

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

УДК 519.17

Т-НЕПРИВОДИМЫЕ РАСШИРЕНИЯ ДЛЯ ОРИЕНТИРОВАННЫХ СВЕРХСТРОЙНЫХ ДЕРЕВЬЕВ

А. В. Гавриков

ООО «Яндекс.Маркет Лаб», г. Санкт-Петербург, Россия

Приведена конструкция одного из Т-неприводимых расширений для ориентированных сверхстройных деревьев.

Ключевые слова: Т-неприводимые расширения, ориентированное дерево, сверхстройное дерево.

DOI 10.17223/20710410/34/6

T-IRREDUCIBLE EXTENSIONS OF DIRECTED STARLIKE TREES

A. V. Gavrikov

LLC Yandeks.Market Lab, Saint Petersburg, Russia

E-mail: agavrikov1989@yandex.ru

A digraph $H = (W, \beta)$ is called a T-irreducible extension of a digraph $G = (V, \alpha)$, if $|W| = |V| + 1$, there is a vertex $w \in W$ such that $H - w \cong G$, G is embedded into every subgraph $H - u$ for $u \neq w$, and no arc can be deleted from β without disturbing these properties. T-irreducible graph extensions are widely applied to synthesizing fault tolerant computing networks. In the paper, it is shown that, for any directed starlike tree $G = (V, \alpha)$ consisting of some directed chains $P_i = (v_0, v_{i,1}, \dots, v_{i,n_i})$, $i = 1, \dots, k$, beginning in the root (v_0) of the tree, and having no other shared vertices, the digraph $H = (V \cup \{w\}, \beta)$, where $\alpha \subseteq \beta$, $(v_0, w) \in \beta$, $(w, v_{i,n_i-1}) \in \beta$ for all i , $0 \leq i \leq k-1$, $n_i > 2 \Rightarrow ((w, v_{i,n_i-2}) \in \beta, 0 \leq i \leq k-1, (w, v_{i,n_i-1}) \in \beta, 0 \leq i \leq k-1)$, $n_i > 3 \Rightarrow ((w, v_{i,j}), (v_{i,j}, w) \in \beta, 0 \leq i \leq k-1, 1 \leq j \leq n_i-3)$, is a T-irreducible extension of G .

Keywords: T-irreducible extension, directed tree, starlike tree.

Введение

Под *ориентированным графом* (или, для краткости, *орграфом*) понимается пара $G = (V, \alpha)$, где V — конечное непустое множество (вершины орграфа); α — бинарное отношение на множестве V (дуги орграфа). Все используемые ниже и необъясняемые в тексте понятия теории графов взяты из [1].

Тривиальное расширение (ТР) орграфа $G = (V, \alpha)$ — это соединение $G + w$ исходного орграфа G с вершиной $w \notin V$. В силу того, что тривиальное расширение орграфа G единственное с точностью до изоморфизма, можно ввести функцию $\text{ТР}(G)$.

Т-неприводимое расширение (ТНР) орграфа G — это расширение G , полученное удалением максимального множества дуг из $TP(G)$ [2]. ТНР для некоторых классов неориентированных графов рассматривались в работах [2, 3]. В [3] показаны конструкции ТНР для полных бинарных деревьев. Полиномиальные алгоритмы построения ТНР для объединения ориентированных цепей, объединения орграфа и его ТНР, направленных звезд описаны в [4]. В [5] предложен полиномиальный алгоритм построения одного из ТНР для многоугольных орграфов.

Т-неприводимые расширения являются одним из видов оптимальных расширений для орграфов. Конструкции оптимальных расширений применяются в диагностике дискретных систем и криптографии [6], а также в задачах отказоустойчивости [7, 8]. В общем случае задача определения того, представляет ли оргграф H расширение для орграфа G , является NP-полной. Задача поиска ТНР по заданному оргграфу является вычислительно сложной, так как не существует полиномиального проверяющего алгоритма для подтверждения корректности сертификата решения. Для проверки того, что оргграф H является ТНР для орграфа G , необходимо установить, что:

- 1) оргграф G является вершинным расширением орграфа H (NP-полная задача);
- 2) никакая часть орграфа G , получающаяся удалением одной дуги, не является вершинным расширением орграфа H (задача из co-NPC) [9].

Следующий критерий, на который опирается доказательство процедуры построения ТНР, вытекает непосредственно из определения.

Теорема 1 (критерий ТНР для орграфов). Оргграф $H = (W, \beta)$ является ТНР для орграфа $G = (V, \alpha)$ тогда и только тогда, когда одновременно выполнены следующие условия:

- 1) $|W| = |V| + 1$;
- 2) в оргграфе H существует вершина w , такая, что $H - w \cong G$;
- 3) оргграф G вкладывается в каждый максимальный подграф $H - u$ орграфа H , где $u \neq w$;
- 4) (свойство неприводимости). При удалении любой дуги, инцидентной вершине w , из оргграфа H полученный оргграф не будет расширением для G .

1. Общие сведения о сверхстройных деревьях

Дерево — связный граф без циклов. Дерево, в котором только одна вершина имеет степень больше 2, называется *сверхстройным* (или *звездоподобным*). На сверхстройное дерево можно смотреть как на объединение k цепей $P_0, P_1, \dots, P_{k-1}$, где $k > 2$, с общей концевой вершиной. При этом сверхстройное дерево можно закодировать вектором, состоящим из длин цепей в порядке неубывания: $(n_0, n_1, \dots, n_{k-1})$, где $n_0 \leq n_1 \leq \dots \leq n_{k-1}$. Такое кодирование сверхстройных деревьев является взаимно-однозначным: любому вектору $(n_0, n_1, \dots, n_{k-1})$, где $k > 2$, соответствует единственное с точностью до изоморфизма сверхстройное дерево с числом вершин $n_0 + n_1 + \dots + n_{k-1} + 1$, являющееся объединением k цепей $P_{n_0}, P_{n_1}, \dots, P_{n_{k-1}}$ с общей концевой вершиной. В этом дереве корневая вершина имеет степень k , k вершин — степень 1, а остальные $n_0 + n_1 + \dots + n_{k-1} - k$ вершин имеют степень 2. Будем называть такой код *вектором цепей*. Корневую вершину в сверхстройном дереве обозначим через v_0 . Вершины, принадлежащие цепи P_i длины n_i , $0 \leq i \leq k - 1$, обозначим $v_{i,j}$, $1 \leq j \leq n_i - 1$, где j — расстояние от вершины $v_{i,j}$ до концевой вершины v_0 .

На рис. 1 изображено сверхстройное дерево с 10 вершинами, являющееся объединением трёх цепей P_3 , P_4 и P_5 с общей концевой вершиной. Это дерево имеет вектор цепей $(3, 4, 5)$.

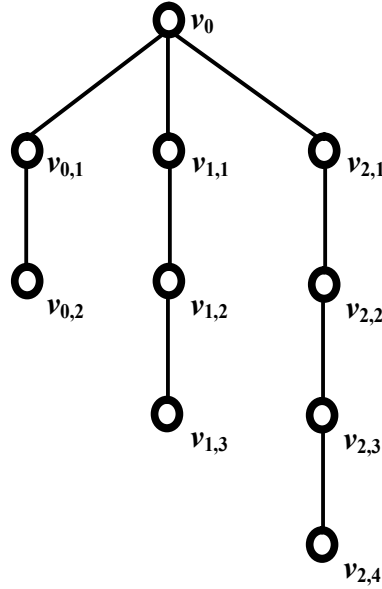


Рис. 1

2. ТНР для ориентированных сверхстройных деревьев

Под *ориентированным сверхстройным деревом* (*сверхстройным ордеревом*) будем понимать ориентацию сверхстройного дерева, при которой каждое ребро ориентируется в направлении от корневой вершины v_0 к листьям: рёбра $(v_0, v_{i,1})$, $0 \leq i \leq k-1$, ориентированы от вершины v_0 к вершине $v_{i,1}$, рёбра $(v_{i,j}, v_{i,j+1})$, $0 \leq i \leq k-1$, $0 \leq j \leq n_i-2$, — от вершины $v_{i,j}$ к вершине $v_{i,j+1}$. В сверхстройном ордереве T , которое является объединением k ориентированных цепей, корневая вершина v_0 является источником и имеет степень исхода k ; k вершин v_{i,n_i-1} , где $0 \leq i \leq k-1$, являются стоками.

На рис. 2 изображено сверхстройное ордереве, получающееся ориентацией сверхстройного дерева рис. 1.

Следующая теорема позволяет построить одно из ТНР для сверхстройных ордеревьев.

Теорема 2. Пусть $T = (V, \alpha)$ — некоторое сверхстройное ордереве, являющееся объединением k цепей $P_{n_0}, P_{n_1}, \dots, P_{n_{k-1}}$. Его ТНР $H = (V \cup \{w\}, \beta)$ получается добавлением в T вершины w и следующих дуг:

- 1) добавляем дугу (v_0, w) из корневой вершины v_0 в вершину w ;
- 2) добавляем дуги (w, v_{i,n_i-2}) из вершины w в каждую вершину v_{i,n_i-2} , $0 \leq i \leq k-1$, которая принадлежит цепи P_{n_i} , имеющей более двух вершин, т. е. $n_i > 2$; добавляем дуги (w, v_{i,n_i-1}) из вершины w в каждый сток v_{i,n_i-1} , $0 \leq i \leq k-1$, в исходном сверхстройном ордереве T ;
- 3) добавляем встречные дуги $(w, v_{i,j})$, $(v_{i,j}, w)$ для каждой вершины $v_{i,j}$, $0 \leq i \leq k-1$, $1 \leq j \leq n_i-3$, которая принадлежит цепи P_{n_i} , имеющей более трёх вершин, т. е. $n_i > 3$.

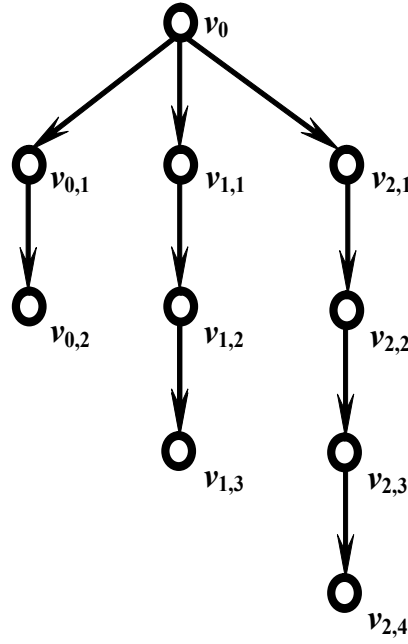


Рис. 2

Доказательство. Рассмотрим орграф $H = (V \cup \{w\}, \beta)$. Необходимо и достаточно показать выполнение всех пунктов теоремы 1 (критерия ТНР для ориентированных графов).

1. $|W| = |V| + 1$.
2. $T \cong H - w$ в силу построения в теореме.
3. Покажем, что сверхстройное ордерено T вкладывается в каждый максимальный подграф орграфа H .

При вложении $\phi : V \rightarrow W - v_0$ сверхстройного ордерено T в максимальный подграф $H - v_0$ орграфа H корневую вершину v_0 отобразим в вершину w , $\phi(v_0) = w$, а остальные вершины отобразим сами в себя.

При вложении $\phi : V \rightarrow W - v_{i,j}$, $j \neq n_i - 1$, сверхстройного ордерено T в максимальный подграф $H - v_{i,j}$ орграфа H , полученный удалением некоторой вершины $v_{i,j}$, не являющейся стоком, вершину $v_{i,j}$ отобразим в вершину w , $\phi(v_{i,j}) = w$, а остальные вершины отобразим сами в себя.

При вложении $\phi : V \rightarrow W - v_{i,1}$, $n_i = 2$, сверхстройного ордерено T в максимальный подграф $H - v_{i,1}$ орграфа H , полученный удалением стока $v_{i,1}$ цепи P_{n_2} длины один, вершину $v_{i,1}$ отобразим в вершину w , $\phi(v_{i,1}) = w$, а остальные вершины отобразим сами в себя. Такое отображение возможно, так как в орграфе H существует дуга (v_0, w) . Следовательно, дуга $(v_0, v_{i,1})$, которая образует цепь P_{n_2} , отобразится в дугу (v_0, w) .

При вложении $\phi : V \rightarrow W - v_{i,n_i-1}$, $n_i > 2$, сверхстройного ордерено T в максимальный подграф $H - v_{i,n_i-1}$ орграфа H , полученный удалением стока v_{i,n_i-1} цепи P_{n_i} длины больше 1, вершины $v_0, v_{i,1}, v_{i,2}, \dots, v_{i,n_i-2}, v_{i,n_i-1}$ цепи P_{n_i} отобразим в вершины $v_0, w, v_{i,1}, v_{i,2}, \dots, v_{i,n_i-3}, v_{i,n_i-2}$, а остальные вершины отобразим сами в себя.

Таким образом, сверхстройное ордерено T вкладывается в каждый максимальный подграф орграфа H .

4. Свойство неприводимости. Докажем, что при удалении любой дуги, инцидентной вершине w , из орграфа H полученный орграф не будет расширением для сверхстройного ордерова T .

При удалении дуги (v_0, w) в каждом из k максимальных подграфов $H - (v_0, w) - v_{i,1}$ орграфа $H - (v_0, w)$, $0 \leq i \leq k - 1$, будет единственным источником v_0 со степенью исхода $k - 1$. При этом в сверхстройном ордерове T корневая вершина v_0 , являющаяся в нём единственным источником, имеет степень исхода k . Следовательно, вложение сверхстройного ордерова T в некоторые максимальные подграфы орграфа $H - (v_0, w)$ невозможно.

При удалении дуги $(w, v_{i,1})$, $0 \leq i \leq k - 1$, входящей в вершину $v_{i,1}$, которая принадлежит цепи P_{n_i} длины больше 1, в максимальном подграфе $H - (w, v_{i,1}) - v_0$ орграфа $H - (w, v_{i,1})$ будет единственным источником $v_{i,1}$ со степенью исхода, меньше или равной 2. При этом в сверхстройном ордерове T корневая вершина v_0 , являющаяся в нём единственным источником, имеет степень исхода больше 2, так как $k > 2$. Следовательно, вложение сверхстройного ордерова T в некоторые максимальные подграфы орграфа $H - (w, v_{i,1})$, где $0 \leq i \leq k - 1$, $n_i > 2$, невозможно.

При удалении дуги $(w, v_{i,j})$, $0 \leq i \leq k - 1$, $2 \leq j \leq n_i - 2$, входящей в вершину $v_{i,j}$, которая принадлежит цепи P_{n_i} длины больше 2, в максимальном подграфе $H - (w, v_{i,j}) - v_{i,j-1}$ орграфа $H - (w, v_{i,j})$ будет единственным источником $v_{i,j}$ со степенью исхода, меньше или равной 2. При этом в сверхстройном ордерове T корневая вершина v_0 , являющаяся в нём единственным источником, имеет степень исхода больше 2, так как $k > 2$. Следовательно, вложение сверхстройного ордерова T в один из максимальных подграфов орграфа $H - (w, v_{i,j})$, $0 \leq i \leq k - 1$, $2 \leq j \leq n_i - 2$, $n_i > 3$, невозможно.

При удалении дуги $(v_{i,j}, w)$, $0 \leq i \leq k - 1$, $1 \leq j \leq n_i - 3$, выходящей из вершины $v_{i,j}$, которая принадлежит цепи P_{n_i} длины больше 2, в максимальном подграфе $H - (v_{i,j}, w) - v_{i,j+1}$ орграфа $H - (v_{i,j}, w)$ будет $k + 1$ сток. Это k вершин v_{j,n_j-1} , $0 \leq j \leq k - 1$, которые являются стоками в сверхстройном ордерове T , и вершина $v_{i,j}$, так как дуга $(v_{i,j}, w)$ удалена. При этом в ордерове T есть только k вершин-стоков, которые являются листьями ордерова. Следовательно, вложение сверхстройного ордерова T в один из максимальных подграфов орграфа $H - (v_{i,j}, w)$, $0 \leq i \leq k - 1$, $1 \leq j \leq n_i - 3$, $n_i > 3$, невозможно.

При удалении дуги $(w, v_{i,1})$, $0 \leq i \leq k - 1$, входящей в сток $v_{i,1}$, которая принадлежит цепи P_{n_i} длины 1, в максимальном подграфе $H - (w, v_{i,1}) - v_0$ орграфа $H - (w, v_{i,1})$ вершина $v_{i,1}$ будет изолированной. При этом в сверхстройном ордерове T нет изолированных вершин. Следовательно, вложение сверхстройного ордерова T в один из максимальных подграфов орграфа $H - (w, v_{i,1})$, $0 \leq i \leq k - 1$, $n_i = 2$, невозможно.

При удалении дуги (w, v_{i,n_i-1}) , $0 \leq i \leq k - 1$, входящей в сток v_{i,n_i-1} , которая принадлежит цепи P_{n_i} длины больше 1, в максимальном подграфе $H - (w, v_{i,n_i-1}) - v_{i,n_i-2}$ орграфа $H - (w, v_{i,n_i-1})$ вершина v_{i,n_i-1} будет изолированной. При этом в сверхстройном ордерове T нет изолированных вершин. Следовательно, вложение сверхстройного ордерова T в один из максимальных подграфов орграфа $H - (w, v_{i,n_i-1})$, $0 \leq i \leq k - 1$, $n_i > 2$, невозможно. ■

ТНР H , построенное по теореме 2 для сверхстройного ордерова T на рис. 1, показано на рис. 3. Начала и концы дуг, которые не примыкают к какой-либо вершине на рисунке, инцидентны вершине w .

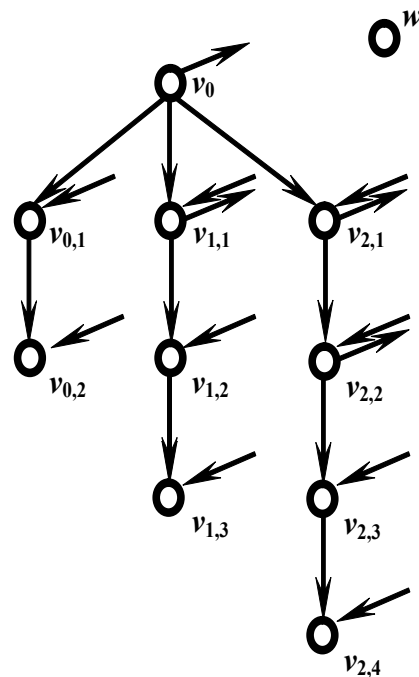


Рис. 3

ЛИТЕРАТУРА

1. Богомолов А. М., Салий В. Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, 1997. 368 с.
2. Курносова С. Г. T -неприводимые расширения для некоторых классов графов // Теоретические проблемы информатики и её приложений: сб. науч. тр. / под ред. проф. А. А. Сытника. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. С. 113–125.
3. Курносова С. Г. T -неприводимые расширения полных бинарных деревьев // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2005. № 14. С. 158–160.
4. Гавриков А. В. T -неприводимые расширения объединений некоторых типов орграфов // Прикладная дискретная математика. 2013. № 4(22). С. 47–56.
5. Гавриков А. В. T -неприводимые расширения для многоугольных орграфов // Изв. вузов. Математика. 2016. № 2. С. 18–23.
6. Салий В. Н. Доказательства с нулевым разглашением в задачах о расширении графов // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2003. № 6. С. 63–65.
7. Абросимов М. Б. Некоторые вопросы о минимальных расширениях графов // Известия СГУ. Математика. Механика. Информатика. 2006. Т. 6. Вып. 1/2. С. 86–90.
8. Hayes J. P. A graph model for fault-tolerant computing systems // IEEE Trans. Computers. 1976. V. C-26. No. 9. P. 875–884.
9. Абросимов М. Б. О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Матем. заметки. 2010. Т. 88. № 5. С. 643–650.

REFERENCES

1. Bogomolov A. M. and Salii V. N. Algebraicheskie osnovy teorii diskretnykh sistem [Algebraic Foundations of the Discrete Systems Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1997. (in Russian)

2. *Kurnosova S. G.* T-neprivodimye rasshireniya dlya nekotorykh klassov grafov [T-irreducible extension for some classes of graphs]. *Teoreticheskie Problemy Informatiki i ee Prilozheniy*, Saratov, SGU Publ., 2004, pp. 113–125. (in Russian)
3. *Kurnosova S. G.* T-neprivodimye rasshireniya polnykh binarnykh derev'ev [T-irreducible extension of complete binary trees]. *J. TSU. Supplement*, 2005, no. 14, pp. 158–160. (in Russian)
4. *Gavrikov A. V.* T-neprivodimye rasshireniya ob"edineniy nekotorykh tipov orgrafov [T-irreducible extension of unions of some types orgraphs]. *Prikladnaya Diskretnaya Matematika*, 2013, no. 4(22), pp. 47–56. (in Russian)
5. *Gavrikov A. V.* T-neprivodimye rasshireniya dlya mnogougol'nykh orgrafov [T-irreducible extension of polygonal digraphs]. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 2016, no. 2, pp. 18–23. (in Russian)
6. *Salii V. N.* Dokazatel'stva s nulevym razglasheniem v zadachakh o rasshirenii grafov [Zero-knowledge proofs in problems on extensions on graphs]. *J. TSU. Supplement*, 2003, no. 6, pp. 63–65. (in Russian)
7. *Абросимов М. Б.* Некоторые вопросы о минимальных расширениях графов [Some questions about the minimum extensions on graphs]. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2006, vol. 6, iss. 1/2, pp. 86–90. (in Russian)
8. *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing systems. *IEEE Trans. Computers*, 1976, vol. C-26, no. 9, pp. 875–884.
9. *Abrosimov M. B.* O slozhnosti nekotorykh zadach, svyazannykh s rasshireniami grafov [On the complexity of some problems related to graph extensions]. *Mat. Zametki*, 2010, vol. 88, iss. 5, pp. 643–650. (in Russian)