x')}&=\frac{1}{\Delta(x')}\begin{vmatrix}C_{11}(x') & B_1(x')\\ C_{21}(x') & B_2(x')\end{vmatrix}.\end{aligned} \tag{5.9}$$

Так как определитель $\Delta(x')$ не зависит от неизвестной $u(x)$ и ее производных, то решение (5.9) линейной системы (5.7) имеет вид линейного функционала

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}=\Phi_k\left(u\big|_{\Gamma_1},u\big|_{\Gamma_2},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_1},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_2},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_1},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_2}\right),\ k=1,2. \tag{5.10}$$

Теперь подставим выражения (5.10) для $\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}$, $k=1,2$, в систему (5.3):

$$\sum_{i=1}^{2}A_{kj}\Phi_j\left(u\big|_{\Gamma_1},u\big|_{\Gamma_2},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_1},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_2},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_1},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_2}\right)=$$

$$=F_k\left(u\big|_{\Gamma_1},u\big|_{\Gamma_2},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_1},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_2},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_1},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_2},\Phi_1,\Phi_2\right),\ k=1,2. \tag{5.11}$$

Учитывая, что $\Phi_k = \Phi_k(u\big|_{\Gamma_1}, u\big|_{\Gamma_2}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_1}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_2}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_1}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_2}), k = 1,2$, в правой части (5.11) получим новые линейные функционалы Ω_k, $k = 1, 2$, только граничных значений неизвестной $u(x)$ и производных граничных значений $\frac{\partial u(x', \gamma_k(x'))}{\partial x_i}$ $(k, i = 1,2)$:

$$F_k(u\big|_{\Gamma_1}, u\big|_{\Gamma_2}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_1}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_2}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_1}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_2}, \Phi_1, \Phi_2) =$$
$$= \Omega_k(u\big|_{\Gamma_1}, u\big|_{\Gamma_2}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_1}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_2}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_1}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_2}),$$

откуда и из (5.11) имеем систему:

$$\sum_{i=1}^{2} A_{kj} \Phi_j(u\big|_{\Gamma_1}, u\big|_{\Gamma_2}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_1}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_2}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_1}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_2}) =$$
$$= \Omega_k(u\big|_{\Gamma_1}, u\big|_{\Gamma_2}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_1}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_2}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_1}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_2}), \ k = 1,2. \tag{5.12}$$

Так как функционалы Φ_k, Ψ_k, $k = 1,2,$ линейны по отношению к неизвестным $u\big|_{\Gamma_1}$, $u\big|_{\Gamma_2}$, $\frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial \xi_j}$, $\frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial \xi_j}$, $j = 1,2$:

$$\Phi_k(u\big|_{\Gamma_1}, u\big|_{\Gamma_2}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial \xi_1}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial \xi_1}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial \xi_2}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial \xi_2}) = \sum_{i=1}^{2} a_i^{(k)}(\xi')u\big|_{\Gamma_i} + \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}^{(k)}(\xi')\frac{\partial u\big|_{\Gamma_i}}{\partial \xi_j} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{2} \int_S c_i^{(k)}(\zeta')u\big|_{\Gamma_i} d\zeta + \sum_{i,j=1}^{2} \int_S d_{ij}^{(k)}(\zeta')\frac{\partial u\big|_{\Gamma_i}}{\partial \zeta_j} d\zeta + \varphi_k(\xi'), \ k = 1,2, \tag{5.13}$$

$$\Psi_k(u\big|_{\Gamma_1}, u\big|_{\Gamma_2}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial \xi_1}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial \xi_1}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial \xi_2}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial \xi_2}) = \sum_{i=1}^{2} a_i^{(l)}(\xi')u\big|_{\Gamma_i} + \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}^{(l)}(\xi')\frac{\partial u\big|_{\Gamma_i}}{\partial \xi_j} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{2} \int_S c_i^{(l)}(\zeta')u\big|_{\Gamma_i} d\zeta + \sum_{i,j=1}^{2} \int_S d_{ij}^{(l)}(\zeta')\frac{\partial u\big|_{\Gamma_i}}{\partial \zeta_j} d\zeta + \varphi_l(\xi'), \ l = 3,4; \ k = 1,2, \tag{5.14}$$

то, учитывая (5.13) и ((5.14) в (5.12), получаем систему линейных интегро-дифференциальных уравнений по отношению к неизвестным $u(\xi', \gamma_k(\xi'))$, $k = 1,2$, в двумерной области S:

$$\sum_{i=1}^{2} A_i^{(k)}(\xi')u\big|_{\Gamma_i} + \sum_{i,j=1}^{2} B_{ij}^{(k)}(\xi')\frac{\partial u\big|_{\Gamma_i}}{\partial \xi_j} + \sum_{i=1}^{2} \int_S C_i^{(k)}(\zeta')u\big|_{\Gamma_i} d\zeta +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{2} \int_S D_{ij}^{(k)}(\zeta')\frac{\partial u\big|_{\Gamma_i}}{\partial \zeta_j} d\zeta + g_k(\xi') = 0, \ \ k = 1,2, \tag{5.15}$$

где $$A_i^{(k)}(\xi')=a_i^{(k)}(\xi')-a_i^{(k+2)}(\xi'),\quad B_{ij}^{(k)}(\xi')=b_{ij}^{(k)}(\xi')-b_{ij}^{(k+2)}(\xi'),$$

$$C_i^{(k)}(\zeta')=c_i^{(k)}(\zeta')-c_i^{(k+2)}(\zeta'),\ D_{ij}^{(k)}(\zeta')=d_{ij}^{(k)}(\zeta')-d_{ij}^{(k+2)}(\zeta'),$$

$$g_k(\xi')=\varphi_k(\xi')-\varphi_{k+2}(\xi'),\ k=1,\,2,$$

которую при помощи граничного условия Дирихле (2.3) на границе $L=\overline{\Gamma}_1\cap\overline{\Gamma}_2$ легко можно свести к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода с регулярным ядром. В силу одномерности этой границы это условие Дирихле не ограничивает общности, так как его размерность на две единицы меньше размерности области D.

Таким образом нами установлена

Теорема 5.1. *Если выполняются условия теоремы* 4.1 *и условие* (5.8) , *то граничная задача* (2.1) – (2.3) сводится к *двумерной системе линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно граничных значений* $u(\xi',\gamma_k(\xi'))$, $k=1,2$, *решения исходной задачи.*

Возвращаясь назад, вспомним, что из регуляризированных необходимых условий (4.7) получили систему (5.3) интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода относительно $\left.\dfrac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_3}\right|_{\xi_3=\gamma_j(\xi')}$, $j=1,2$. Учитывая также, что относительно граничных значений неизвестной функции также получена система (5.15) интегральных уравнений Фредгольма второго рода с регулярным ядром, приходим к следующему утверждению.

Теорема 5.2. *Если выполняются условия теоремы* 5.1, *то задача* (2.1) – (2.3) *является фредгольмовой в классе функций* $C^2(D)\bigcap C^1(\overline{D})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алиев Н.А.*, *Зейналов Р.М.* Фредгольмовость задачи Стеклова с условием Лаврентьева – Бицадзе для уравнения Коши – Римана // Вестник Педагогического университета, Баку. 2012. № 1. С. 16–19 (на азербайджанском).
2. *Алиев Н.А.*, *Зейналов Р.М.* Исследование решения задачи Стеклова для уравнения Коши – Римана с глобальными членами в краевых условиях // Труды Азербайджанской Национальной Академии наук, сер. физ.-тех. и мат. наук. 2010. Т. XXX. № 3. С. 75–79 (на азербайджанском).
3. *Алиев Н.А.*, *Зейналов Р.М.* Задача Стеклова для уравнения первого порядка эллиптического типа // Вестник Бакинского государственного университета, сер. физ.-мат. наук. 2012. № 2. С. 12–20 (на азербайджанском).
4. *Алиев Н.А.*, *Зейналов Р.М.* Задача Стеклова для уравнения Лапласа в одной неограниченной области // Труды Научной конференции «Современные проблемы математики, информатики и экономики», 24 ноября 2010. С. 199–202 (на азербайджанском).
5. *Алиев Н.А.*, *Зейналов Р.М.* Задача Заремба – Стеклова для уравнения Лапласа // Научная конференция «Актуальные проблемы математики и механики» для студентов, магистрантов и молодых исследователей Азербайджанской Республики, Баку, 30–31 мая 2012. С. 37–38 (на азербайджанском).
6. *Алиев Н.А.*, *Аббасова А.Х. и Зейналов Р.М.* Нелокальные граничные условия задачи Стеклова для уравнения Лапласа в ограниченной области // Прикладная математика и статистика. 2013. № 1. С. 1–6. DOI: 10.11648/j.sjams.20130101.11.
7. *Алиев Н.А.*, *Сулейманов Н.С.* Исследование решения краевых задач, содержащих параметр в граничном условии // Численные методы краевых задач: сб. трудов. Баку: Изд-во Азерб. гос. ун-та, 1989. С. 3–12.

8. *Алиев Н.А., Сулейманов Н.С.* Исследование решения задачи Стеклова в ограниченной простой области с общими линейными нелокальными граничными условиями. Баку, 1989. Депон. рук. № 1223Az, 30 с.
9. *Aliyev N.A. and Hosseini S.M.* A regularization of Fredholm type singular integral equations // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2001. V. 26. No. 2. P. 123–128.
10. *Aliyev N.A. and Hosseini S.M.* Multidimensional singular Fredholm integral equations in a finite domain and their regularization // Southeast Asian Bulletin Mathematics. 2003. V. 27. No. 3. P. 395–408.
11. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Мир, 1981. – 512 с.

Статья поступила 15.03.2016 г.

Mustafayeva Y.Y., Aliyev N.A. ON A METHOD OF INVESTIGATING THE STEKLOV PROBLEM FOR THE 3-DIMENSIONAL LAPLACE EQUATION WITH NON-LOCAL BOUNDARY-VALUE CONDITIONS *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 6(44). pp. 19–33

DOI 10.17223/19988621/44/2

The three-dimensional Laplace equation is considered in a domain $D \subset R^3$, convex in the direction Ox_3:

$$Lu = \Delta u(x) = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_3^2} = 0, \quad (1)$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in D,$$

with a parameter λ under nonlocal homogeneous boundary conditions:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')} + \sum_{j=1}^{2}\left[\alpha_{j1}^{(k)}(x')\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} + \alpha_{j2}^{(k)}(x')\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\right]\Big|_{x_3=\gamma_j(x')} =$$

$$= \lambda u(x', \gamma_k(x')), \quad x' \in S,\ k = 1, 2, \quad (2)$$

$$u(x) = f_0(x), \quad x \in L = \overline{\Gamma}_1 \cap \overline{\Gamma}_2 = \partial S . \quad (3)$$

where Γ_1 and Γ_2 are the lower and upper half surfaces of the boundary Γ, respectively; the equations of half surfaces Γ_1 and Γ_2 $\gamma_k(\xi'), k = 1, 2$, are twice differentiable with respect to both the variables ξ_1, ξ_2; S is the projection of the domain D on the plane $Ox_1x_2 = Ox'$; the coefficients $\alpha_{jk}^{(i)}(x') \in C(S)$, $i, j, k = 1, 2$, satisfy Hölder's condition in *S*; the boundary $\Gamma = \partial D$ is a Lyapunov surface, $\lambda \in C$ is a complex-valued parameter; and L is the equator connecting the half-surfaces Γ_1 and Γ_2: $L = \overline{\Gamma}_1 \cap \overline{\Gamma}_2$.

The presented work is devoted to the study and proof of the Fredholm property for the solution of the Steklov boundary value problem for the three-dimensional Laplace equation in a bounded domain with non-local boundary conditions where the spectral parameter appears only in the boundary condition. The applied method is new and relies on necessary conditions derived from basic relations. These relations are obtained from the second Green's formula and from an analogue of this formula. The proposed scheme was applied to a variety of problems for partial differential equations in the two-dimensional case. However, the singularities entering the necessary conditions for three-dimensional problems are multi-dimensional; for this reason, their regularization is a difficulty which is overcome by using the proposed method.

Keywords: Steklov problem, spectral problem, three-dimensional Laplace equation, nonlocal boundary conditions, necessary conditions, singularity, regularization, Fredholm property.

MUSTAFAYEVA Yelena Y. (Candidate of Physics and Mathematics, Baku State University, Baku, Azerbaijan)
E-mail: helenmust@rambler.ru

ALIEV Nehan Ali. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor of Informational Technologies Institute of Baku State University, Baku, Azerbaijan)
E-mail: nihan@aliev.info

REFERENCES

1. Aliyev N.A., Zeynalov R.M. (2012) Fredholm property of the Steklov problem for the Cauchy–Rienman equation with the Lavrentyev–Bitsadze condition. *News of Pedagogical University*, *Baku*. 1. pp. 16–19 (in Azeri).
2. Aliyev N.A., Zeynalov R.M. (2010) Investigation of the Solution of the Steklov Problem for the Cauchy–Riemann Equation under the Boundary Condition Containing s Global Term. *Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan. Series of Physical-Technical and Mathematical sciences: Informatics and Control Problems*. XXX(3). pp. 75–80 (in Azeri).
3. Aliyev N.A., Zeynalov R.M. (2012) The Steklov problem for the first order elliptic type equation. *News of Baku State University*, *ser. of phys.-math*. 2. pp. 12–20 (in Azeri).
4. Aliyev N.A., Zeynalov R.M. (2010) Steklov problem for the Laplace equation in an unbounded domain. *Proceedings of Scientific Conference "Contemporary problems of mathematics*, *informatics*, *and economics"*. pp. 199–202 (in Azeri).
5. Aliyev N.A., Zeynalov R.M. (2012) The Zaremba–Steklov problem for the Laplace equation. *Proceedings of Scientific Conference on Actual Problems of Mathematics and Mechanics*, Baku, Azerbaijan. pp. 37–38 (in Azeri).
6. Aliev Nehan Ali, Abbasova Aygun Khanlar, Zeynalov Ramin M. (2013) Non-local boundary condition Steklov problem for a Laplace equation in bounded domain. *Science Journal of Applied Mathematics and Statistics*. 1(1). pp. 1–6. DOI: 10.11648/j.sjams. 20130101.11.
7. Aliyev N.A., Suleymanov N.S. **(**1989) Investigation of the solution of boundary value problems containing a parameter in the boundary condition. *Numerical methods for solving boundary value problems. Proceedings of Azerbaijan State University (ASU)*. pp. 3–12 (in Russian).
8. Aliyev N.A., Suleymanov N.S. **(**1989) Investigation of the solution of the Stecklov-type problem in a plane field with general linear non-local boundary conditions. Baku, *Deposited manuscript N 1223Az*, 30 p. (in Russian).
9. Aliyev N.A. and Hosseini S.M. (2001) A regularization of Fredholm type singular integral equations. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. 26(2). pp. 123–128.
10. Aliyev N.A. and Hosseini S.M. (2003) Multidimensional singular Fredholm integral equations in a finite domain and their regularization. *Southeast Asian Bulletin Mathematics*. 27(3). pp. 395–408.
11. Vladimirov V.S. (1981) *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow: Mir (in Russian).

УДК 512.543
DOI 10.17223/19988621/44/3

А.В. Розов, Е.В. Соколов

О НИЛЬПОТЕНТНОЙ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП С ЦЕНТРАЛЬНЫМИ ОБЪЕДИНЕННЫМИ ПОДГРУППАМИ

Пусть G – свободное произведение нильпотентных групп A и B с собственными центральными объединенными подгруппами H и K. Получены критерии аппроксимируемости группы G нильпотентными группами, а также конечными нильпотентными π-группами, где π – некоторое множество простых чисел.

Ключевые слова: *нильпотентная группа, обобщенное свободное произведение групп, аппроксимируемость нильпотентными группами, аппроксимируемость конечными нильпотентными группами.*

1. Введение

Пусть C – некоторый класс групп. Напомним, что группа X называется аппроксимируемой группами из класса C (или, короче, C-аппроксимируемой), если для каждого неединичного элемента x из X существует гомоморфизм группы X на группу из класса C, образ элемента x относительно которого отличен от единицы. Отметим, что если C – класс всех конечных групп, то понятие C-аппроксимируемой группы совпадает с классическим понятием финитно аппроксимируемой группы.

В данной статье рассматриваются свойства аппроксимируемости классом всех нильпотентных групп, а также классом всех конечных нильпотентных групп и некоторыми его подклассами. Первым существенным продвижением в их изучении следует, по-видимому, считать результат В. Магнуса о нильпотентной аппроксимируемости произвольной свободной группы [1]. Исследование аппроксимируемости нильпотентными группами свободных конструкций групп было начато А.И. Мальцевым [2], указавшим как необходимые, так и достаточные условия нильпотентной аппроксимируемости (обычного) свободного произведения нильпотентно аппроксимируемых групп. Полностью вопрос о нильпотентной аппроксимируемости данной конструкции был решен А. И. Лихтманом в [3]. Аппроксимируемость нильпотентными группами свободных произведений с объединенной подгруппой и HNN-расширений изучалась в работах [4–11], и этот перечень является, по-видимому, исчерпывающим. В [12] получен критерий нильпотентной аппроксимируемости фундаментальной группы произвольного графа конечных групп. Помимо этого имеется значительное число результатов об аппроксимируемости перечисленных свободных конструкций конечными p-группами (являющимися, как известно, нильпотентными), а также произвольными корневыми классами, к числу которых относится и класс всех конечных p-групп. Основой данных исследований служит работа К. Грюнберга [13], а ссылки на последние статьи в указанном направлении можно найти в обзоре [14]. Следует отметить, что в ряде случаев свойство аппроксимируемости конечными p-группами оказывается равносильным нильпотентной аппроксимируемости (см., напр., [5, 8, 9]). В целом, однако, можно утверждать, что аппроксимируемость нильпотентными группами свободных произведений с объединенной подгруппой и HNN-расширений изучена достаточно мало.

Перейдем теперь к описанию результатов, полученных в настоящей статье. Пусть A и B – произвольные группы, H и K – подгруппы групп A и B соответственно, φ – изоморфизм подгруппы H на подгруппу K. И пусть

$$G = (A * B;\, H = K,\, \varphi)$$

– свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ. Напомним, что группа G порождается всеми порождающими групп A и B и определяется всеми определяющими соотношениями этих групп, а также соотношениями вида $h\varphi = h$, где $h \in H$.

В случае, когда свободные множители A и B нильпотентны, а подгруппы H и K лежат в их центрах, имеет место следующий простой критерий нильпотентной аппроксимируемости группы G.

Теорема 1. *Пусть G – свободное произведение нильпотентных групп A и B с центральными объединенными подгруппами H и K, не совпадающими с группами A и B. Группа G аппроксимируема нильпотентными группами тогда и только тогда, когда аналогичным свойством обладает (обычное) свободное произведение групп A/H и B/K.*

Пусть далее π – некоторое множество простых чисел. Напомним, что элемент x группы X называется π-полным, если для любого целого положительного числа n, все простые делители которого принадлежат множеству π, существует такой элемент $y \in X$, что $y^n = x$. Напомним также, что конечная группа называется π-группой, если все простые делители ее порядка содержатся в π. В случае, когда множество π состоит из одного простого числа p, говорят о p-полных элементах и о конечных p-группах соответственно.

Как уже было отмечено выше, А. И. Мальцев указал как необходимые, так и достаточные условия нильпотентной аппроксимируемости свободного произведения нильпотентно аппроксимируемых групп. Если перемножаемые группы нильпотентны, эти условия образуют критерий, который выглядит следующим образом.

Предложение 1 [2, с. 362]. *Свободное произведение нильпотентных групп аппроксимируемо нильпотентными группами тогда и только тогда, когда ни один из свободных множителей не имеет кручения или для некоторого простого числа p ни один из свободных множителей не содержит p-полных элементов, отличных от 1.*

Поэтому теорема 1 допускает следующую равносильную формулировку.

Теорема 1′. *Пусть G – свободное произведение нильпотентных групп A и B с центральными объединенными подгруппами H и K, не совпадающими с группами A и B. Группа G аппроксимируема нильпотентными группами тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих утверждений:*

1) *группы A/H и B/K не имеют кручения,*

2) *для некоторого простого числа p группы A/H и B/K не содержат p-полных элементов, отличных от 1.*

Рассмотрим теперь вопрос об аппроксимируемости обобщенного свободного произведения G конечными нильпотентными π-группами, где π – непустое множество простых чисел (в частности, множество π может содержать все простые числа и тогда класс конечных нильпотентных π-групп совпадает с классом всех конечных нильпотентных групп). Здесь критерий удается получить при более слабых ограничениях на объединенные подгруппы, потребовав, чтобы одна из них была центральна, а другая нормальна в соответствующем свободном множителе.

Теорема 2. *Пусть G – свободное произведение нильпотентных групп A и B с объединенными подгруппами H и K, не совпадающими с группами A и B, подгруппа H центральна в группе A, подгруппа K нормальна в группе B. Группа G аппроксимируема конечными нильпотентными π-группами тогда и только тогда, когда она аппроксимируема конечными π-группами, а свободное произведение групп A/H и B/K – конечными нильпотентными π-группами.*

В отличие от случая аппроксимируемости произвольными нильпотентными группами, критерий аппроксимируемости (обычного) свободного произведения нильпотентных групп конечными нильпотентными π-группами в общем случае неизвестен, равно как и критерий аппроксимируемости конечными π-группами рассматриваемого обобщенного свободного произведения G. Однако указанные задачи удается решить при некоторых дополнительных ограничениях, накладываемых на свободные множители A и B.

Напомним, что группа X называется группой конечного ранга, если существует целое положительное число r такое, что любая конечно порожденная подгруппа группы X порождается не более чем r элементами. Ранее одним из авторов было доказано, что в случае, когда выполняются предпосылки теоремы 2, а группы A и B имеют конечный ранг, аппроксимируемость конечными π-группами группы G равносильна аппроксимируемости конечными π-группами групп A, B, A/H и B/K [15]. Известно также, что нильпотентная группа конечного ранга аппроксимируема конечными π-группами тогда и только тогда, когда она не содержит π-полных элементов, отличных от 1 [16]. Отсюда вытекает

Следствие 1. *Пусть G – свободное произведение нильпотентных групп A и B конечного ранга с объединенными подгруппами H и K, не совпадающими с группами A и B, подгруппа H центральна в группе A, подгруппа K нормальна в группе B. Группа G аппроксимируема конечными нильпотентными π-группами тогда и только тогда, когда группы A и B не содержат π-полных элементов, отличных от 1, а свободное произведение групп A/H и B/K аппроксимируемо конечными нильпотентными π-группами.*

При значительно более сильном ограничении – конечной порожденности групп A и B – получаем

Следствие 2. *Пусть G – свободное произведение конечно порожденных нильпотентных групп A и B с объединенными подгруппами H и K, не совпадающими с группами A и B, подгруппа H центральна в группе A, подгруппа K нормальна в группе B. Группа G аппроксимируема конечными нильпотентными π-группами тогда и только тогда, когда периодические части групп A и B являются π-группами, а периодические части групп A/H и B/K – p-группами для некоторого простого числа $p \in \pi$.*

В самом деле, легко видеть, что если отличный от 1 элемент x конечно порожденной нильпотентной группы X является π-полным, то он имеет конечный порядок q. Очевидно, что для каждого простого делителя p числа q элемент $x^{(q/p)}$ также отличен от 1 и является π-полным. Если $p \in \pi$ и n – порядок соответствующей числу p силовской подгруппы S_p периодической части группы X, то из равенства $y^n = x^{(q/p)}$ вытекает, что $y \in S_p$ и потому $y^n = 1$, что невозможно. Если же ни один элемент множества π не делит q, то для любого числа n, все простые делители которого содержатся в π, $(q, n) = 1$ и, следовательно, для некоторых целых чисел u и v справедливы соотношения $x = x^{uq+vn} = (x^v)^n$. Таким образом, в конечно порожденной нильпотентной группе отличный от 1 элемент является π-полным тогда и только тогда, когда он имеет конечный порядок, все простые делители которого не принадлежат множеству π.

Отсюда следует, что если свободное произведение групп A/H и B/K аппроксимируемо конечными π-группами, то периодические части групп A/H и B/K оказываются π-группами. Из нильпотентной же аппроксимируемости данного свободного произведения в силу приведенного выше критерия А. И. Мальцева вытекает, что группы A/H и B/K либо вообще не имеют кручения, либо их периодические части являются p-группами для некоторого простого числа p. Понятно, что в случае аппроксимируемости конечными нильпотентными π-группами перечисленные ограничения накладываются друг на друга и p оказывается принадлежащим π. Обратно, если периодические части групп A/H и B/K являются p-группами для некоторого простого числа $p \in \pi$, то их свободное произведение аппроксимируется конечными p-группами [13], а значит, и конечными нильпотентными π-группами. Таким образом, следствие 2 вытекает из следствия 1. Отметим также, что оно обобщает основной результат работы [7].

Доказательства теорем 1 и 2 приводятся в пункте 3. Нам понадобится также ряд вспомогательных утверждений, содержащихся в пункте 2.

2. Вспомогательные утверждения

Пусть G – свободное произведение групп A и B с объединенными относительно изоморфизма φ подгруппами H и K. Хорошо известно (см., напр., [17, теорема 4.3]), что тождественные отображения порождающих групп A и B в группу G продолжаемы до инъективных гомоморфизмов. Поэтому группы A и B можно считать подгруппами в G. Подгруппы H и K при этом оказываются совпадающими с $A \cap B$.

Легко видеть, что каждый элемент $g \in G$ может быть записан в виде произведения $g_0 g_1 \ldots g_n$, где $n \geq 0$ и для каждого $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $g_i \in A$ или $g_i \in B$, причем если $n \geq 1$, то $g_i \in A \setminus H$ или $g_i \in B \setminus K$. Указанная запись называется несократимой, а количество сомножителей в ней – длиной несократимой записи. Из теоремы о нормальной форме элемента свободного произведения с объединенной подгруппой (см., напр, [17, теорема 4.4]) следует, что если элемент $g \in G$ обладает несократимой записью длины большей 1, то он отличен от единицы.

Если нормальные подгруппы $R \leq A$ и $S \leq B$ таковы, что $(R \cap H)\varphi = S \cap K$, то, как легко видеть, отображение $\varphi_{R,S}$: $HR/R \to KS/S$, переводящее элемент hR ($h \in H$) в $(h\varphi)S$, корректно определено и является изоморфизмом подгрупп. Поэтому можно рассмотреть свободное произведение $G_{R,S}$ фактор-групп A/R и B/S с подгруппами HR/R и KS/S, объединенными относительно изоморфизма $\varphi_{R,S}$. Следующее утверждение хорошо известно (см., напр., [18]) и легко проверяется.

Предложение 2. *Пусть $G = (A * B;\ H = K,\ \varphi)$, R и S – нормальные подгруппы групп A и B соответственно, такие, что $(R \cap H)\varphi = S \cap K$. Тогда естественные гомоморфизмы $A \to A/R$ и $B \to B/S$ могут быть продолжены до гомоморфизма $\rho_{R,S}$ группы G на свободное произведение*

$$G_{R,S} = (A/R * B/S;\ HR/R = KS/S,\ \varphi_{R,S}).$$

Ядро этого гомоморфизма совпадает с нормальным замыканием в группе G множества $R \cup S$.

Заметим, что если подгруппа H нормальна в группе A, подгруппа K нормальна в группе B, $R = H$ и $S = K$, то группа $G_{R,S}$ представляет собой обычное свободное произведение фактор-групп $A/R = A/H$ и $B/S = B/K$. Ядро гомоморфизма $\rho_{R,S}$ при этом совпадает с H, и потому имеет место соотношение $G_{R,S} \cong G/H$.

Предложение 3. *Пусть G – свободное произведение групп A и B с нормальными абелевыми объединенными подгруппами H и K, не совпадающими с группами A и B, C – класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп и фактор-групп. Пусть также класс C вместе с каждой группой простого порядка p содержит и все конечные p-группы. Тогда из C-аппроксимируемости группы G следует, что (обычное) свободное произведение фактор-групп A/H и B/K также является C-аппроксимируемой группой.*

Доказательство. Напомним, что подгруппа Y некоторой группы X называется C-отделимой, если для каждого элемента x группы X, не принадлежащего Y, существует гомоморфизм σ группы X на группу из класса C, такой, что $x\sigma \notin Y\sigma$. Хорошо известно (см., напр., [19, предл. 3]) и легко проверяется, что в случае, когда класс C замкнут относительно взятия фактор-групп, а подгруппа Y нормальна в группе X, C-отделимость Y в X равносильна C-аппроксимируемости фактор-группы X/Y. Этот факт потребуется нам в дальнейшем.

Пусть группа G C-аппроксимируема. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $[A : H] = [B : K] = 2$.

Покажем сначала, что подгруппа H C-отделима в группе A.

Предположим, напротив, что H не является C-отделимой в A. Тогда найдется такой элемент $a \in A \setminus H$, что для любого гомоморфизма σ группы A на C-группу $a\sigma \in H\sigma$. Возьмем произвольный элемент $b \in B \setminus K$ и рассмотрим коммутатор x элементов a и $b^{-1}ab$:

$$x = [a, b^{-1}ab] = a^{-1}b^{-1}a^{-1}bab^{-1}ab.$$

Элемент x имеет в группе G несократимую запись длины 8 и поэтому отличен от 1. Поскольку G C-аппроксимируема, существует гомоморфизм ψ группы G на C-группу, такой, что $x\psi \neq 1$. Ввиду замкнутости класса C относительно взятия подгрупп ограничение гомоморфизма ψ на подгруппу A также оказывается гомоморфизмом этой подгруппы на группу из класса C. Из сделанного выше предположения заключаем, что $a\psi \in H\psi$, т. е. $a\psi = h\psi$ для некоторого элемента $h \in H$. Поскольку подгруппы H и K абелевы и нормальны в группах A и B соответственно, получаем

$$x\psi = [a, b^{-1}ab]\psi = [h, b^{-1}hb]\psi = 1\psi = 1.$$

Однако гомоморфизм ψ был выбран так, чтобы выполнялось соотношение $x\psi \neq 1$. Следовательно, подгруппа H C-отделима в группе A.

Ввиду замкнутости класса C относительно взятия фактор-групп C-отделимость подгруппы H равносильна C-аппроксимируемости фактор-группы A/H. Отсюда и из того, что A/H – простая группа, следует, что $A/H \in C$. Поэтому согласно условию предложения в класс C входит любая конечная 2-группа. Остается заметить, что в силу теоремы 4.1 из [13] свободное произведение конечных 2-групп A/H и B/K аппроксимируемо конечными 2-группами.

Случай 2. $[A : H] > 2$ или $[B : K] > 2$.

Без потери общности можно считать, что $[A : H] > 2$. Покажем, что подгруппа H C-отделима в группе G. Ввиду замкнутости класса C относительно взятия фактор-групп это будет означать, что фактор-группа G/H, изоморфная свободному произведению $A/H * B/K$, C-аппроксимируема.

Предположим противное: существует такой элемент $g \in G \backslash H$, что для любого гомоморфизма σ группы G на группу из класса C имеет место включение $g\sigma \in H\sigma$. Поскольку g не принадлежит подгруппе H, он имеет несократимую запись вида $g = g_0 g_1 \ldots g_n$, где $n \geq 0$ и для каждого $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $g_i \in A \backslash H$ или $g_i \in B \backslash K$. Рассмотрим четыре подслучая.

(i): $g_0, g_n \in A \backslash H$.

Зафиксируем произвольный элемент $b \in B \backslash K$ и рассмотрим коммутатор

$$x = [g, b^{-1}gb] = g^{-1}b^{-1}g^{-1}bgb^{-1}gb.$$

Поскольку x имеет в группе G несократимую запись длины $4n + 8$, он отличен от 1. Но, с другой стороны, для любого гомоморфизма σ группы G на группу из класса C $g\sigma \in H\sigma$ и потому найдется такой элемент $h \in H$, что $g\sigma = h\sigma$. Как и в случае 1, поскольку подгруппы H и K абелевы и нормальны в группах A и B,

$$x\sigma = [g, b^{-1}gb]\sigma = [h, b^{-1}hb]\sigma \in [H\sigma, H\sigma] = 1.$$

Следовательно, группа G не является C-аппроксимируемой и мы получили противоречие.

(ii): $g_0 \in A \backslash H$, $g_n \in B \backslash K$.

Поскольку $[A : H] > 2$, существует элемент $a \in A \backslash H$, такой, что a и g_0 лежат в разных смежных классах группы A по подгруппе H. Тогда $a^{-1}g_0 \notin H$ и, следовательно, элемент

$$a^{-1}ga = (a^{-1}g_0)g_1 \ldots g_n a$$

имеет несократимую запись длины $n + 2$. Зафиксируем элемент $b \in B \backslash K$ и рассмотрим коммутатор

$$x = [a^{-1}ga, b^{-1}a^{-1}gab] = a^{-1}g^{-1}ab^{-1}a^{-1}g^{-1}aba^{-1}gab^{-1}a^{-1}gab.$$

Так как x имеет в группе G несократимую запись длины $4n + 12$, то $x \neq 1$. Но, с другой стороны, для любого гомоморфизма σ группы G на группу из класса C найдется такой элемент $h \in H$, что $g\sigma = h\sigma$ и потому

$$x\sigma = [a^{-1}ha, b^{-1}a^{-1}hab]\sigma \in [H\sigma, H\sigma] = 1.$$

Как и выше, получили противоречие с C-аппроксимируемостью группы G.

(iii): $g_0 \in B \backslash K$, $g_n \in A \backslash H$.

Этот подслучай рассматривается так же, как и подслучай (ii). Разница состоит лишь в том, что элемент $a \in A \backslash H$ нужно выбрать не лежащим в одном смежном классе с элементом g_n^{-1}.

(iv): $g_0, g_n \in B \backslash K$.

Данный подслучай аналогичен подслучаю (i): в качестве элемента x следует взять коммутатор $[g, a^{-1}ga]$, где $a \in A \backslash H$.

Итак, в каждом из подслучаев мы пришли к противоречию и потому подгруппа H C-отделима в группе G. Предложение доказано.

Нам потребуется также следующий полученный ранее результат.

Предложение 4 [15, предл. 3]. *Пусть G – свободное произведение конечных π-групп A и B с объединенными подгруппами H и K, подгруппа H центральна в группе A, подгруппа K нормальна в группе B. Тогда группа G аппроксимируема конечными π-группами.*

3. Доказательство теорем 1 и 2

Доказательство теоремы 1. Легко видеть, что необходимость условия теоремы обеспечивается предложением 3. Докажем теперь достаточность. Для этого зафиксируем произвольный неединичный элемент $g \in G$ и укажем гомоморфизм группы G на нильпотентную группу, при котором образ g будет отличен от 1.

Если $g \notin H$, то образ g относительно естественного гомоморфизма ε: $G \to G/H$ отличен от 1. Поскольку фактор-группа G/H, изоморфная свободному произведению $A/H * B/K$, аппроксимируема нильпотентными группами, указанный гомоморфизм может быть продолжен до искомого отображения.

Теперь рассмотрим случай, когда $g \in H$. Пусть φ обозначает изоморфизм, в соответствии с которым объединяются подгруппы H и K. Так как эти подгруппы центральны в группах A и B соответственно, то наряду с обобщенным свободным произведением G можно рассмотреть обобщенное прямое произведение P групп A и B с объединенными подгруппами H и K. Напомним (см., напр., [20]), что группа P представляет собой фактор-группу прямого произведения $A \times B$ по его подгруппе D, состоящей из всевозможных элементов вида $h(h\varphi)^{-1}$, где $h \in H$. Легко видеть, что $D \cap A = 1 = D \cap B$ и, следовательно, группы A и B вкладываются в группу P. Очевидно также, что P – нильпотентная группа и что тождественные отображения $A \to A$ и $B \to B$ могут быть продолжены до гомоморфизма σ: $G \to P$, который и является искомым. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Как и выше, необходимость условия теоремы обеспечивается предложением 3, и нам остается проверить лишь достаточность. Выберем произвольный неединичный элемент $g \in G$ и покажем, что существует гомоморфизм группы G на конечную нильпотентную π-группу, при котором образ g будет отличен от 1.

Случай, когда $g \notin H$, рассматривается так же, как и при доказательстве теоремы 1. Поэтому далее будем считать, что $g \in H$.

Так как группа G аппроксимируема конечными π-группами, то существует гомоморфизм σ, отображающий ее на конечную π-группу и такой, что $g\sigma \neq 1$. Положим $N = \ker \sigma$, $R = N \cap A$, $S = N \cap B$. Легко видеть, что тогда

$$(R \cap H)\varphi = (N \cap H)\varphi = N \cap K = S \cap K$$

(где снова φ обозначает изоморфизм, в соответствии с которым объединяются подгруппы H и K). Поэтому в силу предложения 2 определены группа

$$G_{R,\,S} = (A/R * B/S;\ HR/R = KS/S,\ \varphi_{R,\,S})$$

и гомоморфизм $\rho_{R,\,S}$: $G \to G_{R,\,S}$, продолжающий естественные гомоморфизмы $A \to A/R$ и $B \to B/S$. Согласно тому же предложению $\ker \rho_{R,\,S} \leq N$ и, следовательно, $g\rho_{R,\,S} \neq 1$. Заметим еще, что A/R и B/S являются, во-первых, нильпотентными и, во-вторых, конечными π-группами. Последнее вытекает из соотношений

$$A/R = A/(N \cap A) \cong AN/N \leq G/N,$$
$$B/S = B/(N \cap B) \cong BN/N \leq G/N.$$

Введем следующие обозначения:

$$G_1 = G_{R,\,S},\ A_1 = A/R,\ B_1 = B/S,\ H_1 = HR/R,\ K_1 = KS/S,$$
$$\varphi_1 = \varphi_{R,\,S},\ \rho_1 = \rho_{R,\,S},\ g_1 = g\rho_{R,\,S}.$$

Ввиду включения $g_1 \in A_1$ порядок r элемента g_1 является π-числом. Пусть $p \in \pi$ – некоторый простой делитель числа r. Так как A_1 и B_1 – конечные нильпотентные группы, то в силу теоремы Бернсайда – Виландта (см., напр., [21, п. 17.1.4]) они раскладываются в прямые произведения своих силовских подгрупп:

$$A_1 = Q_1 \times Q_2 \times \ldots \times Q_m,\ B_1 = T_1 \times T_2 \times \ldots \times T_n.$$

Поскольку $g_1 \in H_1 = A_1 \cap B_1$, в обоих произведениях найдутся множители, соответствующие числу p. Без потери общности можно считать, что это – подгруппы Q_1 и T_1. Положим тогда

$$U = Q_2 \times \ldots \times Q_m,\ V = T_2 \times \ldots \times T_n.$$

Легко видеть, что подгруппы U и V совпадают с множествами всех элементов групп A_1 и B_1 соответственно, порядки которых взаимно просты с p. Отсюда следует, что $U \cap H_1$ и $V \cap K_1$ – множества элементов подгрупп H_1 и K_1, обладающих тем же свойством. Это означает, что $(U \cap H_1)\varphi_1 = V \cap K_1$ и согласно предложению 2 мы можем рассмотреть свободное произведение G_2 групп $A_2 = A_1/U$ и $B_2 = B_1/V$ с объединенными подгруппами $H_2 = H_1U/U$ и $K_2 = K_1V/V$, а также гомоморфизм ρ_2: $G_1 \to G_2$, продолжающий естественные гомоморфизмы $A_1 \to A_1/U$ и $B_1 \to B_1/V$.

Заметим, что элемент g_1 не принадлежит подгруппе U, поскольку его порядок делится на p. Следовательно, $g_1\rho_2 \neq 1$.

Группы A_2 и H_2 являются образами групп A и H относительно композиции гомоморфизмов $\rho_1 \cdot \rho_2$, поэтому H_2 центральна в A_2. По тем же причинам подгруппа K_2 нормальна в группе B_2, и так как A_2 и B_2 – конечные p-группы, то в силу предложения 4 группа G_2 аппроксимируема конечными p-группами. Отсюда и из соотношения $g_1\rho_2 \neq 1$ следует, что существует гомоморфизм θ группы G_2 на конечную p-группу F, отображающий $g_1\rho_2$ в неединичный элемент. Так как $p \in \pi$, то F является конечной нильпотентной π-группой. Следовательно, композиция $\rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \theta$ оказывается искомым гомоморфизмом. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Magnus W.* Beziehungen zwischen Gruppen und idealen in einem speziellen Ring // Math. Ann. 1935. V. 111. P. 259–280. DOI: 10.1007/BF01472217.
2. *Мальцев А.И.* Обобщенно нильпотентные алгебры и их присоединенные группы // Матем. сб. 1949. Т. 25. № 3. С. 347–366.
3. *Lichtman A. I.* Necessary and sufficient conditions for the residual nilpotence of free products of groups // J. Pure Appl. Algebra. 1978. V. 12. P. 49–64. DOI:10.1016/0022-4049(78)90020-8.
4. *Raptis E.*, *Varsos D.* The residual nilpotence of HNN-extensions with base group a finite or a f. g. abelian group // J. Pure Appl. Algebra. 1991. V. 76. No. 2. P. 167–178. DOI:10.1016/0022-4049(91)90059-B.
5. *Азаров Д.Н.* О нильпотентной аппроксимируемости свободных произведений свободных групп с циклическим объединением // Матем. заметки. 1998. Т. 64. Вып. 1. С. 3–8. DOI: 10.4213/mzm1366.
6. *Азаров Д. Н.*, *Иванова Е. А.* К вопросу о нильпотентной аппроксимируемости свободного произведения с объединением локально нильпотентных групп // Научные труды ИвГУ. Математика. 1999. Вып. 2. С. 5–7.
7. *Иванова Е.А.* Об аппроксимируемости нильпотентными группами свободного произведения с объединенной подгруппой двух абелевых групп // Чебышевский сб. 2002. Т. 3. Вып. 1. С. 72–77.
8. *Иванова Е.А.* О нильпотентной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Иваново, 2004.
9. *Иванова Е.А.* Аппроксимируемость нильпотентными группами свободного произведения двух групп с объединенными конечными подгруппами // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Биология, Химия, Физика, Математика. 2004. Вып. 3. С. 120–125.

10. *Азаров Д.Н.*, *Иванова Е.А.* Аппроксимационные свойства свободных произведений конечно порожденных нильпотентных групп с циклическим объединением // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Биология, Химия, Физика, Математика. 2008. Вып. 3. С. 56–62.
11. *Савельичева Н.С.*, *Соколов Е.В.* Одно необходимое условие нильпотентной аппроксимируемости HNN-расширения нильпотентной группы // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2015. Вып. 2. С. 64–68.
12. *Varsos D.* The residual nilpotence of the fundamental group of certain graphs of groups // Houston J. Math. 1996. V. 22. No. 2. P. 233–248.
13. *Gruenberg K.W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. Ser. 3. 1957. V. 7. P. 29–62. DOI: 10.1112/plms/s3-7.1.29.
14. *Соколов Е.В.* О применении метода Д. И. Молдаванского к исследованию аппроксимируемости HNN-расширений корневыми классами групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2016. Вып. 2. С. 87–103.
15. *Розов А.В.* Об аппроксимируемости конечными π-группами некоторых свободных произведений групп с центральными объединенными подгруппами // Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2016. № 2(40). С. 37–44. DOI: 10.17223/19988621/40/4.
16. *Розов А.В.* О нильпотентных группах конечного ранга // Математика и ее приложения. 2012. Вып. 9. С. 41–44.
17. *Магнус В.*, *Каррас А.*, *Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974. 456 с.
18. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106. P. 193–209. DOI: 10.2307/1993762.
19. *Туманова Е.А.* Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением // Изв. вузов. Математика. 2015. № 10. С. 27–44. DOI: 10.3103/S1066369X15100035.
20. *Молдаванский Д.И.* О пересечении подгрупп конечного индекса в некоторых обобщенных свободных произведениях групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Биология, Химия, Физика, Математика. 2008. Вып. 3. С. 114–122.
21. *Каргаполов М.И.*, *Мерзляков Ю.И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1977. 288 с.

Статья поступила 13.10.2016 г.

Rozov A.V., Sokolov E.V. ON THE RESIDUAL NILPOTENCE OF FREE PRODUCTS OF NILPOTENT GROUPS WITH CENTRAL AMALGAMATED SUBGROUPS. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 6(44). pp. 34–44

DOI 10.17223/19988621/44/3

Let G be a free product of nilpotent groups A and B with proper amalgamated subgroups H and K. We state that if H and K lie in the centers of A and B, respectively, then G is residually nilpotent if and only if the ordinary free product of A/H and B/K possesses the same property. We also prove that if π is a non-empty set of primes, H is central in A, and K is normal in B, then G is residually π-finite nilpotent if and only if G is residually π-finite and the free product of A/H and B/K is residually π-finite nilpotent. We obtain two corollaries of the second result for the cases when A and B have finite ranks or finite numbers of generators. In particular, we prove that if A and B are finitely generated, H is central in A, and K is normal in B, then G is residually π-finite nilpotent if and only if the periodic parts of A and B are π-groups and the periodic parts of A/H and B/K are p-groups for some prime p which belongs to π.

Keywords: nilpotent group, generalized free product of groups, residual nilpotence, residual finite nilpotence.

ROZOV Alexei Vyacheslavovich (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Ivanovo State University, Department of Applied Mathematics and Computer Sciences, Ivanovo State University, Ivanovo, Russian Federation)

E-mail: post-box023@mail.ru

SOKOLOV Evgeny Viktorovich (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Head of Department of Applied Mathematics and Computer Sciences, Ivanovo State University, Ivanovo, Russian Federation)

E-mail: ev-sokolov@yandex.ru

REFERENCES

1. Magnus W. (1935) Beziehungen zwischen Gruppen und idealen in einem speziellen Ring. *Math. Ann.* 111. pp. 259–280. DOI: 10.1007/BF01472217.
2. Mal′cev A.I. (1968) Generalized nilpotent algebras and their adjoint groups. *American Mathematical Society Translations: Series 2*. 69. pp. 1–21.
3. Lichtman A.I. (1978) Necessary and sufficient conditions for the residual nilpotence of free products of groups. *J. Pure Appl. Algebra*. 12. pp. 49–64. DOI:10.1016/0022-4049(78)90020-8.
4. Raptis E., Varsos D. (1991) The residual nilpotence of HNN-extensions with base group a finite or a f. g. abelian group. *J. Pure Appl. Algebra*. 76(2). pp. 167–178. DOI:10.1016/0022-4049(91)90059-B.
5. Azarov D.N. (1998) On the residual nilpotence of free products of free groups with cyclic amalgamation. *Mathematical Notes*. 64(1). pp. 3–7. DOI: 10.1007/BF02307189.
6. Azarov D.N., Ivanova E.A. (1999) K voprosu o nil'potentnoy approksimiruemosti svobodnogo proizvedeniya s ob"edineniem lokal'no nil'potentnykh grupp [To the question on the residual nilpotence of free product with amalgamation of locally nilpotent groups]. *Nauchnye Trudy Ivanovskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika. – Scientific Works of Ivanovo State University. Mathematics.* 2. pp. 5–7.
7. Ivanova E.A. (2002) Ob approksimiruemosti nil'potentnymi gruppami svobodnogo proizvedeniya s ob"edinennoy podgruppoy dvukh abelevykh grupp [On the residual nilpotence of a free product with an amalgamated subgroup of two Abelian groups by nilpotent groups]. *Chebyshevskiĭ Sbornik*. 3(1). pp. 72–77.
8. Ivanova E.A. (2004) *O nil'potentnoy approksimiruemosti obobshchennykh svobodnykh proizvedeniy grupp* [On the residual nilpotence of generalized free products of groups]. Abstract of Phys. and Math. Cand. Diss. Ivanovo.
9. Ivanova E.A. (2004) Approksimiruemost' nil'potentnymi gruppami svobodnogo proizvedeniya dvukh grupp s ob"edinennymi konechnymi podgruppami [The residual nilpotence of free product of two groups with finite amalgamated subgroups]. *Vestnik Ivanovskogo gosudarstvennogo universiteta – Ivanovo State University Bulletin. Ser.: Biology, Chemistry, Physics, Mathematics*. 3. pp. 120–125.
10. Azarov D.N., Ivanova E.A. (2008) Approksimatsionnye svoystva svobodnykh proizvedeniy konechno porozhdennykh nil'potentnykh grupp s tsiklicheskim ob"edineniem [The residual properties of free products of finitely generated nilpotent groups with cyclic amalgamation]. *Vestnik Ivanovskogo gosudarstvennogo universiteta – Ivanovo State University Bulletin. Ser.: Biology, Chemistry, Physics, Mathematics.* 3. pp. 56–62.
11. Savelicheva N.S., Sokolov E.V.(2015) Odno neobkhodimoe uslovie nil'potentnoy approksimiruemosti HNN-rasshireniya nil'potentnoy gruppy [A necessary condition of the residual nilpotence of an HNN-extension of a nilpotent group]. *Vestnik Ivanovskogo gosudarstvennogo universiteta – Ivanovo State University Bulletin. Ser.: Natural, Social Sciences.* 2. pp. 64–68.
12. Varsos D. (1996) The residual nilpotence of the fundamental group of certain graphs of groups. *Houston J. Math.* 22(2). pp. 233–248.
13. Gruenberg K.W.(1957) Residual properties of infinite soluble groups. *Proc. London Math. Soc. Ser.3.* 7. pp. 29–62. DOI: 10.1112/plms/s3-7.1.29.
14. Sokolov E.V. (2016) O primenenii metoda D. I. Moldavanskogo k issledovaniyu approksimiruemosti HNN-rasshireniy kornevymi klassami grupp [On the application of D. I. Moldavanskii's method to the study of the approximability of HNN-extensions by root classes of groups]. *Vestnik Ivanovskogo gosudarstvennogo universiteta – Ivanovo State University Bulletin. Ser.: Natural, Social Sciences*. 2. pp. 87–103.

15. Rozov A.V. (2016) Ob approksimiruemosti konechnymi π gruppami nekotorykh svobodnykh proizvedeniy grupp s tsentral'nymi ob"edinennymi podgruppami [On the residual π-finiteness of some free products of groups with central amalgamated subgroups]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(40). pp. 37–44. DOI: 10.17223/19988621/40/4.
16. Rozov A.V. (2012) O nil'potentnykh gruppakh konechnogo ranga [On nilpotent groups of finite rank]. *Matematika i ee prilozheniya – Mathematics and Its Applications.* 9. pp. 41–44.
17. Magnus W., Karras A., Solitar D. (1966) *Combinatorial group theory: presentations of groups in terms of generators and relations.* New York – London – Sydney: Interscience Publishers.
18. Baumslag G. (1963) On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups. *Trans. Amer. Math. Soc*. 106. pp. 193–209. DOI: 10.2307/1993762.
19. Tumanova E.A. (2015) On the root-class residuality of generalized free products with a normal amalgamation. *Russian Mathematics.* 59(10). pp. 23–37. DOI: 10.3103/S1066369X15100035.
20. Moldavanskii D.I. (2008) O peresechenii podgrupp konechnogo indeksa v nekotorykh obobshchennykh svobodnykh proizvedeniyakh grupp [On the intersection of finite index subgroups of certain generalized free products of groups]. *Vestnik Ivanovskogo gosudarstvennogo universiteta – Ivanovo State University Bulletin. Ser.: Biology*, *Chemistry*, *Physics*, *Mathematics*. 3. pp. 114–122.
21. Kargapolov M.I., Merslyakov Yu.I. (1977) *Osnovy teorii grupp* [Foundations of the Theory of Groups]. Moscow: Nauka.

МЕХАНИКА

УДК 629.76
DOI 10.17223/19988621/44/4

А.В. Азин, С.В. Пономарев, С.В. Рикконен, А.М. Храмцов

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЖИМОВ РАБОТЫ ПЬЕЗОДВИГАТЕЛЯ[1]

Разработана одномерная математическая модель пьезодвигателя с учетом механической и акустической передачи энергии. Модель позволяет рассчитать частотные характеристики механоакустической колебательной системы, по которым выбираются материалы элементов и конструкция двигателя, позволяющие согласовать источник энергии с нагрузкой изделия.

Ключевые слова: *пьезодвигатель, космический аппарат, колебательная система, динамическая сила, вибросмещение.*

В настоящее время миниатюрные двигатели и приводы широко применяются в технике. Практически во всех отраслях промышленности миниатюрные приводы востребованы, а в космической и военно-промышленной отрасли они просто необходимы. Постоянное требование улучшения массогабаритных показателей вынуждает исследователей искать новые принципы преобразования энергии из электрической в механическую, совершенствовать технику и технологию.

При расчете и проектировании пьезодвигателей и пьезоприводов для высокого коэффициента передачи энергии необходимо учитывать условие согласования пьезоактюатора (ПА) (источника механической энергии) с нагрузкой. При неправильном выборе конструкции и ошибочном выборе материалов элементов конструкции возможен вариант полного демпфирования передачи энергии от ПА к нагрузке. В этом случае особо актуальным является математическое моделирование конструкции изделия с правильным учетом конкретной нагрузки для применения в соответствующей отрасли промышленности.

Целью работы является разработка математической модели для расчета режимов работы ПА (согласование излучателя с нагрузкой) с максимальным коэффициентом передачи энергии. Особенность конструирования пьезодвигателей заключается в том, что частотный диапазон возбуждения ПА лежит в области частот, при которых необходимо учитывать совместную передачу энергии механическим и акустическим способами. На рис. 1 представлено схематическое изображение пьезодвигателя, работающего в режиме «короткого замыкания» (КЗ), то есть без механической нагрузки.

ПА с синусоидальной силой $F = F_m \cos(\omega t)$ посредством излучающей плиты массой M_{pl} через пружину предварительного пожатия K воздействует на толкатель

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России, уникальный идентификатор RFMEFI57814X0060.

массой m_a. Подпружиненная масса толкателя расположена на излучателе, механическая система имеет коэффициент вязкого трения R. Излучатель является абсолютно жестким, синусоидальная сила равномерно распределена по площади излучения. Это линейная одномерная колебательная система с одной степенью свободы со следующими допущениями:

- колебательная система представлена чисто линейной одномерной системой – все параметры постоянны и независимы от амплитуды колебаний, а также от частоты возбуждения;
- сила возбуждения чисто синусоидальная, излучающая плита создает плоскопараллельные волны в толкателе;
- излучающая плита при любых режимах работы сохраняет контакт с толкателем;
- излучатель является абсолютно жестким, синусоидальная сила равномерно распределена по площади плиты излучения;
- длина толкателя значительно меньше длины волны излучения.

Движение такой чисто механической колебательной системы описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$M\frac{dX_1^2}{dt^2}+K\frac{dX_1}{dt}+RX_1=F_m\cos(\omega t)\,. \quad (1)$$

Амплитуда виброскорости (чисто механической системы) массы толкателя определяется по формуле

$$\dot{X}_1=\frac{F_m}{\sqrt{R^2+(\omega M-\frac{K}{\omega})^2}}\,, \quad (2)$$

где масса M включает в себя массу толкателя – m_a, массу излучающей плиты – M_{pl} и 30 % массы ПА – M_{act}, K – жесткость пружины предварительного поджатия.

В [1] приведены два случая, описывающие параметры и поведение системы, когда $(kr) >> 1$ и $(kr) << 1$, где r – радиус излучателя, м; $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число; $\lambda = c/f$ – длина волны, м.

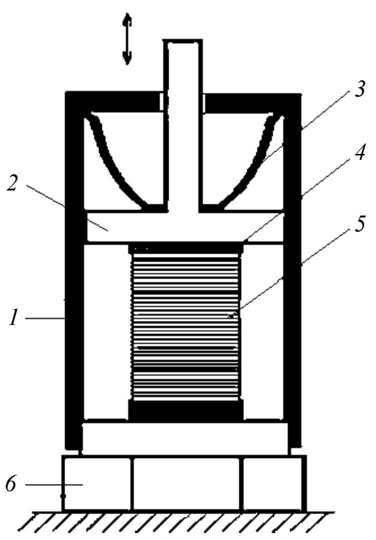

Рис. 1. Схематическое изображение пьезодвигателя: *1* – корпус пьезодвигателя; *2* – толкатель; *3* – пружина предварительного поджатия; *4* – излучающая плита; *5* – пьезоактюатор; *6* – винт поджатия

Fig. 1. Schematic representation of a piezo motor: *1*, case of the piezo motor; *2*, pusher; *3*, spring of initial load; *4*, emissive plate; *5*, PZT stack actuator; *6*, preload screw

При низких частотах воздействия длина вибрационной волны много больше размеров излучателя и произведение (kr) << 1. Если диаметр излучателя меньше одной трети длины волны (или (kr) << 1), то дальнее поле излучения можно не учитывать [1]. Частотный диапазон и размеры излучателя в системах пьезоприводов имеют произведение близкое к (kr) < 1.5, которое предопределяет учет упругой (акустической) передачи энергии вдоль толкателя. Для этого случая можно применить методику определения параметров колебательной системы, предложенную И.С. Чичининым [2]. Акустическое сопротивление (сопротивление излучения) наиболее просто трактуется, когда все точки излучающей поверхности источника колеблются синхронно, с одинаковой амплитудой (рис. 2). Сопротивление излучения абсолютно жесткой плиты в этом случае определяется отношением вибрационной силы на виброскорость $Z_n = F_n / \dot{X}$. Достаточно найти комплексную амплитуду $\dot{X}$ скорости перемещения поверхности S. На рис. 2 представлена акустическая подсистема механоакустической колебательной системы, ее механическая и электрическая схемы замещения. На рис. 2 приняты следующие обозначения: *1* – излучающая плита; *2* – присоединенная масса колебательной акустической подсистемы; *3* – масса излучающей платформы в механической схеме замещения – M_{pl}; *4* – присоединенная масса колебательной акустической подсистемы в механической схеме замещения – m_n; *5* – жесткость колебательной акустической подсистемы – K_n; *6* – неупругое сопротивление колебательной акустической подсистемы – R_n; *7* – инерционное сопротивление штампа в электрической схеме замещения – ($j\omega M_{\text{pl}}$); *8* – неупругое сопротивление акустической подсистемы в электрической схеме замещения – R_n; *9* – упругое сопротивление акустической подсистемы в электрической схеме замещения – ($K_n/(j\omega)$); *10* – инерционное сопротивление присоединенной массы в электрической схеме замещения – ($j\omega m_n$).

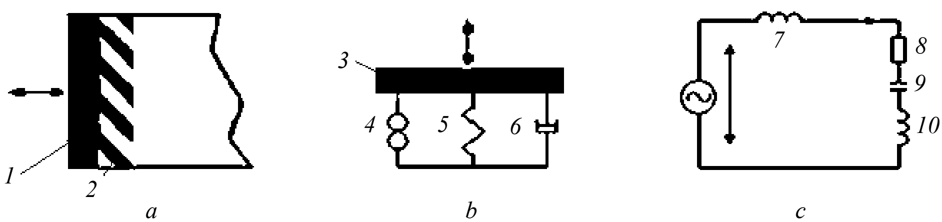

Рис. 2. Схема излучения жесткой плиты, расположенной на упругом полупространстве при (kr) < 1.5. Представлена акустическая подсистема механоакустической колебательной системы: *a* – абсолютно жесткая плита на упругом полупространстве; *b* – механическая схема замещения колебательной системы; *c* – электрическая схема замещения излучения волн

Fig. 2. Scheme of a rigid emissive plate located on an elastic half-space at (kr) < 1.5. Acoustic subsystem of a mechanical acoustic oscillating system: (*a*) completely rigid plate on an elastic half-space; (*b*) mechanical equivalent scheme of the oscillating system; (*c*) electrical equivalent circuit of the emission of waves

Движение такой акустической колебательной системы описывается следующим дифференциальным уравнением (3):

$$(M_{\text{pl}} + m_n)\frac{dX_2^2}{dt^2} + K_n \frac{dX_2}{dt} + R_n X_2 = F_m \cos(\omega t)\,. \tag{3}$$

Излучение происходит за счет деформации упругого полупространства под излучателем, процесс излучения зависит от присоединенной массы вещества объекта m_n, которая колеблется в фазе с излучателем, акустическая жесткость материала K_n и коэффициент диссипации R_n [3–5]. В процессе излучения участвует масса излучающей плиты – M_{pl}.

Амплитуда виброскорости жесткой излучающей плиты определяется по формуле

$$\dot{X}_2 = \frac{F_m}{\sqrt{R_n^2 + \left(\omega(M_{pl} + m_n) - \frac{K_n}{\omega}\right)^2}}. \tag{4}$$

Параметры упругого излучения вычисляются следующим образом [2].

Коэффициент демпфирования (диссипация)

$$R_n = 7(1 - \gamma^2)\ \rho\ V_s\ R_i^2\ \alpha_r, \tag{5}$$

Акустическая жесткость материала определяется по формуле

$$K_n = 8(1 - \gamma^2)\ \rho\ V_s^2\ R_i\ , \tag{6}$$

Присоединенная масса вычисляется следующим образом:

$$m_n = (1 - \gamma^2)\ \rho\ R_i^3\ \alpha_m\ , \tag{7}$$

где S – площадь излучателя, R_i – радиус излучателя, $\gamma = V_s/ V_p$, V_s – скорость поперечных звуковых волн, V_p – скорость продольных звуковых волн, ρ – плотность материала толкателя с массой m_a, α – поправочные коэффициенты, близкие к единице, но зависящие от частоты возмущения и параметра γ.

Колебательную систему пьезодвигателя или пьезопривода можно представить в виде механоакустической системы. Механоакустическая система имеет две колебательные подсистемы, которые имеют свои параметры, частотные характеристики и резонансные частоты. Виброскорости $\dot{X}_1$ и $\dot{X}_2$ как бы «нельзя» складывать, потому что эти колебания имеют разную «природу» и описываются разными математическими моделями. Виброскорость $\dot{X}_2$ – это колебание упругого излучения, результатом колебательного процесса является деформация торца массы толкателя m_a. Виброскорость $\dot{X}_1$ – это движение всей массы подвижных частей конструкции как единого целого объекта. Однако обе подсистемы переносят энергию и участвуют в создании суммарном смещении торца толкателя $X_\Sigma = X_1 + X_2$.

Аналогии между механическими колебательными системами и электрическими колебательными контурами позволили развить систему электрических аналогий механических систем. Механические аналогии электрических величин приведены в таблице.

Электрическая система	Первая система механическая	Вторая система механическая	Первая система акустическая
Напряжение U	Сила F	Скорость V	Звуковое давление P
Сила тока I	Скорость V	Сила F	Объемная скорость (SV)
Индуктивность L	Масса m	Гибкость c	Акустическая масса m_a=($\rho l/S$)
Активное сопротивление R	Сопротивление r	Величина, обратная коэффициенту сопротивления	Сопротивление акустических потерь r_a
Емкость C	Гибкость c	Масса m	Акустическая податливость $C_c = V/(\rho C^2)$

Используя правила преобразования электрических цепей, можно относительно быстро произвести расчеты режимов работы колебательных систем [3–6].

Для расчета механоакустической колебательной системы пьезодвигателя, представленной на рис. 1, должны совместно использоваться дифференциальные уравнения (1) и (3), а совместному решению этих уравнений может соответствовать электрическая схема замещения на рис. 3 [7, 8].

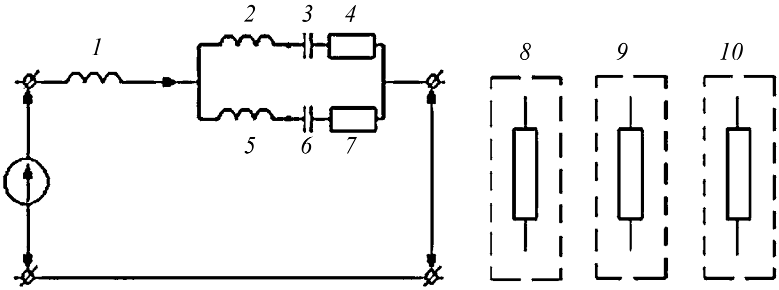

Рис. 3. Электрическая схема замещения колебательной системы пьезодвигателя, представленной на рис. 1
Fig. 3. Electrical equivalent circuit of the piezo drive oscillating system presented in Fig.1

На схеме замещения показана масса излучающей плиты M_{pl} (*1* – инерционное сопротивление излучающей плиты в электрической схеме замещения – $j\omega M_{\text{pl}}$), последовательно к ней присоединена механоакустическая колебательная система, с параллельным соединением элементов механической подсистемы *2 – 3 – 4* (*2* – инерционное сопротивления толкателя ($j\omega m_a$); *3* – упругое сопротивление пружины предварительного поджатия толкателя ($K/(j\omega)$); *4* – неупругое сопротивление механической подсистемы (R)) и акустической подсистемы *5 – 6 – 7* (*5* – инерционное сопротивления присоединенной массы акустической подсиситемы ($j\omega m_n$); *6* – упругое сопротивление акустической подсистемы ($K_n/(j\omega)$; *7* – неупругое сопротивление акустической подсистемы (R_n)).Показаны варианты нагрузки колебательной системы – режим холостого хода *8* ($Z_n = \infty$), режим короткого замыкания *9* ($Z_n = 0$), инерционная нагрузка без активных потерь *10* ($Z_n = j\omega M_{\text{nagr}}$).

Преобразуем электрическую схему замещения колебательной системы пьезодвигателя, работающей на инерционную нагрузку.

В механоакустической системе чисто механическое сопротивление в символической форме будет выглядеть как

$$\dot{Z}_1 = R + j(\omega m_a - \frac{K}{\omega}). \tag{8}$$

Чисто акустическое сопротивление в символической форме

$$\dot{Z}_2 = R_n + j(\omega m_n - \frac{K_n}{\omega}). \tag{9}$$

Суммарное сопротивление системы будет выглядеть следующим образом:

$$\dot{Z}_\Sigma = j\omega M_{\text{pl}} + \frac{\dot{z}_1 \dot{z}_2}{\dot{z}_1 + \dot{z}_2} + j\omega M_{\text{nagr}}. \tag{10}$$

Суммарное вибросмещение подвижной части конструкции определяется по формуле

$$X_{\Sigma} = \frac{F}{\dot{z}_{\Sigma}} \cdot \frac{1}{\omega}. \tag{11}$$

Сила на нагрузке равна

$$F_n = F - X_{\Sigma}\omega\left(j\omega M_{\text{pl}} + \frac{\dot{z}_1 \dot{z}_2}{\dot{z}_1 + \dot{z}_2} \right). \tag{12}$$

Пример расчета

Материал толкателя – оргстекло. Эквивалентный радиус излучающей плиты $R_i = 0.4$ мм. Жесткость пружины $K = 8.57 \cdot 10^9$ Н/м. Масса излучающей плиты $M_{\text{pl}} = 0.101 \cdot 10^{-3}$ кг. Масса толкателя $m_a = 1 \cdot 10^{-3}$ кг. Коэффициент потерь на трение $R = 525$ кг/с. Присоединенная масса толкателя $m_n = 1.3 \cdot 10^{-7}$ кг. Жесткость толкателя $K_n = 3.63 \cdot 10^8$ Н/м. Неупругое сопротивление толкателя $R_n = 146$ кг/с. Масса пригруза $M_{\text{nagr}} = 0.18$ кг. Сила пьезоактюатора $F = 1082$ Н.

При данной конструкции пьезопривода и материале толкателя (оргстекло) система имеет один явный резонанс на частоте 7000 Гц, длина волны равна 0.35 метра (значительно больше длины толкателя), основная часть энергии передается в нагрузку посредством акустической подсистемы – 95 %, 5 % – механической подсистемой (рис. 4).

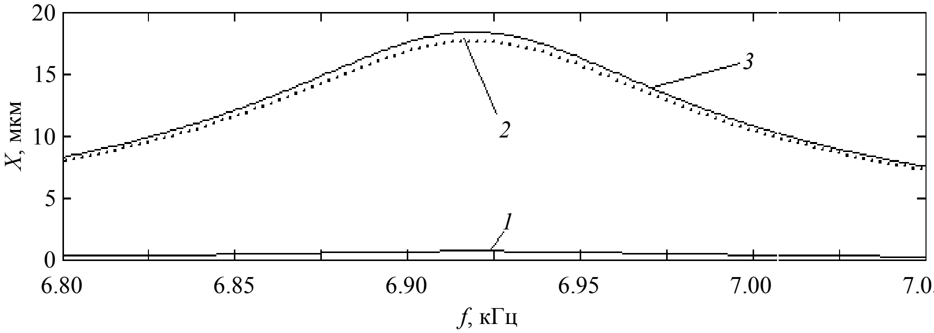

Рис. 4. Частотные характеристики вибросмещений механоакустической колебательной системы, рассчитанные по формуле (11): кр. *1* – вибросмещение механической подсистемы; кр. *2* – вибросмещение акустической подсистемы; кр. *3* – суммарное вибросмещение толкателя

Fig. 4. Frequency–response characteristics of vibration displacements of a mechanical acoustic oscillating system according to formula (11): *1*, vibration displacement of the mechanical subsystem; *2*, vibration displacement of the acoustic subsystem; *3*, total vibration displacement of the pusher

Колебательная система имеет незначительные активные сопротивления, на которых рассеивается энергия и поэтому система может на резонансе существенно раскачаться. Это подтверждается высокими значениями силы на нагрузке (рис. 5).

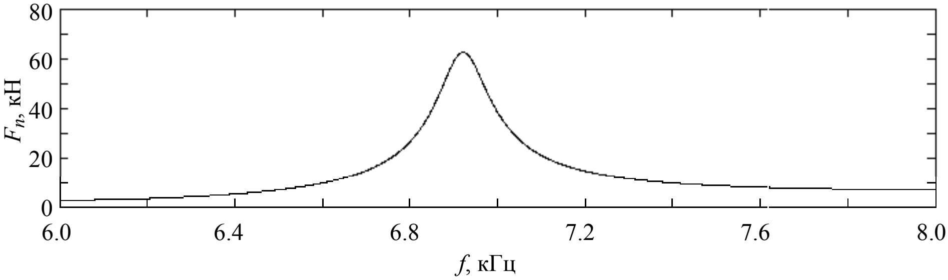

Рис. 5. Частотная характеристика силы на нагрузке механоакустической системы
Fig. 5. Frequency–response characteristic of the force on the load of mechanical acoustic oscillating system

Мгновенная мощность на инерционной нагрузке без потерь изменяется во времени с двойной частотой возбуждения, амплитуда данной мощности равна

$$P_{mgn} = F_{nm} \frac{\dot{X}_m}{2} \sin(2\omega t), \tag{13}$$

где F_{nm} – амплитудное значение силы на инерционной нагрузке, $\dot{X}_m$ – амплитудное значение виброскорости в нагрузке.

В режиме работы на инерционную нагрузку мгновенная мощность за период колебания дважды меняет знак, временные кривые мощности симметричны относительно оси абсцисс, следовательно, полезной работы система не производит.

Заключение

По результатам проведенного исследования предложен подход к моделированию пьезодвигателя, позволяющий рассчитать по отдельности передачу механической энергии через механическую и акустическую подсистемы с дальнейшим суммированием потоков энергии на нагрузке.

Для решения линейных одномерных задач согласования источника энергии с нагрузкой целесообразно применять математическое моделирование, основанное на аналоговых электрических схемах замещения первого рода.

Механическая система согласования источника энергии с нагрузкой для частот работы пьезодвигателей представляется механоакустической колебательной системой, в которой передача энергии осуществляется через два канала: механической и акустической подсистемами.

В аналоговой электрической схеме замещения колебательной системы механоакустическая система представляет собой параллельный электрический контур, сопротивление которого зависит от частоты колебаний и может иметь величину от 0 до бесконечности (энергетическая пробка).

Конструкция элементов и материалы, из которых сделаны элементы двигателей, существенно влияют на механическое сопротивление механоакустической системы и, следовательно, на коэффициент преобразования энергии.

Данный математический подход позволяет конструктору в приближенной форме выбрать материал элементов, конструкцию пьезодвигателя в зависимости от того, по какой механоакустической подсистеме намерены передавать энергию (по акустической или механической), с какими виброперемещениями и силами на нагрузке, и окончательно определить частоту работы пьезодвигателя.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Скучик Е.* Основы акустики. М.: Мир, 1976. 542 с.
2. *Чичинин И.С.* Вибрационное излучение сейсмических волн. М.: Недра, 1984. 221 с.
3. *Дьелесан Э.*, *Руайе Д.* Упругие волны в твердых телах. М.: Наука, 1982. 424 с.
4. *Афонин С.М.* Многомерная структурно-параметрическая модель составного пьезодвигателя наноперемещений // Вестник машиностроения. 2007. № 1. С. 3–13.
5. *Богданов Е.П.*, *Рикконен С.В.* Экспресс-метод определение параметров нагрузок вибрационных систем // Интернет-журнал «Науковедение». 2013. № 5.
6. *Амеличев В.В.*, *Вернер В.Д.*, *Ильков А.В.* МЭМС-микрофон. Выбор материалов, конструкции и технологии. Часть I. Электромеханический элемент // Нано-микросистемная техника. 2007. № 2. С. 53–62.
7. *Пономарев С.В.*, *Рикконен С.В*, *Азин А.В.* Анализ работы пьезопривода по частотным характеристикам механоакустической колебательной системы // Изв. вузов. Физика. 2014. Т. 57. № 8/2. С. 196–202.
8. *Пономарев С.В.*, *Рикконен С.В*, *Азин А.В.* Моделирование колебательных процессов пьезоэлектрического преобразователя // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 2(34). С. 86–95.

Статья поступила 07.11.2016

Azin A.V., Ponomarev S.V., Rikkonen S.V., Khramtsov A.M. MATHEMATICAL MODELING OF PIEZO MOTOR OPERATION MODES. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 6(44). pp. 45–53

DOI 10.17223/19988621/44/4

At present, micro electromechanical systems appear to be progressively applicable in engineering. The problem of reducing weight-and-dimensional characteristics of the spacecraft (SC) system is of great importance in the space field. One of the solutions is replacement of electromechanical motors in different SC units by piezo motors. It is necessary to take into account the condition of consistency of PZT stack actuators (the sources of mechanical energy) with the load when calculating and designing the piezo motors of high energy transfer coefficient. In this case, the most relevant is mathematical modeling of a product design with correct consideration of the specific drive load in an actual industrial field.

Mathematical modeling by the finite element method in combination with 3D numerical simulation is most accurate and appropriate. However, this method is laborious and time-consuming. In practice, designers and constructors prefer to use simple linear one-dimensional mathematical models, which provide an accurate information about materials and product design. In linear one-dimensional models of oscillatory systems for the range of frequencies applied in piezo motors, it is necessary to consider the acoustic and mechanical principles of energy conversion and transfer from the source to the load. In this paper, a one-dimensional mathematical model of the piezo motor with consideration of mechanical and acoustic energy transfer is developed. This model allows calculating the frequency–response characteristics of mechanical acoustic oscillating system according to which the materials of elements and design of the drive are chosen.

Keywords: piezo motor, spacecraft, oscillating system, dynamic force, vibration displacement.

AZIN Anton Vladimirovich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: antonazin@niipmm.tsu.ru

PONOMAREV Sergey Vasil'evich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: psv@niipmm.tsu.ru

RIKKONEN Sergey Vladimirovich (Candidate of Technical Sciences, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: rikk2@yandex.ru

KHRAMTSOV Alexey Mikhaylovich (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: khramtsov.home@gmail.com

REFERENCES

1. Skuchik E. (1976) *Osnovy akustiki* [Foundations of Acoustics]. Moscow: Mir.
2. Chichinin I.S. (1984) *Vibratsionnoe izluchenie seysmicheskikh voln* [Vibrational Emission of Seismic Waves]. Moscow: Nedra.
3. Dieulesaint E., Royer D. (2000) *Elastic Waves in Solids*. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag.
4. Afonin S.M. (2007) Mnogomernaya strukturno-parametricheskaya model' sostavnogo p'ezodvigatelya nanoperemeshcheniy [Multidimensional structural parametric model of a complex piezo motor of nanodisplacements]. *Russian Engineering Research.* 1. pp. 3–13.
5. Bogdanov E.P., Rikkonen S.V. (2013) Ekspress-metod opredelenie parametrov nagruzok vibratsionnykh sistem [A rapid metod of determining the parameters of loads of vibration systems]. *Journal Naukovedenie.* 5(18).
6. Amelichev V.V., Verner V.D., Il'kov A.V. (2007) MEMS-mikrofon. Vybor materialov, konstruktsii i tekhnologii. Chast' I. Elektromehanicheskiy element [MEMS-microphone. Choice of materials, designs, and technologies. Part I. Electromechanical sensitive element]. *Journal of Nano and Microsystem Technique.* 2. pp. 53–62.
7. Ponomarev S.V., Rikkonen S.V, Azin A.V. (2014) Analiz raboty p'ezoprivoda po chastotnym kharakteristikam mekhanoakusticheskoy kolebatel'noy sistemy [Analysis of a piezodrive operation in accordance to the frequency-response characteristics of mechanical acoustic oscillating system]. *Russian Physics Journal.* 57 (8/2). pp. 196–202.
8. Ponomarev S.V., Rikkonen S.V, Azin A.V. (2015) Modelirovanie kolebatel'nykh protsessov p'ezoelektricheskogo preobrazovatelya [Simulation of oscillatory processes in a piezoelectric transducer]. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 2(34). pp. 86–95.

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2016 Математика и механика № 6(44)

УДК 532.542
DOI 10.17223/19988621/44/5

Ю.Б. Банзула, Е.И. Борзенко, С.В. Карязов, Г.Р. Шрагер

КИНЕМАТИКА ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ С ЗАТВОРОМ[1]

Представлены результаты математического моделирования течения ньютоновской жидкости в канале с конструктивным элементом, моделирующим наличие затвора. Математическая постановка задачи формулируется в переменных вихрь – функция тока. Численное решение рассматриваемой задачи осуществляется конечно-разностным методом на основе схемы переменных направлений. Представлены результаты параметрических исследований кинематики течений как для полностью открытого, так и частично закрытого затвора.

Ключевые слова: *течение, вязкая жидкость, затвор, численное моделирование, кинематика течения.*

Во многих технологических процессах при переработке материалов в жидком состоянии реализуется транспорт жидкости по трубопроводу, который является частью технологической оснастки. Транспортный трубопровод, как правило, содержит конструктивные элементы специального назначения (соединения типа сужение/расширение, диафрагма, клапаны, краны и т.п.). При расчете расходно-напорных характеристик трубопровода необходимо учитывать потери энергии в потоке за счет конструктивных элементов [1]. Начиная с середины прошлого столетия в этом направлении ведутся интенсивные теоретические и экспериментальные исследования как для различных режимов течения, так и для каналов разной геометрии, в том числе с использованием сложных реологических моделей поведения жидкой среды. Обзор подобных исследований представлен в работах [1–4]. Утверждается, что исследования в данной области являются актуальными и в настоящее время. Это обусловлено не только многочисленными практическими приложениями, но и тем, что имеющиеся экспериментальные данные во многих случаях не согласуются не только между собой, но и с результатами аналитических и численных исследований [5]. Широко распространенным конструктивным элементом, используемым для открытия/закрытия трубопровода, является шаровой затвор. Конструкция шарового затвора позволяет осуществлять полное и частичное перекрытие сечения трубопровода. Течение жидкости в окрестности шарового затвора имеет сложный пространственный характер и его качественное и количественное исследование возможно лишь с использованием современных вычислительных технологий, реализуемых на высокопроизводительных ЭВМ. Имеются попытки численного моделирования течений жидкости в трубопроводах с шаровыми кранами и в системах с шаровыми клапанами с помощью пакетов прикладных программ, например «FLUENT» [6, 7].

Целью данной работы является численное моделирование течения жидкости в плоскости симметрии канала с затвором в положении как полного, так и частичного перекрытия сечения.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-08-03935-а).

Постановка задачи

Рассматривается ламинарное, стационарное течение ньютоновской жидкости в плоском бесконечном канале шириной D. Область решения в декартовой системе координат схематично изображена на рис. 1. На некотором удалении от входной границе Γ_1 и от выходной границы Γ_5 в канале расположен затвор диаметра D_1, который может менять ширину проходного сечения в зависимости от положения запорного элемента Γ_4. Значения L_1 и L_2 подбираются такими, чтобы исключить влияние границ Γ_1 и Γ_5 на характер течения в окрестности затвора. Геометрия стенки Γ_2 описывается непрерывной функцией $f(x)$, стенки Γ_3 – $(-f(x))$.

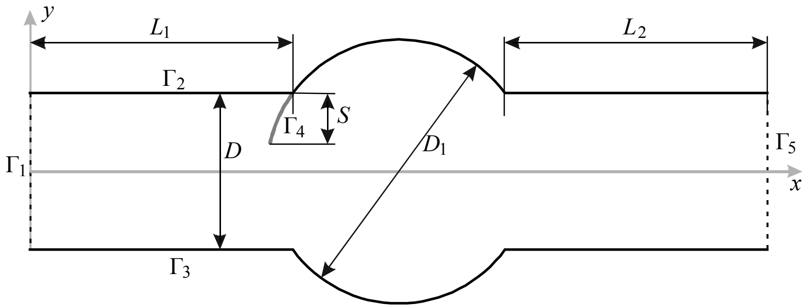

Рис. 1. Область течения
Fig. 1. Flow region

Задача формулируется в плоской постановке с использованием декартовой системы координат, начало которой располагается во входном сечении. Течение описывается уравнениями движения и неразрывности, которые в безразмерных переменных принимают вид

$$\mathrm{Re}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\mathrm{Re}}{2}\frac{\partial p}{\partial x}+\Delta u\,, \tag{1}$$

$$\mathrm{Re}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\mathrm{Re}}{2}\frac{\partial p}{\partial y}+\Delta v\,, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\,. \tag{3}$$

На твердых стенках (Γ_2, Γ_3) и запорном элементе (Γ_4) выполняются условия прилипания; на входной границе (Γ_1) жидкость поступает с постоянным расходом, распределение скорости при этом соответствует установившемуся течению жидкости в бесконечном канале с заданным постоянным расходом; на выходной границе (Γ_5) используются мягкие граничные условия для продольной скорости и равенство нулю поперечной. Таким образом, граничные условия записываются в виде

$$(\Gamma_1)\text{: } v=0,\ u=1.5(1-y^2); \tag{4}$$

$$(\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4)\text{: } v=0,\ u=0; \tag{5}$$

$$(\Gamma_5)\text{: } v=0,\ \frac{\partial u}{\partial x}=0\,. \tag{6}$$

Здесь: u, v – продольная и поперечная компоненты вектора скорости соответственно; p – давление; $\mathrm{Re} = \rho UL / \mu$ – число Рейнольдса (L=D/2); ρ – плотность; μ – вязкость. В качестве масштабов обезразмеривания выбраны следующие величины: длина – полуширина входного канала D/2; скорость – среднерасходная скорость во входном сечении U; давление – величина $\rho U^2 / 2$.

Используя безразмерные функцию тока и вихрь, определяемые выражениями

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \tag{7}$$

перепишем постановку (1) – (6) в переменных функция тока – вихрь

$$u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \Delta \omega , \tag{8}$$

$$\nabla^2 \psi = -\omega , \tag{9}$$

$$(\Gamma_1):\ \psi = 1 + 1.5 \left(y - \frac{y^3}{3} \right), \omega = 3y ; \tag{10}$$

$$(\Gamma_2, \Gamma_4):\ \psi = 2, \frac{\partial \psi}{\partial n_1} = 0 ; \tag{11}$$

$$(\Gamma_3):\ \psi = 0, \frac{\partial \psi}{\partial n_1} = 0 ; \tag{12}$$

$$(\Gamma_5):\ \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 . \tag{13}$$

В уравнениях (11), (12) n_1 соответствует направлению внешней к границе нормали. Функция $f(x)$ в безразмерном виде записывается следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} \left[R^2 - \left(x - \dfrac{L_1}{L} - l \right)^2 \right]^{0.5}, & x \in [L_1 / L,\quad L_1 / L + 2l], \\ 1, \quad x \notin [L_1 / L,\quad L_1 / L + 2l], & \end{cases}$$

где $R = \dfrac{D_1}{D}$ – безразмерный радиус затвора, $l = \dfrac{\sqrt{D_1^2 - D^2}}{D} = \sqrt{R^2 - 1}$. Таким образом, решение задачи определяется критериями подобия Re, геометрическими параметрами R и s=S/D – степень закрытия запорного элемента (рис.1).

Метод расчета

Для решения сформулированной задачи в переменных функция тока – вихрь используется метод установления [8]. Физическую область течения с криволинейной границей $f(x)$ преобразуем в прямоугольную введением новых координат

$$\xi = x, \eta = y / f(x) .$$

В преобразованной области решения строится квадратная разностная сетка с шагом $h\, \Omega_h = \{ \xi_i = ih,\ \eta_i = jh,\ i = 0,...,N_1,\ \ j = 0,...,N_2 \}$. Уравнения (8), (9) с учетом преобразования координат записываются в разностном виде с применением схемы продольно-поперечной прогонки [9]. Конвективные слагаемые в уравнении переноса вихря аппроксимируются с помощью схемы против потока [10].

Значение вихря на стенке определяется выражением

$$\omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial n_1^2},$$

для разностного представления которого используется формула Тома [22].

Профиль функции $f(x)$ в малой окрестности точек L_1 / L, $L_1 /(L+2l)$ сглаживается полиномом третьей степени, обеспечивающим непрерывность самой функции, а также ее первой и второй производных.

Для проверки аппроксимационной сходимости методики расчета была проведена серия вычислительных экспериментов на последовательности сеток. Сходимость демонстрируется по распределению скорости в поперечных сечениях $x = L_1 / L$ и $x = L_1 /(L+l)$ (рис. 2).

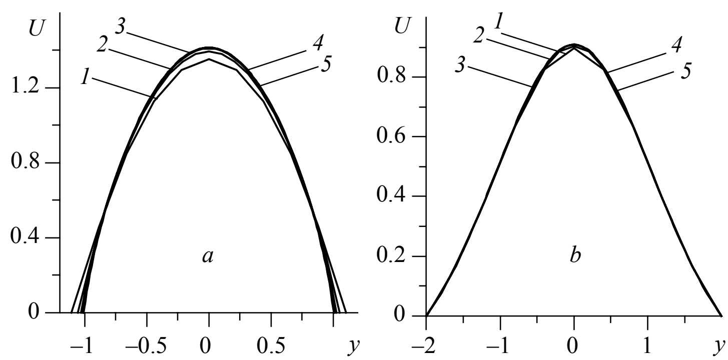

Рис. 2. Распределение продольной скорости в сечениях $x = L_1 / L$ (*a*) и $x = L_1 /(L+l)$ (*b*): Re = 1, n = 1, R = 2 (кр. *1* – 1/10, кр.*2* – 1/20, кр. *3* – 1/40, кр. *4* – 1/80, кр. *5* – 1/160)

Fig. 2. Distribution of the axial velocity in cross-sections (*a*) $x = L_1 / L$ and (*b*) $x = L_1 /(L+l)$ for Re = 1, n = 1, R = 2 ((*1*) 1/10, (*2*) 1/20, (*3*) 1/40, (*4*) 1/80, (*5*) 1/160)

Анализ результатов показывает аппроксимационную сходимость метода. Максимальные расхождения между результатами, полученными на сетках с шагом 1/80 и 1/160, в значениях скорости составляют 0.02 %. Все дальнейшие вычисления проведены на сетках с шагом 1/80.

Результаты расчетов

Расчеты показали, что в случае установившегося течения жидкости в рассматриваемом канале с полностью открытым затвором распределения характеристик симметрично относительно плоскости y=0, при этом можно выделить три зоны в области течения. В окрестности входной и выходной границ наблюдаются зоны одномерного течения, характерного для установившегося движения в бесконечном канале с профилем скорости (4), в окрестности затвора движение имеет двумерный характер. Поля компонент скорости в случае малых значений чисел Рейнольдса демонстрируются на рис. 3, а распределения линий тока в зависимости от Re представлены на рис. 4.

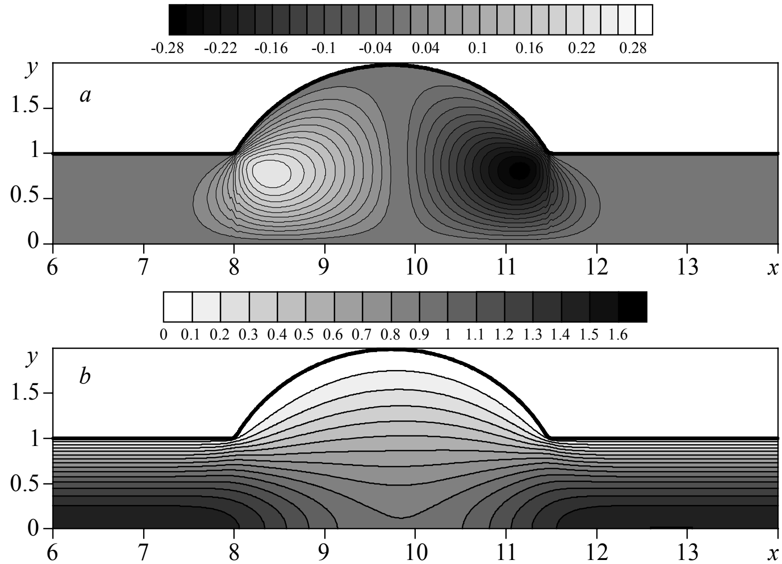

Рис. 3. Картина течения Re = 1 (распределения: *a* – поперечной, *b* – продольной скорости)
Fig. 3. Flow pattern for Re = 1 (distributions of the (*a*) radial velocity and (*b*) axial velocity)

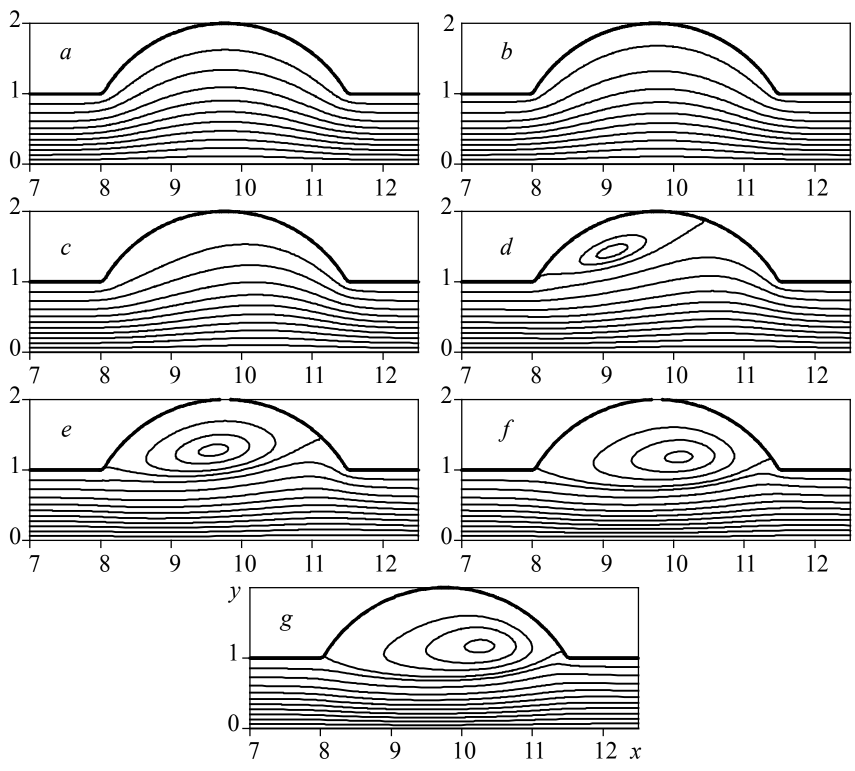

Рис. 4. Распределения изолиний функции тока (*a*,*b*,*c*,*d*,*e*,*f*,*g* – Re = 0.1, 1, 5, 10, 20, 50, 80)
Fig. 4. Streamline distributions for Re = (*a*) 0.1, (*b*) 1, (*c*) 5, (*d*) 10, (*e*) 20, (*f*) 50, and (*g*) 80

Видно, что распределения линий тока и продольной скорости при малых Re симметричны также и относительно плоскости $x = x_c$, где x_c – координата центра затвора. Увеличение числа Re приводит к возникновению в области затвора зон циркуляционного движения. Последние формируются в левой части затвора (рис. 4, *d*) и по мере увеличения Re занимают всю полость (рис. 4, *g*). Распределения характеристик течения в области двумерного течения при Re = 50 представлены на рис. 5. Видно, что внутри затвора ширина эффективного сечения, через которое протекает жидкость, уменьшается, что приводит к росту продольной скорости в окрестности плоскости симметрии. Параметрические расчеты показывают, что при Re ≤ 1 распределения кинематических характеристик практически не меняются.

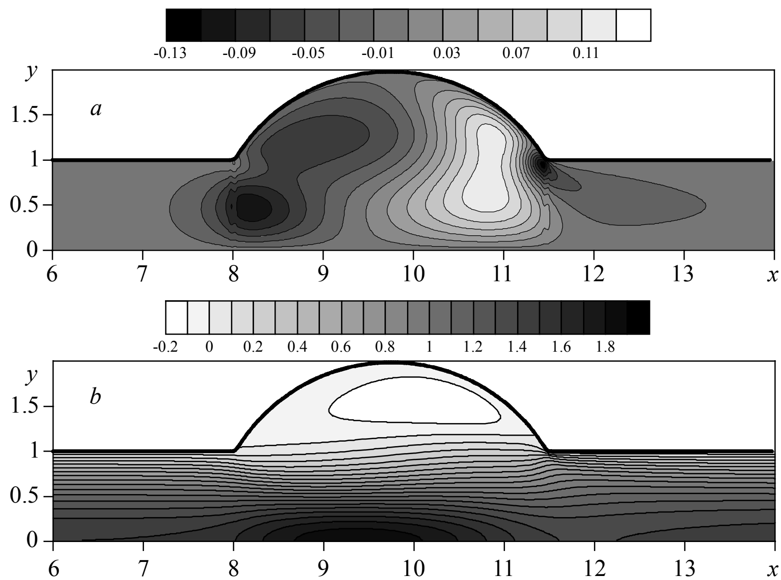

Рис. 5. Картина течения Re = 50 (*a*, *b* – распределения *v*, *u*)
Fig. 5. Flow pattern for Re = 50 (distributions of the velocity components (*a*) *v* and (*b*) *u*)

Влияние радиуса затвора на картину течения демонстрирует рис. 6, где представлены распределения линий тока при различных значениях *R* для двух чисел Рейнольдса. В случае Re=1 с ростом размеров затвора характер течения не меняется, линии тока плавно огибают его контур.

Частичное закрытие затвора приводит к формированию в зоне двумерного течения несимметричной картины. Распределения составляющих вектора скорости для различных значений Re в случае, когда запорный элемент перекрывает половину сечения канала, представлены на рис. 7 и 8.

Влияние степени закрытия затвора на картину течения демонстрирует рис. 9. При малых значениях Re линии тока плавно огибают контуры канала, а по мере закрытия затвора за ним формируется циркуляционная зона (рис. 9, *a*,*b*,*c*). Перед элементом возникает зона циркуляционного движения, размеры которой практически не меняются при изменении числа Рейнольдса. При Re=10 практически вся жидкость за затвором вовлечена в циркуляционное движение, а размеры циркуляционной зоны в нижней части потока уменьшаются по мере закрытия затвора (рис. 9, *d*,*e*,*f*).

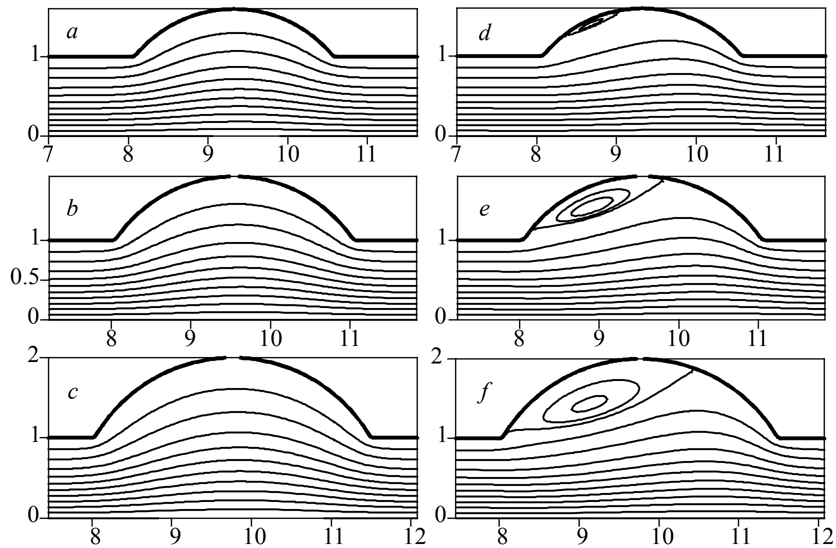

Рис. 6. Распределения изолиний функции тока при различных R
(a,b,c – Re = 1, d,e,f – Re = 10; a,d – R = 1.6, b,e – R = 1.8, c,f – R = 2.0)
Fig. 6. Streamline distributions for various R
(Re = (a,b,c) 1, and (d,e,f) 10; R = (a,d) 1.6, (b,e) 1.8, and (c,f) 2.0)

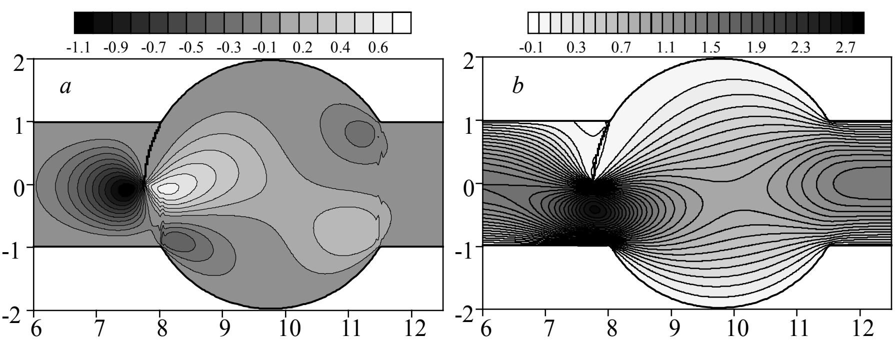

Рис. 7. Картина течения Re = 1, s = 0.5 (a, b – распределения v, u)
Fig. 7. Flow pattern for Re = 1, s = 0.5 (distributions of (a) v and (b) u)

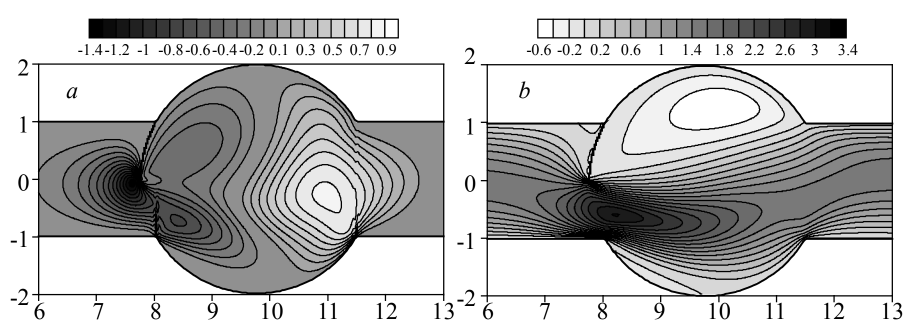

Рис. 8. Картина течения Re = 10, s = 0.5 (a, b – распределения v, u)
Fig. 8. Flow pattern Re = 10, s = 0.5 (distributions of the velocity components (a) v and (b) u)

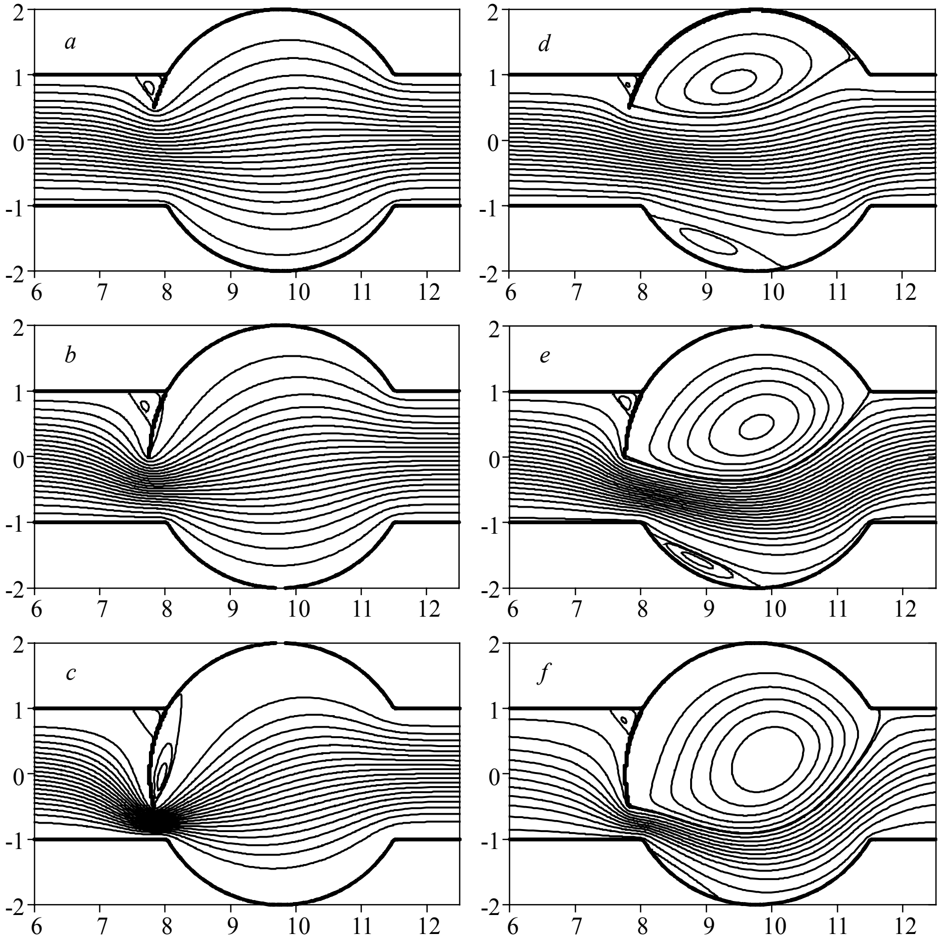

Рис. 9. Распределения изолиний функции тока при различных s
(a,b,c – Re = 1, d,e,f – Re = 10; a,d – s = 0.25, b,e – s = 0.5, c,f – s = 0.75)
Fig. 9. Streamline distributions for various s
(Re = (a,b,c) 1, and (d,e,f) 10; s = (a,d) 0.25, (b,e) 0.5, and (c,f) 0.75)

Заключение

В результате проделанной работы выполнено математическое моделирование течения ньютоновской жидкости по каналу с конструктивным элементом типа затвора. В результате параметрических исследований получены картины течения в зависимости от числа Рейнольдса в диапазоне изменения от 0.1 до 80, радиуса затвора – от 1 до 2, степени закрытия запорного элемента – от 0 до 0.5. Показано разделение потока на три характерные зоны: зону двумерного течения в окрестности затвора и зон одномерного течения вне его. Продемонстрировано влияние значений определяющих параметров на формирование и размеры выделяемых зон в потоке.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fester V.*, *Slatter P.*, *Alderman N.* Resistance coefficients for non-Newtonian flows in pipe fittings // Rheology. InTech. 2012. P. 151–186.
2. *Sisavath S.*, *Jing X.*, *Pain C.C.*, *Zimmerman R.W.* Creeping flow through axisymmetric sudden contraction or expansion // Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME. 2002. V. 124. Iss. 1. P. 273–278. DOI: 10.1115/1.1430669.
3. *Pienaar V.G.* Non-Newtonian fitting losses. Unpublished M Tech. thesis. Cape Technikon. Cape Town, 1998.
4. *Fester V.G.*, *Kazadi D.M*, *Mbiya B.M.*, *Slatter P.T.* Loss coefficients for flow of Newtonian and non-Newtonian fluids through diaphragm valves // Chemical Engineering Research and Design. 2007. V. 85. Iss. 9A. P. 1314–1324. DOI: 10.1205/cherd06055.
5. *Pienaar V.G.* Viscous flow through sudden contractions. Dissertation submitted in fulfilment of the degree Doctor technologiae in the Faculty of Engineering. Cape Technikon, 2004.
6. *Andhale V.A.*, *Deshmukh D.S.* Investigation of ball valve design for performance enhancement // Pratibha: International Journal of Science, Spirituality, Business and Technology. 2016. V. 4. Iss. 2. P. 105–112.
7. *Zhang S.C.*, *Zhang Y.L.*, *Fang Z.M.* Numerical simulation and analysis of ball valve three-dimensional flow based on CFD // IOP Conf. Series: Earth and EnvironmentalScience. 2012. V. 15. Iss. 5. P. 1–6. DOI: 10.1088/1755-1315/15/5/052024.
8. *Годунов С.К.*, *Рябенький В.С.* Разностные схемы. М.: Наука, 1977. 440 с.
9. *Яненко Н.Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967. 197 с.
10. *Roache P.V.* Fundamental of computational fluid dynamics. New Mexico: Hermosa Publishers, 1998. 648p.

Статья получена 17.11.2016 г.

Banzula Yu.B., Borzenko E.I., Karyazov, S.V., Shrager G.R. THE KINEMATICS OF A VISCOUS FLUID FLOW IN A CHANNEL WITH A VALVE. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 6(44). pp. 54–63

DOI 10.17223/19988621/44/5

In this paper, results of mathematical modeling of a steady flow of a Newtonian fluid in a flat channel are presented. At some distance from the inlet and outlet of the channel, a valve having a specified diameter and capable to change the width of the flow cross section depending on the position of the locking element is situated. On the walls, the adhesion conditions are performed; at the input, the profile corresponding to the steady flow of a predetermined constant flow is assigned, and the Neumann boundary conditions are used at the output. The mathematical statement of a problem is formulated using a dimensionless stream function and vorticity variables. The numerical solution of the problem is implemented with the application of an original finite-difference method based on the scheme of alternating directions. The physical flow area with a curved boundary is converted into a rectangular domain by introducing new coordinates, and the stationary solution of the problem is obtained using the relaxation method. The calculations demonstrate that in the vicinity of the inlet and outlet boundaries, the one-dimensional flow areas corresponding to a steady fluid flow in an infinite channel occur, and in the vicinity of the shutter, a two-dimensional flow with recirculations is observed. The effect of the Reynolds number on the distribution of the kinematic characteristics is investigated. The results of the parametric studies of the flow pattern in relation to the opening position and diameter of the locking element are presented.

Keywords: flow, viscous fluid, valve, numerical simulation, kinematics of the flow.

BANZULA Yuriy Borisovich (Doctor of Technical Sciences, Federal State Enterprise the Federal Center for Dual-Use Technologies Soyuz, Dzerzhinskiy, Moscow region, Russian Federation)

BORZENKO Evgeniy Ivanovich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: borzenko@ftf.tsu.ru

KARYAZOV Svyatoslav Vladimirovich (Candidate of Technical Sciences, Federal State Enterprise the Federal Center for Dual-Use Technologies Soyuz, Dzerzhinskiy, Moscow region, Russian Federation)

SHRAGER Gennady Rafailovich (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: shg@ftf.tsu.ru

REFERENCES

1. Fester V., Slatter P., Alderman N. (2012) Resistance coefficients for non-Newtonian flows in pipe fittings. *Rheology. InTech.* pp. 151–186.
2. Sisavath S., Jing X., Pain C.C., Zimmerman R.W. (2002) Creeping flow through axisymmetric sudden contraction or expansion. *Journal of Fluids Engineering*, *Transactions of the ASME*. 124(1). pp. 273–278. DOI 10.1115/1.1430669.
3. Pienaar V.G. (1998) *Non-Newtonian fitting losses*. Unpublished M Tech. thesis. Cape Technikon. Cape Town.
4. Fester V.G., Kazadi D.M, Mbiya B.M., Slatter P.T. (2007) Loss coefficients for flow of Newtonian and non-Newtonian fluids through diaphragm valves. *Chemical Engineering Research and Design*. 85(9A). pp. 1314–1324. DOI 10.1205/cherd06055.
5. Pienaar V.G. (2004) *Viscous flow through sudden contractions.* Dissertation. Cape Technikon.
6. Andhale V.A., Deshmukh D.S. (2016) Investigation of ball valve design for performance enhancement. *Pratibha: International Journal of Science*, *Spirituality*, *Business and Technology.* 4(2). pp. 105–112.
7. Zhang S.C., Zhang Y.L., Fang Z.M. (2012) Numerical simulation and analysis of ball valve three-dimensional flow based on CFD. *IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science.* 15(5). pp. 1–6. DOI 10.1088/1755-1315/15/5/052024.
8. Godunov S.K., Ryabenkii V.S. (1987) *Difference schemes.* North-Holland: Elsevier Science Ltd.
9. Yanenko N.N. (1971) *The method of fractional steps: the solution of problems of mathematical physics in several variables*. Springer-Verlag.
10. Roache P.V. (1998) *Fundamental of computational fluid dynamics.* New Mexico: Hermosa Publishers.

УДК 532.54
DOI 10.17223/19988621/44/6

С.А. Филимонов, П.А. Необъявляющий, Е.И. Михиенкова

ПРИМЕНЕНИЕ ГИБРИДНОГО АЛГОРИТМА МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМЫ УДАЛЕНИЯ ВРЕДНЫХ ГАЗОВ АЛЮМИНИЕВОГО ПРОИЗВОДСТВА[1]

Рассмотрена задача выравнивания расходов в системе удаления вредных газов из корпуса алюминиевого производства. Решение задачи осуществлялось при помощи гибридного 1D/3D-алгоритма, предназначенного для решения разномасштабных задач гидродинамики. Особенностью данного алгоритма, основанного на SIMPLE-процедуре, является единое уравнение на поправку давления для всей расчетной области. В результате расчета было определено гидравлическое сопротивление выравнивающих заслонок и общее разрежение в системе газоотделения для выравненного варианта.

Ключевые слова: *численное моделирование, вычислительная гидродинамика, теория гидравлических цепей, гибридный 1D/3D-алгоритм, система газоудаления.*

В современном мире численное моделирование играет ведущую роль в исследовании, проектировании и оптимизации различных технологических систем, а также отдельных устройств и механизмов. В сфере моделирования гидродинамических задач исторически сложились два основных относительно независимых подхода.

Первый подход – методы теории гидравлических цепей (ТГЦ) [1, 2], основанные на постулатах Кирхгофа и оперирующие интегральными балансами потоков. Геометрическое представление модели в таком подходе выполнено в виде ориентированно графа [3]. Методы ТГЦ позволяют рассчитать гидравлические, тепловые и массовые потоки в системах большой протяжённости (например, модель теплоснабжения города) при относительно небольших вычислительных затратах. Главным недостатком таких методов является сильная зависимость результата расчёта от эмпирических данных, например коэффициента местного гидравлического сопротивления, коэффициента телепередачи и так далее. Причём при изменении режима течения значение многих коэффициентов приходится пересчитывать.

Вторым подходом является применение методов вычислительной гидродинамики [4–7], при этом пространственные модели позволяют получить поля характеристик системы, распределённые по объёму исследуемого объекта. В основе данных методов лежит численное решение уравнений Навье – Стокса. Сильной стороной пространственного метода является меньшая зависимость модели от эмпирических данных, а основным недостатком – значительные вычислительные затраты.

Однако существует класс задач, в которых применение одного подхода либо невыгодно, либо невозможно. Под этот класс попадают модели систем, которые

[1] Работа выполнена при частичной поддержке проектов РФФИ и Красноярского краевого фонда поддержки научной и научно-технической деятельности.

одновременно состоят из протяжённых сетевых элементов (система кровеносных сосудов, тепловые трассы, русла рек и тому подобное) и пространственных элементов (например, разветвление аорты, сложные раздающие или собирающие устройства, дамбы и тому подобное). При этом сетевые элементы слишком длинные, чтобы их моделировать пространственными методами, а пространственные невозможно представить в виде набора ветвей. Для корректного расчёта процессов, протекающих в таких системах, стали строить гибридные или разномасштабные модели [8–12].

Существуют три основных вида гибридных моделей:

Полностью разделённая модель: пространственная и сетевая части рассчитываются по отдельности. В этом случае по результатам расчёта одной из частей определяют значения входных параметров для другой. Например, определение гидравлического сопротивления сложного пространственного элемента производится путём проведения численного эксперимента, а полученные значения используются в сетевой модели [13,14]. Основным недостатком такого метода является то, что при изменении входных условий возникает необходимость пересчитывать входные параметры заново.

Гидравлически единая модель: пространственная и сетевая части рассчитываются одновременно. Такой подход, по сравнению с предыдущим, удобен тем, что нет необходимости проведения ручного обмена данными, и при изменении граничных условий перерасчёт происходит автоматически. Основная проблема такого подхода – организация гидродинамической связи между двумя частями задачи.

Гидравлически не связанная модель: это модель, в которой сетевые элементы «пронизывают» пространственную часть и связь происходит по интегральным характеристикам стенки трубы/канала, например давлению [15] или тепловому потоку [16].

В данной работе приведён пример применения гибридной модели для оптимизации системы удаления вредных газов из электролизного корпуса алюминиевого завода (второй вид модели). Авторами предложен гибридный алгоритм, в котором связь между различными частями модели осуществляется за счёт построения единого уравнения для расчёта поля давления. Такой подход обеспечивает высокую сходимость по сравнению с традиционными методами решения гибридных задач, предполагающими раздельное решение пространственной и сетевой частей. Ранее был реализован алгоритм для ламинарных течений в микроканалах [17]. Для моделирования в системе удаления вредных газов была реализована возможность расчёта турбулентных режимов течения.

Постановка задачи

В России на долю технологии Содерберга приходится около 85 % производимого алюминия. Данная технология характеризуется более низкой себестоимостью алюминия и более высокими, по сравнению с производством на обожженных анодах, удельными выбросами загрязняющих веществ. Высокие выбросы являются следствием того, что система сбора, эвакуации и очистки анодных газов не всегда обеспечивает их обезвреживание до уровня, определенного нормами предельно допустимых выбросов (ПДВ) и предельно допустимых концентраций загрязняющих веществ. Также вместе с газообразными выбросами происходит и выброс пыли, которая помимо отравляющего действия приводит к зарастанию газоходов и, как следствие, резкому ухудшению их работы. Для наиболее эффективной работы система удаления должна забирать газ от электролизной ванны в строго заданном диапазоне. При меньших объёмах забора анодные газы могут проникать непосредственно в пространство цеха, а при больших может произойти срыв пламени в устройствах дожигания (горелках). Система газоудаления представляет собой сильно разветвлённую сеть типа «дерево», что приводит к задаче выравнивания расхода по всем её уровням.

На рис. 1 показана топологическая схема системы газоходов электролизного корпуса алюминиевого производства, в которой можно выделить несколько подуровней. Обвязка электролизной ванны (рис. 1, *a*): в процессе электролиза выделяются анодные газы (*1*), которые собираются газосборным куполом (*2*). В горелках (*3*), обычно расположенных по углам электролизной ванны, происходит смешение с воздухом (*4*) и сжигание горючих анодных газов и смолистых веществ. Затем продукты сгорания по опускным газоходам (*5*) отводятся под корпус, где попадают в подкорпусные газоходы (*6*). Соединённые одним подкорпусным газоходом ванны образуют бригаду (рис. 1,*c*). От всех бригад корпуса по выносным газоходам вредные газы выводятся за его пределы, после этого собираются выносными газоходами (*7*) в один и поступают в систему газоочистки (*8*). Обычно одна очистная установка обслуживает 2 корпуса (рис. 1, *b*).

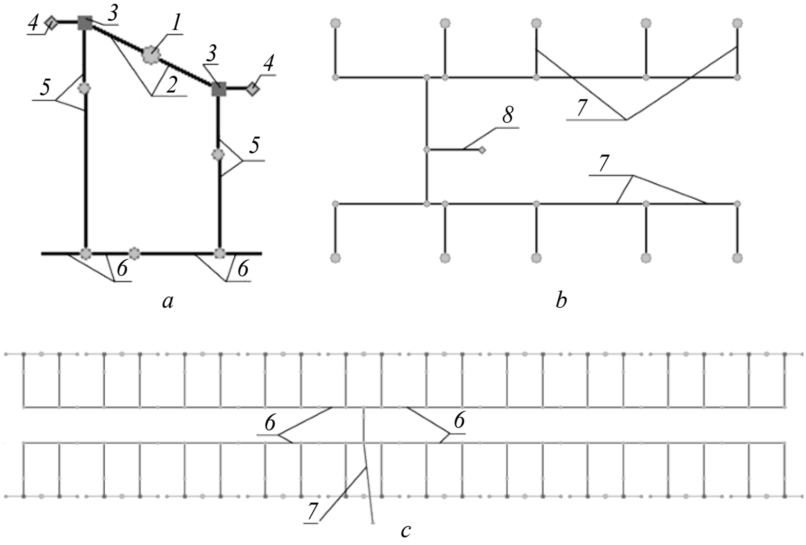

Рис. 1. Система газоходов электролизной серии: *a* – обвязка электролизной ванны: *1* – источник анодных газов, *2* – газосборный колокол, *3* – горелка, *4* – подача воздуха в горелку, *5* – опускные газоходы, *6* – подкорпусной газоход; *b* – бригада электролизных ванн: *6* – система подкорпусных газоходов переменного сечения, *7* – выносной газоход; *c* – система выносных газоходов: *7* – выносные газоходы от двух корпусов, 8 – общий газоход в систему отчистки и дымовую трубу

Fig. 1. System of the gas ducts of a potline: *a*) the electrolysis bath piping: *1*, the source of anode gas; *2*, gas-gathering tank; *3*, burner; *4*, air supply into the burner; *5*, downtaking ducts; and *6*, gas duct under the building. *b)* The group of electrolysis baths: *6*, system of ducts with a variable cross-section under the buildings, and *7*, remote gas duct. *c)* System of the remote gas ducts: *7*, the remote gas ducts of two buildings, and *8*, a general gas duct directed to the purification system and smoke stack

Предприятия российской алюминиевой промышленности регулярно проводят работы по уменьшению концентрации анодного газа внутри корпусов и общему сокращению вредных выбросов в атмосферу [18–21]. Одной из таких работ была модернизация узла сбора анодных газов от нескольких корпусов Красноярского алюминиевого завода на примере 19-го корпуса. Основной целью работы было определение возможности регулирования расходов от каждой бригады корпуса, исходя из условия, что расход от одной ванны находится в диапазоне от 800 до 900 м^3/ч. Электролизные ванны 19-го корпуса разделены на четыре бригады (см. рис. 2). На каждую бригаду приходится разное количество ванн: 1-я и 2-я бригады – 24 ванны, 3-я бригада – 26 ванн и 4-я – 20 ванн. Выравнивание расходов предполагается осуществить с помощью регулирующих заслонок.

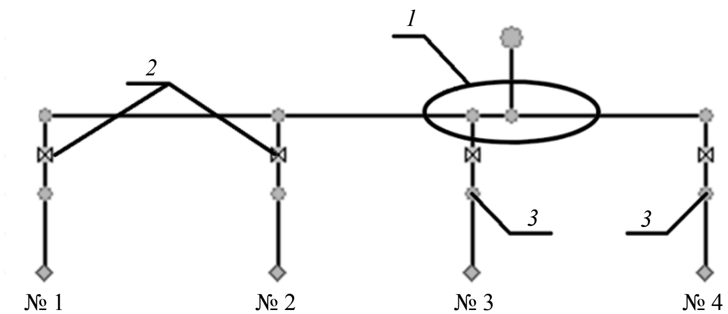

Рис. 2. Система выносных газоходов бригад 19-го корпуса: № 1–4 – номера бригад, *1* – сборный коллектор, *2* – регулирующие заслонки, *3* – точки замера
Fig. 2. System of the remote gas ducts of the groups of the 19th building: 1–4 are the numbers of groups; *1*, gathering manifold; *2*, control damper; and *3*, gage points

Главной особенностью данного выносного газохода является наличие центрального сборного коллектора (пространственная часть представлена на рис. 3), потери давления в котором составляют примерно половину от общей потери давления в исследуемой части системы. В общем случае моделирование такой задачи в рамках одного из основных подходов (полностью 3D или полностью ТГЦ) невозможно. Размер расчётной сетки для построения полностью пространственной модели всего корпуса будет слишком велик, так как длины некоторых участков больше 100 м, также при таком подходе невозможно представить бригаду эквивалентным элементом. В то же время, при построении полностью сетевой модели необходимо определить гидравлическое сопротивление коллектора для разных режимов его работы, что также является достаточно трудоемкой задачей. Конструктивные элементы (отвод от третьей бригады, сборный тройник и диффузор) находятся слишком близко (3 – 5 калибров) и оказывают влияние друг на друга, что делает невозможным расчет их гидравлического сопротивления по справочным данным. Применение разделённой модели для определения гидравлического сопротивления каждого отвода коллектора также не подходит, так как есть предположение, что до и после выравнивания расходов оно будет сильно отличаться. Построение гибридной модели позволяет устранить эти недочеты: протяженные элементы представлены в виде сети, сборный коллектор – в виде пространственного элемента (см. рис. 3), а сопротивление коллектора будет рассчитано для конкретных величин расходов.

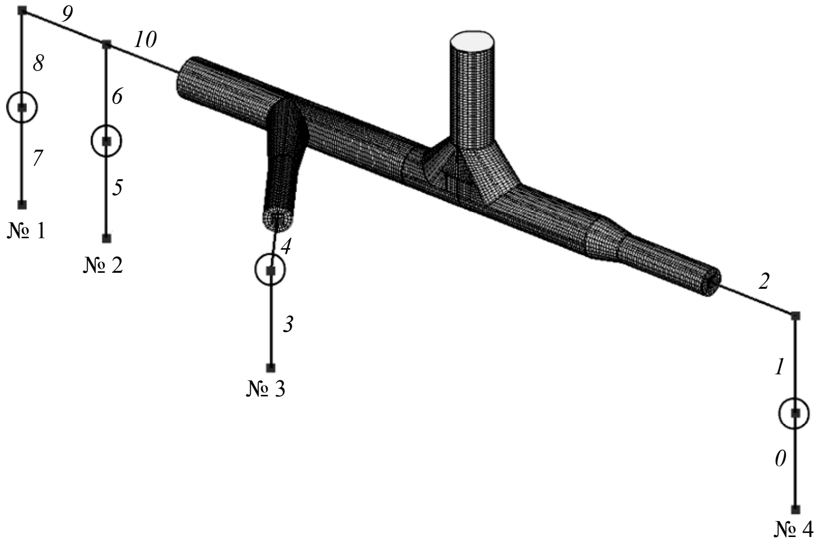

Рис. 3. Гибридная модель системы выносных газоходов 19-го корпуса:
№ 1 – 4 номера бригад, *0–10* – номера ветвей, кругом выделены точки замеров
Fig. 3. Hybrid model of the system of remote gas ducts of the 19th building:
1–4 are the numbers of groups, *0–10* are the numbers of branches;
the circles indicate the gage points

Математическая модель

Реализация предложенного в работе гибридного алгоритма выполнена на базе программного пакета SigmaFlow [22–24], предназначенного для решения широкого спектра задач гидродинамики. Авторы статьи расширили функционал данного пакета на решение сетевых и гибридных задач [16, 17, 25].

Суть методики следующая. Исходная задача разбивается на пространственную и сетевую части, взаимодействие между которыми осуществляется на основе решения общего уравнения на поправку давления.

Для дискретизации уравнений гидродинамики в пространственной области применяется метод контрольного объема, используется неструктурированная сетка из гексаэдральных ячеек, значения искомых переменных определяются в центрах контрольных объемов. Значения величин на гранях контрольных объемов определяются в зависимости от схемы аппроксимации. Течение среды в пространственной части описывается уравнениями Рейнольдса:

$$\nabla(\rho \boldsymbol{v}) = 0\,; \tag{1}$$

$$\nabla(\rho \mathbf{v}\mathbf{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \left(\boldsymbol{\tau}^m + \boldsymbol{\tau}^t\right), \tag{2}$$

где p – давление, $\boldsymbol{v}$ – вектор скорости, ρ – плотность, $\boldsymbol{\tau}^m$ – тензор вязких напряжений и $\boldsymbol{\tau}^t$ – тензор турбулентных напряжений Рейнольдса:

$$\tau_{ij}^m = \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right),$$

$$\tau_{ij}^{t} = \mu_t \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \rho k,$$

где v_i – компоненты вектора скорости, μ и μ_t – молекулярная и турбулентная вязкость жидкости, k – удельная кинетическая энергия турбулентных пульсаций. Для замыкания уравнений при турбулентном режиме течения использовалась модель k–ω SST [26]. Граничные условия для турбулентных характеристик на границе двух частей задач заданы исходя из условий Неймана.

Закон сохранения энергии для пространственной части задачи:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} h) = \nabla(\lambda \nabla T) + \nabla \cdot \left(\frac{\mu_t}{\mathrm{Pr}_t} \nabla h \right), \tag{3}$$

где h – энтальпия, λ – коэффициент теплопроводности, T – температура, μ_t – турбулентная вязкость, $\mathrm{Pr_t}$ – турбулентное число Прандтля.

Для описания сетевой части задачи используются методы ТГЦ [1, 2]. Гидравлическая цепь состоит из набора узлов (N) и ветвей (U), представляющих собой ориентированный граф, матрица связей которого представляется в виде

$$D_{il} = \begin{cases} 1, \text{ если } l \in O_i \\ -1, \text{ если } l \in I_i, \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases} \tag{4}$$

Здесь l – номер ветви, $l \in O_i$ – множество ветвей, исходящих из i-го узла, $l \in I_i$ – множество ветвей, входящих в i-й узел. Используя выражение (4), задачу потокораспределения в сети можно свести к сочетанию закона сохранения массы в узле и закона сопротивления в трубе:

$$\sum_{l \in U_i} D_{il} q_l = Q_i, i \in N, \tag{5}$$

$$s_l |q_l| q_l = \sum_{i \in N} D_{il} p_{Di} + h_l, l \in U, \tag{6}$$

где q_l – массовый поток на ветви, Q_i – источник массы, существующий в узле, p_{Di} – давление в узле, h_l – дополнительный напор ветви, s_l –коэффициент сопротивления, определяемый по следующей формуле:

$$s_l = \left(\xi + \frac{\lambda \cdot l}{d} \right) \frac{1}{2 \cdot \rho \cdot f^2},$$

где λ – коэффициент линейного трения, d – гидравлический диаметр ветви, l – длина ветви, f – площадь сечения трубы, ξ – коэффициент местного сопротивления.

Уравнение энергии для сетевой части задачи представлено в виде

$$h_i \sum_{O} (q_O) = \sum_{I} (q_I h_I) + Q_i h_q + S_{h\_i}, \tag{7}$$

Здесь h_i – энтальпия в i-м узле, O – множество узлов, по которым поток расходится от i-го узла, I – множество ветвей, по которым поток приходит в i-й узел, h_q – энтальпия источника массы, S_{h_i} – тепловой источник (сток) в i-м узле.

Взаимосвязь поля скорости и давления в пространственной части осуществлялся при помощи SIMPLE-подобной процедуры [4]. Для ТГЦ-части задачи SIMPLE-подобный алгоритм был адаптирован следующим образом.

На первом этапе решаем линеаризованное уравнение на расход в трубе (6) и получаем приближенное значение расхода на ветвях:

$$s_l \left| q_l^{k-1} \right| q_l^k = \sum_{i \in N} D_{il} p_{Di}^k + h_l, l \in U, \tag{8}$$

где k – номер итерации. Найденные на первом этапе величины расходов, в общем случае, не удовлетворяют уравнению неразрывности. Для его соблюдения выполняется коррекция, в процессе которой решается уравнение на поправку давления p` и определяется давление на следующей итерации.

$$\sum_{l \in U} D_{jl} \left(\tau_{br} \cdot \sum_{i \in N} D_{il} p'_{Di} \right) = q_j - \sum_{l \in U} D_{jl} q_l^k,\ j \in N, \tag{9}$$

где τ_{br} – коэффициент, равный

$$\tau_{br} = \frac{1}{s_l \left| q_l^k \right|},$$

В правой части уравнений (9) записан баланс расхода для данного контрольного объема или сумма расходов на ветвях, входящих в i-й узел и исходящих из него. Следующий этап – это получение новых значений давления в узлах

$$p^{k+1} = p^k + p', \tag{10}$$

где p^k и p^{k+1} – значения давления на предыдущей и текущей итерации.

Механизм объединения двух частей задачи осуществляется при помощи стыковочных ветвей (см. рис. 4).

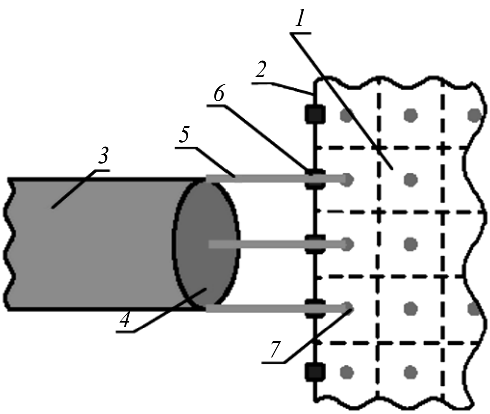

Рис. 4. Механизм объединения двух частей задачи: *1* – пространственная часть задачи, *2* – граница пространственной области, *3* и *4* – ветвь и узел сетевой части задачи, *5* – стыковочная ветвь, *6* – стыковочная грань, *7* – стыковочный контрольный объем

Fig. 4. The process of unification of two parts of the problem: *1*, a spatial part of the problem; *2*, a boundary of the spatial domain; *3–4*, the branch and the node of a network part of the problem, respectively; *5*, coupling branch; *6*, coupling line; and *7*, docking control volume

После расчёта приближенных значений скорости (2) и расхода (6) в разных частях задачи происходит процедура осреднения расхода через стыковочную ветвь *3* и входную границу пространственной области *2* (рис. 4). Для этого от стыковочного узла *4* в каждый граничный контрольный объем пространственной области 5 строится стыковочная ветвь с минимальным гидравлическим сопротивлением

$$q_{\text{branch}(i)} = q^{*}_{\text{interface}(i)} \cdot \frac{Q^{*}_{net} + Q^{*}_{cfd}}{2} \cdot \frac{1}{Q^{*}_{cfd}}, \tag{11}$$

Здесь $q_{\text{branch}(i)}$ – расход по стыковочной ветви, $q^{*}_{interface(i)}$ – расход через стыковочную грань пространственной области (поз. 6 на рис. 4), Q^{*}_{net} – расход по стыковочной ветви, полученный в результате расчёта уравнения (6), Q^{*}_{cfd} – суммарный расход через стыковочные грани – из уравнения (2). Такой подход позволяет сохранить профиль скорости на границе пространственной области, что исключает из результатов решения потерю давления на восстановление формы потока после ударного профиля. Полученный расход $q_{\text{branch}(i)}$ переходит в правую часть уравнения на поправку давления как для стыковочного узла, так и для каждого граничного контрольного объёма. После решения уравнений на поправку давления на стыковочных гранях задаётся среднее значение поправки давления

$$p'_{\text{interface}(i)} = \frac{p'_{\text{net}(i)} + p'_{\text{cfd}(i)}}{2}. \tag{12}$$

Таким образом, предложенный алгоритм имеет вид:

1. Вычисление приближённого значения скорости (2) и расхода (6).
2. Интерполяция расходов между сетевой и пространственной частями (11).
3. Расчет уравнений на поправку давления в пространственной и ТГЦ-частях (9).
4. Задание поправки давления на стыковочных гранях (12).
5. Коррекция скорости в пространственной части.
6. Определение нового поля давления.
7. Решение уравнений модели турбулентности в пространственной подмодели.
8. Проверка критериев сходимости задачи и, при необходимости, запуск следующей итерации с первого пункта.

Результаты

Для определения текущего состояния системы, а также корректного задания параметров и верификации гибридной модели, был проведен ряд замеров на выходе выносных газоходов бригад из-под корпуса. Для измерения статического давления p и динамического напора Δp в газоходах использовался дифференциальный манометр цифровой ДМЦ-01М с трубкой НИИОГАЗ и автоматической температурной коррекцией, температуры газов измерялись хромель-алюмелевой термопарой. Замеры проводились согласно общепринятым методикам [27] на прямых участках газоходных трактов после выхода их из-под корпуса. Для корректного сопоставления результатов объем удаляемых газов приводился к нормальным условиям (0 С; 101,3 кПа). Результаты замеров представлены в табл. 1.

По приведённым в табл. 1 данным бригады можно приближённо представить в виде ветви минимальной длины с заданным коэффициентом местного сопротивления, который определялся по формуле

Таблица 1

Результаты замеров сборных газоходов бригад

Точка замера	Δp, Па	p, Па	T, °С	w, м/с	Q, тыс м^3/час (при ст.у.)
1-я бригада	129.3	590.0	94.0	12.6	16.1
2-я бригада	214.0	988.0	101.0	16.4	20.6
3-я бригада	454.3	1542.0	110.0	24.1	29.6
4-я бригада	156.5	1050.0	127.0	14.5	17.0

$$\xi_i = \frac{2 \cdot p_i}{\rho \cdot w_i^2}, \tag{9}$$

Здесь i – номер бригады, p_i– полное давление на выходе из нее, ρ – плотность газа, w_i – скорость газа на выходе из этой бригады. Из-за большого избытка воздуха в горелках [18] и его присосов в тракте подкорпусных газоходов, свойства газа сопоставимы со свойствами воздуха. Тогда плотность газа принимается как для воздуха со средней температурой 108 °С – ρ = 0,923 кг/м^3. После определения ξ_i переходим к заданию параметров на остальных ветвях модели. Сетевые элементы гибридной модели можно разбить на три группы:

1. Ветви, параметры которых задаются исходя из геометрических характеристик (ветви *2*, *9*, *10*).
2. Ветви, моделирующие область, где будет находиться регулирующая заслонка (ветви *1*, *4*, *6*, *8*). Минимальная длина и сопротивление соответствуют открытой заслонке.
3. Ветви, описывающие бригаду подкорпусного газохода (ветви *0*, *3*, *5*, *7*). Способ определения их параметров описан ниже.

В табл. 2 приведены основные параметры сетевых элементов гибридной модели, шероховатость поверхности труб задавалась равной 1мм согласно справочным данным [28]. Пространственная часть задачи разбита на 85 тыс. гексагональных ячеек (см. рис. 3). Была проведена проверка сетки на насыщение: при сетке 230000 ячеек отличие от модели с грубой сеткой по перепаду давления в пространственной части составило менее ~4 %.

Для расчёта были заданы следующие граничные условия: в крайних узлах сетевых элементов (узлы *1*, *5*, *8* и *11*) задано условие фиксированного избыточного давления – 0 Па, а на выходе – суммарный расход 85000 м^3/ч.

Таблица 2

Параметры сетевых элементов гибридной модели

№ ветви	№ группы	Диаметр, м	Длина, м	Коэф. местного гидравлического сопротивления
0	3	0.82	1	11.37
1	2	0.82	1	0.34
2	1	0.82	135	1.61
3	3	0.82	1	5.75
4	2	0.82	1	0.34
5	3	0.82	1	7.83
6	2	0.82	1	0.34
7	3	0.82	1	7.73
8	2	0.82	1	0.34
9	1	0.82	149	1.63
10	1	1.22	171	4.1

На рис. 5 показано сравнение расходов в расчёте и эксперименте. Максимальное отклонение наблюдается для четвертой бригады и составляет примерно 6 %, что меньше требуемой основной погрешности средств измерения объемного расхода газов на ±10 % (см. РД 52.04.59-85 [29]). Разрежение на выходе из коллектора равно 2416 Па.

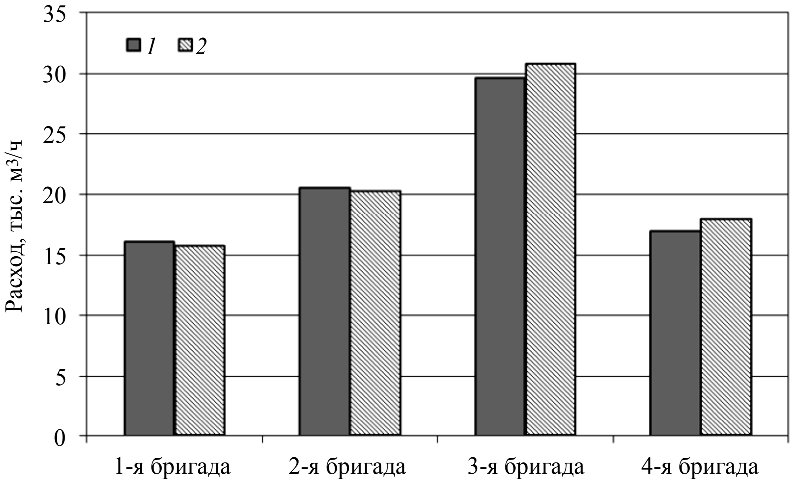

Рис. 5. Сравнение расчётных расходов по бригадам с данными эксперимента: *1* – результаты эксперимента, *2* – результаты расчёта

Fig. 5. Comparison of the predicted flow rates with experimental data for every group: *1*, experimental results and *2*, calculation data

После подтверждения корректности модели была решена задача о выравнивании расходов. Так как выравнивание предполагается осуществлять при помощи регулирующих заслонок, то задача сводится к определению сопротивления заслонок для выравнивания расходов и оценке изменения общего разрежения в системе. Для определения дополнительного сопротивления граничные условия в модели были изменены: в граничных узлах (бригадах) был задан расход, соответствующий среднему расходу на ванну (850 м^3/ч), а на выходе было задано условие фиксированного давления. По разнице между максимальным давлением в одном граничном узле и давлением в других граничных узлах определяется избыток давления, который надо компенсировать заслонкой. Результаты расчёта представлены на рис. 6 и в табл. 3.

Таблица 3

Результаты расчёта и значение сопротивления заслонок

Номер бригады	Расход, м^3/ч (при ст.у.)	Давление в граничном узле, Па	Избыточное давление, Па	Средняя скорость, м/с	Добавочное сопротивление
1-я бригада	20.4	2883	0	16.11	0
2-я бригада	20.4	2208	675	16.11	5.5
3-я бригада	22.1	1415	1468	17.5	10.1
4-я бригада	17	1985	898	13.4	10.6

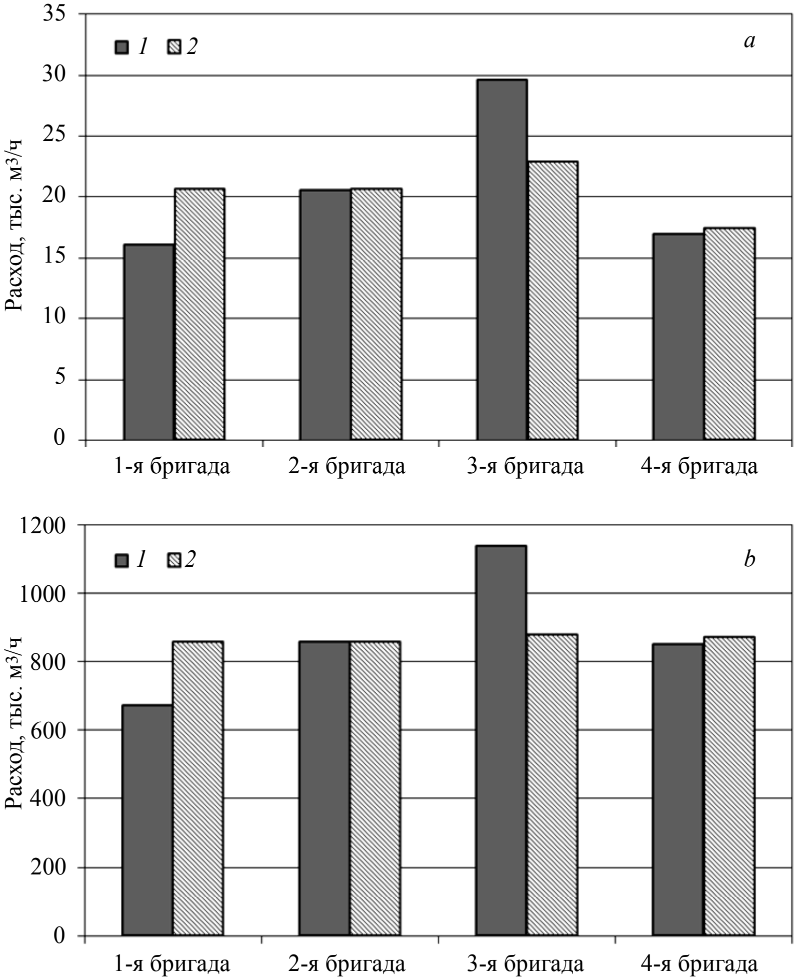

Рис. 6. Распределение расходов по бригадам 19 корпуса: *1* – до выравнивания, *2* – после выравнивания; *a* – по бригаде в целом, *b* – приведено к одной ванне
Fig. 6. Distribution of the flow rates among the groups of the 19th building: *1*, before and *2*, after the flow balance; *a*) for the whole group and *b*) for one bath

На рис. 6, *a* показано распределение расходов по бригадам до и после выравнивания. Как видно из данного рисунка, от каждой бригады отбирается разное количество газа, однако если отбираемый от бригады расход газа привести к количеству ванн в бригаде, то видно, что во всех бригадах у каждой ванны отбирается одинаковое количество газа (рис. 6, *b*). Задав нужное сопротивление на ветви, имитирующее заслонки и вернув прежние граничные условия, провели контрольный расчёт, результаты которого показали совпадение с требуемыми расходами с точностью до 2 %. При этом разрежение на выходе из коллектора выросло с 2416 до 2868 Па, то есть на 20 %. В связи с этим, перед принятием решения о выравнивании расходов нужно убедится в достаточной мощности дымососов.

После задачи выравнивания была поведена проверка изменения гидравлического сопротивления для каждого отвода. Для этого был проведён расчёт сопротивления для каждого отвода до и после выравнивания:

$$\xi_i = \frac{2\Delta p_i}{\rho_i w_i^2}\,. \tag{10}$$

Здесь i – номер входа коллектора, Δp_i – перепад полного давления между i-м входом в коллектор и выходом из него. Результат расчёта представлен в табл. 4.

Таблица 4

Гидравлическое сопротивление отводов коллектора до и после выравнивания расходов газа

Вариант	Сопротивление отводов коллектора		
	1-я, 2-я	3-я	4-я
до	8.9	2.1	15.1
после	8.2	4.4	9.5

Как видно из данной таблицы, для двух отводов бригад (3-я и 4-я) сопротивление отводов изменилось в два раза. Следовательно, процедуру определения гидравлического сопротивления отводов коллектора и их переноса в сетевую модель пришлось бы производить неоднократно, что нивелирует преимущество быстрого счета сетевой модели.

Заключение

Представлено применение гибридной модели для выравнивания расходов газа в выносных газопроводах бригад электролизных ванн 19-го корпуса Красноярского алюминиевого завода. Сравнение результатов расчёта с экспериментальными данными доказало корректность построенной модели.

На основании полученной модели было определено гидравлическое сопротивление, которое необходимо выставить регулирующими заслонками на отводе от каждой бригады. Также расчёт показал, что по сравнению с текущей ситуацией, для выровненной схемы разрежение в системе необходимо повысить на 20 %.

До проведения расчётов было выдвинуто предположение о невозможности расчёта данной задачи только методами пространственного моделирования. Помимо слишком большого количества ячеек в сетке (для решения протяженных участков газоходов), в пространственной модели представление бригады в виде отдельного элемента с заслонкой неизвестной геометрии вызывает определенные трудности.

После решения задачи о выравнивании расходов газа была проведена проверка возможности решения такой задачи при помощи разделённой гибридной модели. Для этого было проведено сравнение гидравлического сопротивления на отводах бригад до и после выравнивания. Результат проверки показал, что на двух отводах произошло изменение сопротивления почти в 2 раза. Следовательно, однократный перенос значений гидравлического сопротивления может привести к существенным погрешностям при расчёте.

На основании вышесказанного был сделан вывод о применимости данного алгоритма для моделирования такого класса задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хасилев В.Я.*, *Меренков А.П.* Теория гидравлических цепей. М.: Наука, 1985.
2. *Новицкий Н.Н.*, *Сеннова Е.В.*, *Сухарев М.Г. и др*. Гидравлические цепи. Развитие теории и приложения. Новосибирск: Наука, 2000.
3. *Уилсон Р.* Введение в теорию графов. М.: Мир, 1977.
4. *Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1980.
5. *Андерсон Д.*, *Таннехилл Дж.*, *Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М.: Мир, 1990.
6. *Ferziger J.H.*, *Peric M.* Computational Methods for Fluid Dynamics 3, rev. edition. Springer, 2002.
7. *Быстров Ю.А.*, *Исаев С.А.*, *Кудрявцев Н.А.*, *Леонтьев А.И.* Численное моделирование вихревой интенсификации теплообмена в пакетах труб. СПб.: Судостроение, 2005.
8. *Formaggia L.*, *Nobile F.*, *Quarteroni A.*, *Veneziani A.* Multiscale modelling of the circulatory system: a preliminary analysis // Computing and Visualization in Science. 1999. V. 2. P. 75–83. DOI: 10.1007/s007910050030.
9. *Harvey Ho. et al.* A hybrid 1d and 3d approach to hemodynamics modelling for a patient-specific cerebral vasculature and aneurysm // Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention – MICCAI 2009. Lecture Notes in Computer Science. 2009. V. 5762. P. 323–330.
10. *Добросердова Т.К.* Численное моделирование кровотока при наличии сосудистых имплантатов или патологий: дис. ... канд. физ.-мат. наук. 2013.
11. *Воеводин А.Ф. Никифоровская В.С.* Численное моделирование неустановившихся гидротермических процессов в водных объектах // Международная конференция «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика», посвященная 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Яненко, 2011.
12. *Twigt D.*, *de Goede E.*, *Zijl F.*, *Chiu A.Y.W.* Coupled 1d–3d hydrodynamic modelling, with application to the pearl river delta // Ocean Dynamics. 2009. V. 59. P. 1077–1093. DOI: 10.1007/s10236-009-0229-y.
13. *Филимонов С.А.*, *Дектерев А.А.*, *Бойков Д.В.* Использование комплексного подхода при исследовании и оптимизации режимов работы систем газоходов // Трубопроводные системы энергетики: Методические и прикладные проблемы моделирования. 2015.
14. *Бойков Д.В. Филимонов С.А.* Моделирование системы смазки редуктора хода экскаватора // Журнал Сибирского федерального университета. Техника и технологии. 2010. Т. 3. № 4. С. 454–462.
15. *D'Angelo C.* Multiscale 1d–3d models for tissue perfusion and applications // 5th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2008). 2008.
16. *Филимонов С.А.*, *Дектерев А.А.*, *Бойков Д.В.* Численное моделирование кожухотрубчатого теплообменника с помощью гибридного алгоритма // Тепловые процессы в технике. 2014. № 8. С. 86–97.
17. *Филимонов С.А.*, *Дектерев А.А.*, *Сентябов А.В*, *Минаков А.В.* Моделирование сопряженного теплообмена в системе микроканалов при помощи гибридного алгоритма // Сиб. журн. индустр. матем. Т. 18. № 3. С. 86–97. 2015. DOI 10.17377/sibjim.2015.18.309.
18. *Сторожев Ю.И.*, *Куликов Б.П.* Пылегазовые выбросы алюминиевых электролизеров с самообжигающимися анодами: монография. Красноярск: Сиб. фед. ун-т, 2012.
19. *Буркат В.С.*, *Друкарев В.А.* Сокращение выбросов в атмосферу при производстве алюминия. СПб., 2005.
20. *Необъявляющий П.А.*, *Дектерев А.А.*, *Гаврилов А.А.*, *Сторожев Ю.И.* Расчетно-экспериментальное исследование горелочного устройства по дожиганию анодного газа // Теплофизика и аэромеханика. 2007. Т. 14. № 1. С. 51–160.
21. *Необъявляющий П.А.*, *Дектерев А.А.*, *Литвинцев К.Ю.* Исследование сложного теплообмена в многокомпонентных газовых смесях в приложении к устройствам сжигания и транспортировки анодных газов электролизного производства алюминия // XIV Мин-

ский международный форум по тепломассообмену: тезисы докладов и сообщений. 2012. № 1. С. 214–216.
22. *Минаков А.В.* Численный алгоритм решения задач гидродинамики с подвижными границами и его тестирование // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 24. № 10. С. 61–72. DOI: 10.7868/S0044466914100111.
23. *Дектерев А.А.*, *Гаврилов А.А.*, *Минаков А.В.* Современные возможности Cfd кода sigmaFlow для решения теплофизических задач // Современная наука: исследования, идеи, результаты, технологии: сб. статей. 2010. Вып. 2(4). С. 117–122.
24. *Гаврилов А.А.*, *Минаков А.В.*, *Дектерев А.А.*, *Рудяк В.Я.* Численный алгоритм для моделирования ламинарных течений в кольцевом канале с эксцентриситетом // Сиб. журн. индустр. матем. 2010. Т. 13. № 4. С. 3–14. DOI: 10.1134/S1990478911040119.
25. *Филимонов С.А.*, *Дектерев А.А.*, *Бойков Д.В.* Гибридный подход для решения задач ТГЦ, содержащих пространственные элементы // Трубопроводные системы энергетики: математическое и компьютерное моделирование. С. 46–55. 2014.
26. *Menter F.R.* Zonal Two Equation *k*–ω Turbulence Models for Aerodynamic Flows // AIAA Paper. 1993. V. 93-2306. DOI: 10.2514/6.1993-2906.
27. *Цибульский В.В.* и др. Методическое пособие по аналитическому контролю выбросов загрязняющих веществ в атмосферу. СПб., 2012.
28. *Идельчик И.Е.* Справочник по гидравлическим сопротивлениям. М.: Машиностроение, 1992.
29. *Руководящий* документ. Охрана природы. Атмосфера. Требования к точности контроля промышленных выбросов. Методические указания. РД 52.04.59-85.

Статья поступила 12.10.16 г.

Filimonov S.A., Neob”yavlyayushchiy P.A., Mikhienkova E.I. AN APPLICATION OF HYBRID SIMULATION ALGORITHM FOR A RESEARCH OF THE DISPOSAL SYSTEM OF NOXIOUS GASES IN ALUMINIUM PRODUCTION. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 6(44). pp. 64–79

DOI 10.17223/19988621/44/6

The article deals with the problem of flow-rate balance in the disposal system of noxious gases from an industrial building of aluminum production. This system appears to be a highly branched network about 2 kilometers long, with the baths arranged into several groups of a various number of baths in each. Our team set a problem aimed at evaluating the possibility of the flow balance between the groups so that the each bath could fall within a fixed volume of the removable gas. Normally, the modeling of such problems applies methods of the theory of hydraulic circuits, which requires the system to be a set of nodes and branches. However, the considered system includes a gathering manifold of a complex geometry, which cannot be represented as a set of network elements. Thus, the solving of the problem was carried out using an original 1D/3D hybrid algorithm intended for solving of the multiscale problems of hydrodynamics. A particular feature of this algorithm, based on a SIMPLE procedure, is a common equation for the pressure correction calculated for the entire computational region. The unification of two parts of the problem in the pressure field allows providing a coherence of the solution, a rapid convergence, and a high speed of calculations in comparison with the usual methods of solving such (multiscale) problems, which suppose the separate use of the spatial and network models interrelated with a data exchange on the contact boundary. As a result of the calculation, the hydraulic resistance of the balancing shutter and the total evacuation in a gas purification system for the balanced version have been determined.

Keywords: numerical modeling, CFD, theory of hydraulic circuits, 1D/3D hybrid method, gas purification system.

FILIMONOV Sergey Anatol’evich (TORINS Ltd., Krasnoyarsk, Russian Federation)
E-mail: bdk@inbox.ru

NEOB"YAVLYAYUSHCHIY Pavel Anatol'evich (TORINS Ltd., Krasnoyarsk, Russian Federation)
E-mail: neopan14@yandex.ru

MIKHIENKOVA Evgeniya Igorevna (Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation)
E-mail: mihienkova_evgeniya@mail.ru

REFERENCES

1. Merenkov A.P., Khasilev V.Ya. (1985) *Teoriya gidravlicheskikh tsepey* [The theory of hydraulic circuits]. Moscow: Nauka.
2. Novitskiy N.N., Sennova E.V., Sukharev M.G., et al. (2000) *Gidravlicheskie tsepi. Razvitie teorii i prilozheniya* [Hydraulic circuits. Development of the theory and applications]. Novosibirsk: Nauka.
3. Wilson R.J. (1985) *Introduction to graph theory*. Longman Group Ltd.
4. Patankar S.V. (1984) *Numerical heat transfer and fluid flow*. Washington: Hemisphere.
5. Anderson D.A., Tannehill J.C., Pletcher R.H. (1984) *Computational fluid mechanics and heat transfer*. New York: Hemisphere.
6. Ferziger J.H., Peric M. (2002) C*omputational methods for fluid dynamics*. 3 ed. Springer.
7. Bystrov Yu.A., Isaev S.A., Kudryavtsev N.A., Leont`ev A.I. (2005) *Chislennoe modelirovanie vikhrevoy intensifikatcii teploobmena v paketakh trub* [Numerical simulation of vortex intensification of the heat exchange in packages of tubes]. St. Petersburg: Sudostroenie.
8. Formaggia L., Nobile F., Quarteroni A., Veneziani A. (1999) Multiscale modelling of the circulatory system: a preliminary analysis. *Computing and Visualization in Science*. 2. pp. 75–83. DOI 10.1007/s007910050030.
9. Ho H. et al. (2009) A hybrid 1D and 3D approach to hemodynamics modelling for a patient-specific cerebral vasculature and aneurysm. *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention–MICCAI 2009*. 5762. pp. 323–330.
10. Dobroserdova T.K. (2013) *Chislennoe modelirovanie krovotoka pri nalichii sosudistykh implantatov ili patologiy* [Numerical modeling of the blood flow under presence of vascular implants or pathology]. Candidate's Dissertation in Mathematics and Physics. Moscow.
11. Voevodin A.F., Nikiforovskaya V.S. (2011) Chislennoe modelirovanie neustanovivshikhsya gidrotermicheskikh protsessov v vodnykh ob"ektakh [Numerical modeling of unsteady-state hydrothermal processes in water objects]. International Conference "Modern Problems of Applied Mathematics and Mechanics: Theory, Experiment, and Practice" Dedicated to the 90th Anniversary of Academician N.N. Yanenko. Novosibirsk.
12. Twigt D., de Goede E., Zijl F., Chiu A.Y.W. (2009) Coupled 1D–3D hydrodynamic modelling, with application to the Pearl River delta. *Ocean Dynamics*. 59. pp. 1077–1093. DOI 10.1007/s10236-009-0229-y.
13. Filimonov S.A., Dekterev A.A., Boykov D.V. (2015) Ispol'zovanie kompleksnogo podkhoda pri issledovanii i optimizatsii rezhimov raboty sistem gazokhodov [Using an integrated approach in the study and optimization of operating modes of flues system]. *Truboprovodnye sistemy energetiki: Metodicheskie i prikladnye problemy modelirovaniya – Pipeline energy systems: Methodological and applied problems of simulation*.
14. Boykov D.V. Filimonov S.A. (2010) Modelirovanie sistemy smazki reduktora khoda ekskavatora [Modeling the lubricating system of the reducer of the excavator move]. *Zhurnal Sibirskogo federal'nogo universiteta: Tekhnika i tekhnologii – Journal of Siberian Federal University. Engineering & Technologies*. 3(4). pp. 454–462.
15. D'Angelo C. (2008) Multiscale 1D-3D models for tissue perfusion and applications. *Proc. 5th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2008).*
16. Filimonov S.A., Dekterev A.A., Boykov D.V. (2014) Chislennoe modelirovanie kozhukhotrubchatogo teploobmennika s pomoshch`yu gibridnogo algoritma [Numerical

simulation of shell-and-tube heat exchanger using a hybrid algorithm]. *Teplovye protsessy v tekhnike – Thermal processes in engineering*. 8. pp. 86-97.
17. Filimonov S.A., Dekterev A.A., Sentyabov A.V, Minakov A.V. (2015) Modelirovanie sopryazhennogo teploobmena v sisteme mikrokanalov pri pomoshchi gibridnogo algoritma [Modeling of conjugate heat transfer in a system of microchannels using a hybrid algorithm]. *Sibirsky zhurnal industrial'noy matematiki – Siberian journal of industrial mathematics*. 18(3). pp. 86–97. DOI 10.17377/sibjim.2015.18.309.
18. Storozhev Yu.I. Kulikov, B.P. (2012) *Pylegazovye vybrosy alyuminievykh elektrolizerov s samoobzhigayushchimisya anodami* [Dust and gas emissions of aluminum electrolyzers with self-baking anodes]. Krasnoyarsk: SFU.
19. Burkat V.S. Drukarev V.A. (2005) *Sokrashchenie vybrosov v atmosferu pri proizvodstve alyuminiya* [Reducing emissions to the atmosphere during aluminium production]. St. Petersburg.
20. Neob''yavlyayushchiy P.A., Dekterev A.A., Gavrilov A.A., Storozhev Yu.I. (2007) Raschetno-eksperimental'noe issledovanie gorelochnogo ustroystva po dozhiganiyu anodnogo gaza [Numerical and experimental investigation of burner device for anode gas reburning]. *Teplofizika i aeromekhanika – Thermophysics and Aeromechanics*. 14(1). pp. 51–160.
21. Neob''yavlyayushchiy P.A., Dekterev A.A., Litvintsev K. Yu. (2012) Issledovanie slozhnogo teploobmena v mnogokomponentnykh gazovykh smesyakh v prilozhenii k ustroystvam szhiganiya i transportirovki anodnykh gazov elektroliznogo proizvodstva alyuminiya [The study of a complex heat transfer in multicomponent gas mixtures in application to the devices of burning and transportation of anode gases of electrolysis aluminum production]. *Tezisy dokladov i soobshcheniy. XIV Minskiy mezhdunarodnyy forum po teplomassoobmenu – The theses of reports and messages. XIV Minsk international forum on heat and mass transfer*. 1. pp. 214–216.
22. Minakov A.V. (2014) Chislennyy algoritm resheniya zadach gidrodinamiki s podvizhnymi granitsami i ego testirovanie [Numerical algorithm for moving-boundary fluid dynamics problems and its testing]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki – Computational mathematics and mathematical physics*. 24(10). pp. 1618–1629. DOI 10.7868/S0044466914100111.
23. Dekterev A.A., Gavrilov A.A., Minakov A.V. (2010) Sovremennye vozmozhnosti Cfd koda sigmaFlow dlya resheniya teplofizicheskikh zadach [Up-to-date features of the CFD code SigmaFlow for solving the thermal physical problems]. *Sovremennaya nauka: issledovaniya, idei, rezul'taty, tekhnologii. Sbornik statey*. 4(2). pp.117–122.
24. Gavrilov A.A., Minakov A.V., Dekterev A.A., Rudyak V.Ya. (2011) A numerical algorithm for modeling laminar flows in an annular channel with eccentricity. *Journal of Applied and Industrial Mathematics.* 5 (4). pp. 559–568. DOI 10.1134/S1990478911040119.
25. Filimonov S.A., Dekterev A.A., Boykov D.V. (2014) Gibridnyy podhod dlya resheniya zadach TGTS, soderzhashchikh prostranstvennye elementy [A hybrid approach for solving problems of THC containing spatial elements]. *Truboprovodnye sistemy energetiki: matematicheskoe i komp'yuternoe modelirovanie – Pipeline system energy: mathematical and computer modeling*. pp. 46–55.
26. Menter F.R. (1993) Zonal two equation k–ω turbulence models for aerodynamic flows. *AIAA Paper*. 93-2306. DOI 10.2514/6.1993-2906.
27. Tsibulskiy V.V. et al. (2002) *Metodicheskoe posobie po analiticheskomu kontrolyu vybrosov zagryaznyayushchikh veshchestv v atmosferu* [Textbook for analytical control of contaminating emissions into the atmosphere]. St. Petersburg.
28. Idel'chik I.E. (1992) *Spravochnik po gidravlicheskim soprotivleniyam* [Handbook of hydraulic resistance]. Moscow: Mashinostroenie.
29. Rukovodyashchiy dokument. Okhrana prirody. Atmosfera. Trebovaniya k tochnosti kontrolya promyshlennykh vybrosov. Metodicheskie ukazaniya [Guidance document. Protection of the nature. Atmosphere. Accuracy requirements for monitoring of industrial emissions. HOWTO]. RD 52.04.59-85.

УДК 629.783
DOI 10.17223/19988621/44/7

В.И. Халиманович

ВЛИЯНИЕ ЗОЛОТОГО ПОКРЫТИЯ НА МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МИКРОПРОВОЛОКИ, ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ДЛЯ ВЯЗАНИЯ КРУПНОГАБАРИТНЫХ ТРАНСФОРМИРУЕМЫХ АНТЕНН

Теоретически рассмотрено влияние толщины золотого покрытия на диаграмму изгиба вольфрамовой микропроволоки диаметром 15 мкм. Показано, что покрытие толщиной примерно до 2 мкм практически не сказывается на диаграмме изгиба вольфрамовой микропроволоки, а следовательно, практически не должно сказываться на физико-механических свойствах отражающей поверхности антенны, связанной из такой микропроволоки.

Ключевые слова: *трансформируемая антенна*, *радиоотражающая поверхность*, *вольфрамовая микропроволока*, *золотое покрытие.*

Трикотажные материалы из микропроволок широко используются в космической технике в качестве отражающей поверхности (ОП) рефлекторных трансформируемых параболических антенн [1]. Для увеличения отражающих свойств антенны и улучшения ее радиотехнических характеристик микропроволока обычно покрывается слоем золота толщиной примерно 0,2 мкм. Однако, как показывают теоретические расчеты и экспериментальные исследования [2], при попадании крупногабаритной антенны в струи стационарных плазменных двигателей спутников происходит распыление (эрозия) золотого покрытия, величина эрозии при этом может достигать нескольких микрон. Поскольку толщина покрытия, определяющая коэффициент отражения радиоотражающей поверхности, составляет десятые доли микрона, эрозионное воздействие указанных струй может существенно снизить эффективность антенны. В связи с этим требуется увеличить толщину покрытия, как минимум, до 1 мкм или даже выше. Золото очень пластичный металл. Поэтому возникают сомнения, примет ли позолоченная микропроволока в сетеполотне при раскрытии антенны свою первоначальную форму. Иначе произойдет отклонение формы ОП от заданной и нарушится ее работа. Кроме того, не исключено, что покрытие таким слоем золота может изменить пластическую деформацию микропроволоки при вязании и тем самым нарушить отработанный процесс вязания. Поскольку крупногабаритные антенны в настоящее время вяжутся из вольфрамовой микропроволоки диаметром 15 мкм, потребовалась оценка влияния золотого покрытия толщиной 1 мкм и выше на изгибающий момент такой микропроволоки, на ее способность восстанавливать свою форму после изгиба и на оценку величины ее остаточной деформации после пластического изгиба.

Для оценки нужно знать значения модулей упругости E и предела текучести $\sigma_т$ золота и вольфрама. Для золота значение модуля упругости (модуля Юнга) $E_з = 0.81\cdot10^5$ МПа, значение предела текучести $\sigma_{т.з}$ – 30 МПа [3], для вольфрамовой проволоки $E_в = 3{,}5\cdot10^5$ МПа, предел текучести $\sigma_{т.в}$ – 2200 МПа [4].

Начиная с предела текучести удлинение образца растет при сравнительно мало меняющейся по величине растягивающей силы, поэтому в первом приближении будем принимать, что после достижения предела текучести напряжение в этих двух материалах не меняется и остается равным пределу текучести. Относительное удлинение, соответствующее пределу текучести, обозначим для золота $\varepsilon_{т.з}$, для вольфрама $\varepsilon_{т.в}$. Согласно принятой модели, при $\varepsilon \geq \varepsilon_т$ напряжение σ не меняется с увеличением ε и остается равным $\sigma_т$.

Микропроволока, покрытая золотом, состоит из сплошного вольфрамового стержня диаметром d и золотой «трубки» внешним диаметром D и внутренним d, «надетой» на этот стержень (рис. 1, *a*). При изгибе микропроволоки изгибающим моментом $M_х$ слои микропроволоки, находящиеся выше оси Z, растягиваются, нижние сжимаются, длина оси Z (нейтральной оси) остается неизменной. Поскольку усилия растяжения сетеполотна в антенне сравнительно невелики, будем рассматривать чистый изгиб. При чистом изгибе нейтральная ось совпадает с центральной осью золоченой микропроволоки.

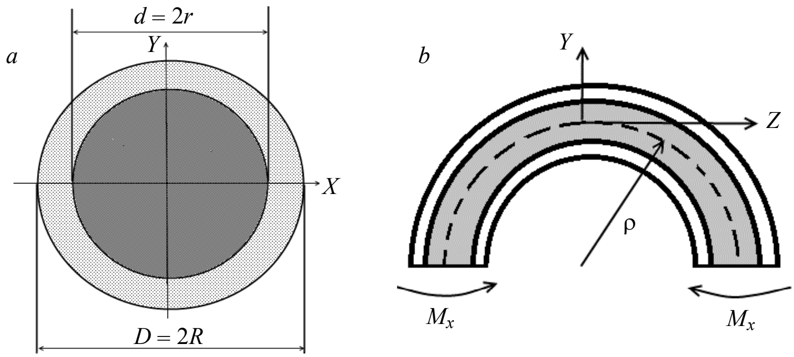

Рис. 1. Микропроволока из сплошного вольфрамового стержня
Fig. 1. Microwire made of a solid tungsten rod

Обозначим радиус кривизны нейтральной оси через ρ (рис. 1, *b*). Как известно, между изгибающим моментом M_x и радиусом кривизны ρ нейтральной линии при нахождении материала стержня в состоянии упругости существует следующая зависимость [4]:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E J_x}. \tag{1}$$

Здесь E – модуль упругости материала (модуль Юнга), J_x – главный центральный момент инерции относительно оси X (относительно нее изгибается микропроволока). Он зависит от вида стержня. Для сплошного стержня $J_{xв} = \frac{\pi d^4}{64}$, для трубки $J_{xз} = \frac{\pi}{64}\left(D^4 - d^4\right) = \frac{\pi D^4}{64}\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right]$ [4].

Направим оси Y и X вдоль радиуса поперечного сечения микропроволоки, начало координат поместим на нейтральной оси. Известно, что относительная деформация слоя, находящегося на расстоянии y от нейтральной оси, рассчитывается по формуле $\varepsilon = y/\rho$ [4]. Если $\varepsilon \leq \varepsilon_т$, то по закону Гука

$$\sigma = E\varepsilon = Ey/\rho, \tag{2}$$

а при $\varepsilon \geq \varepsilon_т$ величина $\sigma = \sigma_т$.

Согласно формуле (1), увеличение изгибающего момента M_x приводит к уменьшению радиуса кривизны ρ микропроволоки и, следовательно, согласно формуле (2), – к увеличению σ, причем тем большему, чем больше y. При радиусе кривизны $\rho_{кр.з} = E_з R/\sigma_{т.з} = E_з D/(2\sigma_{т.з})$, начинается пластическая деформация золота, а при $\rho_{кр.в} = E_в r/\sigma_{т.в} = E_в d/(2\sigma_{т.в})$ – пластическая деформация вольфрама.

При $\rho < \rho_{кр}$ пластическая деформация перемещается вглубь материала. Граница раздела между пластически и упруго деформированным материалом определяется величиной $y_{гр} = \sigma_т \cdot \rho/E$.

Разделим диапазон изменения ρ на три поддиапазона:

1. Первый – $\rho \geq \rho_{кр.з}$.

В этом поддиапазоне как золото, так и вольфрам деформируются упруго и изгибающие моменты для них рассчитываются по формуле (1) с соответствующим выражением для J_x.

Тогда, согласно формуле (1), для этого диапазона имеем

$$M_{xв1} = \frac{E_в J_{xв}}{\rho} = \frac{E_в \pi d^4}{64\rho} \quad \text{(для вольфрама);}$$

$$M_{xз1} = \frac{E_з J_{xз}}{\rho} = \frac{E_з \pi (D^4 - d^4)}{64\rho} \quad \text{(для золота).}$$

Результирующий изгибающий момент для этого поддиапазона

$$M_{x1} = M_{xв1} + M_{xз1}$$

2. Второй поддиапазон $\rho_{кр.з} \geq \rho \geq \rho_{кр.в}$.

В этом поддиапазоне золотая «трубка» при $y < y_{гр.з}$ деформирована упруго, а при $y > y_{гр.з}$ – пластически, вольфрам же во всем этом диапазоне деформирован упруго. Поэтому, как и ранее, для вольфрама имеем

$$M_{xв2} = \frac{E_в J_{xв}}{\rho} = \frac{E_в \pi d^4}{64\rho}.$$

Рассчитаем изгибающий момент для золотой «трубки» (рис. 2, *а*).

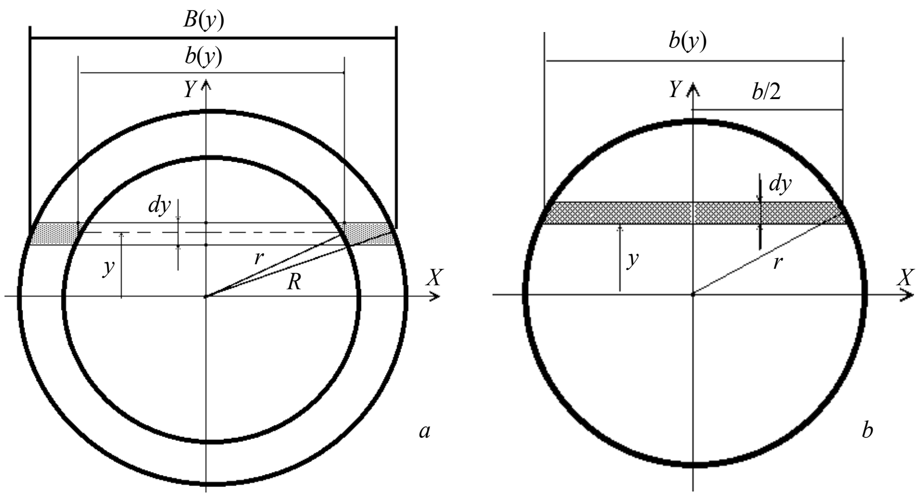

Рис. 2. Расчет изгибающего момента для золотой «трубки»
Fig. 2. Calculation of the bending moment for a gold "tube"

Разделим поперечное сечение «трубки» на узкие полоски шириной dy. Нагрузка в этой полоске приходится только на заштрихованные участки. В верхней половине поперечного сечения «трубки» в заштрихованных участках возникает нормальная растягивающая сила $dN = \sigma[B(y) - b(y)]dy$. Такая же по величине нагрузка, только сжимающая, возникает в аналогичной полоске, симметрично расположенной ниже оси X. Эти две силы создают изгибающий момент $dM_{xз2} = 2\sigma[B(y) - b(y)]dy$.

Величины $B(y)$ и $b(y)$ находим по теореме Пифагора:

$$B(y) = 2\sqrt{R^2 - y^2}\ ;\ b(y) = 2\sqrt{r^2 - y^2}$$

и тогда
$$M_{xз2} = 4\int_0^R \sigma y\left(\sqrt{R^2 - y^2} - \sqrt{r^2 - y^2}\right)dy.$$

Поскольку величина σ меняется по разным законам в упругой и пластической областях, этот интеграл разбиваем на два:

$$M_{xз2} = 2\int_0^R \sigma y[B(y) - b(y)]dy =$$

$$= 2\int_0^{y_{гр.з}} \frac{E_з y}{\rho} y[B(y) - b(y)]dy + 2\int_{y_{гр.з}}^R \sigma_{т.з} y[B(y) - b(y)]dy =$$

$$= \frac{4 \cdot E_з}{\rho}\int_0^{y_{гр.з}} y^2\left(\sqrt{R^2 - y^2} - \sqrt{r^2 - y^2}\right)dy + 4\int_{y_{гр.з}}^R \sigma_{т.з} y\left(\sqrt{R^2 - y^2} - \sqrt{r^2 - y^2}\right)dy =$$

$$= \frac{4E_з}{\rho}\left[\frac{2y_{гр.з}^3 - R^2 y_{гр.з}}{8}\sqrt{R^2 - y_{гр.з}^2} - \frac{2y_{гр.з}^3 - r^2 y_{гр.з}}{8}\sqrt{r^2 - y_{гр.з}^2}\right] +$$

$$+ \frac{4E_з}{\rho}\left[\frac{R^4}{8}\arcsin\left(\frac{y_{гр.з}}{R}\right) - \frac{r^4}{8}\arcsin\left(\frac{y_{гр.з}}{r}\right)\right] + \frac{4}{3}\sigma_{т.з}\left[\sqrt{(R^2 - y_{гр.з}^2)^3} - \sqrt{(r^2 - y_{гр.з}^2)^3}\right].$$

Величина $y_{гр.з} = \sigma_{т.з}\,\rho/E_з$. Результирующий изгибающий момент для этого поддиапазона $M_{x2} = M_{xв2} + M_{xз2}$.

3. Третий поддиапазон $\rho \le \rho_{кр.в}$.

В этом поддиапазоне золотая «трубка» при $y < y_{гр.з}$ деформирована упруго, а при $y > y_{гр.з}$ – пластически. Изгибающий момент для нее рассчитывается по той же формуле, что и в поддиапазоне 2:

$$M_{xз3} = \frac{4E_з}{\rho}\left[\frac{2y_{гр.з}^3 - R^2 y_{гр.з}}{8}\sqrt{R^2 - y_{гр.з}^2} - \frac{2y_{гр.з}^3 - r^2 y_{гр.з}}{8}\sqrt{r^2 - y_{гр.з}^2}\right] +$$

$$+ \frac{4E_з}{\rho}\left[\frac{R^4}{8}\arcsin\left(\frac{y_{гр.з}}{R}\right) - \frac{r^4}{8}\arcsin\left(\frac{y_{гр.з}}{r}\right)\right] + \frac{4}{3}\sigma_{т.з}\left[\sqrt{(R^2 - y_{гр.з}^2)^3} - \sqrt{(r^2 - y_{гр.з}^2)^3}\right].$$

Вольфрам при $y < y_{гр.в}$ деформирован упруго, а при $y > y_{гр.в}$ – пластически. Момент $M_{xв3}$, изгибающий его, рассчитывается по формуле:

$$M_{xв3} = 2\int_0^r \sigma y b(y)\,dy\,.$$

По теореме Пифагора имеем $b(y)/2 = \sqrt{r^2 - y^2} \rightarrow b(y) = 2\sqrt{r^2 - y^2}$.

Как и для золотой «трубки», приведенный интеграл разбивается на 2 интеграла:

$$M_{x\text{в}3} = 2\int_0^r \sigma y b(y)dy = \frac{4E_\text{в}}{\rho}\int_0^{y_{\text{гр.в}}} y^2\sqrt{r^2-y^2}\,dy + 4\int_{y_{\text{гр.в}}}^{r} \sigma_{\text{т.в}} y\sqrt{r^2-y^2}\,dy =$$

$$= \frac{4E_\text{в}}{\rho}\left[\frac{2x^3-r^2x}{8}\sqrt{r^2-x^2}+\frac{r^4}{8}\arcsin\left(\frac{x}{r}\right)\right]_0^{y_{\text{гр.в}}} + 2\sigma_{\text{т.в}}\int_{y_{\text{гр.в}}}^{r}\sqrt{r^2-y^2}\,d(y^2) =$$

$$= \frac{E_\text{в}}{2\rho}\left[\left(2y_{\text{гр.в}}^3 - r^2 y_{\text{гр.в}}\right)\sqrt{r^2-y_{\text{гр.в}}^2} + r^4\arcsin\left(\frac{y_{\text{гр.в}}}{r}\right)\right] - \frac{4}{3}\sigma_{\text{т.в}}\sqrt{(r^2-y^2)^3}\,\Big|_{y_{\text{гр.в}}}^{r} =$$

$$= \frac{E_\text{в}}{2\rho}\left[\left(2y_{\text{гр.в}}^3 - r^2 y_{\text{гр.в}}\right)\sqrt{r^2-y_{\text{гр.в}}^2} + r^4\arcsin\left(\frac{y_{\text{гр.в}}}{r}\right)\right] + \frac{4}{3}\sigma_{\text{т.в}}\sqrt{(r^2-y_{\text{гр.в}}^2)^3}.$$

Здесь $y_{\text{гр.в}} = \sigma_{\text{т.в}}\,\rho/E_\text{в}$. Результирующий изгибающий момент для этого поддиапазона $M_{x3} = M_{x\text{в}3}+M_{x\text{з}3}$.

По полученным формулам с помощью программы построена зависимость между изгибающим моментом M_x и кривизной $1/\rho$ вольфрамовой микропроволоки диаметром 15 мкм (рис. 3). Зависимость для позолоченного вольфрама изображается точками, для непозолоченного – сплошной линий. Сравнивая эти две зависимости видим, что золотое покрытие такой толщины практически не сказывается на указанной зависимости.

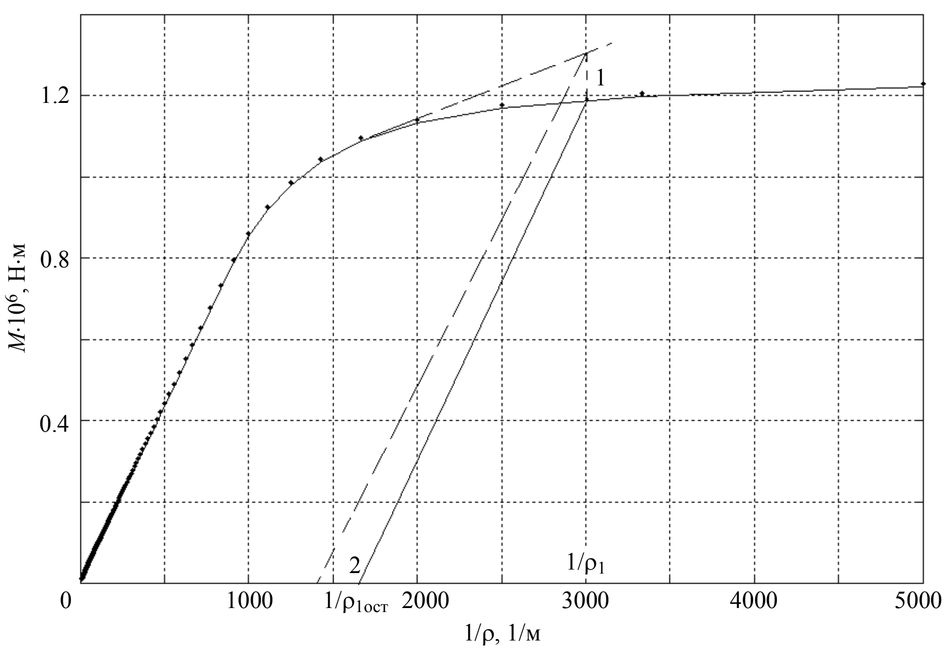

Рис. 3. Диаграмма изгиба вольфрамовой микропроволоки ∅15 мкм без покрытия (сплошная линия) и с покрытием толщиной 1 мкм (точки)
Fig. 3. Bending diagram of a 15-μm diameter tungsten microwire: uncoated (solid line) and with a 1-μm-thick coating (dotted line)

После снятия изгибающего момента при наличии пластики появляется остаточная деформация, выраженная в том, что проволока после снятия нагрузки не становится как ранее прямой, а у нее появляется остаточная кривизна (ρ – радиус кривизны, $1/\rho$ – кривизна). Определяется остаточная кривизна следующим образом. Пусть непокрытая золотом вольфрамовая проволока изогнута до кривизны $1/\rho_1$ (рис.3). Из точки 1, соответствующей кривизне $1/\rho_1$ на зависимости $M(1/\rho)$, проводим прямую, параллельную участку упругой нагрузки. Точка пересечения этой прямой с осью $1/\rho$ (точка 2) и даст значения $1/\rho_{1ост}$. Поскольку зависимости $M(1/\rho)$ для позолоченного и непозолоченного вольфрама практически одинаковы, $1/\rho_{1ост}$ также будут практически одинаковы, будут практически одинаковы и $\rho_{1ост}$.

Оценочные расчеты проводились для случая наличия на диаграмме растяжения как золота, так и вольфрама площадки текучести. Если же площадка текучести отсутствует, а имеет место некоторое упрочнение материала, то это приведет к некоторому уменьшению остаточной кривизны, как показано на рис. 3 пунктирной линией, однако разницы между непокрытым и покрытом золотом вольфрамом снова не будет, так как наличие золотого покрытия такой толщины практически не скажется на зависимости $M(1/\rho)$.

На рис. 4 представлены диаграммы изгиба $M(1/\rho)$ вольфрамовой микропроволоки диаметром 15 мкм без покрытия (кривая *1*), с покрытием золотом толщиной 2 мкм (кривая *2*) и толщиной 5 мкм (кривая *3*).

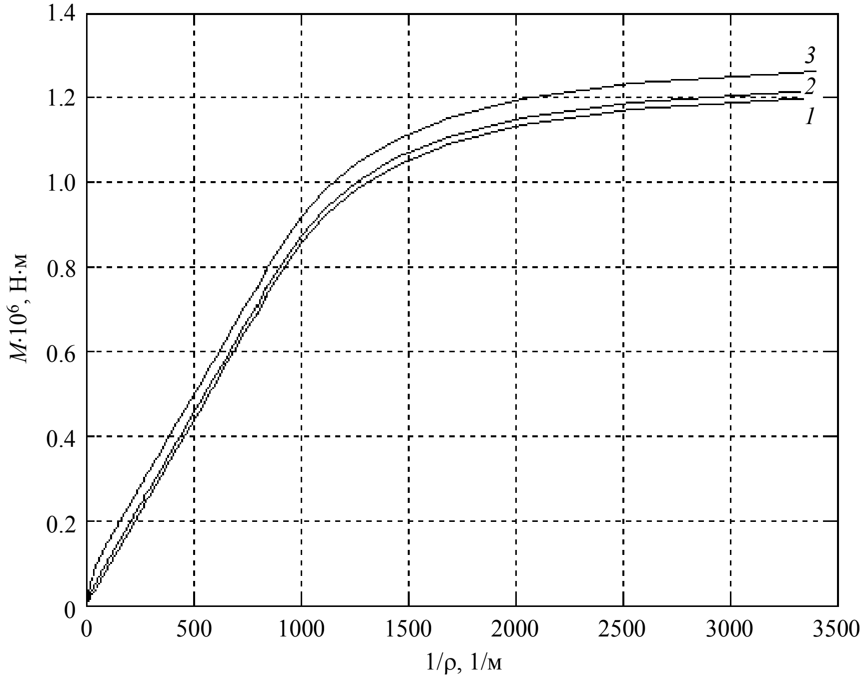

Рис. 4. Диаграмма изгиба вольфрамовой микропроволоки диаметром 15 мкм: кр. *1* – без покрытия, кр. *2* – покрытие толщиной 2 мкм, кр. *3* – покрытие толщиной 5 мкм

Fig. 4. Bending diagram of a 15-μm diameter tungsten microwire in: (*1*) uncoated, with a (*2*) 2-μm-thick coating, and (*3*) 5-μm-thick coating

Выводы

Из приведенных на рис. 4 графиков видно, что покрытие микропроволоки золотом толщиной примерно до 2 мкм мало сказывается на диаграмме изгиба. Дальнейшее утолщение покрытия уже более существенно влияет на диаграмму. Однако при этом следует учесть, что расчеты проводились для монолитного золота. Нанесение золотого покрытия на микропроволоку проводилось химическим способом. Структура такого золотого покрытия может быть более рыхлой и иметь меньший модуль упругости и меньший предел текучести, чем у монолитного золота, что должно приводить к меньшему влиянию золотого покрытия на механические свойства микропроволоки. Поэтому не исключено, что нанесение покрытия даже сравнительно большой толщины может мало сказаться на диаграмме изгиба. Однако поскольку физико-механические свойства такого покрытия неизвестны, для более точного прогноза необходимо проведение экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беляев О.Ф., Заваруев В.А., Кудрявин Л.А., Подшивалов С.Ф., Халиманович В.И.* Трикотажные металлические сетеполотна для отражающей поверхности трансформируемых наземных и космических антенн // Технический текстиль. 2007. № 16. С. 59–64.
2. *Надирадзе А.Б., Шапошников В.В., Смирнов В.А. и др.* Исследование эрозионного воздействия струй стационарных плазменных двигателей на радиоотражающее сетеполотно крупногабаритных антенн космических аппаратов // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета имени академика М.Ф. Решетнева. 2008. № 4. С. 120–124.
3. *Шлычкова В.С., Старченко И.П.* Ювелирные технологии. Влияние легирующих добавок на свойства золота [Электронный ресурс]. URL: jewelpreciousmetal.ru/technology_metallurgy_goldligatureinfluence.php
4. *Справочник* по цветным металлам [Электронный ресурс]. URL: https://libmetal.ru/prop/prop%201.htm

Статья получена 20.11.2016 г.

Khalimanovich V.I. EFFECT OF A GOLD COATING ON THE MECHANICAL PROPERTIES OF A MICROWIRE, APPLIED FOR KNITTING OF THE LARGE TRANSFORMABLE ANTENNAS. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 6(44). pp. 80–87

DOI 10.17223/19988621/44/7

Knitted materials made of a microwire are widely used in space systems as reflecting surfaces of transformable parabolic reflector antennas. To increase the reflecting properties and improve the radio-technical characteristics of the antenna, the microwire is usually covered with a gold layer of about 0.2 microns thick. However, according to the theoretical calculations and experimental investigations, when a large antenna hits streams of stationary plasma engines of the satellites, the dispersion (erosion) of the gold covering occurs. The erosion magnitude can reach several microns. Since the covering thickness which defines the reflection factor of the radar-reflecting surface is about one-tenth of a micron, the erosivity of the specified streams can significantly reduce the efficiency of the antenna. In this regard, an increase in the coating thickness to at least 1 micron or even more is required. Since large antennas are knitted from a tungsten microwire with 15 microns in diameter, it is necessary to estimate the effect of the gold covering of 1 micron thick or more on the bending moment of such microwires, shape recoverability after a bend, and permanent deformation after a plastic bending.

In this paper, the effect of the gold coating thickness on the bending diagram of a tungsten microwire of 15 microns in diameter is theoretically considered. It has been revealed that the coating of about 2 microns thick has essentially no effect on the bending diagram of the tungsten microwire and, therefore, does not significantly affect the physical–mechanical properties of the reflecting surface of antennas knitted from such a microwire.

Keywords: transformable antenna, radar–reflecting surface, tungsten microwire, gold coating.

KHALIMANOVICH Vladimir Ivanovich (Candidate of Physics and Mathematics,
JSC «Academician M.F. Reshetnev «Information Satellite Systems» (ISS))

REFERENCES

1. Belyaev O.F., Zavaruev V.A., Kudryavin L.A., Podshivalov S.F., Khalimanovich V.I. (2007) Trikotazhnye metallicheskie setepolotna dlya otrazhayushchey poverkhnosti transformiruemykh nazemnykh i kosmicheskikh antenn [Knitted metal meshes for the reflecting surface of the transformable terrestrial and space antennas]. *Tekhnicheskiy tekstil' – Technical textile*. 16. pp. 59–64.
2. Nadiradze A.B., Shaposhnikov V.V., Smirnov V.A., Maksimov I.A., Kochura S.G. (2008) Issledovanie erozionnogo vozdeystviya struy statsionarnykh plazmennykh dvigateley na radiootrazhayushchee setepolotno krupnogabaritnykh antenn kosmicheskikh apparatov [The research of the erosive impact by the stationary plasma engine jets on the radio-reflective mesh of the spacecraft large-sized antennas]. *Vestnik Sibirskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta imeni akademika M.F. Reshetneva – Vestnik SibSAU*. 4. pp. 120–124.
3. Shlychkova V.S., Starchenko I.P. Vliyanie legiruyushchikh dobavok na svoystva zolota [Effect of alloying elements on the properties of gold]. *Yuvelirnye Tekhnologii – Jewelry Technology*. URL: jewelpreciousmetal.ru/technology_metallurgy_goldligatureinfluence.php.
4. Spravochnik po tsvetnym metallam [Directory of non-ferrous metals]. URL: https://libmetal.ru/prop/prop%201.htm.

УДК 532.5
DOI 10.17223/19988621/44/8

В.В. Чуруксаева, А.В. Старченко

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУХФАЗНОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ С ЛЕГКИМИ ЧАСТИЦАМИ В ОТКРЫТЫХ КАНАЛАХ[1]

Представлена математическая модель и численный метод для расчета двухфазных турбулентных течений жидкости с твердыми легкими частицами в открытых каналах. Модель строится на основе уравнений механики взаимодействующих взаимопроникающих континуумов в гидростатическом приближении. Турбулентное замыкание уравнений осуществляется с помощью двухпараметрической модели турбулентности, учитывающей влияние твердых частиц на поток. Численный метод основывается на алгоритме исключения неизвестных и использует явно-неявную аппроксимацию по времени. Приводится сравнение с экспериментом результатов расчетов нестационарного турбулентного течения воды с частицами, моделирующими льдины, в U-образном открытом канале, а также анализ влияния параметров дисперсной фазы на структуру потока.

Ключевые слова: *математическое моделирование*, *двухфазное течение*, *двухскоростной континуум*, *приближение мелкой воды*, *k–ε-модель турбулентности*, *ледяные частицы*, *метод конечного объема*.

Вопросы моделирования двухфазных течений газа с твердыми частицами (жидкости с твердыми частицами) возникают во многих задачах, связанных с моделированием течений в окружающей среде (моделирование облачности, движения взвешенных наносов в водоемах, речного течения с учетом плавающего льда) и технологических устройствах (течение теплоносителей в охладительных системах, горение топлива). В большинстве таких течений несущая фаза движется в турбулентном режиме. Наличие твердых частиц и их распределение в потоке оказывает существенное влияние на структуру потока. При этом отметим, что вопросам, связанным с моделированием течения в реках с учетом ледового покрова (течению подо льдом и, особенно, течениям во время ледохода), посвящено гораздо меньше внимания в литературе, чем вопросам течений в промышленных каналах и движению наносов. Тем не менее, сложилось несколько подходов к моделированию таких течений методами гидродинамики. Основной причиной повышенного интереса к моделированию речного течения с учетом движущихся льдин является возможность прогнозирования появления ледовых заторов и связанных с ними локальных затоплений прибрежных территорий.

Целью данной работы является построение математической модели и численного метода расчета двухфазного течения воды с легкими частицами, расположенными в приповерхностном слое воды и моделирующими скопление льда во время ледохода.

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ и Администрации Томской области в рамках научного проекта № 16-41-700178 р_а.

Математическая модель

Рассматривается двухфазное изотермическое движение смеси «вода – легкие частицы» в открытом канале или русле реки. Межфазовый обмен массой и теплом не учитывается в силу близких значений температуры воды и окружающей среды и их незначительных изменений за период моделирования. Плотность льда $\rho_i^0 = 910$ кг/м^3 меньше плотности воды $\rho_l^0 = 1000$ кг/м^3, и потому считается, что ледяные частицы плотно расположены в приповерхностном слое воды и их концентрация остается постоянной на входе в канал (или рассматриваемый участок реки).

Предполагается, что горизонтальные размеры области исследования много больше глубины двухфазного потока и при этом размер ледяных частиц много меньше характерных размеров канала (русла).

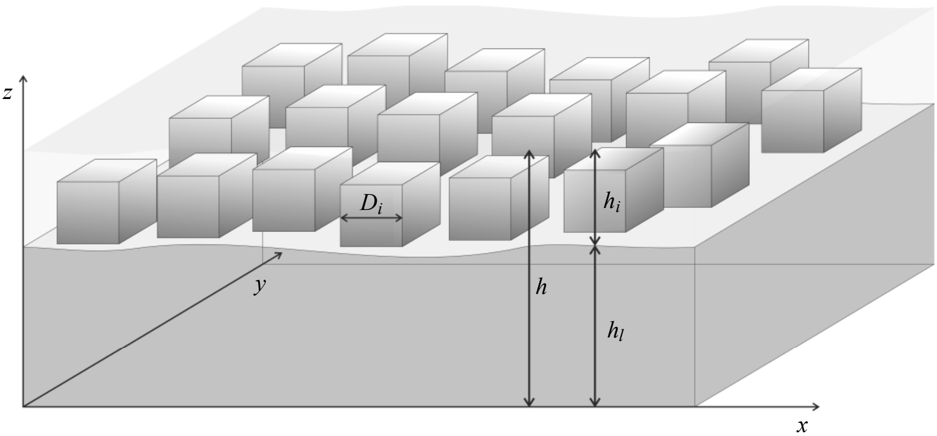

Рис. 1. Физическая постановка задачи
Fig. 1. Physical statement of the problem

Для математического описания данного процесса будем использовать уравнения механики взаимодействующих взаимопроникающих континуумов [1].

Запишем уравнения, описывающие движение жидкой фазы:

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \frac{\partial \rho_l w_{lk}}{\partial x_k} = 0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho_l w_{lj}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_l w_{lk} w_{lj}}{\partial x_k} = -\alpha_l \frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho_l g_j + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\alpha_l \left(\tau_{lkj} + \tau_{lkj}^t\right)\right] + S_{lj};$$

$$j = 1, 2, 3. \tag{2}$$

По повторяющемуся индексу (k=1, 2, 3) проводится суммирование. Здесь индекс «l» относится к фазе воды; x_1, x_2, x_3 – координаты декартовой системы; $\vec{g} = (0, 0, -g)$ – вектор ускорения свободного падения; $\vec{w}_l = (w_{l1}, w_{l2}, w_{l3})$ – вектор скорости движения воды; t – время; S_{lj} – источниковый член, описывающий силы взаимодействия фаз и влияние силы Кориолиса.

$\rho_l = \rho_l^0 \alpha_l$, где ρ_l^0 – истинная плотность воды (принимается равной 1000 кг/м^3), α_l – объемная доля воды $0 < \alpha_l \le 1$.

$\tau_{lkj} = \mu_l^0 \left(\frac{\partial w_{lk}}{\partial x_j} + \frac{\partial w_{lj}}{\partial x_k} \right) - \frac{2}{3} \delta_{kj} \mu_l^0 \operatorname{div} \vec{w}_l$ – компоненты тензора вязких напряжений несущей среде,

$\tau_{lkj}^t = \mu_l^t \left(\frac{\partial w_{lk}}{\partial x_j} + \frac{\partial w_{lj}}{\partial x_k} \right) - \frac{2}{3} \rho_l^0 \delta_{kj} k_e$; – компоненты тензора турбулентных напряжений,

μ_l^0 – молекулярная вязкость воды; μ_l^t – турбулентная вязкость воды; δ_{kj} – символ Кронекера; k_e – кинетическая энергия турбулентности.

Уравнения для дисперсной фазы (континуума ледяных частиц) будут иметь следующий вид:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho_i w_{ik}}{\partial x_k} = 0; \tag{3}$$

$$\frac{\partial \rho_i w_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_i w_{ik} w_{ij}}{\partial x_k} = -\alpha_i \frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho_i g_j + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\alpha_i \left(\tau_{ikj} + \tau_{ikj}^t \right) \right] + S_{ij};$$

$$(j = 1,\ 2,\ 3). \tag{4}$$

По повторяющемуся индексу проводится суммирование (k=1, 2, 3). Здесь индекс «i» относится к дисперсной фазе ледяных частиц; τ_{ikj}, τ_{ikj}^t – компоненты тензора вязких напряжений в континууме ледяных частиц вследствие их соударения между собой и тензора турбулентных напряжений

$$\tau_{ikj} = \mu_i^0 \left(\frac{\partial w_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial w_{ij}}{\partial x_k} \right) - \frac{2}{3} \delta_{kj} \mu_i^0 \operatorname{div} \vec{w}_i . \ \rho_i = \rho_i^0 \alpha_i ,$$

где ρ_i^0 – истинная плотность льда ($\rho_i^0 = 910$ кг/м^3), α_i – объемная доля фазы ледяных частиц $0 \le \alpha_i < 1$, $\alpha_i + \alpha_l = 1$.

Рассмотрим источниковые члены, входящие в уравнения движения фаз.

Источник $\vec{S}_i = \vec{F}_{\text{A}} + \vec{F}_{\mu} + \vec{F}_{VM} + \vec{F}_{\text{C}}$ в уравнении движения дисперсной фазы представляет собой сумму следующих сил [1]:

- сила Архимеда

$$\vec{F}_{\text{A}} = \rho_l^0 \alpha_i \left(\frac{D_l \vec{w}_l}{D_l t} - \vec{g} \right) = \vec{F}_{\text{A}1} + \vec{F}_{\text{A}2}; \ \vec{F}_{\text{A}1} = \rho_l^0 \alpha_i \frac{D_l \vec{w}_l}{D_l t}; \ \vec{F}_{\text{A}2} = -\rho_l^0 \alpha_i \vec{g} ,$$

$$\frac{D_l \vec{w}_l}{Dt} = \frac{\partial \vec{w}_l}{\partial t} + w_{lk} \frac{\partial \vec{w}_l}{\partial x_k};$$

- сила вязкого трения, действующая на частицы со стороны несущей среды [2],

$$\vec{F}_{\mu} = \frac{3}{4} \frac{\alpha_i \rho_l^0 c_D \alpha_l^{-1.65}}{d_i f_i} \left| \vec{w}_l - \vec{w}_i \right| \left(\vec{w}_l - \vec{w}_i \right), \ \alpha_l > 0.8 ,$$

$$\vec{F}_\mu = \left[150\frac{\alpha_i^2(1-\alpha_l)\mu_l}{\alpha_l(d_i f_i)^2} + 1.75\frac{\alpha_i\rho_l^0|\vec{w}_l-\vec{w}_i|}{d_i f_i}\right](\vec{w}_l-\vec{w}_i),\ \alpha_l \le 0.8,$$

где $c_D = \max\left[\frac{24}{\mathrm{Re}_p}\left(1+0.15R_p^{0.687}\right), 0.44\right]$ – безразмерный коэффициент сопротивления; d_i – эффективный диаметр ледяных частиц, $\mathrm{Re}_p = \frac{|\vec{w}_l-\vec{w}_i| d_i\rho_l^0\alpha_l}{\mu_l^0}$;

- сила присоединенной массы, возникающая благодаря инерции в несущей среде,

$$\vec{F}_{VM} = c_{VM}\alpha_i\rho_l^0\left(\frac{D_l\vec{w}_l}{Dt} - \frac{D_i\vec{w}_i}{Dt}\right),$$

$c_{VM} \approx 0.5$ для сферических частиц;

$$\vec{F}_{\mathrm{C}} = \rho_i(\vec{w}_i \times \vec{\omega})$$

– сила Кориолиса.

Сделанные выше предположения позволяют рассматривать фазу ледяных частиц в качестве непрерывной сплошной среды с эффективными свойствами. В силу предположения о существенном различии масштабов рассматриваемого процесса по горизонтали и вертикали будем использовать гидростатическое приближение, в соответствии с которым предполагается, что все члены в суммарном уравнении для вертикальных компонент скорости потока малы за исключением членов, отвечающих за давление и силу тяжести. Это позволяет получить

$$p_a - p = -g\rho_l^0\left[\tilde{\alpha}_l + \left(\frac{\rho_l^0}{\rho_i^0}-1\right)(1-\tilde{\alpha}_l)\right](h+z_b-x_3),$$

где p_a – атмосферное давление, $\tilde{\alpha}_l$ – характерная объемная доля жидкости в смеси, $z_b = z_b(x,y)$ – рельеф дна, h – глубина потока.

Введем некоторые обозначения.

Пусть α_l, α_i – массовые доли плавающих ледяных частиц и воды соответственно. Тогда $0 \le \alpha_l \le 1,\ 0 \le \alpha_i \le 1,\ \alpha_l + \alpha_i = 1$;

$$\int_{h-h_i+z_b}^{h+z_b} \alpha_i dz = \overline{\alpha}_i h_i = h'';$$

$$h' = \int_{z_b}^{h+z_b} \alpha_l dz = \tilde{\alpha}_l h = \int_{z_b}^{h+z_b}(1-\alpha_i)dz = h - h''.$$

Таким образом, проинтегрировав соотношение $\alpha_l + \alpha_i = 1$ по глубине потока h, получим $\tilde{\alpha}_l h + \overline{\alpha}_i h_i = h$, где $\tilde{\alpha}_l = \frac{1}{h}\int_{z_b}^{z_b+h}\alpha_l dx_3$. Здесь h_i – эффективная глубина слоя ледяных частиц, h_l – глубина слоя несущей фазы под слоем льда.

Предполагая, что распределение динамических параметров двухфазного течения по глубине близко к однородному, будем интегрировать записанные уравнения движения фаз по всей глубине потока (от z_b до $h+z_b$). В результате получим следующие осредненные по глубине уравнения движения:

- для дисперсной фазы легких частиц (льдин)

$$\frac{\partial h''}{\partial t}+\frac{\partial h''\overline{u}_i}{\partial x}+\frac{\partial h''\overline{v}_i}{\partial y}=0; \tag{5}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial h''\overline{u}_i}{\partial t}+\frac{\partial h''\overline{u}_i^2}{\partial x}+\frac{\partial h''\overline{v}_i\overline{u}_i}{\partial y}=\\
=-\frac{\rho_l^0}{\rho_i^0}gh''\left[\tilde{\alpha}_l+\left(\frac{\rho_i^0}{\rho_l^0}-1\right)(1-\tilde{\alpha}_l)\right]\frac{\partial(z_b+h)}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left[2(\nu_i+\overline{\nu}_{ti})h''\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x}\right]+\\
+\frac{\partial}{\partial y}\left[(\nu_i+\overline{\nu}_{ti})h''\left(\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial y}+\frac{\partial\overline{v}_i}{\partial x}\right)\right]-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left[\nu_i h''\left(\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x}+\frac{\partial\overline{v}_i}{\partial y}\right)+h''\overline{k}_i\right]+\\
+\frac{\overline{\beta}}{\rho_i^0}h''(\overline{u}_l-\overline{u}_i)+(c_{VM}+1)\frac{\rho_l^0}{\rho_i^0}h''\left(\frac{\partial\overline{u}_l}{\partial t}+\overline{u}_l\frac{\partial\overline{u}_l}{\partial x}+\overline{v}_l\frac{\partial\overline{u}_l}{\partial y}\right)-\\
-c_{VM}\frac{\rho_l^0}{\rho_i^0}h''\left(\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial t}+\overline{u}_i\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x}+\overline{v}_i\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial y}\right)+fh''\overline{v}_i,\end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial h''\overline{v}_i}{\partial t}+\frac{\partial h''\overline{u}_i\overline{v}_i}{\partial x}+\frac{\partial h''\overline{v}_i^2}{\partial y}=\\
=-\frac{\rho_l^0 gh''}{\rho_i^0}\left[\tilde{\alpha}_l+\left(\frac{\rho_i^0}{\rho_l^0}-1\right)(1-\tilde{\alpha}_l)\right]\frac{\partial(z_b+h)}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left[(\nu_i+\overline{\nu}_{it})h''\left(\frac{\partial\overline{v}_i}{\partial x}+\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial y}\right)\right]+\\
+\frac{\partial}{\partial y}\left[2(\nu_i+\overline{\nu}_{it})h''\frac{\partial\overline{v}_i}{\partial y}\right]-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left[\nu_i h''\left(\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x}+\frac{\partial\overline{v}_i}{\partial y}\right)+h''\overline{k}_i\right]+\frac{\overline{\beta}h''}{\rho_i^0}(\overline{v}_l-\overline{v}_i)+\\
+(c_{VM}+1)\frac{\rho_l^0 h''}{\rho_i^0}\left(\frac{\partial\overline{v}_l}{\partial t}+\overline{u}_l\frac{\partial\overline{v}_l}{\partial x}+\overline{v}_l\frac{\partial\overline{v}_l}{\partial y}\right)-c_{VM}\frac{\rho_l^0}{\rho_i^0}h''\left(\frac{\partial\overline{v}_i}{\partial t}+\overline{u}_i\frac{\partial\overline{v}_i}{\partial x}+\overline{v}_i\frac{\partial\overline{v}_i}{\partial y}\right)h-fh''\overline{u}_i\end{gathered} \tag{7}$$

и несущей фазы – воды

$$\frac{\partial h'}{\partial t}+\frac{\partial h'\overline{u}_l}{\partial x}+\frac{\partial h'\overline{v}_l}{\partial y}=0; \tag{8}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial h'\overline{u}_l}{\partial t}+\frac{\partial h'\overline{u}_l^2}{\partial x}+\frac{\partial h'\overline{u}_l\overline{v}_l}{\partial y}=\\
=-gh'\left[\tilde{\alpha}_l+\left(\frac{\rho_i^0}{\rho_l^0}-1\right)(1-\tilde{\alpha}_l)\right]\frac{\partial(z_b+h)}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left[2(\nu_l+\overline{\nu}_{lt})h'\frac{\partial\overline{u}_l}{\partial x}\right]+\\
+\frac{\partial}{\partial y}\left[(\nu_l+\overline{\nu}_{lt})h'\left(\frac{\partial\overline{u}_l}{\partial y}+\frac{\partial\overline{v}_l}{\partial x}\right)\right]-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left[\nu_l h'\left(\frac{\partial\overline{u}_l}{\partial x}+\frac{\partial\overline{v}_l}{\partial y}\right)+h'\overline{k}\right]+\\
+\frac{\overline{\beta}}{\rho_l^0}h''(\overline{u}_i-\overline{u}_l)-c_{VM}h''\left(\frac{\partial\overline{u}_l}{\partial t}+\overline{u}_l\frac{\partial\overline{u}_l}{\partial x}+\overline{v}_l\frac{\partial\overline{u}_l}{\partial y}\right)+\\
+c_{VM}h''\left(\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial t}+\overline{u}_i\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x}+\overline{v}_i\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial y}\right)+fh'\overline{v}_l-c_f\left|\vec{\overline{\boldsymbol{w}}}_l\right|\overline{u}_l;\end{gathered} \tag{9}$$

$$\frac{\partial h'\overline{v}_l}{\partial t}+\frac{\partial h'\overline{v}_l\overline{u}_l}{\partial x}+\frac{\partial h'\overline{v}_l^2}{\partial y}=$$
$$=-gh'\left[\tilde{\alpha}_l+\left(\frac{\rho_i^0}{\rho_l^0}-1\right)(1-\tilde{\alpha}_l)\right]\frac{\partial(z_b+h)}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left[(\nu_l+\overline{\nu}_{lt})h'\left(\frac{\partial\overline{v}_l}{\partial x}+\frac{\partial\overline{u}_l}{\partial y}\right)\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[2(\nu_l+\overline{\nu}_{lt})h'\frac{\partial\overline{v}_l}{\partial y}\right]-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left[\nu_l h'\left(\frac{\partial\overline{u}_l}{\partial x}+\frac{\partial\overline{v}_l}{\partial y}\right)+h'\overline{k}\right]+ \qquad (10)$$
$$+\frac{\overline{\beta}}{\rho_l^0}h''(\overline{v}_i-\overline{v}_l)-c_{VM}h''\left(\frac{\partial\overline{v}_l}{\partial t}+\overline{u}_l\frac{\partial\overline{v}_l}{\partial x}+\overline{v}_l\frac{\partial\overline{v}_l}{\partial y}\right)+$$
$$+c_{VM}h''\left(\frac{\partial\overline{v}_i}{\partial t}+\overline{u}_i\frac{\partial\overline{v}_i}{\partial x}+\overline{v}_i\frac{\partial\overline{v}_i}{\partial y}\right)-fh_l'\overline{u}_l-c_f\left|\vec{\boldsymbol{w}}_l\right|\overline{v}_l.$$

Здесь h – глубина всего потока, $h''(t,x,y)$ – глубина слоя дисперсной фазы, $\overline{u}_i(t,x,y)$, $\overline{v}_i(t,x,y)$ – осредненные по глубине значения компонент вектора горизонтальной скорости $\vec{w}_i=(u_i,v_i)$; $z_b(x,y)$ – рельеф дна; ρ_i^0, ρ_l^0 – истинные плотности льда и воды соответственно, $g=9.81м/c^2$ – ускорение свободного падения; $\overline{k_i}$ – осредненная по глубине кинетическая энергия в слое дисперсной фазы; ν_i, $\overline{\nu}_{ti}$ – молекулярная и турбулентная вязкость дисперсной фазы; f – параметр Кориолиса; $c_f=\dfrac{gn^2}{h^{0.333}}$ – трение жидкости о дно канала (реки), $n>0$ – коэффициент Маннинга.

Для расчета турбулентных характеристик двухфазного течения используется высокорейнольдсовая $k-\varepsilon$-модель турбулентности для осредненных уравнений [3], с модификацией Поурахмади и Хумфри [2] для учета влияния дисперсных частиц.

Начальные и граничные условия

В начальный момент времени $t=0$ используются следующие значения параметров течения:

$$h''=h_{ice} \text{ – известная величина;}$$
$$\overline{u}_i=\overline{u}_{i0},\ \overline{v}_i=\overline{v}_{i0};$$
$$h'=h-h_{ice};$$
$$\overline{u}_l=\overline{u}_{l0},\ \overline{v}_l=\overline{v}_{l0}.$$

На входе в расчетную область значения параметров жидкой фазы и фазы частиц считаются известными, на выходной границе используется равенство нулю производных по внешней нормали к границе. Кроме того, на границах потока с берегом рассматривается трение как для жидкости, так и для частиц. На боковых стенках русла применяются условия непротекания и прилипания для компонент скорости. В случае, когда вблизи боковых стенок в несущей фазе справедливо соотношение $\nu_{lt}\gg\nu_l$, трение и турбулентные характеристики в несущей фазе в пристеночной области определяются с помощью метода пристеночных функций

Лаундера – Сполдинга [5]. Трение фазы частиц о дно реки в прибрежной зоне и на участках отмелей выражается зависимостью $c_f^i \left|\bar{\vec{w}}_i\right| \bar{\vec{w}}_i$, где $c_f^i = 0.0025 \left|\bar{\vec{w}}_i\right|^{-1}$ [6].

Численный метод решения уравнений модели

Уравнения модели дискретизируются с использованием метода конечного объема [7] на разнесенных сетках (рис. 2), т. е. конечные объемы для компонент скорости сдвигаются на полшага сетки относительно центра P конечного объема, используемого при аппроксимации уравнений для скалярных величин $h', h'', \bar{k}, \bar{\varepsilon}$.

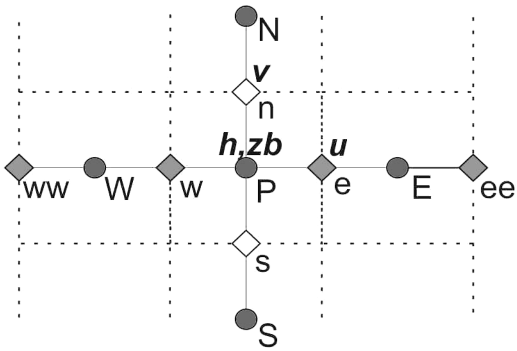

Рис. 2. Сеточный шаблон разностной схемы. Большими буквами отмечено положение центров конечных объемов, малыми – середин их граней [7]

Fig. 2. Mesh pattern of the difference scheme. Uppercase and lowercase letters indicate the centers of finite volumes and midpoints of their edges, respectively [7]

Конвективные слагаемые уравнений аппроксимируются с применением монотонных разностных схем высокого порядка (MLU [8] или MUSCL [9]). Диффузионные слагаемые представляются на основе центрально-разностной схемы второго порядка, при этом для снижения существенного ограничения на шаг интегрирования по времени для уравнений движения при аппроксимации членов, отвечающих за динамическое взаимодействие фаз (сила трения), применялась неявная аппроксимация и специальная процедура решения сеточных уравнений, позволяющая использовать построенную разностную схему для областей двухфазного течения, где отсутствует дисперсная фаза $(h'' = 0)$.

Кратко опишем предлагаемый подход.

Рассмотрим дискретный аналог уравнений (6) и (9) для внутреннего узла e расчетной сетки, представленной на рис. 2:

$$\frac{h_e'^{\,0}\bar{u}_{le} - h_e'^{\,0}\bar{u}_{le}^0}{\Delta t} = \Phi_e^0 + \beta h_e''^{\,0}\left(\bar{u}_{ie} - \bar{u}_{le}\right); \tag{11}$$

$$\frac{h_e''^{\,0}\bar{u}_{ie} - h_e''^{\,0}\bar{u}_{ie}^0}{\Delta t} = \Psi_e^0 + \frac{\rho_l^0}{\rho_i^0}\beta h_e''^{\,0}\left(\bar{u}_{le} - \bar{u}_{ie}\right). \tag{12}$$

Здесь слагаемые Φ_e^0 и Ψ_e^0 объединяют аппроксимации конвективных и диффузионных членов, а также источниковых членов уравнений. Верхний индекс «^{0}» соответствует сеточным величинам с предыдущего шага по времени.

В правых частях сеточных уравнений (11), (12) отдельно выделены слагаемые $\beta h_e''^0(\bar{u}_{ie}-\bar{u}_{le})$ и $\frac{\rho_l^0}{\rho_i^0}\beta h_e''^0(\bar{u}_{le}-\bar{u}_{ie})$, описывающие динамическое взаимодействие фаз и содержащие разность компонент скоростей фаз. Если для этих слагаемых также использовать явную аппроксимацию, потребуется более жесткое (чем условие Куранта $\tau < \frac{0.5\,\Delta x\,\Delta y}{\max|\bar{u}_e|\Delta y+\max|\bar{v}_n|\Delta x+\sqrt{gh}\,(\Delta x+\Delta y)}$) ограничение на шаг по времени при проведении расчетов течений с частицами, обладающими высокой динамической инерционностью. Кроме того, в узлах сетки, где $h''=0$, система уравнений (11)–(12) имеет особенность (уравнение (12) обращается в тождество).

В связи с этим перепишем систему (11), (12) в следующем виде:

$$\left(h_e'^0+\Delta t\beta h_e''^0\right)\bar{u}_{le}-\Delta t\beta h_e''^0\bar{u}_{ie}=\Delta t\Phi_e^0+h_e'^0\bar{u}_{le}^0; \tag{13}$$

$$\left(1+\frac{\rho_l^0}{\rho_i^0}\Delta t\beta\right)\bar{u}_{ie}-\frac{\rho_l^0}{\rho_i^0}\Delta t\beta\bar{u}_{le}=\Delta t\Psi_e^0/h_e''^0+\bar{u}_{ie}^0. \tag{14}$$

В (14) в $\Psi_e^0/h_e''^0$ при $h_e''^0<\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ – малая положительная величина, Ψ_e^0 принимается равной нулю. Определитель системы отличен от нуля и система решается по правилу Крамера. Аналогичным способом представляется система для компонент скоростей фаз $\bar{v}_{ln}$, $\bar{v}_{in}$.

Определение границы реки и суши при нестационарном расчете представляет особую сложность из-за возникновения нестабильности решения из-за малой глубины воды в граничной ячейке [10, 11]. Один из простейших методов заключается в выборе некоторого малого параметра $\varepsilon>0$, такого, что как только глубина потока становится меньше ε, ячейка считается сухой и исключается из расчетов. В исследуемом случае течения воды с ледяными частицами в качестве глубины рассматривается глубина несущей фазы h', при этом в сухих ячейках глубина дисперсной фазы h'' также принимается равной нулю.

С помощью разработанной модели и численного метода были проведены расчеты некоторых тестовых сценариев нестационарного течения в каналах. Для оценки полученных результатов приведено сравнение расчетов с экспериментальными данными.

Результаты численных расчетов

Течение в U-образном канале

Экспериментальная установка представляет собой U-образный канал с дном в виде лотка со скошенными стенками (рис. 3). Экспериментальные исследования течения в данной установке представлены в работах [12,13]. В данном случае рассматривается эксперимент, описанный в [12]. Глубина потока на входе в канал равнялась 0.45 м, расход воды на входе в канал – $0.16\ \text{м}^3/\text{с}$. Так как данные о шероховатости стенок не представлены, коэффициент Маннинга выбирался равным 0.01413, что соответствует слабошероховатым стенкам (из бетона или пластика). Данные параметры соответствуют турбулентному течению с числом Рейнольдса, вычисленным по глубине потока $\mathrm{Re}_h = 77170$, $Fr = 0,081$. Для имитации ледяных частиц использовались сферические бусины из полипропилена диаметром d_i=0.005 м. Плотность материала частиц $\rho^0 = 900\,\text{кг/м}^3$ близка к плотности льда. При проведении физического моделирования движения плавучих частиц они сбрасывались в стационарный поток с одинаковым расходом в конце прямого предвключенного участка (отмечен горизонтальной стрелкой на рисунке 3а). Измерения толщины слоя частиц и глубины потока в эксперименте проводились с точностью до 1 мм.

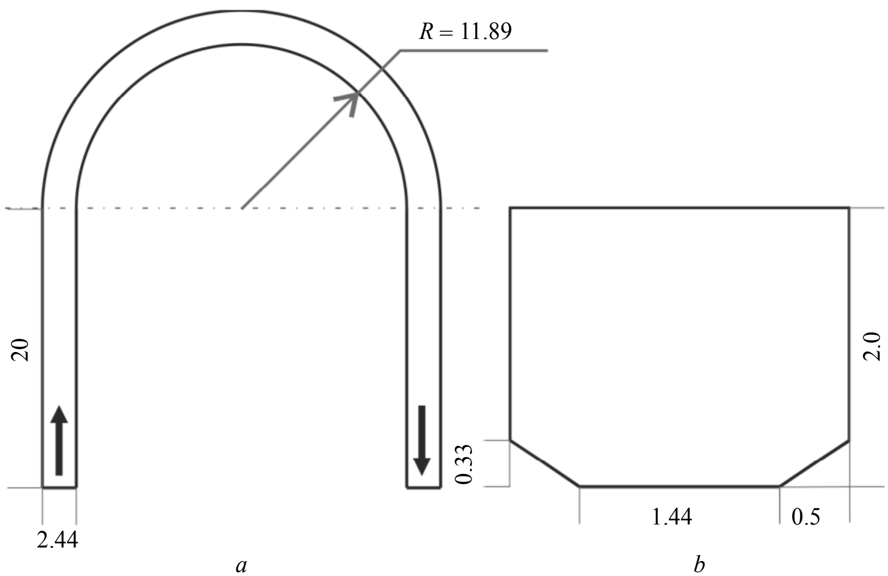

Рис. 3. Канал с разворотом течения (размеры указаны в метрах): (*a*) – вид сверху; (*b*) – поперечное сечение
Fig. 3. U-shaped laboratory flume (dimensions are in meters): (*a*), plan view, and (*b*), cross section

При движении по каналу основная масса частиц движется вблизи левой по течению стенки под действием центростремительной силы, которая также вызывает возрастание скорости в направлении левой стенки. При образовании ледового затора толщина слоя накопившихся частиц максимальна в голове ледохода у левой стенки и постепенно уменьшается вверх по течению и по направлению к правой стенке канала (рис. 4, 5).

В результате расчетов обнаружено, что течение в канале с плавным разворотом с легкими частицами имеет сходные характеристики с течением в реке во время ледохода [12].

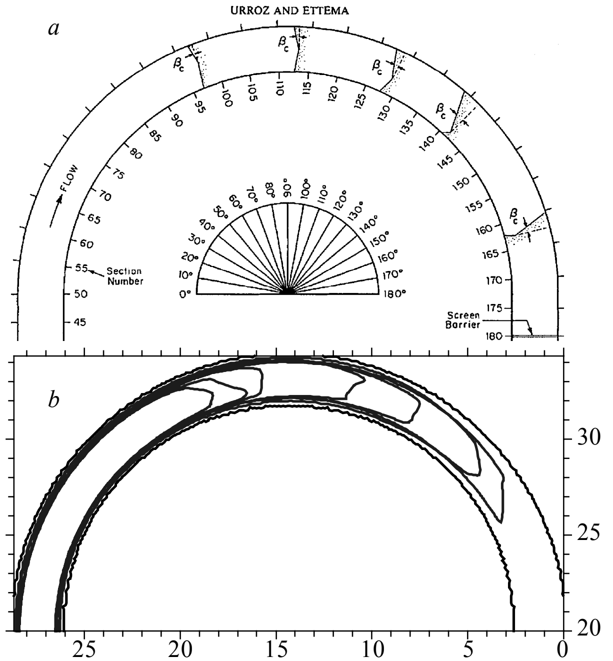

Рис. 4. Профили фронта слоя частиц по мере движения по каналу
(*a*) – эксперимент [12], (*b*) – расчет
Fig. 4. Front profiles of the layer of particles while moving in the flume:
(*a*) experimental [12] and (*b*) calculated data

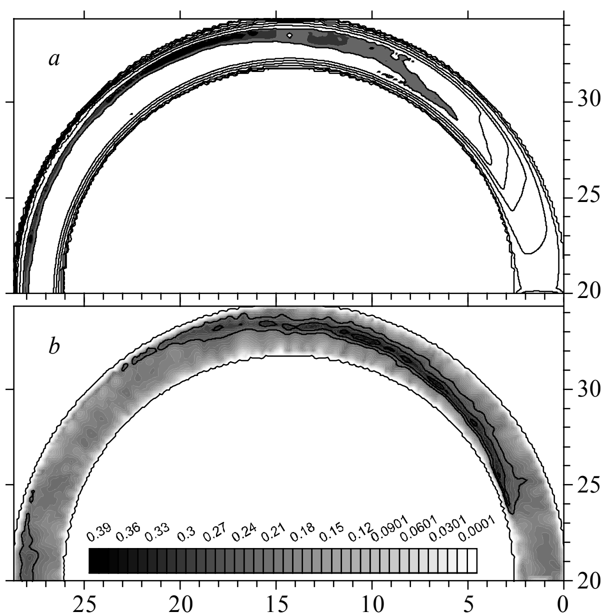

Рис. 5. Мгновенные профили глубины h'' (*a*) и модуля скорости дисперсной фазы (*b*)
Fig. 5. Instantaneous profiles of the (*a*) depth h'' and (*b*) velocity module of the dispersed phase

Течение в канале с резким поворотом

Рассматривается движение смеси «вода – ледяные частицы» в канале с резким поворотом. Геометрия канала изображена на рис. 6. Подробное исследование структуры однофазного течения в нем проводится в [3,10].

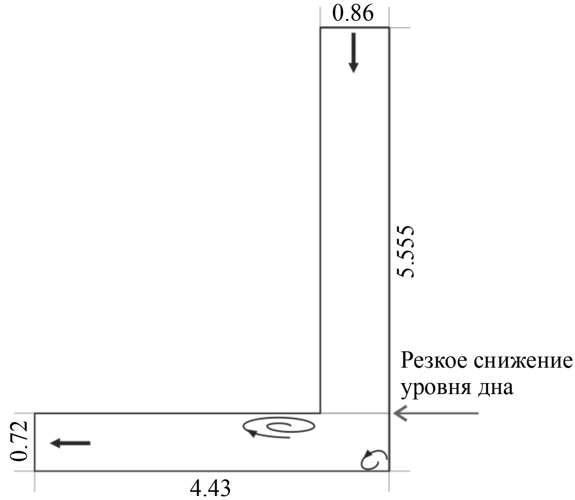

Рис. 6. Лабораторная установка – канал с поворотом под углом 90°
Fig. 6. Laboratory facility, a flume with a 90° bend

Входной участок канала имеет длину 5.555 м, ширину 0.86 м и ровное дно. Сразу перед поворотом уровень дна понижается на 0.013 м. Выходной участок имеет длину 4.43 м, ширину 0.72 м и ровное дно. На рисунке также отмечены области, где образуется возвратное течение, выявленные в процессе исследования однофазного течения в данном канале [3].

Рассмотрим течение воды с ледяными частицами со скоростью на входе в канал равной $U_0 = 0.2$ м/с, начальной глубиной потока равной $h = 0.175$ м. Глубина слоя дисперсной фазы $h'' = 0.04$ м. Параметры дисперсной фазы для базового и методических расчетов приведены в табл. 1.

Таблица 1

Параметры расчетов: 1 – базовый расчет, 2, 3 – методические расчеты

№ расчета	Диаметр частиц, d_i, м	Коэффициент формы, f_i	Вязкость в слое частиц, ν_i, м^2/с
1	0.1	0.166	0.01
2	0.01	0.166	0.01
3	0.1	1	0.01

Оценка влияния размера частиц

На рис. 7 представлено сравнение модуля скорости несущей фазы (*a*), модуля скорости дисперсной фазы (*b*), глубины слоя дисперсной фазы (*c*) для расчетных случаев (1) и (2) (см. табл. 1).

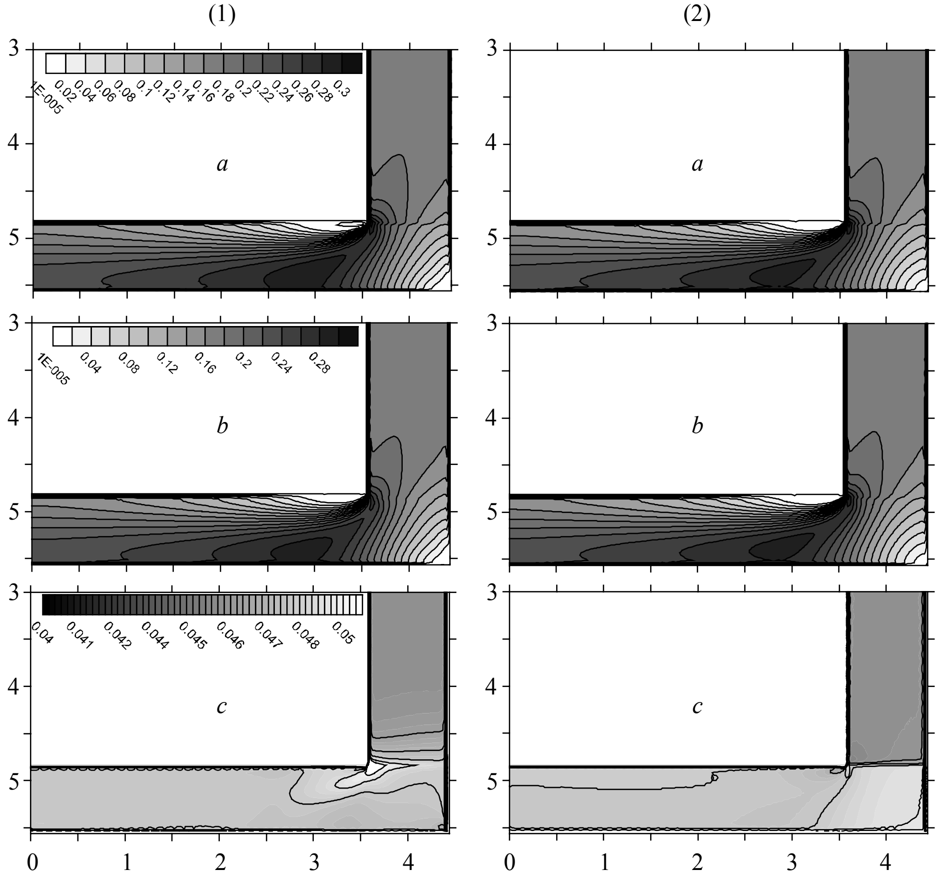

Рис. 7. Поля скорости несущей фазы (*a*) скорости дисперсной фазы (*b*) и глубины слоя дисперсной фазы (*c*) для базового варианта (1) и расчета с мелкими частицами (2)
Fig. 7. Fields of the (*a*) carrier phase velocity, (*b*) dispersed phase velocity, and (*c*) depth of dispersed phase layer: (*1*), basic variant, and (*2*), computation with small particles

Проведенные расчеты позволяют сделать следующие выводы:

1. Скорости движения мелких и более крупных частиц существенно не различаются в области поворота течения. За поворотом у правой по течению стенки наблюдается зона рециркуляционного течения, более интенсивного для частиц с диаметром $d_i = 0.1$ м.

В углу канала скорости жидкости и частиц также отличаются, но для рассматриваемого случая частицы под действием жидкости успевают изменить направление своего движения и существенного накопления дисперсной фазы в этой области не наблюдается. Анализируя рис. 7, можно также отметить, что уменьшение размера частиц приводит к небольшому снижению кинетической энергии потока жидкости за поворотом.

2. Более заметное влияние на скорости движения фаз и толщину слоя частиц оказывает небольшое изменение рельефа дна. Из рисунков видно, что изолинии модуля скорости жидкости и фазы мелких частиц резко изменяются вблизи снижения рельефа дна, т.е. малоинерционные частицы так же, как и жидкость, быст-

ро откликаются на изменение условий течения. В то же время для более инерционных частиц изолинии модуля скорости меняются более плавно над скачком сечения канала.

Проявление большей инерционности частиц с диаметром 0.1 м заметно и по распределению глубины дисперсной фазы h'' : более плавное увеличение этого параметра при приближении к резкому снижению уровня дна, накопление частиц вблизи поворота.

Оценка влияния коэффициента формы частиц

При уменьшении коэффициента формы f_i (переходе от сферических частиц к кубическим) сила динамического межфазного взаимодействия или сопротивления движению жидкости увеличивается. Кроме того, для сферических частиц наблюдается увеличение интенсивности рециркуляционного течения жидкости за поворотом, частицы относительно спокойно реагируют на резкое изменение рельефа дна канала (рис. 8).

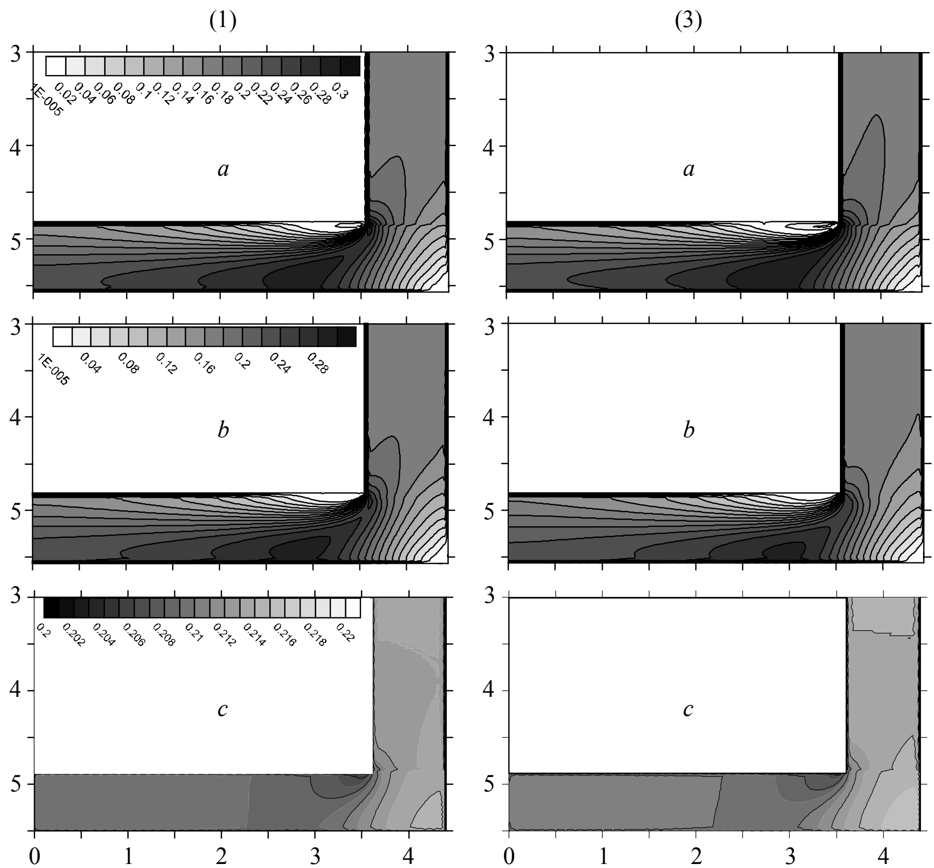

Рис. 8. Поля скорости несущей фазы (*a*) скорости дисперсной фазы (*b*) и свободной поверхности (*c*) для базового варианта (1) и расчета со сферическими частицами (3)
Fig. 8. Velocity fields of the (*a*) carrier phase, (*b*) dispersed phase, and (*c*) free surface: (*1*), basic variant, and (*3*), computation with spherical particles

В области поворота течения наблюдается повышение уровня свободной поверхности в углу канала (более значительное для сферических частиц $f_i = 1$) и снижение за поворотом в области рециркуляционного течения. Такой характер распределения свободной поверхности в области поворота течения соответствует известным экспериментальным данным [14].

Выводы

В работе в рамках механики взаимодействующих и взаимопроникающих континуумов представлена математическая модель двухфазного изотермического турбулентного течения смеси «жидкость – легкие частицы» в открытых каналах и русловых потоках в приближении мелкой воды. Модель учитывает динамическое скольжение фаз, подъемную силу, действующую на частицы, соударение частиц между собой, турбулентную структуру движущейся жидкости и частиц, трение жидкости и частиц о дно и стенки канала.

Для численного решения гидродинамических уравнений фаз предложен новый численный метод, позволяющий проводить сквозные расчеты в областях с неоднородным распределением частиц вплоть до их полного отсутствия. Метод основывается на явно-неявных монотонных разностных схемах высокого порядка аппроксимации.

Разработанная модель и численный метод прошли апробацию на результатах экспериментальных исследований двухфазного турбулентного течения «жидкость – легкие частицы» в U-образном открытом канале. Модель правильно предсказала изменение фронта слоя движущихся по каналу частиц, увеличение их концентрации и скорости у внешней стенки канала.

Также для открытого канала с поворотом на 90° было произведено исследование влияния размера и формы частиц, плавающих в движущейся жидкости. Расчеты показали, что частицы в большей мере реагируют на подъем рельефа дна, чем на резкое изменение направления движения потока. Тем не менее, наличие частиц в потоке увеличивает неоднородность распределения свободной поверхности в поворотной части канала.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч.1. Москва: Наука, 1987. 464 с.
2. *Бубенчиков А.М.*, *Старченко А.В.* Численные модели динамики и горения аэродисперсных смесей в каналах. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1998. 236 с.
3. *Чуруксаева В.В.*, *Старченко А.В.* Математическая модель и численный метод для расчета турбулентного течения в русле реки // Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2015. № 6(38). С. 100–114. DOI: 10.17223/19988621/38/12.
4. *Роди В.* Модели турбулентности окружающей среды // Методы расчета турбулентных течений. М.: Мир, 1984. С. 276–278.
5. *Launder B.E.*, *Spalding D.B.* The numerical computation of turbulent flows // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1974. V. 2. No. 3. P. 269–289. DOI: 10.1016/0045-7825(74)90029-2.
6. *Gidaspov D.* Multiphase Flow and Fluidization: Continuum and Kinetic Theory Descriptions. Boston: Academic Press, 1994. 457 p.
7. *Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984.
8. *van Leer B.* Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme, V. A Second Order Sequel to Godunov's Method // Journal of Computational Physics. 1979. No. 32. P. 101–136. DOI: 10.1016/0021-9991(79)90145-1.

9. *Cada M.*, *Torrilhon M.* Compact third-order limiter functions for finite volume methods // J. Computational Physics. 2009. V. 228. P. 4118–4145. DOI: 10.1016/j.jcp.2009. 02.020.
10. *Cea L.*, *Puertas J.*, *and Vazquez-Cendon M.E.* Depth averaged modelling of turbulent shallow water flow with wet-dry fronts // Archives of computational methods in engineering. September 2007. V. 14. No. 3. P. 303–341. DOI: 10.1007/s11831-007-9009-3.
11. *Hou J.*, *Simons F.*, *Mahgoub M.*, *and Hinkelmann R.* A robust well-balanced model on unstructured grids for shallow water flows with wetting and drying over complex topography // Computer methods in applied mechanics and engineering. 2013. No. 257. P. 126–149. DOI: 10.1016/j.cma.2013.01.015.
12. *Urroz G.E.*, *Ettema R.* Bend ice jams: laboratory observations // Canadian Journal of Civil Engineering. 1992. V. 19. P. 855–864. DOI: 10.1139/l92-097.
13. *Tsai W.F.*, *Ettema R.* Ice cover influence on transverse bed slopes in a curved alluvial channel // J. Hydraulic Research. 1994. V. 32. No. 4. P. 561–581. DOI: 10.1080/00221686. 1994.9728355.
14. *Han S.S.*, *Ramamurthy A.S.*, *and Biron P.M.* Characteristics of Flow around Open Channel 90° Bends with Vanes // Journal of Irrigation and Drainage Engineering. 2011. V. 137. No. 10. P. 668–676. DOI: 10.1061/(ASCE)IR.1943-4774.0000337.

Статья получена 20.11.2016 г.

Churuksaeva V.V., Starchenko A.V. NUMERICAL INVESTIGATION OF A TWO-PHASE FLOW OF FLUID WITH LIGHT PARTICLES IN OPEN CHANNELS *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 6(44). pp. 88–103

DOI 10.17223/19988621/44/8

A mathematical model and a computational method for a numerical investigation of the two-phase turbulent flow in an open channel are performed. The solid particles with a density close to that of water were considered as a dispersed phase. The model is based on the flow depth-averaged equations of mechanics of interacting and interpenetrating continuums in a hydrostatic approach. A turbulent closure of the model is implemented with the application of the $k-\varepsilon$ turbulence model modified by Pourahmadi and Humphrey (1983) to consider the influence of particles on the turbulent structure of the flow.

The numerical method proposed for solving equations of the model is based on the elimination algorithm and explicit-implicit time approximation.

An unsteady turbulent flow in a 180-degree bend flume with polypropylene particles modeling the ice was computed and the results were compared with those of Urroz and Ettema (1992). It was found that the mathematical model and the computational method proposed predict accurately both the velocity field and distribution of the particles in the channel.

The influence of the dynamic parameters of dispersed phase on the turbulent structure of the flow was investigated by conducting the calculations of the flow in an open channel with a 90-degree bend. It was revealed that the structure of a two-phase flow is most affected by the size and shape of the particles.

Keywords: mathematical modeling, two-phase flow, double-speed continuum, shallow water approximation, $k-\varepsilon$ turbulence model, ice particles, finite volume method.

CHURUKSAEVA Vladislava Vasilievna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: chu.vv@mail.ru

STARCHENKO Alexander Vasilievich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: starch@math.tsu.ru

REFERENCES

1. Nigmatulin R.I. (1991) *Dynamics of multiphase media.* New York: Hemisphere Publishing Corporation. 375 p.
2. Bubenchikov A.M., Starchenko A.V. (1998) *Chislennye modeli dinamiki i goreniya aerodispersnykh smesey v kanalakh* [Numerical models of the dynamics and combustion of aerodisperse mixtures in channels]. Tomsk: Tomsk University Press. 236 p.
3. Churuksaeva V.V., Starchenko A.V. (2015) Matematicheskaya model' i chislennyy metod dlya rascheta turbulentnogo techeniya v rusle reki [A mathematical model and numerical method for computation of a turbulent river stream]. *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State UniversityJournal of Mathematics and Mechanics.* 6(38). pp. 100–114. DOI 10.17223/19988621/38/12.
4. Rodi W. (1980) *Turbulence models for environmental problems.* In: Prediction Methods for Turbulent Flow, von Karman Inst. New York: McGraw-Hill. pp. 276–281.
5. Launder B.E., Spalding D.B. (1974) The numerical computation of turbulent flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* 2(3). pp. 269–289. DOI 10.1016/0045-7825(74)90029-2.
6. Gidaspov D. (1994) *Multiphase flow and fluidization: continuum and kinetic theory descriptions.* Boston: Academic Press. 457 p.
7. Patankar S. (1980) *Numerical heat transfer and fluid flow.* CRC Press, 214 p.
8. van Leer B. (1979) Towards the ultimate conservative difference scheme. V–A second order sequel to godunov's method. *Journal of Computational Physics.* 32. pp. 101–136. DOI 10.1016/0021-9991(79)90145-1.
9. Cada M., Torrilhon M. (2009) Compact third-order limiter functions for finite volume methods. *Journal of Computational Physics.* 228. pp. 4118–4145. DOI 10.1016/j.jcp.2009.02.020.
10. Cea L., Puertas J., Vazquez-Cendon M.E. (2007) Depth averaged modelling of turbulent shallow water flow with wet-dry fronts. *Archives of Computational Methods in Engineering.* 14(3). pp. 303–341. DOI 10.1007/s11831-007-9009-3.
11. Hou J., Simons F., Mahgoub M., Hinkelmann R. (2013) A robust well-balanced model on unstructured grids for shallow water flows with wetting and drying over complex topography. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* 257. pp. 126–149. DOI 10.1016/j.cma.2013.01.015.
12. Urroz G.E., Ettema R. (1992) Bend ice jams: laboratory observations. *Canadian Journal of Civil Engineering.* 19. pp. 855–864. DOI 10.1139/l92-097.
13. Tsai W.F., Ettema R. (1994) Ice cover influence on transverse bed slopes in a curved alluvial channel. *Journal of Hydraulic Research.* 32(4). pp. 561–581. DOI 10.1080/00221686.1994.9728355.
14. Han S.S., Ramamurthy A.S., Biron P.M. (2011) Characteristics of flow around open channel 90° bends with vanes. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering.* 137(10). pp. 668–676. DOI 10.1061/(ASCE)IR.1943-4774.0000337.

УДК 532.546:536.421
DOI 10.17223/19988621/44/9

В.Ш. Шагапов, М.К. Хасанов, Г.Р. Рафикова

ВЫТЕСНЕНИЕ МЕТАНА ИЗ ГАЗОГИДРАТНОГО ПЛАСТА ПРИ ЗАКАЧКЕ ДИОКСИДА УГЛЕРОДА[1]

Проведено теоретическое исследование процесса вытеснения метана из газогидратного пласта путем закачки углекислого газа в пласт, с последующим замещением метана из состава гидрата двуокисью углерода. Рассмотрен случай, когда интенсивность образования гидрата диоксида углерода лимитируется диффузией углекислого газа через образовавшийся гидратный слой между потоком газовой смеси и гидратом метана. Исследована динамика основных параметров процесса и расходов закачиваемого и выходящего углекислого газа и добываемого метана.

Ключевые слова: *газогидратный пласт*, *замещение метана диоксидом углерода в составе гидрата*, *диффузия*, *образование газового гидрата.*

С каждым годом возрастает интерес к изучению вопросов образования и разложения газогидратов с целью хранения и транспортировки газа. Газ в составе гидрата занимает меньший объем, чем в свободном состоянии при тех же давлениях и температурах, в связи с чем многими исследователями предлагается подземная газогидратная консервация природного газа [1, 2]. В работах [3, 4] представлены полученные численные и автомодельные решения для задачи об образовании газогидрата при инжекции холодного газа в пористом пласте с движущейся фронтальной границей фазовых переходов при равновесных условиях. В [5] процесс гидратообразования рассматривался в области стабильности газогидрата с учетом диффузионной кинетики.

Основными способами разработки газогидратных пластов являются депрессионное воздействие на пласт и нагрев гидратосодержащих пород. Моделирование разложения газогидрата в пластах данными способами рассмотрены в работах [6–8]. Одним из последних инновационных способов извлечения метана из состава гидрата является его замещение диоксидом углерода в газогидрате. Предложенный метод позволяет одновременно добыть метан и законсервировать углекислый газ в необходимых объемах. Экспериментальные исследования процесса замещения метана из состава гидрата двуокисью углерода проведены авторами [9–11], которыми было установлено, что процесс может происходить без высвобождения свободной воды при термобарических условиях, соответствующих стабильному существованию гидрата метана.

В настоящей работе проведено численное моделирование процесса вытеснения метана из газогидратного пласта диоксидом углерода. Полученные решения позволяют исследовать динамику основных параметров и выяснить основные режимы процесса.

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №15-11-20022).

Постановка задачи. Основные уравнения

Рассмотрим в плоском и одномерном приближении процесс закачки газообразного диоксида углерода в гидратный пласт. Предполагается, что процесс замещения будет происходить в области стабильного существования гидратов метана и двуокиси углерода, а также существования CO_2 в газообразном состоянии.

Пусть гидратный пласт в исходном состоянии состоит гидрата метана и живых пор, заполненных метаном. Скелет пористой среды, газогидрат (метана и диоксида углерода) полагаем неподвижными и несжимаемыми.

Запишем уравнения сохранения масс для диоксида углерода и метана, фильтрующихся через пласт:

$$\frac{\partial\left(mS_g\rho^0_{gd}\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(mS_g\upsilon_{gd}\rho^0_{gd}\right)}{\partial x}=-J_{gd},$$
$$\frac{\partial\left(mS_g\rho^0_{gm}\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(mS_g\upsilon_{gm}\rho^0_{gm}\right)}{\partial x}=J_{gm}. \qquad (1)$$

Здесь m – пористость скелета (для объема, занятого газом и гидратом); S_g – газонасыщенность; ρ^0_{gi} и υ_{gi} $(i=d, m)$ – парциальные плотности и скорости компонент газовой смеси; J_{gd} и J_{gm} – интенсивности перехода диоксида углерода в состав гидрата и вытеснения метана из состава гидрата; нижние индексы $i=d, m$ относятся соответственно к углекислому газу и метану.

Будем полагать, что гидрат состоит из двух составляющих: гидрата метана и гидрата диоксида углерода. Тогда объемную насыщенность гидрата можно представить как

$$S_h=S_{hd}+S_{hm},$$

где S_{hi} – гидратонасыщенность, которая относится к гидратам диоксида углерода $(i=d)$ и метана $(i=m)$.

При этом

$$S_g+S_h=1 \text{ или } S_g+S_{hd}+S_{hm}=1.$$

Полагая, что газогидрат неподвижен $\left(\upsilon_{gh}=0\right)$, уравнения сохранения масс для составляющих гидратной фазы запишутся в виде

$$\frac{\partial\left(mS_{hd}G_d\rho^0_{hd}\right)}{\partial t}=J_{gd},\ \frac{\partial\left(mS_{hm}G_m\rho^0_{hm}\right)}{\partial t}=-J_{gm}. \qquad (2)$$

Здесь ρ^0_{hi} и G_{hi} $(i=d$ и $m)$ плотность гидрата и массовое содержание газа в составе гидрата для диоксида углерода $(i=d)$ и метана $(i=m)$.

Для гидратов диоксида углерода и метана [12] $\rho^0_{hd}=1117$ кг/м^3, $\rho^0_{hm}=910$ кг/м^3 и $G_d=0.29$, $G_m=0.13$, в связи с чем выполняется соотношение

$$(1-G_d)\rho^0_{hd}=(1-G_m)\rho^0_{hm}. \qquad (3)$$

Данное условие означает, что в единице объема гидрата диоксида углерода и метана содержится одинаковая масса воды. Для объема гидратов метана и диоксида углерода на одну молекулу газа приходится шесть молекул воды [2]. Из этого обстоятельства следует, что число молекул метана, покидающего гидрат, равно числу молекул диоксида углерода, переходящих в состав гидрата. Отсюда, для интенсивностей J_{gd} и J_{gm} выполняется следующее соотношение:

$$\frac{J_{gd}}{M_d}=\frac{J_{gm}}{M_m}, \tag{4}$$

где M_i ($i=d$ и m) –молекулярные массы диоксида углерода и метана.

Для газовой смеси в целом введем среднемассовую скорость

$$\rho_g^0\upsilon_g=\rho_{gd}^0\upsilon_{gd}+\rho_{gm}^0\upsilon_{gm},\left(\rho_g^0=\rho_{gd}^0+\rho_{gm}^0\right). \tag{5}$$

Сложим уравнения (1), тогда с учетом (4) и (5) будем иметь

$$\frac{\partial\left(mS_g\rho_g^0\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(mS_g\rho_g^0\upsilon_g\right)}{\partial x}=J_{gd}\left(\frac{M_m}{M_d}-1\right). \tag{6}$$

Для фильтрации и диффузионного перемешивания газовой смеси применим соответственно закон Дарси и закон Фика:

$$mS_g\upsilon_g=-\frac{k_g}{\mu_g}\frac{\partial p}{\partial x}; \tag{7}$$

$$\rho_{gd}^0 w_{gd}=-\rho_{gm}^0 w_{gm}=D_g\frac{\partial\rho_{gm}^0}{\partial x},\left(w_{gd}=\upsilon_{gd}-\upsilon_g, w_{gm}=\upsilon_{gm}-\upsilon_g\right). \tag{8}$$

Здесь D_g – коэффициент диффузионного перемешивания смеси метана и диоксида углерода, w_{gi} ($i=d$ и m) – диффузионная скорость компонентов газовой смеси.

Будем полагать, что газовая смесь является калорически совершенной и подчиняется закону Дальтона

$$p_{gd}=\rho_{gd}^0 R_d T\ ,\ p_{gm}=\rho_{gm}^0 R_m T\ ,\ p=p_{gd}+p_{gm}\ . \tag{9}$$

Приведенные выше уравнения дополним уравнением энергии

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t}+mS_g\rho_g^0 c_g\upsilon_g\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+m\left(\rho_{hd}^0 l_{hd}\frac{\partial S_{hd}}{\partial t}+\rho_{hm}^0 l_{hm}\frac{\partial S_{hm}}{\partial t}\right) \tag{10}$$

$$\rho c=(1-m)\rho_{sk}^0 c_{sk}+m\left(S_g\rho_g^0 c_g+S_{hd}\rho_{hd}^0 c_{hd}+S_{hm}\rho_{hm}^0 c_{hm}\right),$$

$$\rho_g^0 c_g=\rho_{gd}^0 c_{gd}+\rho_{gm}^0 c_{gm}\ ,\ \lambda=(1-m)\lambda_{sk}+m\left(S_g\lambda_g+S_{hd}\lambda_{hd}+S_{hm}\lambda_{hm}\right).$$

Здесь c_j, λ_j – удельная теплоемкость и теплопроводность фаз $(j=g,h)$, ρc, λ – удельная объемная теплоемкость и теплопроводность системы, l_{hm}, l_{hd} – удельная теплота разложения и образования гидрата метана и диоксида углерода соответственно, отнесенные на единицу массы.

Систему уравнений (1), (2), (6) и (10) дополним граничными и начальными условиями:

$$\begin{gathered} x=0,\ t>0:\ p=p_e, p_{gd}=p_{gde}, T=T_e, \\ x=x_0,\ t>0:\ p=p_0,\ \partial p_{gd}/\partial x=0,\ \partial T/\partial x=0, \\ 0<x<x_0,\ t=0: p=p_0, p_{gd}=0, T=T_0, \end{gathered} \tag{11}$$

где x_0 – протяженность пористого пласта.

Кинетика вытеснения метана из состава газогидрата диоксидом углерода

Будем полагать, что интенсивность замещения молекул метана молекулами диоксида углерода определяется диффузией диоксида углерода через слой гидрата диоксида углерода, образовавшийся между газом и гидратом метана.

Для построения аналитических выражений для кинетики гидратообразования диоксида углерода (или замещения молекул метана молекулами диоксида углерода) рассмотрим следующую предельную схему. Примем, что гидрат метана полностью покрывает стенки пористых каналов. Пористую среду (скелет) схематически представим как систему цилиндрических каналов радиуса a. Тогда, согласно рассматриваемой схеме, гидрат метана будет находиться в кольцевом слое между $r = a$ и $r = a_{(md)}$, гидрат диоксида углерода – в слое между $r = a_{(md)}$ и $r = a_g$, а газовая смесь диоксида углерода и метана – в канале радиуса $a = a_g$. В рамках принятой схемы введенные линейные размеры и относительные фазовые насыщенности будут связаны следующим образом:

$$S_{hm} = 1 - \left(\frac{a_{(md)}}{a}\right)^2, \; S_{hd} = \left(\frac{a_{(md)}}{a}\right)^2 - \left(\frac{a_g}{a}\right)^2, \; S_g = \left(\frac{a_g}{a}\right)^2. \tag{12}$$

Для процесса переноса диффундирующего газа через слой гидрата диоксида углерода запишем уравнение диффузии

$$\frac{\partial \rho^0_{gd}{}'}{\partial t} = \frac{D_{hd}}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \rho^0_{gd}{}'}{\partial r}\right), \; a_{(md)} > r > a_g, \tag{13}$$

где D_{hd} – коэффициент диффузии углекислого газа в гидрате CO_2.

При граничных условиях

$$\rho^0_{gd}{}' = \rho^0_{gd(s)}, \; r = a_g; \qquad \rho^0_{gd}{}' = 0, \; r = a_{(md)} \tag{14}$$

квазистационарное решение уравнения (13) для плотности подвижного углекислого газа в гидрате CO_2 имеет вид

$$\rho'_{gd} = \rho^0_{gd(s)} \frac{\ln(r/a_{(md)})}{\ln(a_g/a_{(md)})}, \; a_{(md)} > r > a_g. \tag{15}$$

Здесь $\rho^0_{gd(s)}$ – плотность подвижного диоксида углерода в составе гидрата для состояния насыщения. Отметим, что второе условие в (14) означает мгновенное вытеснение молекулами диоксида углерода молекул метана при достижении молекул диоксида углерода границы $r = a_{(md)}$.

Запишем выражение для потока массы подвижного диоксида углерода к поверхности контакта между гидратами диоксида углерода и метана, отнесенные к единице ее площади как

$$j_{gd} = -D_{hd}\left(\frac{\partial \rho^0_{gd}{}'}{\partial r}\right)_{a_{(md)}}. \tag{16}$$

Подставляя решение(15) в (16), получим

$$j_{gd} = \frac{\rho^0_{gd(s)} D_{hd}}{a_{(md)} \ln\left(a_{(md)}/a_g\right)}. \tag{17}$$

Чтобы связать поток j_{gd} с интенсивностью потребления диоксида углерода J_{gd}, необходимо определить полную площадь поверхности контакта в единице объема пористой среды (удельная поверхность контакта) между гидратами CO_2 и CH_4. В рамках принятой схемы для этой площади можем записать

$$s_{md} = 2\pi a_{(md)} n_{(md)}, \; n_{(md)} = \frac{m(1-S_{hm})}{\pi a^2_{(md)}}, \tag{18}$$

где $n_{(md)}$ – число каналов радиусом $a_{(md)}$ в единице объема пористой среды.

По аналогии с законом Генри примем, что насыщенная концентрация свободного газа CO_2 в составе гидрата пропорциональна величине парциального давления CO_2 в газовой фазе, т.е.

$$\rho^0_{gd(s)} = \Gamma_d p_{gd}, \tag{19}$$

где Γ_d – параметр Генри. Тогда для интенсивности J_{gd} потребления CO_2 на образование гидрата в единице объема, связанной с j_{gd} как $J_{gd} = s_{md} j_{gd}$, используя (17) и (18), получим

$$J_{gd} = 2m(1-S_{hm})\frac{\rho^0_{gd(s)} D_{hd}}{a_{(md)} \ln\left(a_{(md)}/a_g\right)}. \tag{20}$$

Отметим, что $\rho^0_{gd(s)}$ и D_{hd} являются неизвестными эмпирическими параметрами. В выражение (20), а следовательно, и в общую систему уравнений данные параметры входят в виде произведения. Поэтому для дальнейшего введем один эмпирический параметр, приведенный коэффициент диффузии для CO_2, отвечающий в силу вышепринятых допущений, за кинетику образования гидрата CO_2 в виде

$$D = \frac{D_{hd}\rho^0_{gd(s)}}{\rho_{gd}}. \tag{21}$$

Подставляя (19) и первое уравнение из (9) в (21), получим

$$D = D_{hd}\Gamma_d R_d T.$$

Если, по аналогии с жидкостями, коэффициент диффузии D_{hd} и параметр Генри Γ_d считать достаточно консервативными величинами (слабо зависящими от давления p_{gd}, например) и поскольку относительное изменение температуры по шкале Кельвина для рассматриваемых процессов слабо меняется $\left(\Delta T/T \le 10^{-2}\right)$, то введенный коэффициент D, имеющий размерность коэффициента диффузии, можно принять за постоянный эмпирический модельный параметр. Наличие небольшой доли примесей других газов в составе углекислого газа и метана может повлиять на процессы гидратообразования и разложения [1, 13, 14]. Эмпирический параметр D зависит как от структуры гидрата, так и от особенностей скелета пористой среды.

В соответствии с вышепринятыми допущениями проницаемость для газовой смеси и радиус пористых канальцев будет задаваться как

$$k_g = k\left(a_g / a\right)^2 , \ a = \sqrt{k/m} , \tag{22}$$

где k – коэффициент абсолютной проницаемости скелета.

Результаты

На основе системы уравнений (1), (2), (6) и (10) с учетом (7) – (9) и (20) с начальными и граничными условиями (11) были проведены численные расчеты. Для параметров системы приняты следующие значения:

$$T_0 = 273 \text{ К}, \ T_e = 273 \text{ К}, \ p_0 = 2.8 \text{ МПа}, \ p_e = 3.2 \text{ МПа}, \ S_{hm0} = 0.15,$$

$$x_0 = 10 \text{ м}, \ m = 0.1, \ k = 10^{-11} \text{ м}^2, \ \rho c = 2.5 \cdot 10^6 \text{ Дж/(м}^3\text{·К)}, \ \lambda = 2 \text{ Вт/(м·К)},$$

$$l_{hm} = 4.37 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}, \ l_{hd} = 4.8 \cdot 10^5 \text{ Дж/(кг·К)}, \ \rho^0_{hm} = 910 \text{ кг/м}^3, \ \rho^0_{hd} = 1117 \text{ кг/м}^3,$$

$$G_m = 0.13, \ G_d = 0.29, \ R_{gm} = 520 \text{ Дж/(кг·К)}, \ R_{gd} = 189 \text{ Дж/(кг·К)},$$

$$c_{gm} = 1560 \text{ Дж/(кг·К)}, \ c_{gd} = 731 \text{ Дж/(кг·К)}, \ \mu_{gm} = 1.12 \times 10^{-5} \text{ Па·с},$$

$$\mu_{gd} = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ Па с}, \ D_g = 10^{-5} \text{ м}^2\text{/с}, \ D = 10^{-15} \text{ м}^2\text{/с}.$$

На рис. 1 кривыми *1*, *2*, *3* и *4* представлены распределения общего и парциальных давлений для диоксида углерода и метана (*a*, *b*, *c*), температуры (*d*), гидратонасыщенностей CO_2 и CH_4 (*e*, *f*) по координате в моменты времени 5, 25, 300 и 1900 с соответственно. Точечная кривая соответствует равновесной температуре при текущем давлении системы.

Видно, что вследствие инжекции CO_2 парциальное давление диоксида углерода в пласте возрастает и начинается процесс замещения метана двуокисью углерода в газогидрате. Фронт вытеснения свободного метана диоксидом углерода доходит до правой границы пласта за время около 25 с. В остальное продолжительное время вытесняется метан, полученный в результате его замещения диоксидом углерода из состава газогидрата. Процесс газозамещения в составе гидрата сопровождается повышением температуры (приблизительно на 1 К).

Массовые расходы углекислого газа и метана, отнесенные на единицу площади поперечного сечения пласта,

$$q_{gde} = \rho^0_{gde} m S_g \upsilon_{ge} , \ q_{gd} = \rho^0_{gd} m S_g \upsilon_g , \ q_{gm} = \rho^0_{gm} m S_g \upsilon_g .$$

Здесь q_{gde} – расход закачиваемого углекислого газа; q_{gd}, q_{gm} – расходы диоксида углерода и метана на выходе.

Тогда общие массы закаченного и добытого диоксида углерода и метана, отнесенные на единицу площади поперечного сечения пласта, равны

$$m_{gde} = \int_0^t q_{gde} dt , \ m_{gd} = \int_0^t q_{gd} dt , \ m_{gm} = \int_0^t q_{gm} dt .$$

На рис. 2 приведены зависимости массовых расходов и массы закачиваемого и выходящего диоксида углерода (*a*, *b*) и добываемого метана (*c*, *d*) от времени. Здесь штриховая линия обозначает расход и массу инжектируемого углекислого газа.

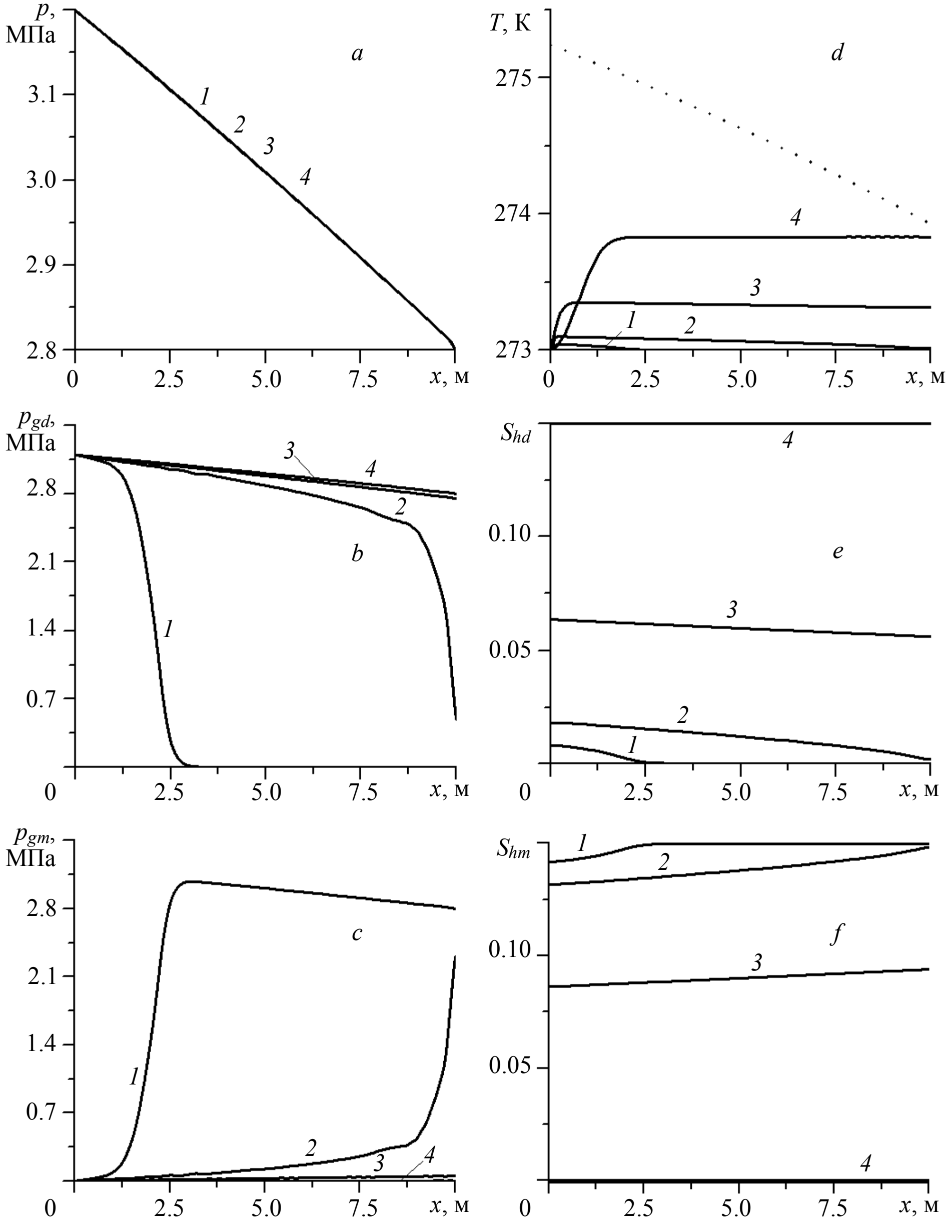

Рис. 1. Эволюция полей общего давления p (*a*), парциальных давлений диоксида углерода p_{gd} (*b*) и метана p_{gm} (*c*), температуры T (*d*) и насыщенностей гидратов диоксида углерода S_{hd} (*e*) и метана S_{hm} (*f*)

Fig. 1. Evolution of the (*a*) total pressure fields p, (*b*, *c*) partial pressure of carbon dioxide p_{gd} and methane p_{gm}, respectively, *(d)* temperature T, and *(e*, *f)* saturation of the carbon dioxide hydrates S_{hd} and methane S_{hm}, respectively

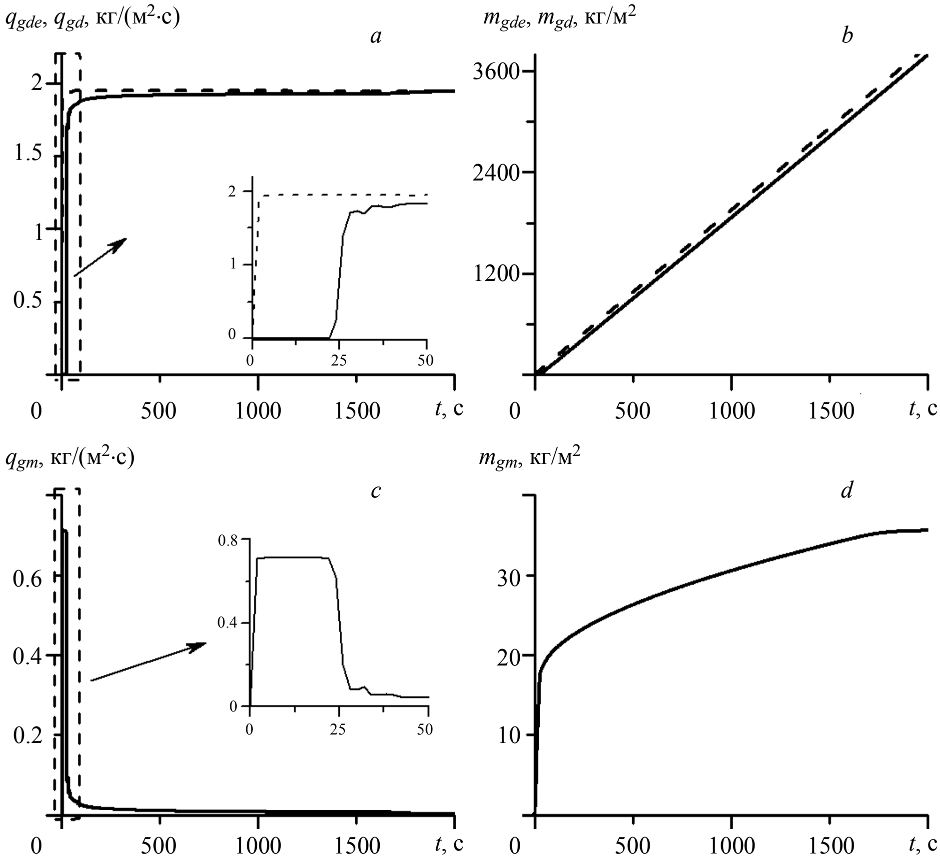

Рис. 2. Динамика массовых расходов и массы закачиваемого и выходящего углекислого газа (*a*, *b*) и извлекаемого метана (*c*, *d*)

Fig. 2. Dynamics of the mass flow and mass of: (*a*, *b*) injected and discharged carbon dioxide and (*c*, *d*) recoverable methane

Видно, что на начальном этапе вытесняется свободный метан, затем происходит скачок расходов, часть диоксида углерода поглощается, и часть метана выделяется вследствие начала процесса газозамещения. Следующий этап характеризуется вытеснением метана, полученного в результате процесса замещения метана из состава гидрата углекислым газом. После полного извлечения метана из пласта расходы диоксида углерода на входе и выходе совпадают. В результате процесса извлекается около 35 кг/м^2 метана и консервируется около 105 кг/м^2 углекислого газа.

Заключение

Проведено численное исследование процесса замещения метана диоксидом углерода в газогидрате при закачке углекислого газа в пористый пласт, изначально насыщенный метаном и его гидратом, с учетом диффузионной кинетики. Первый этап процесса характеризуется вытеснением свободного метана из пласта и началом процесса газозамещения в составе гидрата. На втором этапе процесса из пласта извлекается метан, полученный в результате замещения метана диоксидом углерода в составе гидрата. Процесс сопровождается повышением температуры за счет эффектов от образования гидрата диоксида углерода и разложения гидрата метана. В результате процесса закачки углекислого газа в газогидратный пласт происходит полный переход гидрата метана в гидрат диоксида углерода и полное извлечение метана из пласта.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Макогон Ю.Ф.* Гидраты природных газов. М.: Недра, 1974. 208 с.
2. *Истомин В.А.*, *Якушев В.С.* Газовые гидраты в природных условиях. М.: Недра, 1992. 236 с.
3. *Shagapov V.Sh.*, *Musakaev N.G.*, *Khasanov M.K.* Formation of gas hydrates in a porous medium during an injection of cold gas // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2015. V. 84. P. 1030. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.01.105.
4. *Шагапов В.Ш.*, *Хасанов М.К.*, *Гималтдинов И.К.*, *Столповский М.В.* Численное моделирование образования газогидрата в пористом пласте конечной протяженности при продувке его газом // Прикладная математика и техническая физика. 2011. Т. 52. № 4. С. 116.
5. *Рафикова Г.Р.* Образование газогидрата в замкнутом объеме, заполненном водонасыщенной пористой средой // Вестник Кемеровского государственного университета. 2015. Вып. 2(62). Т. 2. С. 122.
6. *Васильев В.И.*, *Попов В.В.*, *Цыпкин Г.Г.* Численное исследование разложения газовых гидратов, сосуществующих с газом в природных пластах // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2006. № 4. С. 127.
7. *Шагапов В.Ш.*, *Хасанов М.К.*, *Гималтдинов И.К.*, *Столповский М.В.* Особенности разложения газовых гидратов в пористых средах при нагнетании теплого газа // Теплофизика и аэромеханика. 2013. Т. 20. № 3. С. 347.
8. *Шагапов В.Ш.*, *Насырова Л.А.* О нагреве пористой среды, частично заполненной газогидратом, в условиях непроницаемых границ // Теплофизика высоких температур. 1999. Т. 37. № 5. С. 784.
9. *McGrail B.P.*, *Zhu T.*, *Hunter R.B.*, *White M.D.*, *Patil S.L.*, *Kulkarni A.S.* A New method for enhanced production of gas hydrates with CO_2 // AAPG Hedberg Conference «Gas hydrates: energy resource potential and associated geologic hazards». Vancouver, Canada, 2004.
10. *Espinoza D.N.*, *Santamarina J.C.* P-wave monitoring of hydrate-bearing sand during CH_4–CO_2 replacement // Int. J. Greenhouse Gas Control. 2011. V. 5. P. 1032. DOI: 10.1016/j.ijggc.2011.02.006.
11. *Jung J.W.*, *Nicolas Espinoza D. and Carlos Santamarina J.* Properties and phenomena relevant to CH_4-CO_2 replacement in hydrate-bearing sediments // J. Geophysical Research. 2012. V. 115. B10102. DOI: 10.1029/2009JB000812.
12. *Макогон Ю.Ф.* Газогидраты. История изучения и перспективы освоения // Геология и полезные ископаемые Мирового океана. 2010. № 2. С. 5.
13. *Rehder G.*, *Brewer P.W.*, *Peltzer E.T.*, *Friederich G.* Enhanced lifetime of methane bubble streams within the deep ocean // Geophysical Research Letters. 2002. No. 29. P. 21. DOI: 10.1029/2001GL013966.
14. *MgGinnis D.F.*, *Greinert J.*, *Artemov Y.*, *Beaubien S.E.*, *Wuest A.* Fate of rising methane bubbles in stratified waters: How much methane reaches the atmosphere? // J. Geophysical Research. 2006. V. 111. P. 382. DOI: 10.1029/2005JC003183.

Статья поступила 20.06.16 г.

Shagapov V. Sh., Khasanov M. K., Rafikova G. R. DISPLACEMENT OF METHANE FROM A GAS HYDRATE RESERVOIR IN THE PROCESS OF CARBON DIOXIDE INJECTION. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 6(44). pp. 104–114

DOI 10.17223/19988621/44/9

In this paper, a numerical simulation of the process of methane displacement from a gas hydrate reservoir during the injection of carbon dioxide followed by methane substitution by carbon dioxide in the composition of the hydrate was performed. The process of gas replacement was assumed to occur in a stable field of methane hydrates and carbon dioxide with CO_2 in a gaseous state. The intensity of carbon dioxide hydrate formation was determined by diffusion of carbon dioxide across the hydrate layer formed between a stream of the gas mixture and the methane hydrate in the porous channels.

The general pressure of the system, the partial pressures of the carbon dioxide and methane, the saturations of hydrates of carbon dioxide and methane, and the temperature as functions of time were obtained. In the initial stage of the process, free methane was forced out, and subsequently the methane received after the gas replacement process was extracted. This resulted in a complete transition of methane hydrate into carbon dioxide hydrate and a complete extraction of methane from the porous reservoir.

Keywords: gas hydrate reservoir, substitution of methane with carbon dioxide in the hydrate composition, diffusion, formation of gas hydrate.

SHAGAPOV Vladislav Shaykhulagzamovich (Academician of Academy of Sciences of RB, Doctor of Physics and Mathematics, Birsk Branch of Bashkir State University, Birsk, Russian Federation; Researcher Institute of Mechanics and Engineering, Kazan, Russian Federation; Researcher Institute of Mechanics, Kazan, Russian Federation).
E-mail: Shagapov@rambler.ru

KHASANOV Marat Kamilovich (Candidate of Physics and Mathematics, Sterlitamak Branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russian Federation).
E-mail: hasanovmk@mail.ru

RAFIKOVA Guzal Rinatovna (Birsk Branch of Bashkir State University, Birsk, Russian Federation).
E-mail: rafikova_guzal@mail.ru

REFERENCES

1. Makogon Yu.F. (1974) *Gidraty prirodnykh gazov* [Hydrates of natural gases]. Moscow: Nedra.
2. Istomin V.A., Yakushev V.S. (1992) *Gazovye gidraty v prirodnykh usloviyakh* [Gas hydrates in the natural environment]. Moscow: Nedra.
3. Shagapov V.Sh., Musakaev N.G., Khasanov M.K. (2015) Formation of gas hydrates in a porous medium during an injection of cold gas. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 84. p. 1030. DOI 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.01.105.
4. Shagapov V.Sh., Khasanov M.K., Stolpovskii M.V., Gimaltdinov I.K. (2011) Numerical modeling of formation of a gas hydrate in a finite-length porous bed purged by a gas. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 52(4). p. 599. DOI 10.1134/S0021894411040134.
5. Rafikova G.R. (2015) Obrazovanie gazogidrata v zamknutom ob'eme, zapolnennom vodonasyshchennoy poristoy sredoy [Formation of gas hydrate in a closed volume filled with porous water-saturated media]. *Vestnik Kemerovskogo gosudarstvennogo universiteta – Bulletin of Kemerovo State University*. 2(62). p. 122.
6. Vasil'ev V.I., Popov V.V., Tsypkin G.G. (2006) Chislennoe issledovanie razlozheniya gazovykh gidratov, sosushchestvuyushchikh s gazom v prirodnykh plastakh [Numerical study

of the decomposition of gas hydrates coexisting with a gas in natural reservoirs]. *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekhanika zhidkosti i gaza – Fluid Dynamics*. 4. pp. 127.

7. Shagapov V.Sh., Khasanov M.K., Gimaltdinov I.K., Stolpovsky M.V. (2013) The features of gas hydrate dissociation in porous media at warm gas injection. *Thermophysics and Aeromechanics*. 20(3). p. 339. DOI 10.1134/S0869864313030104.
8. Shagapov V.Sh., Nasyrova L.A. (1999) O nagreve poristoy sredy, chastichno zapolnennoy gazogidratom, v usloviyakh nepronitsaemykh granits [The heating of porous medium partly filled with gas hydrate in the presence of impermeable boundaries]. *Teplofizika vysokikh temperatur – High Temperature*. 37(5). p. 784.
9. McGrail B.P., Zhu T., Hunter R.B., White M.D., Patil S.L., Kulkarni A.S. (2004) A new method for enhanced production of gas hydrates with CO_2. AAPG Hedberg Conference «Gas hydrates: energy resource potential and associated geologic hazards». Vancouver.
10. Espinoza D.N., Santamarina J.C. (2011) P-wave monitoring of hydrate-bearing sand during CH_4-CO_2 replacement. *International Journal of Greenhouse Gas Control*. 5. p. 1032. DOI 10.1016/j.ijggc.2011.02.006.
11. Jung J.W., Nicolas Espinoza D., Carlos Santamarina J. (2010) Properties and phenomena relevant to CH_4-CO_2 replacement in hydrate-bearing sediments. *Journal of Geophysical Research*. 115. B10102. DOI 10.1029/2009JB000812.
12. Makogon Yu.F. (2010) Gazogidraty. Istoriya izucheniya i perspektivy osvoeniya [Gas hydrates. The history of exploration and development prospects]. *Geologiya i poleznye iskopaemye Mirovogo okeana*. 2. p. 5.
13. Rehder G, Brewer P.W., Peltzer E.T., Friederich G. (2002) Ehnaced lifetime of methane bubble streams within the deep ocean. *Geophysical Research Letters*. 29. p. 21. DOI 10.1029/2001GL013966.
14. MgGinnis D.F., Greinert J., Artemov Y., Beaubien S. E., Wuest A. (2006) Fate of rising methane bubbles in stratified waters: How much methane reaches the atmosphere? *Journal of Geophysical Research*. 111. p. 382. DOI 10.1029/2005JC003183.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АЗИН Антон Владимирович – кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник Томского государственного университета. E-mail: antonazin@niipmm.tsu.ru
АЛИЕВ Нихан Али – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математических методов прикладного анализа Бакинского государственного университета, Азербайджан. E-mail: aliyev.nihan@mail.ru
БАНЗУЛА Юрий Борисович – доктор технических наук, заместитель генерального директора ФГУП «Федеральный центр двойных технологий «Союз», Московская область, г. Дзержинский. E-mail: soyuz@fcdt.ru
БОРЗЕНКО Евгений Иванович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной газовой динамики и горения Томского государственного университета. E-mail: borzenko@ftf.tsu.ru
КАРЯЗОВ Святослав Владимирович – кандидат технических наук, ведущий инженер-технолог ФГУП «Федеральный центр двойных технологий «Союз», Московская область, г. Дзержинский. E-mail: soyuz@fcdt.ru
КЫРОВ Владимир Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики и методики преподавания физики Горно-Алтайского государственного университета. E-mail: kyrovVA@yandex.ru
МИХИЕНКОВА Евгения Игоревна – аспирантка Института инженерной физики и радиоэлектроники Сибирского федерального университета, г. Красноярск. E-mail: mihienkova _evgeniya@mail.ru.
МУСТАФАЕВА Елена Юмиддиновна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Бакинского государственного университета, Азербайджан. E-mail: helenmust@rambler.ru
НЕОБЪЯВЛЯЮЩИЙ Павел Анатольевич – научный сотрудник ООО «ТОРИНС», г. Красноярск. E-mail: neopan14@yandex.ru
ПОНОМАРЕВ Сергей Васильевич – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, заведующий лабораторией Томского государственного университета. E-mail: psv@niipmm.tsu.ru
РАФИКОВА Гузаль Ринатовна – аспирантка факультета физики и математики Бирского филиала Башкирского государственного университета. E-mail: rafikova_guzal@mail.ru
РИККОНЕН Сергей Владимирович – кандидат технических наук, доцент, старший научный сотрудник Томского государственного университета. E-mail: rikk2@yandex.ru
РОЗОВ Алексей Вячеславович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и компьютерных наук Ивановского государственного университета. E-mail: post-box023@mail.ru
СОКОЛОВ Евгений Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой прикладной математики и компьютерных наук Ивановского государственного университета. E-mail: ev-sokolov@yandex.ru
СТАРЧЕНКО Александр Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор, декан механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: starch@math.tsu.ru.
ФИЛИМОНОВ Сергей Анатольевич – научный сотрудник ООО «ТОРИНС», г. Красноярск. E-mail: bdk@inbox.ru
ХАЛИМАНОВИЧ Владимир Иванович – кандидат физико-математических наук, доцент, директор отраслевого центра крупногабаритных трансформируемых механических систем АО «Информационные спутниковые системы» имени академика М.Ф. Решетнева» (АО «ИСС»), г. Железногорск. E-mail: usmanov@iss-reshetnev.ru

ХАСАНОВ Марат Камилович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики и программирования Стерлитамакского филиала Башкирского государственного университета. E-mail: hasanovmk@mail.ru

ХРАМЦОВ Алексей Михайлович – аспирант, ведущий инженер Томского государственного университета. E-mail: khramtsov.home@gmail.com

ЧУРУКСАЕВА Владислава Васильевна – аспирантка, младший научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории вычислительной геофизики механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: chu.vv@mail.ru

ШАГАПОВ Владислав Шайхулагзамович – академик Академии наук РБ, профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник ФГБУН Института механики и машиностроения Казанского научного центра РАН. E-mail: shagapov@rambler.ru

ШРАГЕР Геннадий Рафаилович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной газовой динамики и горения Томского государственного университета. E-mail: shg@ftf.tsu.ru

Оригинал-макет подготовлен
ООО «Издательство научно-технической литературы»
634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*
Верстка *Д.В. Фортеса*

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001.
Подписано к печати 12.12.2016. Выпуск в свет 30.12.2016.
Формат 70 × 100 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 9.35 . Уч.-изд. л. 10.47. Тираж 250 экз. Заказ № 37. Цена свободная.

Отпечатано на оборудовании
Издательского Дома Томского государственного университета,
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. Заказ № 2299.
http://publish.tsu.ru E-mail: rio.tsu@mail.ru