ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2016 Математика и механика № 6(44)

МАТЕМАТИКА

УДК 514.756:514.763.6
DOI 10.17223/19988621/44/1

В.А. Кыров

ПСЕВДОГЕЛЬМГОЛЬЦЕВА И ДУАЛЬНОГЕЛЬМГОЛЬЦЕВА ПЛОСКОСТИ, НАДЕЛЁННЫЕ ФИНСЛЕРОВЫМИ ГЕОМЕТРИЯМИ

Известна полная классификация двумерных феноменологически симметричных геометрий. Она содержит как хорошо известные геометрии (евклидова, псевдоевклидова, симплектическая, сферическая и т.д.), так и неизвестные (собственно гельмгольцева, псевдогельмгольцева, дуальногельмгольцева и симплициальная). Простой анализ доказывает однородность метрической функции псевдогельмгольцевой и дуальногельмгольцевой геометрий. Поэтому данные геометрии принадлежат классу финслеровых пространств. В данной работе применяются методы финслеровой геометрии для исследования псевдогельмгольцевой и дуальногельмгольцевой двумерных геометрий: проверяются финслеровы аксиомы, находится финслеров метрический тензор, финслеровы основной и дополнительный тензоры, вычисляются финслеров скаляр и специальный тензор кривизны.

Ключевые слова. *Метрическая функция, псевдогельмгольцева геометрия, дуальногельмгольцева геометрия, финслерова геометрия.*

Известна классификация Г.Г. Михайличенко двумерных феноменологически симметричных геометрий [1], то есть геометрий, для которых шесть взаимных расстояний между четырьмя произвольными точками функционально связаны. Расстояние понимается в обобщенном смысле как значение некоторой функции, для которой метрические аксиомы не обязательно выполняются. Было доказано, что феноменологически симметричные геометрии наделены максимальной подвижностью, то есть для них существуют группы движений максимальной размерности равной трем [2, 3]. Классификация таких двумерных геометрий содержит как хорошо известные геометрии (евклидова, псевдоевклидова, симплектическая, сферическая и т.д.), так и неизвестные (собственно гельмгольцева, псевдогельмгольцева, дуальногельмгольцева и симплициальная). В данной работе применяются методы изучения финслеровых пространств для исследования псевдогельмгольцевой и дуальногельмгольцевой двумерных геометрий. Эта статья является продолжением работы [4], опубликованной автором, в которой исследуется собственно гельмгольцева двумерная геометрия как финслерово пространство.

1. Псевдогельмгольцева и дуальногельмгольцева плоскости

Возьмем в арифметической плоскости R^2 метрические функции [1]:

$$f(x,y) = [(x^1 - y^1)^2 - (x^2 - y^2)^2]\, e^{2\beta \operatorname{ar(c)th} \frac{x^2 - y^2}{x^1 - y^1}},$$

где $\beta = \mathrm{const}$, $\beta \neq 0$, $\beta \neq 1$, $x^1 \neq y^1$, причем при $\left|\frac{u^2}{u^1}\right| < 1$ берем $\mathrm{arth}\frac{u^2}{u^1} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+u^2/u^1}{1-u^2/u^1}$, а при $\left|\frac{u^2}{u^1}\right| > 1$ $-\mathrm{arcth}\frac{u^2}{u^1} = \frac{1}{2}\ln\frac{u^2/u^1-1}{u^2/u^1+1}$ и

$$g(x,y) = (x^1 - y^1)^2 e^{2\frac{x^2-y^2}{x^1-y^1}},$$

где $x^1 \neq y^1$.

Рассмотрим касательную плоскость $T_x(R^2)$ к R^2 в произвольной точке $x = (x^1, x^2)$. Обозначим через $T(R^2)$ касательное расслоение. Зададим в прямом произведении $R^2 \times T(R^2)$ метрическую функцию

$$f(u) = \sqrt{(u^1)^2 - (u^2)^2}\, e^{\beta\,\mathrm{ar(c)th}\frac{u^2}{u^1}}, \tag{1}$$

где $u \in T_x(R^2)$, $u^1 \neq 0$. Касательный вектор $u \in T_x(R^2)$ называется *неизотропным* по отношению к функции (1), если для него определено значение этой функции. Множество неизотропных касательных векторов относительно метрической функции (1) в точке x обозначим через ${D^f}_x(R^2) \subset T_x(R^2)$. Пусть $D^f(R^2) \subset T(R^2)$ – расслоение неизотропных касательных векторов. Очевидно, метрическая функция (1) определена в прямом произведении $R^2 \times D^f(R^2)$.

Аналогично в прямом произведении $R^2 \times T(R^2)$ задаем метрическую функцию

$$g(u) = u^1 e^{\frac{u^2}{u^1}}, \tag{2}$$

где $u \in T_x(R^2)$, $u^1 \neq 0$, и определяем *неизотропный* по отношению к функции (2) касательный вектор $u \in T_x(R^2)$ как вектор, для которого определено значение этой функции. Множество так определенных неизотропных касательных векторов в точке x обозначим через ${D^g}_x(R^2) \subset T_x(R^2)$. Введем обозначение $D^g(R^2) \subset T(R^2)$ для расслоения таких неизотропных касательных векторов. Очевидно, метрическая функция (2) определена в прямом произведении $R^2 \times D^g(R^2)$.

Определение 1. Тройка ($R^2, D^f(R^2), f$) задает псевдогельмгольцеву двумерную геометрию (плоскость), а тройка ($R^2, D^g(R^2), g$) – дуальногельмгольцеву двумерную геометрию (плоскость).

Теорема 1. Метрические функции (1) и (2) положительно однородны степени один.

Доказательство. Действительно,

$$f(\lambda u) = \sqrt{(\lambda u^1)^2 - (\lambda u^2)^2}\, e^{\beta\,\mathrm{ar(c)th}\frac{\lambda u^2}{\lambda u^1}} = \lambda f(u), \quad g(\lambda u) = (\lambda u^1) e^{\frac{\lambda u^2}{\lambda u^1}} = \lambda g(u),$$

для любого $\lambda > 0$. □

Таким образом, псевдогельмгольцева и дуальногельмгольцева двумерные геометрии являются финслеровыми пространствами [5].

Очевидно, метрическая функция (1) положительна в области $\left|\frac{u^2}{u^1}\right| < 1$, то есть $f(u) > 0$, причем $u \in D^f(R^2)$.

Теорема 2. Псевдогельмгольцева геометрия является положительно определенной двумерной финслеровой геометрией в области $\left|\frac{u^2}{u^1}\right| < 1$, при $|\beta| > 1$.

Доказательство. Вычисляем производные первого порядка:

$$\frac{\partial f^2}{\partial u^1} = 2(u^1 - \beta u^2)e^{2\beta \operatorname{ar(c)th}\frac{u^2}{u^1}},$$

$$\frac{\partial f^2}{\partial u^2} = 2(-u^2 + \beta u^1)e^{2\beta \operatorname{ar(c)th}\frac{u^2}{u^1}},$$

потом производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 f^2}{\partial u^1 \partial u^1} = 2\frac{(u^1)^2 + (2\beta^2 - 1)(u^2)^2 - 2\beta u^1 u^2}{(u^1)^2 - (u^2)^2} e^{2\beta \operatorname{ar(c)th}\frac{u^2}{u^1}},$$

$$\frac{\partial^2 f^2}{\partial u^1 \partial u^2} = 2\frac{\beta((u^1)^2 + (u^2)^2) - 2\beta^2 u^1 u^2}{(u^1)^2 - (u^2)^2} e^{2\beta A \operatorname{ar(c)th}\frac{u^2}{u^1}},$$

$$\frac{\partial^2 f^2}{\partial u^2 \partial u^2} = 2\frac{(2\beta^2 - 1)(u^1)^2 + (u^2)^2 - 2\beta u^1 u^2}{(u^1)^2 - (u^2)^2} e^{2\beta \operatorname{ar(c)th}\frac{u^2}{u^1}}.$$

Затем вычисляется определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f^2}{\partial u^1 \partial u^1} & \dfrac{\partial^2 f^2}{\partial u^1 \partial u^2} \\ \dfrac{\partial^2 f^2}{\partial u^2 \partial u^1} & \dfrac{\partial^2 f^2}{\partial u^2 \partial u^2} \end{vmatrix} = 4(\beta^2 - 1)e^{4\beta \operatorname{ar(c)th}\frac{u^2}{u^1}},$$

который положителен при $|\beta| > 1$. Элемент в левом верхнем углу данного определителя, очевидно, равный

$$\frac{\partial^2 f^2}{\partial u^1 \partial u^1} = 2\frac{(u^1 - \beta u^2)^2 + (\beta^2 - 1)(u^2)^2}{(u^1)^2 - (u^2)^2} e^{2\beta \operatorname{ar(c)th}\frac{u^2}{u^1}},$$

также положителен, если $|\beta| > 1$ и $\left|\frac{u^2}{u^1}\right| < 1$. Таким образом, из приведенных рассуждений следует, что при $|\beta| > 1$ в области $\left|\frac{u^2}{u^1}\right| < 1$ квадратичная форма

$$\frac{\partial f^2}{\partial u^i \partial u^j}\xi^i \xi^j = 2g_{ij}\xi^i \xi^j \tag{3}$$

положительно определена. Если же еще учесть положительность метрической функции (1), то приходим к утверждению теоремы 2. □

Метрическая функция (2) положительна, то есть $g(u) > 0$, в области где $u^1 > 0$, причем $u \in D^g(R^2)$.

Теорема 3. Дуальногельмгольцева геометрия является положительно определенной двумерной финслеровой геометрией в области $u^1 > 0$.

Доказательство. Вычисляем производные первого порядка:

$$\frac{\partial g^2}{\partial u^1} = 2(u^1 - u^2)e^{2\frac{u^2}{u^1}},$$

$$\frac{\partial g^2}{\partial u^2} = 2u^1 e^{2\frac{u^2}{u^1}},$$

потом производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 g^2}{\partial u^1 \partial u^1} = 2\frac{(u^1)^2 + 2(u^2)^2 - 2u^1u^2}{(u^1)^2} e^{2\frac{u^2}{u^1}},$$

$$\frac{\partial^2 g^2}{\partial u^1 \partial u^2} = -2\frac{2u^2 - u^1}{u^1} e^{2\frac{u^2}{u^1}},$$

$$\frac{\partial^2 g^2}{\partial u^2 \partial u^2} = 4e^{2\frac{u^2}{u^1}}.$$

Затем вычисляется определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 g^2}{\partial u^1 \partial u^1} & \dfrac{\partial^2 g^2}{\partial u^1 \partial u^2} \\ \dfrac{\partial^2 g^2}{\partial u^2 \partial u^1} & \dfrac{\partial^2 g^2}{\partial u^2 \partial u^2} \end{vmatrix} = 4e^{4\frac{u^2}{u^1}} > 0.$$

Элемент в левом верхнем углу данного определителя, очевидно, равен

$$\frac{\partial^2 g^2}{\partial u^1 \partial u^1} = 2\frac{(u^1 - u^2)^2 + (u^2)^2}{(u^1)^2} e^{2\frac{u^2}{u^1}} > 0.$$

Видно, что квадратичная форма (3), в которой берем вместо f метрическую функцию g, положительно определена. Учитывая дополнительно положительность метрической функции (2) в области $u^1 > 0$, приходим к утверждению теоремы 3. □

2. Псевдогельмгольцево двумерное многообразие

Это многообразие определено в работе автора [6], и локальное его изучение было темой кандидатской диссертации. Ниже все индексы принимают значения 1 и 2. Рассмотрим касательную плоскость $T_x(M)$ к двумерному многообразию M в произвольной точке x и касательное расслоение $T(M)$. В прямом произведении $M \times T(M)$ зададим метрическую функцию, которая в координатной окрестности

$U \subset M$ имеет явный вид

$$f(x,u)=\sqrt{(a_i u^i)^2-(b_i u^i)^2}\,e^{\beta\,\mathrm{ar(c)th}\frac{b_i u^i}{a_i u^i}}, \tag{4}$$

где $u \in T_x(M)$, а $a_i = a_i(x)$, $b_i = b_i(x)$ – функции класса C^3, $\beta = \mathrm{const}$, $\beta \neq 0$, $\beta \neq 1$. В каждой точке x векторы $a_i u^i$, $b_i u^i$ линейно независимы, то есть $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$. Касательный вектор $u \in T_x(M)$ называется *неизотропным*, если для него определено значение метрической функции (4). Множество неизотропных касательных векторов в точке x обозначим через $D^f{}_x(M) \subset T_x(M)$. Пусть $D^f(M) \subset T(M)$ – расслоение неизотропных касательных векторов.

Определение 2. Тройка ($M, D^f(M), f$) задает геометрию двумерного псевдогельмгольцева многообразия.

Заметим, что для псевдогельмгольцевой плоскости $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$.

Теорема 4. Метрическая функция (4) положительно однородна степени один.

Доказательство. Действительно,

$$f(x,\lambda u)=\sqrt{(a_i\lambda u^i)^2-(b_i\lambda u^i)^2}\,e^{\beta\,\mathrm{ar(c)th}\frac{b_i\lambda u^i}{a_i\lambda u^i}}=\lambda f(x,u),$$

для любого $\lambda > 0$. □

Итак, двумерное псевдогельмгольцево многообразие является финслеровым пространством [5].

Метрическая функция (4) положительна, то есть $f(x,u) > 0$, в области $\left|\frac{b_i u^i}{a_j u^j}\right| < 1$, где $u \in D^f{}_x(M)$.

Теорема 5. Псевдогельмгольцево двумерное многообразие ($M, D^f(M), f$) является положительно определенным двумерным финслеровым пространством в области $\left|\frac{b_i u^i}{a_j u^j}\right| < 1$ при $|\beta| > 1$.

Доказательство. Сначала вычисляем производные первого порядка:

$$\frac{\partial f^2(x,u)}{\partial u^i}=2[(a_i+\beta b_i)(1)-(b_i+\beta a_i)(2)]e^{2\beta\,\mathrm{ar(c)th}\frac{(2)}{(1)}},$$

где для удобства введены сокращающие обозначения

$$(1)=a_k u^k,\quad (2)=b_k u^k.$$

Потом вычисляются компоненты финслерова метрического тензора

$$g_{ij}(x,u)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f^2(x,u)}{\partial u^i \partial u^j} \tag{5}$$

псевдогельмгольцева двумерного многообразия:

$$g_{ij}=\frac{A_{ij}(1)^2+B_{ij}(2)^2+C_{ij}(1)(2)}{(1)^2-(2)^2}e^{2\beta\,\mathrm{ar(c)th}\frac{(2)}{(1)}}, \tag{6}$$

где

$$A_{ij}=a_ia_j+\beta a_ib_j+\beta b_ia_j+(2\beta^2-1)b_ib_j,$$

$$B_{ij}=(2\beta^2-1)a_ia_j+\beta a_ib_j+\beta b_ia_j+b_ib_j,$$

$$C_{ij}=-2\beta(a_ia_j+\beta a_ib_j+\beta b_ia_j+b_ib_j).$$

Затем вычисляется определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22}\end{vmatrix}=g_{11}g_{22}-g_{12}g_{21}=(\beta^2-1)(a_1b_2-a_2b_1)^2e^{4\beta\,\mathrm{ar(c)th}\frac{u^2}{u^1}}. \qquad (7)$$

Видно, что он положителен, если $|\beta|>1$. Несложно преобразовать элемент в верхнем левом углу данного определителя:

$$g_{11}=\frac{((a_1+\beta b_1)(1)-\beta a_1(2))^2+((\beta a_1+b_1)(2)-\beta b_1(1))^2-a_1{}^2(2)^2-b_1{}^2(1)^2}{(1)^2-(2)^2}e^{2\beta\,\mathrm{ar(c)th}\frac{(2)}{(1)}}.$$

Можно доказать его положительность в области $\left|\dfrac{b_iu^i}{a_ju^j}\right|<1$ при $|\beta|>1$. Из полученных результатов следует, что квадратичная форма (3) положительно определена. Учитывая еще положительность метрической функции (4) в области $\left|\dfrac{b_iu^i}{a_ju^j}\right|<1$, приходим к утверждению теоремы 5. □

Предложение 1. Контравариантный финслеров метрический тензор псевдогельмгольцева двумерного многообразия задается формулой

$$g^{ij}=\frac{A^{ij}(1)^2+B^{ij}(2)^2+C^{ij}(1)(2)}{(\beta^2-1)(a_1b_2-a_2b_1)^2((1)^2-(2)^2)}e^{-2\beta\,\mathrm{ar(c)th}\frac{(2)}{(1)}}, \qquad (8)$$

где $A^{11}=A_{22}$, $A^{21}=-A_{12}$, $A^{22}=A_{11}$, $B^{11}=B_{22}$, $B^{21}=-B_{12}$, $B^{22}=B_{11}$, $C^{11}=C_{22}$, $C^{21}=-C_{12}$, $C^{22}=C_{11}$.

Доказательство. Контравариантный финслеров метрический тензор g^{ij} определяется из формулы $g^{ij}g_{jk}=\delta^i_k$, где δ^i_k – символ Кронекера, g_{jk} – финслеров метрический тензор псевдогельмгольцева двумерного многообразия, определенный формулой (6) . Тогда

$$g^{22}=\frac{A_{11}(1)^2+B_{11}(2)^2+C_{11}(1)(2)}{(\beta^2-1)(a_1b_2-a_2b_1)^2((1)^2-(2)^2)}e^{-2\beta\,\mathrm{ar(c)th}\frac{(2)}{(1)}},$$

$$g^{21}=-\frac{A_{21}(1)^2+B_{21}(2)^2+C_{21}(1)(2)}{(\beta^2-1)(a_1b_2-a_2b_1)^2((1)^2-(2)^2)}e^{-2\beta\,\mathrm{ar(c)th}\frac{(2)}{(1)}},$$

$$g^{11}=\frac{A_{22}(1)^2+B_{22}(2)^2+C_{22}(1)(2)}{(\beta^2-1)(a_1b_2-a_2b_1)^2((1)^2-(2)^2)}e^{-2\beta\,\mathrm{ar(c)th}\frac{(2)}{(1)}}.$$

Если ввести обозначения:

$$A^{11}=A_{22},\ A^{21}=-A_{12},\ A^{22}=A_{11},$$
$$B^{11}=B_{22},\ B^{21}=-B_{12},\ B^{22}=B_{11},$$
$$C^{11}=C_{22},\ C^{21}=-C_{12},\ C^{22}=C_{11},$$

то для компонент контравариантного метрического тензора получим формулу (8). □

Основной и дополнительные финслеровы тензоры [5] определяются формулами

$$C_{ijk}(x,u)=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}(x,u)}{\partial u^k}=\frac{1}{4}\frac{\partial^3 f^2(x,u)}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k},\quad A_{ijk}(x,u)=f(x,u)C_{ijk}(x,u). \tag{9}$$

Очевидна полная симметрия по индексам:

$$C_{ijk}=C_{ikj}=C_{kji}=C_{jik} \text{ и } A_{ijk}=A_{ijk}=A_{kji}=A_{jik}.$$

Предложение 2. Основной и дополнительный финслеровы тензоры псевдогельмгольцева двумерного многообразия в области $\left|\dfrac{b_i u^i}{a_j u^j}\right|<1$ при $|\beta|>1$ имеют явный вид:

$$C_{ijk}=\frac{2\beta(\beta^2-1)p_{ijk}}{((1)^2-(2)^2)^2}e^{2\beta \operatorname{ar(c)th}\frac{(2)}{(1)}},\quad A_{ijk}=\frac{2\beta(\beta^2-1)p_{ijk}}{((1)^2-(2)^2)^{3/2}}e^{3\beta \operatorname{ar(c)th}\frac{(2)}{(1)}}, \tag{10}$$

где введено сокращающее тензорное обозначение:

$$p_{ijk}=(b_k(1)-a_k(2))(b_j(1)-a_j(2))(b_i(1)-a_i(2)).$$

Доказательство. Для доказательства необходимо вычислить производные от компонент метрического тензора (6) и привести подобные. □

В области $\left|\dfrac{b_i u^i}{a_j u^j}\right|<1$ при $|\beta|>1$ можно определить единичный вектор, а также ковариантный нормальный к нему вектор:

$$l^i=\frac{u^i}{f(x,u)},\quad m_i=-\varepsilon_{ik}l^k,\ \text{где}\ \varepsilon_{ik}=\begin{pmatrix}0 & \sqrt{\Delta}\\ -\sqrt{\Delta} & 0\end{pmatrix}. \tag{11}$$

Учитывая (7), приходим к выражениям для единичного вектора и ковариантного нормального вектора псевдогельмгольцева двумерного многообразия в области $\left|\dfrac{b_i u^i}{a_j u^j}\right|<1$ с условием $|\beta|>1$:

$$l^i=\frac{u^i e^{-\beta \operatorname{ar(c)th}\frac{(2)}{(1)}}}{\sqrt{(1)^2-(2)^2}},\quad m_i=\frac{\sqrt{(\beta^2-1)}(b_i(1)-a_i(2))e^{\beta \operatorname{ar(c)th}\frac{(2)}{(1)}}}{\sqrt{(1)^2-(2)^2}}.$$

В финслеровой геометрии доказано соотношение

$$A_{ijk}=Jm_i m_j m_k, \tag{12}$$

где J – скаляр [5].

Предложение 3. Финслеров скаляр J псевдогельмгольцева двумерного многообразия в области $\left|\dfrac{b_i u^i}{a_j u^j}\right| < 1$ при $|\beta| > 1$ вычисляется по формуле

$$J = \frac{2\beta}{\sqrt{\beta^2 - 1}} = \text{const}.$$

Доказательство. Найдем сначала тройное произведение

$$m_i m_j m_k = \frac{(\beta^2-1)^{3/2}(b_i(1)-a_i(2))(b_j(1)-a_j(2))(b_k(1)-a_k(2))e^{3\beta\,\mathrm{ar(c)th}\frac{(2)}{(1)}}}{((1)^2-(2)^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{(\beta^2-1)^{3/2}\, p_{ijk} e^{3\beta\,\mathrm{ar(c)th}\frac{(2)}{(1)}}}{((1)^2-(2)^2)^{3/2}}.$$

Затем найденное и выражение для тензора A_{ijk}, вычисленное в предложении 2, подставим в формулу (12), получаем явное выражение для скаляра J. □

Следует отметить, что в теории двумерных финслеровых пространств этот скаляр, который для двумерного псевдогельмгольцева многообразия принимает постоянное значение, является важной характеристикой. Заметим, что для римановых двумерных многообразий этот скаляр равен нулю.

По тензорам (9) строятся новые тензоры:

$$C^i_{jk} = g^{il} C_{jlk}\,,\quad A^i_{jk}(x,u) = f(x,u) C^i_{jk}(x,u). \tag{13}$$

В явном виде для двумерного псевдогельмгольцева многообразия в области $\left|\dfrac{b_i u^i}{a_j u^j}\right| < 1$ с $|\beta| > 1$ они имеют вид

$$C^i_{jk} = \frac{-2\beta(b_k(1)-a_k(2))(b_j(1)-a_j(2))((a^i+\beta b^i)(1)-(b^i+\beta a^i)(2))}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)((1)^2-(2)^2)^2},$$

$$A^i_{jk} = \frac{-2\beta(b_k(1)-a_k(2))(b_j(1)-a_j(2))((a^i+\beta b^i)(1)-(b^i+\beta a^i)(2))}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)((1)^2-(2)^2)^{3/2}} e^{\beta\,\mathrm{Ar(c)th}\frac{(2)}{(1)}}, \tag{14}$$

где $a^2 = a_1, b^2 = b_1$, $a^1 = a_2, b^1 = b_2$.

С помощью второго тензора из (13) можно определить финслеров специальный тензор кривизны [5]:

$$S^i_{jkh} = A^i_{kr} A^r_{jh} - A^i_{rh} A^r_{jk}. \tag{15}$$

Теорема 6. Финслеров специальный тензор кривизны для псевдогельмгольцева двумерного многообразия равен нулю.

Доказательство. Действительно, воспользуемся выражением (14) для тензора A^i_{jk} при вычислении финслерова специального тензора кривизны (15):

$$S^i_{jkh} = \frac{4\beta^2}{(a_1b_2 - a_2b_1)^2((1)^2-(2)^2)^3} e^{2\beta \operatorname{ar(c)th}\frac{(2)}{(1)}} \times$$

$$\times((a^i+\beta b^i)(1)-(b^i+\beta a^i)(2))((a^r+\beta b^r)(1)-(b^r+\beta a^r)(2))\times$$

$$\times[((b_j(1)-a_j(2))(b_k(1)-a_k(2))(b_h(1)-a_h(2))(b_r(1)-a_r(2))-$$

$$-(b_j(1)-a_j(2))(b_k(1)-a_k(2))(b_h(1)-a_h(2))(b_r(1)-a_r(2))]=0.$$

Проведенные вычисления доказывают, что $S^i_{jkl}=0.$ □

В работе [6] проводилось исследование кривизны двумерного псевдогельмгольцева многообразия, построенной через согласованную связность. Найден соответствующий тензор кривизны:

$$R^i_{jkl} = -\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \Gamma^i_{sk}\Gamma^s_{jl} + \Gamma^i_{sl}\Gamma^s_{jk},$$

где символы Кристоффеля согласованной связности определяются по формуле

$$\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2}h^{lk}\left(\frac{\partial h_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial h_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k}\right) - \beta h^{lk}\left(\lambda_{jkl}+\lambda_{kij}-\lambda_{ijk}\right),$$

причем $h_{ij}=a_ia_j-b_ib_j+\beta(a_ib_j-a_jb_i)$, $\lambda_{ijk}= b_j\dfrac{\partial a_i}{\partial x^k}-a_j\dfrac{\partial b_i}{\partial x^k}$. Оказалось, что тензор R^i_{jkl} тождественно не обращается в нуль.

3. Дуальногельмгольцево двумерное многообразие

Это многообразие, как и псевдогельмгольцево, также определено в работе автора [6]. Пусть M – двумерное многообразие. Рассмотрим $\forall x\in M$ касательную плоскость $T_x(M)$ и касательное расслоение $T(M)$. В прямом произведении $M\times T(M)$ зададим метрическую функцию, которая в координатной окрестности $U\subset M$ имеет явный вид

$$g(x,u)=(a_iu^i)e^{\frac{b_iu^i}{a_iu^i}}, \tag{16}$$

где $u\in T_x(M)$, а $a_i=a_i(x)$, $b_i=b_i(x)$ – функции класса C^3. Векторы a_iu^i, b_iu^i линейно независимы, то есть $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$. Касательный вектор $u\in T_x(M)$ называется *неизотропным*, если для него определено значение метрической функции (16). Множество неизотропных касательных векторов в точке x обозначим через $D^g{}_x(M)\subset T_x(M)$. Пусть $D^g(M)\subset T(M)$ – расслоение неизотропных касательных векторов.

Определение 3. Тройка ($M, D^g(M), g$) задает геометрию двумерного дуальногельмгольцева многообразия.

Заметим, что для дуальногельмгольцевой плоскости $a_1=1$, $a_2=0$, $b_1=0$, $b_2=1$. Справедлива теорема, аналогичная теореме 4.

Теорема 7. Метрическая функция (16) положительно однородна степени один.

Таким образом, двумерное дуальногельмгольцево многообразие является финслеровым пространством [5].

Метрическая функция (16) положительна, то есть $g(x,u)>0$ в области $a_i u^i > 0$, где $u \in D^g{}_x(M)$.

Теорема 8. Дуальногельмгольцево двумерное многообразие ($M, D^g(M), g$) является положительно определенным двумерным финслеровым пространством в области $a_i u^i > 0$.

Доказательство. Сначала вычисляем производные первого порядка:

$$\frac{\partial g^2(x,u)}{\partial u^i} = 2[(a_i + b_i)(1) - a_i(2)]e^{2\frac{(2)}{(1)}},$$

причем

$$(1) = a_k u^k, \ \ (2) = b_k u^k.$$

Потом вычисляются компоненты финслерова метрического тензора по формулам (5) дуальногельмгольцева двумерного многообразия:

$$g_{ij} = \frac{A_{ij}(1)^2 + B_{ij}(2)^2 + C_{ij}(1)(2)}{(1)^2} e^{2\frac{(2)}{(1)}}, \tag{17}$$

где

$$A_{ij} = a_i a_j + a_i b_j + b_i a_j + 2b_i b_j,\ B_{ij} = 2a_i a_j,\ C_{ij} = -2(a_i a_j + a_i b_j + b_i a_j).$$

Вычисляется определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 e^{4\frac{(2)}{(1)}} > 0. \tag{18}$$

Можно доказать положительность элемента в верхнем левом углу:

$$g_{11} = \frac{((a_1+b_1)^2 - b_1{}^2)((1)-(2))^2 + 2b_1{}^2(2)^2 + (2a_1{}^2 - (a_1+b_1)^2 + b_1{}^2)(2)^2}{(1)^2} e^{2\frac{(2)}{(1)}} > 0.$$

Из полученных результатов и положительности метрической функции (16) в области $a_i u^i > 0$ следует, что квадратичная форма (3) положительно определена. □

Предложение 4. Контравариантный финслеров метрический тензор дуальногельмгольцева двумерного многообразия задается формулой

$$g^{ij} = \frac{A^{ij}(1)^2 + B^{ij}(2)^2 + C^{ij}(1)(2)}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 (1)^2} e^{-2\frac{(2)}{(1)}},$$

где $A^{11} = A_{22}$, $A^{21} = -A_{12}$, $A^{22} = A_{11}$, $B^{11} = B_{22}$, $B^{21} = -B_{12}$, $B^{22} = B_{11}$, $C^{11} = C_{22}$, $C^{21} = -C_{12}$, $C^{22} = C_{11}$.

Доказательство. Контравариантный финслеров метрический тензор g^{ij} определяется из формулы $g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$, где δ^i_k – символ Кронекера, g_{ij} – дуальногельмгольцев финслеров метрический тензор. Тогда

$$g^{22}=\frac{A_{11}(1)^2+B_{11}(2)^2+C_{11}(1)(2)}{(a_1b_2-a_2b_1)^2(1)^2}e^{-2\frac{(2)}{(1)}},$$

$$g^{21}=-\frac{A_{21}(1)^2+B_{21}(2)^2+C_{21}(1)(2)}{(a_1b_2-a_2b_1)^2(1)^2}e^{-2\frac{(2)}{(1)}},$$

$$g^{11}=\frac{A_{22}(1)^2+B_{22}(2)^2+C_{22}(1)(2)}{(a_1b_2-a_2b_1)^2(1)^2}e^{-2\frac{(2)}{(1)}}.$$

Если ввести обозначения: $A^{11}=A_{22}$, $A^{21}=-A_{12}$, $A^{22}=A_{11}$, $B^{11}=B_{22}$, $B^{21}=-B_{12}$, $B^{22}=B_{11}$, $C^{11}=C_{22}$, $C^{21}=-C_{12}$, $C^{22}=C_{11}$, то для компонент контравариантного метрического тензора получим искомую формулу. □

Предложение 5. Основной и дополнительный финслеровы тензоры дуально-гельмгольцева двумерного многообразия задаются формулами

$$C_{ijk}=\frac{2p_{ijk}}{(1)^4}e^{2\frac{(2)}{(1)}},\quad A_{ijk}=\frac{2p_{ijk}}{(1)^3}e^{3\frac{(2)}{(1)}},\tag{19}$$

где введено сокращающее тензорное обозначение

$$p_{ijk}=(b_i(1)-a_i(2))(b_j(1)-a_j(2))(b_k(1)-a_k(2)).$$

Доказательство. Для доказательства необходимо воспользоваться формулами (9). □

По формулам (11) вычисляем единичный вектор и ковариантный нормальный к нему вектор для дуальногельмгольцева двумерного многообразия, причем используем выражение (18) для определителя:

$$l^i=\frac{u^ie^{-\frac{(2)}{(1)}}}{(1)},\quad m_i=\frac{(b_i(1)-a_i(2))e^{\frac{(2)}{(1)}}}{(1)}.$$

Предложение 6. Финслеров скаляр J дуальногельмгольцева двумерного многообразия равен 2.

Доказательство. Находим тройное произведение

$$m_im_jm_k=\frac{(b_i(1)-a_i(2))(b_j(1)-a_j(2))(b_k(1)-a_k(2))e^{3\frac{(2)}{(1)}}}{(1)}=\frac{p_{ijk}e^{3\frac{(2)}{(1)}}}{(1)}.$$

Подставляем найденное произведение и выражение для тензора A_{ijk}, вычисленное в предложении 5, в формулу (12), получаем явное выражение для скаляра J. □

Далее по формулам (13) с использованием выражений для второго тензора из (19) вычисляем тензоры

$$C^i_{jk}=\frac{2(b_j(1)-a_j(2))(b_k(1)-a_k(2))((a^i+b^i)(1)-a^i(2))}{(a_1b_2-a_2b_1)(1)^4},$$

$$A^i_{jk}=\frac{2(b_k(1)-a_k(2))(b_j(1)-a_j(2))((a^i+b^i)(1)-a^i(2))}{(a_1b_2-a_2b_1)(1)^3}e^{\frac{(2)}{(1)}},\tag{20}$$

где $a^2 = -a_1, b^2 = b_1$, $a^1 = -a_2, b^1 = b_2$. Затем находим финслеров специальный тензор кривизны.

Теорема 9. Финслеров специальный тензор кривизны для дуальногельмгольцева двумерного многообразия равен нулю.

Доказательство. Действительно, воспользуемся выражением (20) для тензора A^i_{jk} при вычислении финслерова специального тензора кривизны (15):

$$S^i_{jkh} = \frac{4}{(a_1b_2 - a_2b_1)^2(1)^6} e^{2\frac{(2)}{(1)}} \times$$

$$\times((a^i + b^i)(1) - a^i(2))((a^r + b^r)(1) - a^r(2)) \times$$

$$\times[(b_j(1) - a_j(2))(b_k(1) - a_k(2))(b_h(1) - a_h(2))(b_r(1) - a_r(2)) -$$

$$-(b_j(1) - a_j(2))(b_k(1) - a_k(2))(b_h(1) - a_h(2))(b_r(1) - a_r(2))] = 0.$$

Проведенные вычисления доказывают, что $S^i_{jkl} = 0$. □

В работе [6] проводилось исследование кривизны двумерного дуальногельмгольцева многообразия, построенной через согласованную связность. Найден соответствующий тензор кривизны:

$$R^i_{jkl} = -\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \Gamma^i_{sk}\Gamma^s_{jl} + \Gamma^i_{sl}\Gamma^s_{jk},$$

где символы Кристоффеля согласованной связности определяются по формуле

$$\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2} h^{lk}\left(\frac{\partial h_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial h_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k}\right) - h^{lk}\left(\lambda_{jkl} + \lambda_{kij} - \lambda_{ijk}\right),$$

причем $h_{ij} = a_i a_j + a_i b_j - a_j b_i$, $\lambda_{ijk} = b_j \dfrac{\partial a_i}{\partial x^k} - a_j \dfrac{\partial b_i}{\partial x^k}$. Оказалось, что тензор кривизны R^i_{jkl} тождественно не обращается в нуль.

Заключение

Из данных исследований и работы [4] следует, что в классификации Михайличенко двумерных феноменологически симметричных геометрий [1] геометрии собственно гельмгольцева, псевдогельмгольцева и дуальногельмгольцева, задаваемые метрическими функциями

$$f(x,y) = [(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2] e^{2\gamma \operatorname{arctg}\frac{x^2 - y^2}{x^1 - y^1}},$$

$$f(x,y) = [(x^1 - y^1)^2 - (x^2 - y^2)^2] e^{2\beta \operatorname{ar(c)th}\frac{x^2 - y^2}{x^1 - y^1}},$$

$$f(x,y) = (x^1 - y^1) e^{\frac{x^2 - y^2}{x^1 - y^1}},$$

где $\gamma = \mathrm{const}$, $\gamma \neq 0$, $\beta = \mathrm{const}$, $\beta \neq 0$, $\beta \neq 1$, являются финслеровыми. Других финслеровых неримановых геометрий в той классификации нет.

В работе В.Х. Лева [7] приводится классификация трехмерных феноменологически симметричных геометрий, среди которых есть собственно гельмгольцева, псевдогельмгольцева и дуальногельмгольцева трехмерные геометрии с метрическими функциями

$$f(x,y)=[(x^1-y^1)^2+(x^2-y^2)^2]e^{2\gamma\,\mathrm{arctg}\frac{x^2-y^2}{x^1-y^1}+2z^1+2z^2},$$

$$f(x,y)=[(x^1-y^1)^2-(x^2-y^2)^2]e^{2\beta\,\mathrm{ar(c)th}\frac{x^2-y^2}{x^1-y^1}+2z^1+2z^2},$$

$$f(x,y)=(x^1-y^1)e^{\frac{x^2-y^2}{x^1-y^1}+2z^1+2z^2}.$$

Для этих метрических функций не выполняется основное свойство финслеровой геометрии – свойство однородности, то есть данные геометрии не являются финслеровыми.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Михайличенко Г.Г.* Двумерные геометрии // ДАН СССР. 1981. Т. 260. № 4. С. 803–805.
2. *Михайличенко Г.Г.* О групповой и феноменологической симметриях в геометрии // ДАН СССР. 1983. Т. 269. № 2. С. 284–288.
3. *Богданова Р.А.* Группы движений двумерных гельмгольцевых геометрий как решение функционального уравнения // Сибирский журнал индустриальной математики. 2009. Т. 12. № 4. С. 12–22.
4. *Кыров В.А.* Собственно гельмгольцева плоскость как финслерова геометрия // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 4(42). С. 15–22.
5. *Рунд Х.* Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М.: Наука, 1981.
6. *Кыров В.А.* Гельмгольцевы пространства размерности два // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46. № 6. С. 1343–1361.
7. *Лев В.Х.* Трехмерные геометрии в теории физических структур // Вычислительные системы. Новосибирск: ИМ СОАН СССР, 1988. Вып. 125. С. 90 – 103.

Статья поступила 31.10.2016 г.

Kyrov V.A. THE PSEUDO-HELMHOLTZ AND DUAL HELMHOLTZ PLANES WITH THE FINSLER GEOMETRY. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 6(44). pp. 5–18

DOI 10.17223/19988621/44/1

There exists the complete classification of two-dimensional phenomenologically symmetric geometries, i.e., geometries for which the six mutual distances between the four arbitrary points are functionally connected. In these geometries, the distance is understood in a generalized sense as the value of a function called the metric function. Axioms of a metric are not obligatorily satisfied. For all these geometries, groups of motion are three-dimensional. The classification of such two-dimensional geometries includes both well-known geometries (Euclidean, pseudo-Euclidean, symplectic, spherical, etc.), and unknown ones (the properly Helmholtz, pseudo-Helmholtz, dual Helmholtz, and simplicial geometries).

In this paper, we use methods of Finsler geometry to study the pseudo-Helmholtz and dual Helmholtz two-dimensional phenomenologically symmetric geometries. In particular, in the first section, we introduce the definition of pseudo-Helmholtz and dual Helmholtz planes, and then prove that they are positive definite Finsler spaces (homogeneity and positivity of the metric function, as well as the positive definiteness of the Finsler metric tensor are verified), though, in contrast to the actual Helmholtz geometry, with some restrictions on the domain. In the second section, the psevdo-Helmholtz two-dimensional manifold is defined and it is proved that it is a positive definite Finsler space for |β| > 1 in a certain domain. Then, the metric tensor g_{ij}, basic Finsler tensor C_{ijk}, and additional tensor A_{ijk} are calculated. With these tensors, the Finsler scalar J is obtained and it is proved that the special Finsler curvature tensor S^i_{jkl} for the two-dimensional pseudo-Helmholtz manifold is zero. In the third section, the dual Helmholtz two-dimensional manifold is defined and it is proved that it is a positive definite Finsler space in the domain of definition. Then, as in the second section, the metric tensor, basic Finsler tensor C_{ijk}, and additional A_{ijk} tensor are calculated. Then, it is proved that J = 2 and the special Finsler curvature tensor $S^i_{jkl} = 0$.

Keywords: metric function, pseudo-Helmholtz geometry, dual Helmholtz geometry, Finsler geometry.

KYROV Vladimir Alexandrovich (Candidate of Physics and Mathematics, Gorno-Altaisk State University, Gorno-Altaisk, Russian Federation)
E-mail: kyrovVA@yandex.ru

REFERENCES

1. Mikhaylitchenko G.G. (1981) Geometries a deux dimensions dans la theorie de structures. *Comptes Rendus de L'Academie des Sciencen. Paris.* 293(2). pp. 529–531
2. Michailichenko G.G. (1983) On group and phenomenological simmetries in geometry. *Soviet Math. Dokl.* 27(2). pp. 325–326.
3. Bogdanova R.A. (2009) Gruppy dvizheniy dvumernykh gel'mgol'tsevykh geometriy kak reshenie funktsional'nogo uravneniya [Groups of motions of two-dimensional Helmholtz geometries as a solution of a functional equation]. *Sibirskii Zhurnal Industrial'noi Matematiki*. 12(4). pp. 12–22.
4. Kyrov V.A. (2016) Sobstvenno gel'mgol'tseva ploskost' kak finslerova geometriya [The properly Helmholtz plane as Finsler geometry]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(42). pp. 15–22. DOI 10.17223/19988621/42/2.
5. Rund H. (1959) *The differential geometry of Finsler spaces*. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag.
6. Kyrov V.A. (2005) Two-dimensional Helmholtz spaces. *Siberian Mathematical Journal.* 46(6). pp. 1082–1096. DOI 10.1007/s11202-005-0103-1.
7. Lev V.H. (1988) Trekhmernye geometrii v teorii fizicheskikh struktur [Three-dimensional geometries in the theory of physical structures]. *Vychislitel'nye sistemy – Computation Systems*. 125. Novosibirsk: Institute of Mathematics Publ. pp. 90–103.