

УДК 512.572

РАНГИ ПЛАНАРНОСТИ МНОГООБРАЗИЙ КОММУТАТИВНЫХ ПОЛУГРУПП

Д. В. Соломатин

Омский государственный педагогический университет, г. Омск, Россия

Изучается предложенное Л. М. Мартыновым понятие ранга планарности многообразий полугрупп. Пусть V — произвольное многообразие полугрупп. Если существует такое натуральное число $r \geq 1$, что все V -свободные полугруппы ранга не больше r допускают планарные графы Кэли, а V -свободная полугруппа ранга $r + 1$ не допускает планарного графа Кэли, то *рангом планарности многообразия V* называется это число r . Если для многообразия V такого натурального числа не существует, то говорят, что многообразие V имеет бесконечный ранг планарности. Доказано, что нетривиальное многообразие коммутативных полугрупп либо имеет бесконечный ранг планарности и при этом совпадает с многообразием полугрупп с нулевым умножением, либо имеет ранг планарности 1, 2 или 3. Эти оценки рангов планарности многообразий коммутативных полугрупп достижимы.

Ключевые слова: *полугруппа, граф Кэли полугруппы, многообразие полугрупп, свободная полугруппа многообразия, ранг планарности многообразия полугрупп, коммутативная полугруппа, многообразие коммутативных полугрупп, ранг планарности многообразия коммутативных полугрупп.*

DOI 10.17223/20710410/34/4

THE RANKS OF PLANARITY FOR VARIETIES OF COMMUTATIVE SEMIGROUPS

D. V. Solomatin

*Omsk State Pedagogical University, Omsk, Russia***E-mail:** solomatin_dv@omgpu.ru

We study the concept of the planarity rank suggested by L. M. Martynov for semigroup varieties. Let V be a variety of semigroups. If there is a natural number $r \geq 1$ that all V -free semigroups of ranks $\leq r$ allow planar Cayley graphs and the V -free semigroup of a rank $r + 1$ doesn't allow planar Cayley graph, then this number r is called *the planarity rank for variety V* . If such a number r doesn't exist, then we say that the variety V has the infinite planarity rank. We prove that a non-trivial variety of commutative semigroups either has the infinite planarity rank and coincides with the variety of semigroups with the zero multiplication or has a planarity rank 1, 2 or 3. These estimates of planarity ranks for varieties of commutative semigroups are achievable.

Keywords: *semigroup, Cayley graph of semigroup, variety of semigroups, free semigroup of variety, planarity rank for semigroup variety, commutative semigroup, variety of commutative semigroups, planarity rank for variety of commutative semigroups.*

Введение

Изучение планарных графов традиционно относят к вопросам топологии, которые представляют определённый интерес и с инженерной точки зрения, но рассматриваемый нами алгебраический подход значительно шире. Последнее время высокую актуальность обретает изучение свойств планарности графов Кэли полугрупп. Хорошо известно, что можно фиксировать свойства графов, получая тем самым описание связанных с ними алгебраических структур, и наоборот, фиксируя алгебраические свойства, получать уникальные серии графов, наглядно отражающих внутреннюю природу некоторой алгебраической структуры. Эти постулаты продемонстрированы в работах автора, в частности, на примере анализа строения допускающих внешне-планарные графы Кэли [1] полугрупп и свободных частично коммутативных нильпотентных полугрупп с планарными графами Кэли [2], опирающихся на построения из предшествующих работ [3, 4]. Кроме того, поднимаемые К. и У. Кнауэрами [5, 6], общепризнанными профессионалами в теории графов и их применений, вопросы различной вложимости графов Кэли для полугрупп также лежат на стыке теории графов, алгебры и топологии, а ведь именно на стыке наук рождаются новые идеи.

С другой стороны, описание допускающих плоские графы Кэли конечных групп известно давно [7], но их исследования не прекращаются, а продолжаются [8, 9], в том числе при поддержке ведущих институтов [10, 11]. Вопрос описания конечных полугрупп с планарными графами Кэли оказался весьма трудным и по сей день остаётся открытым. При этом значимость планарных графов Кэли для полугрупп сравнима с плоскими диаграммами ван Кампена в теории групп, подробное описание которых на русском языке можно найти в [12]. Обозначенное направление, год от года захватывающее умы всё более широкого круга исследователей [13, 14], помимо огромного фундаментального значения находит отражение и в прикладных исследованиях. Так, например, стратегически важной в международной сфере информационной безопасности является задача разработки эффективных алгоритмов актуального направления современной криптографии — обфускации программ. На последние, в частности, можно смотреть как на ассоциативные множества (элементами которых являются процедуры и функции). Рассмотрим множество всевозможных процедур относительно операции их объединения и последовательного выполнения в теле объединённой процедуры. Так как выбранная операция ассоциативная, бинарная, алгебраическая, то рассматриваемое множество обладает структурой полугруппы. Перечисление планарных графов Кэли полугрупп при таком подходе граничит с известной задачей приведения графа потока управления к плоскому виду [15].

В настоящей работе изучается предложенное Л. М. Мартыновым понятие ранга планарности многообразий полугрупп. Это понятие связано с оценкой наибольшего числа образующих элементов свободных полугрупп в многообразиях полугрупп, относительно которых граф Кэли этих полугрупп является планарным. Так как свободные полугруппы в многообразиях играют важную роль (хотя бы потому, что любая полугруппа многообразия является гомоморфным образом подходящей свободной в нём полугруппы), весьма актуальной является проблема нахождения рангов планарности многообразий полугрупп, сформулированная Л. М. Мартыновым в [16]. Ранее автором решена задача описания рангов планарности и классификации многообразий по рангам планарности для многообразий коммутативных моноидов, рассматриваемых как нульарные полугруппы [17]. Кроме того, в [18] вычислены ранги планарности некоторых серий важных многообразий коммутативных полугрупп, а в [19] перечислены все нетривиальные планарные многообразия полугрупп и найдены ранги планарно-

сти ключевой серии многообразий полугрупп. Основной целью этой работы является решение проблемы описания рангов планарности для всех многообразий коммутативных полугрупп. Подобное описание, помимо прочего, интересно ещё и тем, что в общем случае среди гомоморфных образов произвольной полугруппы (в частности, свободной полугруппы фиксированного многообразия) существуют полугруппы как с планарными, так и с не допускающими плоской укладки графами Кэли.

Заметим, что выбор многообразия всех коммутативных полугрупп обусловлен, прежде всего, естественностью свойства коммутативности, а также особым местом этого многообразия в решетке многообразий всех полугрупп (последние делятся на надкоммутативные и прочие) и довольно хорошей изученностью этого многообразия. Приведём лишь некоторые известные факты. Всякое коммутативное многообразие известным образом кодируется [20], посредством чего даётся описание (не столь эффективное, как описание решётки многообразий коммутативных моноидов [21]) решётки многообразий коммутативных полугрупп. Кроме того, для этой работы важен результат [22] о конечной базируемости любого коммутативного многообразия полугрупп (см. также [23, с. 30]).

1. Основные определения и результат

Формулировке основного результата предпошлем несколько определений. Напомним, что правым (левым) графом Кэли полугруппы S относительно множества образующих её элементов X называется помеченный ориентированный мультиграф $\text{Cay}(S, X)$, состоящий из множества вершин S и множества помеченных дуг — всевозможных троек (a, x, b) , где $a, b \in S$, $x \in X$ и $ax = b$ ($xa = b$). В коммутативном случае понятия правого и левого графа Кэли совпадают, и поэтому будем говорить просто о графе Кэли полугруппы.

Основой ориентированного мультиграфа называется обыкновенный граф, полученный из данного графа удалением петель и заменой всех дуг, соединяющих две вершины, одним ребром, соединяющим эти вершины. Ориентированный мультиграф естественно назвать планарным, если его основа является планарным графом. Будем говорить, что *полугруппа допускает планарный граф* Кэли, если относительно некоторого множества образующих основа её графа Кэли является планарным графом.

Приведём определение центрального понятия. Пусть V — произвольное многообразие полугрупп. Если существует такое натуральное число $r \geq 1$, что все V -свободные полугруппы ранга не больше r допускают планарные графы Кэли, а V -свободная полугруппа ранга $r + 1$ не допускает планарного графа Кэли, то *рангом планарности многообразия V* называется это число $r = r_\pi(V)$. Если для многообразия V такого натурального числа не существует, то говорят, что многообразие V имеет бесконечный ранг планарности, и пишут $r_\pi(V) = \infty$.

Ясно, что тривиальное многообразие, то есть состоящее из одноэлементных полугрупп, имеет бесконечный ранг планарности. Исследованы вопросы планарности многообразий коммутативных моноидов [17] и графов Кэли во многих классах полугрупп [18]. В частности, известно, что рангами планарности нетривиальных многообразий коммутативных моноидов могут быть только числа 1, 2 и 3. Все указанные числа могут быть рангами планарности и многообразий коммутативных полугрупп, но здесь появляется многообразие полугрупп с нулевым умножением с бесконечным рангом планарности. В связи с этим возникает естественный вопрос: будет ли ранг планарности любого нетривиального многообразия коммутативных полугрупп прини-

мать лишь значения 1, 2, 3 или ∞ ? Положительный ответ на него даёт следующее утверждение.

Теорема 1. Нетривиальное многообразие коммутативных полугрупп либо имеет бесконечный ранг планарности и при этом совпадает с многообразием полугрупп с нулевым умножением, либо имеет ранг планарности 1, 2 или 3.

Ключевая идея доказательства теоремы заключается в использовании конфигураций, иллюстрирующих непланарность основ графов Кэли свободных полугрупп некоторых многообразий коммутативных полугрупп относительно небольшого числа образующих и их модификаций, получаемых путём отождествления некоторых вершин. Они используются либо для доказательства непланарности графов Кэли свободных полугрупп широкого класса многообразий полугрупп, либо для сведения задачи к многообразиям, ранги планарности которых известны. При этом учитывается хорошо известный факт о том, что соотношение для образующих свободной в некотором многообразии полугруппы обязано быть тождеством в нём [24, следствие 3.2, с. 185].

Доказательству теоремы предпослём несколько вспомогательных утверждений. Но прежде приведём некоторые дополнительные сведения из теории графов и теории полугрупп. Напомним, что *плоским графом* называется обыкновенный граф (то есть неориентированный и без петель), вершины которого являются точками плоскости, а рёбра — непрерывными плоскими линиями без самопересечений, соединяющими вершины так, что никакие два ребра не имеют общих точек, кроме инцидентной им обоим вершины. Любой граф, изоморфный плоскому графу, называется *планарным*.

Для обоснования планарности обыкновенного графа используются различные критерии. Приведём формулировку используемого в работе критерия Понтрягина — Куратовского [25, с. 160]: граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных полному пятивершинному графу K_5 или полному двудольному графу $K_{3,3}$. Два графа называются *гомеоморфными*, если оба они могут быть получены из одного и того же графа подразбиением его рёбер.

Известно, что с точностью до изоморфизма конечные циклические (моногоенные [26, с. 53]) полугруппы исчерпываются полугруппами, заданными копредставлениями вида $\langle x : x^{r+m} = x^r \rangle$ в классе всех полугрупп, где r, m — произвольные положительные целые числа. Пара $(r; m)$ называется типом соответствующей конечной циклической полугруппы. Типом бесконечной циклической полугруппы считаем пару $(1; 0)$.

Типом многообразия полугрупп называется тип $(r; m)$ свободной в нём циклической полугруппы [27, замечание 2]. Например, многообразие C всех коммутативных полугрупп имеет тип $(1; 0)$. *Комбинаторными многообразиями* называются многообразия, не содержащие групп. Ясно, что комбинаторные многообразия имеют тип $(r; 1)$ для некоторого r . В частности, многообразие полурешёток имеет тип $(1; 1)$. Тип $(1; 1)$ имеет и тривиальное многообразие.

Под (нетривиальным) тождеством $u = v$ понимается пара различных слов u и v из свободной коммутативной полугруппы $F_\infty(C)$ над бесконечным счётным алфавитом $X_\infty = \{x, y, z, t, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\}$. Условимся в дальнейшем свободную полугруппу коммутативного многообразия V с n первыми элементами множества X_∞ в качестве её образующих элементов обозначать через $F_n(V)$.

2. Доказательство теоремы 1

Перейдём к формулировке и доказательству утверждений, из которых будет вытекать основной результат работы.

Лемма 1. Если коммутативное многообразие V полугрупп задано системой тождеств, в которой присутствуют тождества вида $x = xyv_1$ или $x = yzv_2$, где слово v_i при $i \in \{1, 2\}$ имеет произвольную длину $l(v_i) \geq 0$ и v_1 не меняется при замене всех вхождений в него x на y , а y на x с учётом коммутативности, то многообразие V является тривиальным.

Доказательство. Каждое из перечисленных в формулировке леммы тождеств эквивалентно тождеству $x = y$ тривиального многообразия. Действительно, если выполнено тождество $x = xyv$, то выполнено и тождество $y = yxv$, из которого в совокупности с предшествующим следует $x = y$. А если выполнено тождество $x = yzv$, то выполнено и тождество $t = yzv$, из которого в совокупности с предшествующим следует $x = t$, эквивалентное тождеству $x = y$. ■

Если добавление тождества вида $u = w$ к системе тождеств, определяющих многообразие V коммутативных полугрупп, не приводит к тривиальному многообразию, то отождествление слов u и w в свободной коммутативной полугруппе многообразия V соответствующего ранга назовём нетривиальным склеиванием. Перечисленные в лемме 1 системы тождеств таковыми не являются. Из леммы 1 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. Если V – нетривиальное многообразие коммутативных полугрупп, то в свободной полугруппе $F_4(V)$ не могут быть нетривиальные склеивания таких элементов, в записи у которых в одной части присутствует одна буква, а в другой — слово из разных букв.

Лемма 2. Если коммутативное многообразие V полугрупп задано системой тождеств, каждое тождество которой имеет длину слова большую или равную 2, и, кроме того, присутствуют тождества вида $xy = ztv$, или $xy = xzv$, или $xy = xyzt$, где слово v имеет произвольную длину $l(v) \geq 0$, то многообразие V является многообразием полугрупп с нулевым умножением.

Доказательство. Каждое из перечисленных в формулировке леммы тождеств эквивалентно тождеству $xy = zt$ многообразия полугрупп с нулевым умножением. В самом деле, если выполнено тождество $xy = ztv$, то выполнено и тождество $x_1x_2 = ztv$, из которого в совокупности с предшествующим следует $xy = x_1x_2$, эквивалентное тождеству $xy = zt$. Если же выполнено тождество $xy = xzv$, то выполнено и тождество $zt = zxv$, из которого в совокупности с предшествующим следует $xy = zt$. А если выполнено $xy = xyzt$, то выполнено и тождество $zt = ztxy$, из которого в совокупности с предшествующим следует $xy = zt$. ■

Лемма 3. Пусть нетривиальное многообразие коммутативных полугрупп V задано системой тождеств Σ , каждое тождество которой имеет длину слова более 2. Тогда ранг планарности многообразия V не превышает 3 независимо от типа многообразия.

Доказательство. Доказательство леммы осуществим в несколько этапов, варьируя длину слов, входящих в запись тождеств системы Σ .

Пусть коммутативное многообразие V удовлетворяет условиям леммы и длина слов в системе Σ более 3. Тогда граф Кэли каждой свободной полугруппы $F_n(V)$ при $n \geq 4$ содержит в точности подграф, изображенный на рис. 1, основа которого гомеоморфна графу $K_{3,3}$. Следовательно, этот граф не является планарным, а ранг планарности такого многообразия не превышает 3.

Пусть теперь коммутативное многообразие V удовлетворяет условиям леммы, а длина некоторых слов от первых степеней переменных в тождествах системы Σ или

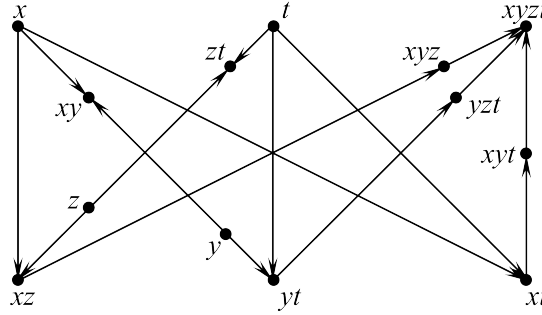


Рис. 1. Подграф графа Кэли свободной полугруппы $F_4(V)$ подмногообразия V многообразия коммутативных полугрупп, каждое тождество которого имеет длину слова более 3

в тождествах, вытекающих из неё, равна 3. Тогда в графе Кэли каждой свободной полугруппы $F_n(V)$ при $n \geq 4$ возможны отождествления некоторых пар вершин, соответствующих элементам xyz , xyt , yzt , $xyzt$, изображённым на рис. 1, что приводит к появлению подграфа, изображённого на рис. 2, и его вариаций. Но в каждом из случаев его основа оказывается гомеоморфной графу $K_{3,3}$. Следовательно, этот граф не является планарным, а ранг планарности такого многообразия не превышает 3. ■

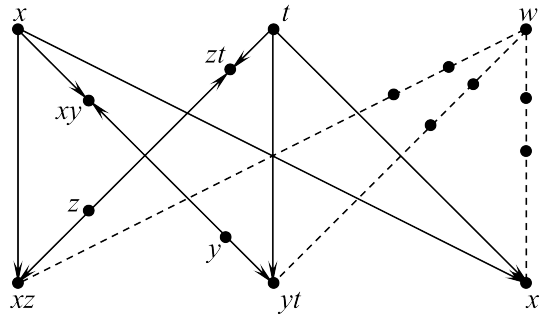


Рис. 2. Подграф графа Кэли свободной полугруппы $F_4(V)$ многообразия $\text{var} \{u_i = v_i : 1 \leq i \leq n\}$ коммутативных полугрупп, где $l(u_i) \geq 3$, $l(v_i) \geq 3$, при этом $w = xyzt$ — элемент полугруппы $F_4(V)$, отличный от остальных вершин

Следствие 2. Любое коммутативное многообразие V типа $(r; m)$ при $r \geq 3$, $m \geq 1$ имеет ранг планарности, не превышающий числа 3.

Доказательство. Слова в обеих частях каждого тождества системы, определяющей коммутативное многообразие типа $(r; m)$ при $r \geq 3$, $m \geq 1$ должны быть длины больше или равной 3. В самом деле, предположим противное, то есть что в многообразии V выполнено тождество $u = v$, в котором $l(u) \leq l(v)$ и $l(u) < 3$. Рассмотрим возможные случаи. Если $l(u) \neq l(v)$, то в V выполнено тождество $x^{l(u)} = x^{l(u)+(l(v)-l(u))}$, то есть многообразие имело бы тип $(r; m)$ при $r < 3$, что противоречит условию следствия 2. Пусть теперь $l = l(u) = l(v) < 3$. Тогда легко понять, что каждое из возможных в этом случае тождеств ($x = y$ при $l = 1$; $xx = xy$, $xx = yx$, $xx = yz$, $xy = xz$, $xy = zt$ при $l = 2$) не выполняется в циклической полугруппе типа $(r; m)$ при $r \geq 3$, $m \geq 1$, что вновь противоречит условию следствия 2. Итак, предположение не верно, и к системе тождеств, определяющей многообразие, непланарность графа Кэли свободной полугруппы которого интерпретируется рис. 2, добавляется тождество из слов длины больше или равной 3. В этом случае непланарность графа Кэли свободной по-

лугруппы полученного многообразия будет интерпретироваться рис. 2. Таким образом, ранг планарности описываемых следствием 2 многообразий не превышает трёх. ■

Лемма 4. Если среди следствий системы тождеств нетривиального коммутативного многообразия V присутствует тождество вида $xy = v$, в котором слово v длины $l(v) > 1$, помимо x^n и y^m (где n и m — возможно нулевые степени вхождения x и y соответственно), содержит переменную, имеющую степень вхождения n или m , то многообразие V совпадает с многообразием полугрупп с нулевым умножением; для остальных значений слова v длины $l(v) > 1$ граф Кэли свободной 4-порождённой полугруппы многообразия V не является планарным.

Доказательство. Многообразие полугрупп с нулевым умножением, в которых произведение любых двух элементов равно нулю ($xy = 0$), может быть задано одним тождеством $xy = zt$. Пусть условие леммы выполнено, среди следствий системы тождеств нетривиального коммутативного многообразия V присутствует тождество вида $xy = v$. Не теряя общности, положим $v = x^n y^m t_1^{i_1} t_2^{i_2} \dots t_k^{i_k}$, где $n, m, i_1, \dots, i_k$ — не все равные нулю одновременно неотрицательные целые степени вхождения соответствующих переменных. Тогда $i_j = n$ или $i_j = m$ для некоторого индекса j из множества допустимых индексов $[1; k]$. Учитывая коммутативность рассматриваемого многообразия, зафиксируем $i_1 = m$. Получим $xy = x^n y^m t_1^{i_1} t_2^{i_2} \dots t_k^{i_k} = x^n t_1^m y^m t_2^{i_2} \dots t_k^{i_k} = x t_1$, что равносильно тождеству $xy = zt$, определяющему многообразие полугрупп с нулевым умножением. Для остальных значений слова v длины $l(v) > 1$ тождество $xy = v$ не приводит к склеиванию элементов, соответствующих вершинам изображённого на рис. 1 графа. А так как в этом случае граф Кэли свободной 4-порождённой полугруппы многообразия V содержит изображённый на рис. 1 подграф, основа которого гомеоморфна графу $K_{3,3}$, то он не является планарным по критерию Понтрягина — Куратовского. ■

Лемма 5. Если среди следствий системы тождеств нетривиального коммутативного многообразия V есть тождество вида $x^2 = u$, где u — слово длины $l(u) > 1$, за исключением $u \equiv yz$, $u \equiv xy$, то граф Кэли свободной 4-порождённой полугруппы многообразия V не является планарным.

Доказательство. Пусть нетривиальное коммутативное многообразие V задано системой тождеств Σ , в которой присутствуют тождества из условия леммы. Тогда для тождества вида $x^2 = u$, где u — слово от нескольких переменных, за исключением $x^2 = yzt$, которое влечёт $xyz = tuv$ — отождествление слов длины три (то есть приводит к рис. 2), и $x^2 = yz$, $x^2 = xy$, которые приводят к многообразию полугрупп с нулевым умножением, можно сделать вывод, что оно не влияет на содержимое рис. 1. ■

Известно [24, следствие 3.2, с. 185], что если есть соотношение на образующих, то оно обязано быть тождеством. Принимая этот факт во внимание, проанализируем, при наличии каких тождеств в системе тождеств многообразия вершины изображённого на рис. 1 графа могут склеиваться, что привело бы к увеличению ранга планарности соответствующего многообразия. Напомним, склеивание вершин v_1 и v_2 есть преобразование, состоящее в удалении вершин v_1, v_2 и добавлении новой вершины v , смежной со всеми теми вершинами, с которыми были смежны v_1 и v_2 . Последнее может привести как к появлению, так и к потере свойства планарности графа.

Лемма 6. Если V — многообразие коммутативных полугрупп, то совпадение любой пары слов на рис. 1 в свободной полугруппе $F_4(V)$ этого многообразия приводит к выполнению одного из следующих тождеств: $x = y$, $xy = zt$ либо $u_i = v_j$, где u_i, v_j —

слова в некотором алфавите, длина которых $l(u_i) \geq l(v_j) \geq 3$, приводящих к рис. 2. Более того, если многообразие V задано системой тождеств, в котором длина слов больше или равна 3, то в свободной в этом многообразии полугруппе $F_4(V)$ интерпретируется модификация рис. 1 (а именно рис. 2), доказывающая непланарность графа Кэли этой полугруппы.

Доказательство. Проанализируем все возможные соотношения, приводящие к склеиванию вершин графа, изображённого на рис. 1. Допустим, что в свободной полугруппе $F_4(V)$ многообразия V выполнено одно или несколько из следующих соотношений: $x = y$, $x = z$, $x = t$, $x = xy$, $x = xz$, $x = xt$, $x = yt$, $x = zt$, $x = xyz$, $x = xyt$, $x = yzt$, $x = xyzt$, $y = z$, $y = t$, $y = xy$, $y = xz$, $y = xt$, $y = yt$, $y = zt$, $y = xyz$, $y = xyt$, $y = yzt$, $y = xyzt$, $z = t$, $z = xy$, $z = xz$, $z = xt$, $z = yt$, $z = zt$, $z = xyz$, $z = xyt$, $z = yzt$, $z = xyzt$, $t = xy$, $t = xz$, $t = xt$, $t = yt$, $t = zt$, $t = xyz$, $t = xyt$, $t = yzt$, $t = xyzt$. Тогда многообразие V является тривиальным в силу леммы 1. Существенное склеивание образующих приводит к выполнению тождеств, отличных от тривиального. Если в свободной полугруппе $F_4(V)$ многообразия V выполнено одно или несколько из следующих соотношений: $xy = xz$, $xy = xt$, $xy = yt$, $xy = zt$, $xy = xyz$, $xy = xyt$, $xy = yzt$, $xy = xyzt$, $xz = xt$, $xz = yt$, $xz = zt$, $xz = xyz$, $xz = xyt$, $xz = yzt$, $xz = xyzt$, $xt = yt$, $xt = zt$, $xt = xyz$, $xt = xyt$, $xt = yzt$, $xt = xyzt$, $yt = zt$, $yt = xyz$, $yt = xyt$, $yt = yzt$, $yt = xyzt$, $zt = xyz$, $zt = xyt$, $zt = yzt$, $zt = xyzt$, то многообразие V является многообразием полугрупп с нулевым умножением в силу леммы 2. И наконец, если в свободной полугруппе $F_4(V)$ многообразия V выполнено одно или несколько из оставшихся соотношений: $xyz = xyt$, $xyz = yzt$, $xyz = xyzt$, $xyt = yzt$, $xyt = xyzt$, $yzt = xyzt$, то в многообразии V выполнено тождество вида $u_i = v_j$, где u_i, v_j — слова в некотором алфавите, длина которых $l(u_i) \geq l(v_j) \geq 3$, приводящее к рис. 2. ■

В качестве следствия из лемм 1, 2 и 6 легко убедиться в том, что если в нетривиальном коммутативном многообразии совпадают слова, соответствующие некоторым парам вершин изображённого на рис. 2 графа, то ранг планарности такого многообразия не превышает трёх либо многообразие совпадает с многообразием полугрупп с нулевым умножением. Более того, имеет место следующее утверждение.

Следствие 3. Любое коммутативное многообразие типа $(2; m)$ при $m \geq 1$ либо имеет ранг планарности ∞ и при этом совпадает с многообразием полугрупп с нулевым умножением, либо имеет ранг планарности меньше или равный трём.

Доказательство. Слова хотя бы в одной из частей каждого тождества системы, определяющей коммутативное многообразие типа $(2; m)$ при $m \geq 1$, должны быть длины 2, иначе возникло бы противоречие с типом многообразия. Поэтому следствие 3 верно, согласно леммам 4, 5 и 6, которые охватывают все соответствующие возможности, а именно: лемма 4 задаёт системы тождеств, эквивалентные многообразию полугрупп с нулевым умножением типа $(2; 1)$; лемма 5 — все остальные возможные тождества, выполняющиеся в коммутативном многообразии V типа $(2; m)$ при $m \geq 1$, наличие которых приводит к тому, что граф Кэли свободной 4-порождённой полугруппы многообразия V не является планарным. Следовательно, по лемме 6 ранг планарности анализируемого многообразия V либо не превышает трёх, либо равен ∞ при V , являющемся многообразием полугрупп с нулевым умножением. ■

Лемма 7. Нетривиальное коммутативное многообразие типа $(1; m)$ при $m = 1$ имеет ранг планарности 3, а при $m > 1$ — не больше 3.

Доказательство. При $m = 1$ из полугрупп коммутативного многообразия типа $(1; m)$ получаем полурешётки, ранг планарности которых равен 3, что показано ранее для $S_{1,1}^1$ в обозначениях работы [18]. Пусть теперь $m > 1$. Тогда граф Кэли свободной полугруппы многообразия $\text{var}\{xy = yx, x^{1+m} = x^1\}$ с тремя образующими содержит изображённый на рис. 3 подграф, основа которого гомеоморфна графу $K_{3,3}$. Следовательно, этот граф не является планарным, а ранг планарности такого многообразия не превышает 2 и тем более 3.

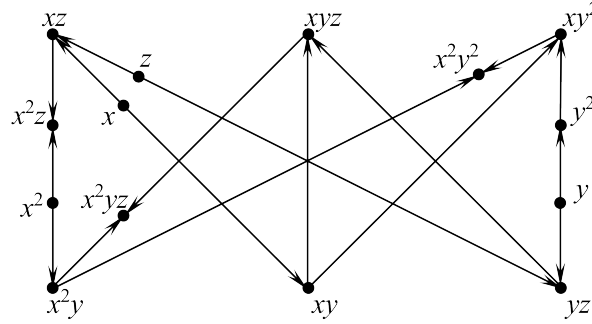


Рис. 3. Подграф графа Кэли свободной полугруппы $F_3(V)$ многообразия $\text{var}\{x^{1+m} = x^1\}$ при $m > 1$

В процессе доказательства, как и прежде, будем пользоваться тем фактом, что каждое соотношение, выполняющееся в свободной полугруппе многообразия V , является тождеством в многообразии V .

Проанализируем, при наличии каких тождеств в системе тождеств многообразия вершины изображённого на рис. 3 графа могут склеиваться, что привело бы к увеличению ранга планарности соответствующего многообразия. Для этого проверим $13 + 12 + \dots + 1 = 77$ возможных соотношений и соответствующих им тождеств, добавляемых к $x^{1+m} = x^1$ в многообразии $\text{var}\{xy = yx, x^{1+m} = x^1\}$, где $m > 1$, приводящих к склеиванию некоторых вершин графа, изображённого на рис. 3.

Пусть выполнено хотя бы одно из следующих соотношений: $xz = x^2z$, $x^2y = xy$, $xy = xy^2$. Это равносильно тому, что в многообразии выполнено тождество $xy = x^2y$, из которого следует $x^2 = x^3$. Тогда и $x^2 = x^2x = x^2x \dots x = x^{1+m} = x$ выполнено, то есть многообразие является многообразием полурешёток, имеет тип $(1; 1)$ и ранг планарности 3. Кроме того, выполнение хотя бы одного из соотношений $x^2 = x$, $y^2 = y$ приводит к выполнению тождества $x^2 = x$, которое определяет многообразие типа $(1; 1)$.

Выполнение хотя бы одного из соотношений $x^2y = x^2y^2$, $xy^2 = x^2y^2$ приводит к тому, что выполнено тождество $x^2y = x^2y^2$, из которого следуют $x^3 = x^4$ и $xy = x^{1+m}y^{1+m} = x^3y^3 = xyx^2y^2 = xyx^2y = x^3y^2 = x^{1+m}y^2 = xy^2$, что приводит к $x^2 = x$ — многообразию типа $(1; 1)$.

Выполнение соотношения $xyz = x^2yz$ приводит к тому, что выполнено тождество $xyz = x^2yz$, из которого следуют $x^2y = x^2y^2$, $x^3 = x^4$ и тождества $xy = x^{1+m}y^{1+m} = x^3y^3 = xyx^2y^2 = xyx^2y = x^3y^2 = x^{1+m}y^2 = xy^2$, что приводит к $x^2 = x$ — многообразию типа $(1; 1)$.

Выполнение соотношения $xyz = x^2y^2$ приводит к тому, что выполнено тождество $xyz = x^2y^2$, из которого следуют $x^2y = x^2y^2$, $x^3 = x^4$ и тождества $xy = x^{1+m}y^{1+m} = x^3y^3 = xyx^2y^2 = xyx^2y = x^3y^2 = x^{1+m}y^2 = xy^2$, что приводит к $x^2 = x$ — многообразию типа $(1; 1)$.

Выполнение соотношения $x^2yz = xy^2$ приводит к тому, что выполнено тождество $x^2yz = xy^2$, из которого следуют $x^2y = x^2y^2$, $x^3 = x^4$ и тождества $xy = x^{1+m}y^{1+m} = x^3y^3 = xyx^2y^2 = xyx^2y = x^3y^2 = x^{1+m}y^2 = xy^2$, что приводит к $x^2 = x$ — многообразию типа $(1; 1)$.

Выполнение хотя бы одного из соотношений $x^2z = z$, $x^2y = y$, $x = xy^2$ приводит к тому, что выполнено тождество $x^2y = y$, из которого следует $x^2z = z$, что приводит к $x^2 = xxy^2 = x^2yy = y^2$ — многообразию полугрупп, задаваемых системой тождеств $\text{var}\{xy = yx, x^{1+m} = x, x^2 = y^2\}$, ранг планарности которого ограничен 3, согласно рис. 4.

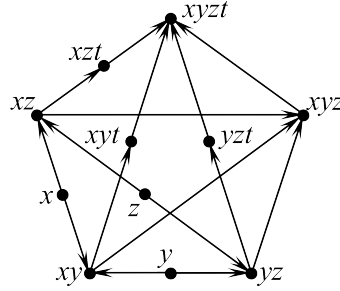


Рис. 4. Подграф графа Кэли свободной полугруппы $F_4(V)$ коммутативного многообразия $\text{var}\{x^{1+m} = x^1\}$ при $m > 1$

Выполнение хотя бы одного из соотношений $x^2 = x^2y^2$, $x^2y^2 = y^2$ приводит к тому, что выполнено тождество $x^2 = x^2y^2$, из которого следует $y^2 = x^2y^2$, что приводит к $x^2 = y^2$ — коммутативному многообразию полугрупп, задаваемых системой тождеств $\text{var}\{xy = yx, x^{1+m} = x, x^2 = y^2\}$, ранг планарности которого ограничен 3, согласно рис. 4.

Выполнение соотношения $x^2 = y^2$ приводит к тому, что выполнено тождество $x^2 = y^2$ коммутативного многообразия полугрупп, задаваемых системой тождеств $\text{var}\{xy = yx, x^{1+m} = x, x^2 = y^2\}$, ранг планарности которого ограничен 3, согласно рис. 4.

Выполнение соотношения $yz = x^2yz$ приводит к тому, что выполнено тождество $yz = x^2yz$, из которого следует $x^2 = x^2y^2$, что приводит к $x^2 = x^2y^2 = y^2$, $x = xx^m = xx^mz^2 = xy^2$ — коммутативному многообразию полугрупп, задаваемых системой тождеств $\text{var}\{xy = yx, x^{1+m} = x, x = xy^2\}$, ранг планарности которого ограничен 3, согласно рис. 4.

Выполнение соотношения $x^2y = xy^2$ приводит к тому, что выполнено тождество $x^2y = xy^2$ коммутативного многообразия полугрупп, задаваемых системой тождеств $\text{var}\{xy = yx, x^{1+m} = x, x^2y = xy^2\}$, ранг планарности которого не превышает 3 (по рис. 4), но можно доказать, что он в точности равен 2.

Выполнение соотношения $xy = x^2y^2$ приводит к тому, что выполнено тождество $xy = x^2y^2$, из которого следует $x^2 = x^4$, что приводит к многообразию, задаваемому системой тождеств $\text{var}\{xy = yx, x^{1+m} = x, x^2y = xy^2\}$, ранг планарности которого не превышает 3 (по рис. 4), но можно доказать, что он в точности равен 2.

Выполнение хотя бы одного из соотношений $xz = x^2$, $x^2 = xy$, $xy = y^2$, $yz = y^2$ приводит к тому, что выполнено тождество $xy = x^2$, из которого следует $yx = y^2$, $xy = x^2 = xz = z^2 = zt$ и $x = xx^m = yy^m = y$, определяющее тривиальное многообразие.

Аналогичным образом проверяются остальные соотношения. Выполнение каждого из них приводит к тривиальному многообразию. Читатель может самостоятельно

проанализировать рис. 4. Легко проверяется $10 + 9 + \dots + 1 = 55$ возможных соотношений и соответствующих им тождеств, добавляемых к $x^{1+m} = x^1$ в многообразии $\text{var}\{xy = yx, x^{1+m} = x^1\}$, где $m > 1$, приводящих к склеиванию некоторых вершин графа, изображённого на рис. 4. В каждом из этих случаев приходим к тривиальному многообразию.

Наконец, если в определяющую коммутативное многообразие систему тождеств добавить тождество, не приводящее к склеиванию никаких пар вершин изображённых на рис. 3 и 4 графов, то ранг планарности полученного многообразия останется неизменным.

Таким образом, рассмотренные случаи исчерпывают все возможные варианты. Ранг планарности получающегося многообразия в каждом из них оказался не превышающим 3, либо многообразие тривиальное. ■

Следующая лемма в явном виде доказана первым пунктом теоремы 2 [18, с. 20].

Лемма 8. Ранг планарности многообразия всех коммутативных полугрупп равен 2.

Доказательство теоремы 1. В силу лемм 1–8 и следствий 1–3 теорема верна. В самом деле, каждое многообразие коммутативных полугрупп имеет фиксированный тип $(r; m)$. Ранг планарности многообразия C всех коммутативных полугрупп, имеющего тип $(1; 0)$, по лемме 8 равен 2. Для любого $m \geq 1$ случай многообразия типа $(r; m)$ при $r \geq 3$ охватывается следствием 1 из леммы 3 и исчерпывается коммутативными многообразиями, ранг планарности которых не превышает 3. Случай $(2; m)$ охватывается следствием 3 из лемм 4 и 5, в котором доказано, что коммутативное многообразие типа $(2; m)$ при $m \geq 1$ либо имеет ранг планарности ∞ и при этом совпадает с многообразием полугрупп с нулевым умножением, либо имеет ранг планарности меньше или равный трём. И наконец, случай многообразия типа $(1; m)$ охватывается леммой 7, в которой доказано, что ранг планарности нетривиального многообразия коммутативных полугрупп типа $(1; m)$ при $m = 1$ равен 3, а при $m > 1$ не превышает 3. ■

Заключение

Конкретные примеры многообразий, ранги планарности которых достигают данных оценок, можно почерпнуть в [18]: ранг планарности принимает значение 1 у многообразий всех коммутативных полугрупп бернсайдовского типа $(r; m)$ при $r > 0, m > 2$, в частности, у многообразий абелевых групп экспоненты большей чем 2; значение 2 у многообразия всех коммутативных полугрупп, у некоторых комбинаторных многообразий коммутативных моноидов, у многообразий коммутативных нильполугрупп индекса больше 1 и у многообразий коммутативных нильпотентных полугрупп степени больше 3; значение 3 у многообразий абелевых групп экспоненты 2, у многообразия полурешёток и у многообразия коммутативных нильпотентных полугрупп степени 3; бесконечное значение ранга планарности среди коммутативных имеют только многообразия полугрупп с нулевым умножением.

Заметим, что свойство планарности, как правило, не сохраняется основными операциями над полугруппами. Поэтому особый интерес представляет изучение рангов планарности многообразий, имеющее важное значение для конкретных полугрупп. В некоторых классах полугрупп последнее позволяет без усилий находить ограничения на число образующих, приводящие к планарным полугруппам, а именно: анализируя рис. 2 и 4, легко видеть, что эти рисунки реализуются, например, в конечных полугруппах, являющихся свободными коммутативными произведениями более трёх цикличе-

ских полугрупп [3, 28–32], в нильпотентных полугруппах ступени более 4, в которых найдётся произведение четырёх неразложимых образующих, отличное от 0. И это далеко не полный список следствий, которые могут быть получены при анализе найденных в процессе доказательства теоремы конфигураций.

Ещё раз подчеркнём, что здесь впервые применён новый подход, предлагаемое доказательство не геометрическое, в отличие от предшествующих работ, а алгебраическое. Удалось найти две ключевые конфигурации, обеспечивающие результат для бесконечного числа многообразий.

Результаты работы докладывались на Международной конференции по алгебре, анализу и геометрии (Казань, 26 июня – 2 июля 2016 г.) и опубликованы в [33].

Автор выражает глубокую признательность профессору Л. М. Мартынову за постановку задачи, постоянное внимание к работе, полезные обсуждения результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соломатин Д. В. Строение полугрупп, допускающих внешнепланарные графы Кэли // Сиб. электрон. матем. изв. 2011. Т. 8. С. 191–212.
2. Соломатин Д. В. Свободные частично коммутативные нильпотентные полугруппы с планарными графами Кэли // Вестник Омского университета. 2014. Вып. 4. С. 28–36.
3. Соломатин Д. В. Прямые произведения циклических полугрупп, допускающие планарный граф Кэли // Сиб. электрон. матем. изв. 2006. Т. 3. С. 238–252.
4. Соломатин Д. В. О коммутативных полугруппах с планарными графами Кэли: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Омск: Изд-во ОмГПУ, 2006. 107 с.
5. Knauer K. and Knauer U. Toroidal embeddings of right groups // Thai J. Math. 2010. V. 8. No. 3. P. 483–490.
6. Knauer K. and Knauer U. On planar right groups // Semigroup Forum. 2015. V. 92. No. 1. P. 142–157.
7. Maschke H. The representation of finite groups, especially of the rotation groups of the regular bodies of three- and four-dimensional space, by Cayley's color diagrams // Amer. J. Math. 1896. V. 18. No. 2. P. 156–194.
8. Беленкова Ж. Т., Романьков В. А. Регулярные графы Кэли // Сиб. мат. журн. Деп. в ВИНТИ, 1997. № 802-B97. 37 с.
9. Беленкова Ж. Т. Плоские графы Кэли: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Омск: Изд-во Ом. ун-та, 1998. 101 с.
10. Georgakopoulos A. and Hamann M. The Planar Cayley Graphs are Effectively Enumerable. <https://arxiv.org/abs/1506.03361>, 2015.
11. Zhang X. Clifford semigroups with genus zero // Proc. Intern. Conf. Semigroups, Acts and Categories with Applications to Graphs, University of Tartu, June 27–30, 2007. Tartu: Estonian Mathematical Society, 2008. P. 151–160.
12. Ольшанский А. Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, 1989. 448 с.
13. Мартынов П. О., Соломатин Д. В. Конечные свободные коммутативные полугруппы и полугруппы с нулём, допускающие обобщенные внешнепланарные графы Кэли // Вестник Омского университета. 2014. Вып. 3. С. 22–26.
14. Мартынов П. О. Конечные свободные коммутативные моноиды, допускающие обобщенно внешнепланарные графы Кэли // Вестник Омского университета. 2015. Вып. 4. С. 6–9.
15. Коробейников А. Г., Кутузов И. М. Алгоритм обфускации // Кибернетика и программирование. 2013. № 3. С. 1–8.

16. <http://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?presentid=12900> — Новые проблемы алгебры и логики. Юбилейное 900-е заседание семинара. Омский алгебраический семинар, ОФ ИМ СОРАН, г. Омск, 12 ноября 2015.
17. Соломатин Д. В. Ранги планарности многообразий коммутативных моноидов // Вестник Омского университета. 2012. Вып. 4. С. 41–45.
18. Соломатин Д. В. Планарные многообразия коммутативных полугрупп // Вестник Омского университета. 2015. Вып. 2. С. 17–22.
19. Соломатин Д. В. Планарные многообразия полугрупп // Сиб. электрон. матем. изв. 2015. Т. 12. С. 232–247.
20. Kisielewicz A. Varieties of commutative semigroups // Trans. Amer. Math. Soc. 1994. V. 342. No. 1. P. 275–306.
21. Head T. J. The varieties of commutative monoids // Nieuw Archief voor Wiskunde. 1968. V. 16. No. 3. P. 203–206.
22. Perkins P. Bases for equational theories of semigroups // J. Algebra. 1969. V. 11. No. 2. P. 298–314.
23. Шеврин Л. Н., Верников Б. М., Волков М. В. Решетки многообразий полугрупп // Изв. вузов. Математика. 2009. № 3. С. 3–36.
24. Кон П. Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968. 352 с.
25. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сараванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990. 384 с.
26. Шеврин Л. Н. Полугруппы. Гл. IV // Общая алгебра / под общ. ред. Л. А. Скорнякова. М.: Наука, 1991. Т. 2. С. 11–191.
27. Шеврин Л. Н., Мартынов Л. М. О достижимых классах алгебр // Сиб. мат. журн. 1971. Т. 12. № 6. С. 1363–1381.
28. Соломатин Д. В. Конечные свободные коммутативные полугруппы с планарными графами Кэли // Математика и информатика: наука и образование. Межвузовский сборник научных трудов. Омск: Изд-во ОмГПУ, 2003. Вып. 3. С. 32–38.
29. Соломатин Д. В. Конечные свободные коммутативные моноиды, допускающие планарный граф Кэли // Вестник Омского университета. 2005. Вып. 4. С. 36–38.
30. Соломатин Д. В. Прямые произведения циклических моноидов и полугрупп с нулем, допускающие планарный граф Кэли // Математика и информатика: наука и образование. Межвузовский сборник научных трудов. Омск: Изд-во ОмГПУ, 2006. Вып. 5. С. 51–63.
31. Соломатин Д. В. Свободные частично коммутативные полугруппы и n -веерные полурешетки с планарными графами Кэли // Математика и информатика: наука и образование. Межвузовский сборник научных трудов. Омск: Изд-во ОмГПУ, 2009. Вып. 8. С. 36–39.
32. Мартынов Л. М., Соломатин Д. В. Полугруппы вычетов с циклическими группами обратимых элементов, допускающие планарные графы Кэли // Вестник Омского университета. 2012. Вып. 2. С. 57–62.
33. Соломатин Д. В. Ранги планарности многообразий коммутативных полугрупп // Материалы Междунар. конф. по алгебре, анализу и геометрии. Казань: Казанский университет, 2016. С. 318–319.

REFERENCES

1. Solomatin D. V. Stroenie polugrupp, dopuskayushchikh vneshneplanarnye grafy Keli [Semigroups with outerplanar Cayley graphs]. Sib. Electr. Math. Reports, 2011, vol. 8, pp. 191–212. (in Russian)

2. *Solomatin D. V.* Svobodnye chastichno kommutativnye nil'potentnye polugruppy s planarnymi grafami Keli [Free partially commutative nilpotent semigroups with planar Cayley graphs]. Herald of Omsk University, 2014, iss. 4, pp. 28–36. (in Russian)
3. *Solomatin D. V.* Pryamye proizvedeniya tsiklicheskikh polugrupp, dopuskayushchie planarnyy graf Keli [Direct products of cyclic semigroups admitting a planar Cayley graph]. Sib. Electr. Math. Reports, 2006, vol. 3, pp. 238–252. (in Russian)
4. *Solomatin D. V.* O kommutativnykh polugruppakh s planarnymi grafami Keli [Commutative Semigroups with Planar Cayley Graphs]. PhD Thesis, Omsk, OmSPU Publ., 2006. (in Russian)
5. *Knauer K. and Knauer U.* Toroidal embeddings of right groups. Thai J. Math., 2010, vol. 8, no. 3, pp. 483–490.
6. *Knauer K. and Knauer U.* On planar right groups. Semigroup Forum, 2015, vol. 92, no. 1, pp. 142–157.
7. *Maschke H.* The representation of finite groups, especially of the rotation groups of the regular bodies of three- and four-dimensional space, by Cayley's color diagrams. Amer. J. Math., 1896, vol. 18, no. 2, pp. 156–194.
8. *Belenkova Zh. T. and Roman'kov V. A.* Regulyarnye grafy Keli [Regular Cayley Graphs]. Dep. VINITI, 1997, no. 802-V97. (in Russian)
9. *Belenkova Zh. T.* Ploskie grafy Keli [Plane Cayley Graphs]. PhD Thesis, Omsk, OmSU Publ., 1998. (in Russian)
10. *Georgakopoulos A. and Hamann M.* The Planar Cayley Graphs are Effectively Enumerable. <https://arxiv.org/abs/1506.03361>, 2015.
11. *Zhang X.* Clifford semigroups with genus zero. Proc. Intern. Conf. Semigroups, Acts and Categories with Applications to Graphs, University of Tartu, June 27–30, 2007. Tartu, Estonian Mathematical Society, 2008, pp. 151–160.
12. *Ol'shanskiy A. Yu.* Geometriya opredelyayushchikh sootnosheniy v gruppakh [Geometry of Defining Relations in Groups]. Moscow, Nauka Publ., 1989. (in Russian)
13. *Martynov P. O. and Solomatin D. V.* Konechnye svobodnye kommutativnye polugruppy i polugruppy s nulem, dopuskayushchie obobshchennye vneshneplanarnye grafy Keli [Finite free commutative semigroups and semigroups with zero how admitting generalized outerplanar Cayley graphs]. Herald of Omsk University, 2014, iss. 3, pp. 22–26. (in Russian)
14. *Martynov P. O.* Konechnye svobodnye kommutativnye monoidy, dopuskayushchie obobshchenno vneshneplanarnye grafy Keli [Finite free commutative monoids admits generalized outerplanar Cayley graphs]. Herald of Omsk University, 2015, iss. 4, pp. 6–9. (in Russian)
15. *Korobeynikov A. G. and Kutuzov I. M.* Algoritm obfuskatsii [Obfuscation algorithm]. Cybernetics and Programming, 2013, no. 3, pp. 1–8. (in Russian)
16. <http://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?presentid=12900> — Novye problemy algebrы i logiki [New Problems of Algebra and Logic]. Omsk, 2015. (in Russian)
17. *Solomatin D. V.* Rangi planarnosti mnogoobraziy kommutativnykh monoidov [Planarity ranks of the varieties of commutative monoids]. Herald of Omsk University, 2012, iss. 4, pp. 41–45. (in Russian)
18. *Solomatin D. V.* Planarnye mnogoobraziya kommutativnykh polugrupp [Planar varieties of commutative semigroups]. Herald of Omsk University, 2015, iss. 2, pp. 17–22. (in Russian)
19. *Solomatin D. V.* Planarnye mnogoobraziya polugrupp [Planar varieties of semigroups]. Sib. Electr. Math. Reports, 2015, vol. 12, pp. 232–247. (in Russian)
20. *Kisielewicz A.* Varieties of commutative semigroups. Trans. Amer. Math. Soc., 1994, vol. 342, no. 1, pp. 275–306.

21. *Head T. J.* The varieties of commutative monoids. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 1968, vol. 16, no. 3, pp. 203–206.
22. *Perkins P.* Bases for equational theories of semigroups. *J. Algebra*, 1969, vol. 11, no. 2, pp. 298–314.
23. *Shevrin L. N., Vernikov B. M., and Volkov M. V.* Reshetki mnogoobraziy polugrupp [Lattices of semigroup varieties]. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 2009, no. 3, pp. 3–36. (in Russian)
24. *Cohn P. M.* *Universal Algebra*. Harper & Row, 1965.
25. *Emelichev V. A., Mel'nikov O. I., Saravanov V. I., Tyshkevich R. I.* Lektsii po teorii grafov [Lectures on Graph Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1990. (in Russian)
26. *Shevrin L. N.* Polugruppy [Semigroups]. Ch. IV in *Obshchaya algebra [Algebra]*. ed. L. A. Skorniyakov. Moscow, Nauka Publ., 1991, vol. 2, pp. 11–191. (in Russian)
27. *Shevrin L. N. and Martynov L. M.* O dostizhimykh klassakh algebr [On accessible classes of algebras]. *Sib. Math. J.*, 1971, vol. 12, no. 6, pp. 1363–1381. (in Russian)
28. *Solomatin D. V.* Konechnye svobodnye kommutativnye polugruppy s planarnymi grafami Keli [Finite free commutative semigroups with planar Cayley graphs]. *Matematika i Informatika: Nauka i Obrazovanie. Mezhvuzovskiy sbornik nauchnykh trudov*. Omsk, OmSPU Publ., 2003, iss. 3, pp. 32–38. (in Russian)
29. *Solomatin D. V.* Konechnye svobodnye kommutativnye monoidy, dopuskayushchie planarnyy graf Keli [Finite free commutative monoids admitting planar graph Cayley]. *Herald of Omsk University*, 2005, iss. 4, pp. 36–38. (in Russian)
30. *Solomatin D. V.* Pryamyie proizvedeniya tsiklicheskikh monoidov i polugrupp s nulem, dopuskayushchie planarnyy graf Keli [The direct product of cyclic monoids and semigroups with zero admitting planar Cayley graph]. *Matematika i Informatika: Nauka i Obrazovanie. Mezhvuzovskiy sbornik nauchnykh trudov*. Omsk, OmSPU Publ., 2006, iss. 5, pp. 51–63. (in Russian)
31. *Solomatin D. V.* Svobodnye chastichno kommutativnye polugruppy i n -veernye polureshetki s planarnymi grafami Keli [Free partially commutative semigroups and n -fan semilattice with planar Cayley graphs]. *Matematika i Informatika: Nauka i Obrazovanie. Mezhvuzovskiy sbornik nauchnykh trudov*. Omsk, OmSPU Publ., 2009, iss. 8, pp. 36–39. (in Russian)
32. *Martynov L. M. and Solomatin D. V.* Polugruppy vychetov s tsiklicheskimi gruppami obratimyykh elementov, dopuskayushchie planarnyye grafy Keli [Semigroups of residues with cyclic groups of invertible elements admitting planar Cayley graphs]. *Herald of Omsk University*, 2012, iss. 2, pp. 57–62. (in Russian)
33. *Solomatin D. V.* Rangi planarnosti mnogoobraziy kommutativnykh polugrupp [The ranks of planarity for varieties of commutative semigroups]. *Proc. Intern. conf. on Algebra, Analysis and Geometry*, Kazan, Kazan University Publ., 2016, pp. 318–319. (in Russian)