ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2016 Математика и механика № 6(44)

УДК 512.543
DOI 10.17223/19988621/44/3

А.В. Розов, Е.В. Соколов

О НИЛЬПОТЕНТНОЙ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП С ЦЕНТРАЛЬНЫМИ ОБЪЕДИНЕННЫМИ ПОДГРУППАМИ

Пусть G – свободное произведение нильпотентных групп A и B с собственными центральными объединенными подгруппами H и K. Получены критерии аппроксимируемости группы G нильпотентными группами, а также конечными нильпотентными π-группами, где π – некоторое множество простых чисел.

Ключевые слова: *нильпотентная группа, обобщенное свободное произведение групп, аппроксимируемость нильпотентными группами, аппроксимируемость конечными нильпотентными группами.*

1. Введение

Пусть C – некоторый класс групп. Напомним, что группа X называется аппроксимируемой группами из класса C (или, короче, C-аппроксимируемой), если для каждого неединичного элемента x из X существует гомоморфизм группы X на группу из класса C, образ элемента x относительно которого отличен от единицы. Отметим, что если C – класс всех конечных групп, то понятие C-аппроксимируемой группы совпадает с классическим понятием финитно аппроксимируемой группы.

В данной статье рассматриваются свойства аппроксимируемости классом всех нильпотентных групп, а также классом всех конечных нильпотентных групп и некоторыми его подклассами. Первым существенным продвижением в их изучении следует, по-видимому, считать результат В. Магнуса о нильпотентной аппроксимируемости произвольной свободной группы [1]. Исследование аппроксимируемости нильпотентными группами свободных конструкций групп было начато А.И. Мальцевым [2], указавшим как необходимые, так и достаточные условия нильпотентной аппроксимируемости (обычного) свободного произведения нильпотентно аппроксимируемых групп. Полностью вопрос о нильпотентной аппроксимируемости данной конструкции был решен А. И. Лихтманом в [3]. Аппроксимируемость нильпотентными группами свободных произведений с объединенной подгруппой и HNN-расширений изучалась в работах [4–11], и этот перечень является, по-видимому, исчерпывающим. В [12] получен критерий нильпотентной аппроксимируемости фундаментальной группы произвольного графа конечных групп. Помимо этого имеется значительное число результатов об аппроксимируемости перечисленных свободных конструкций конечными p-группами (являющимися, как известно, нильпотентными), а также произвольными корневыми классами, к числу которых относится и класс всех конечных p-групп. Основой данных исследований служит работа К. Грюнберга [13], а ссылки на последние статьи в указанном направлении можно найти в обзоре [14]. Следует отметить, что в ряде случаев свойство аппроксимируемости конечными p-группами оказывается равносильным нильпотентной аппроксимируемости (см., напр., [5, 8, 9]). В целом, однако, можно утверждать, что аппроксимируемость нильпотентными группами свободных произведений с объединенной подгруппой и HNN-расширений изучена достаточно мало.

Перейдем теперь к описанию результатов, полученных в настоящей статье. Пусть A и B – произвольные группы, H и K – подгруппы групп A и B соответственно, φ – изоморфизм подгруппы H на подгруппу K. И пусть

$$G = (A * B;\ H = K,\ \varphi)$$

– свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ. Напомним, что группа G порождается всеми порождающими групп A и B и определяется всеми определяющими соотношениями этих групп, а также соотношениями вида $h\varphi = h$, где $h \in H$.

В случае, когда свободные множители A и B нильпотентны, а подгруппы H и K лежат в их центрах, имеет место следующий простой критерий нильпотентной аппроксимируемости группы G.

Теорема 1. *Пусть G – свободное произведение нильпотентных групп A и B с центральными объединенными подгруппами H и K, не совпадающими с группами A и B. Группа G аппроксимируема нильпотентными группами тогда и только тогда, когда аналогичным свойством обладает (обычное) свободное произведение групп A/H и B/K.*

Пусть далее π – некоторое множество простых чисел. Напомним, что элемент x группы X называется π-полным, если для любого целого положительного числа n, все простые делители которого принадлежат множеству π, существует такой элемент $y \in X$, что $y^n = x$. Напомним также, что конечная группа называется π-группой, если все простые делители ее порядка содержатся в π. В случае, когда множество π состоит из одного простого числа p, говорят о p-полных элементах и о конечных p-группах соответственно.

Как уже было отмечено выше, А. И. Мальцев указал как необходимые, так и достаточные условия нильпотентной аппроксимируемости свободного произведения нильпотентно аппроксимируемых групп. Если перемножаемые группы нильпотентны, эти условия образуют критерий, который выглядит следующим образом.

Предложение 1 [2, с. 362]. *Свободное произведение нильпотентных групп аппроксимируемо нильпотентными группами тогда и только тогда, когда ни один из свободных множителей не имеет кручения или для некоторого простого числа p ни один из свободных множителей не содержит p-полных элементов, отличных от 1.*

Поэтому теорема 1 допускает следующую равносильную формулировку.

Теорема 1′. *Пусть G – свободное произведение нильпотентных групп A и B с центральными объединенными подгруппами H и K, не совпадающими с группами A и B. Группа G аппроксимируема нильпотентными группами тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих утверждений:*

1) *группы A/H и B/K не имеют кручения,*

2) *для некоторого простого числа p группы A/H и B/K не содержат p-полных элементов, отличных от 1.*

Рассмотрим теперь вопрос об аппроксимируемости обобщенного свободного произведения G конечными нильпотентными π-группами, где π – непустое множество простых чисел (в частности, множество π может содержать все простые числа и тогда класс конечных нильпотентных π-групп совпадает с классом всех конечных нильпотентных групп). Здесь критерий удается получить при более слабых ограничениях на объединенные подгруппы, потребовав, чтобы одна из них была центральна, а другая нормальна в соответствующем свободном множителе.

Теорема 2. *Пусть G – свободное произведение нильпотентных групп A и B с объединенными подгруппами H и K, не совпадающими с группами A и B, подгруппа H центральна в группе A, подгруппа K нормальна в группе B. Группа G аппроксимируема конечными нильпотентными π-группами тогда и только тогда, когда она аппроксимируема конечными π-группами, а свободное произведение групп A/H и B/K – конечными нильпотентными π-группами.*

В отличие от случая аппроксимируемости произвольными нильпотентными группами, критерий аппроксимируемости (обычного) свободного произведения нильпотентных групп конечными нильпотентными π-группами в общем случае неизвестен, равно как и критерий аппроксимируемости конечными π-группами рассматриваемого обобщенного свободного произведения G. Однако указанные задачи удается решить при некоторых дополнительных ограничениях, накладываемых на свободные множители A и B.

Напомним, что группа X называется группой конечного ранга, если существует целое положительное число r такое, что любая конечно порожденная подгруппа группы X порождается не более чем r элементами. Ранее одним из авторов было доказано, что в случае, когда выполняются предпосылки теоремы 2, а группы A и B имеют конечный ранг, аппроксимируемость конечными π-группами группы G равносильна аппроксимируемости конечными π-группами групп A, B, A/H и B/K [15]. Известно также, что нильпотентная группа конечного ранга аппроксимируема конечными π-группами тогда и только тогда, когда она не содержит π-полных элементов, отличных от 1 [16]. Отсюда вытекает

Следствие 1. *Пусть G – свободное произведение нильпотентных групп A и B конечного ранга с объединенными подгруппами H и K, не совпадающими с группами A и B, подгруппа H центральна в группе A, подгруппа K нормальна в группе B. Группа G аппроксимируема конечными нильпотентными π-группами тогда и только тогда, когда группы A и B не содержат π-полных элементов, отличных от 1, а свободное произведение групп A/H и B/K аппроксимируемо конечными нильпотентными π-группами.*

При значительно более сильном ограничении – конечной порожденности групп A и B – получаем

Следствие 2. *Пусть G – свободное произведение конечно порожденных нильпотентных групп A и B с объединенными подгруппами H и K, не совпадающими с группами A и B, подгруппа H центральна в группе A, подгруппа K нормальна в группе B. Группа G аппроксимируема конечными нильпотентными π-группами тогда и только тогда, когда периодические части групп A и B являются π-группами, а периодические части групп A/H и B/K – p-группами для некоторого простого числа $p \in \pi$.*

В самом деле, легко видеть, что если отличный от 1 элемент x конечно порожденной нильпотентной группы X является π-полным, то он имеет конечный порядок q. Очевидно, что для каждого простого делителя p числа q элемент $x^{(q/p)}$ также отличен от 1 и является π-полным. Если $p \in \pi$ и n – порядок соответствующей числу p силовской подгруппы S_p периодической части группы X, то из равенства $y^n = x^{(q/p)}$ вытекает, что $y \in S_p$ и потому $y^n = 1$, что невозможно. Если же ни один элемент множества π не делит q, то для любого числа n, все простые делители которого содержатся в π, $(q, n) = 1$ и, следовательно, для некоторых целых чисел u и v справедливы соотношения $x = x^{uq+vn} = (x^v)^n$. Таким образом, в конечно порожденной нильпотентной группе отличный от 1 элемент является π-полным тогда и только тогда, когда он имеет конечный порядок, все простые делители которого не принадлежат множеству π.

Отсюда следует, что если свободное произведение групп A/H и B/K аппроксимируемо конечными π-группами, то периодические части групп A/H и B/K оказываются π-группами. Из нильпотентной же аппроксимируемости данного свободного произведения в силу приведенного выше критерия А. И. Мальцева вытекает, что группы A/H и B/K либо вообще не имеют кручения, либо их периодические части являются p-группами для некоторого простого числа p. Понятно, что в случае аппроксимируемости конечными нильпотентными π-группами перечисленные ограничения накладываются друг на друга и p оказывается принадлежащим π. Обратно, если периодические части групп A/H и B/K являются p-группами для некоторого простого числа $p \in \pi$, то их свободное произведение аппроксимируется конечными p-группами [13], а значит, и конечными нильпотентными π-группами. Таким образом, следствие 2 вытекает из следствия 1. Отметим также, что оно обобщает основной результат работы [7].

Доказательства теорем 1 и 2 приводятся в пункте 3. Нам понадобится также ряд вспомогательных утверждений, содержащихся в пункте 2.

2. Вспомогательные утверждения

Пусть G – свободное произведение групп A и B с объединенными относительно изоморфизма φ подгруппами H и K. Хорошо известно (см., напр., [17, теорема 4.3]), что тождественные отображения порождающих групп A и B в группу G продолжаемы до инъективных гомоморфизмов. Поэтому группы A и B можно считать подгруппами в G. Подгруппы H и K при этом оказываются совпадающими с $A \cap B$.

Легко видеть, что каждый элемент $g \in G$ может быть записан в виде произведения $g_0g_1\ldots g_n$, где $n \geq 0$ и для каждого $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $g_i \in A$ или $g_i \in B$, причем если $n \geq 1$, то $g_i \in A\backslash H$ или $g_i \in B\backslash K$. Указанная запись называется несократимой, а количество сомножителей в ней – длиной несократимой записи. Из теоремы о нормальной форме элемента свободного произведения с объединенной подгруппой (см., напр, [17, теорема 4.4]) следует, что если элемент $g \in G$ обладает несократимой записью длины большей 1, то он отличен от единицы.

Если нормальные подгруппы $R \leq A$ и $S \leq B$ таковы, что $(R \cap H)\varphi = S \cap K$, то, как легко видеть, отображение $\varphi_{R,S}$: $HR/R \to KS/S$, переводящее элемент hR $(h \in H)$ в $(h\varphi)S$, корректно определено и является изоморфизмом подгрупп. Поэтому можно рассмотреть свободное произведение $G_{R,S}$ фактор-групп A/R и B/S с подгруппами HR/R и KS/S, объединенными относительно изоморфизма $\varphi_{R,S}$. Следующее утверждение хорошо известно (см., напр., [18]) и легко проверяется.

Предложение 2. *Пусть* $G = (A * B;\ H = K,\ \varphi)$, R *и* S *– нормальные подгруппы групп* A *и* B *соответственно, такие, что* $(R \cap H)\varphi = S \cap K$. *Тогда естественные гомоморфизмы* $A \to A/R$ *и* $B \to B/S$ *могут быть продолжены до гомоморфизма* $\rho_{R,S}$ *группы* G *на свободное произведение*

$$G_{R,S} = (A/R * B/S;\ HR/R = KS/S,\ \varphi_{R,S}).$$

Ядро этого гомоморфизма совпадает с нормальным замыканием в группе G множества $R \cup S$.

Заметим, что если подгруппа H нормальна в группе A, подгруппа K нормальна в группе B, $R = H$ и $S = K$, то группа $G_{R,S}$ представляет собой обычное свободное произведение фактор-групп $A/R = A/H$ и $B/S = B/K$. Ядро гомоморфизма $\rho_{R,S}$ при этом совпадает с H, и потому имеет место соотношение $G_{R,S} \cong G/H$.

Предложение 3. *Пусть G – свободное произведение групп A и B с нормальными абелевыми объединенными подгруппами H и K, не совпадающими с группами A и B, C – класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп и фактор-групп. Пусть также класс C вместе с каждой группой простого порядка p содержит и все конечные p-группы. Тогда из C-аппроксимируемости группы G следует, что (обычное) свободное произведение фактор-групп A/H и B/K также является C-аппроксимируемой группой.*

Доказательство. Напомним, что подгруппа Y некоторой группы X называется C-отделимой, если для каждого элемента x группы X, не принадлежащего Y, существует гомоморфизм σ группы X на группу из класса C, такой, что $x\sigma \notin Y\sigma$. Хорошо известно (см., напр., [19, предл. 3]) и легко проверяется, что в случае, когда класс C замкнут относительно взятия фактор-групп, а подгруппа Y нормальна в группе X, C-отделимость Y в X равносильна C-аппроксимируемости фактор-группы X/Y. Этот факт потребуется нам в дальнейшем.

Пусть группа G C-аппроксимируема. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $[A : H] = [B : K] = 2$.

Покажем сначала, что подгруппа H C-отделима в группе A.

Предположим, напротив, что H не является C-отделимой в A. Тогда найдется такой элемент $a \in A\backslash H$, что для любого гомоморфизма σ группы A на C-группу $a\sigma \in H\sigma$. Возьмем произвольный элемент $b \in B\backslash K$ и рассмотрим коммутатор x элементов a и $b^{-1}ab$:

$$x = [a, b^{-1}ab] = a^{-1}b^{-1}a^{-1}bab^{-1}ab.$$

Элемент x имеет в группе G несократимую запись длины 8 и поэтому отличен от 1. Поскольку G C-аппроксимируема, существует гомоморфизм ψ группы G на C-группу, такой, что $x\psi \neq 1$. Ввиду замкнутости класса C относительно взятия подгрупп ограничение гомоморфизма ψ на подгруппу A также оказывается гомоморфизмом этой подгруппы на группу из класса C. Из сделанного выше предположения заключаем, что $a\psi \in H\psi$, т. е. $a\psi = h\psi$ для некоторого элемента $h \in H$. Поскольку подгруппы H и K абелевы и нормальны в группах A и B соответственно, получаем

$$x\psi = [a, b^{-1}ab]\psi = [h, b^{-1}hb]\psi = 1\psi = 1.$$

Однако гомоморфизм ψ был выбран так, чтобы выполнялось соотношение $x\psi \neq 1$. Следовательно, подгруппа H C-отделима в группе A.

Ввиду замкнутости класса C относительно взятия фактор-групп C-отделимость подгруппы H равносильна C-аппроксимируемости фактор-группы A/H. Отсюда и из того, что A/H – простая группа, следует, что $A/H \in C$. Поэтому согласно условию предложения в класс C входит любая конечная 2-группа. Остается заметить, что в силу теоремы 4.1 из [13] свободное произведение конечных 2-групп A/H и B/K аппроксимируемо конечными 2-группами.

Случай 2. $[A : H] > 2$ или $[B : K] > 2$.

Без потери общности можно считать, что $[A : H] > 2$. Покажем, что подгруппа H C-отделима в группе G. Ввиду замкнутости класса C относительно взятия фактор-групп это будет означать, что фактор-группа G/H, изоморфная свободному произведению $A/H * B/K$, C-аппроксимируема.

Предположим противное: существует такой элемент $g \in G \backslash H$, что для любого гомоморфизма σ группы G на группу из класса C имеет место включение $g\sigma \in H\sigma$. Поскольку g не принадлежит подгруппе H, он имеет несократимую запись вида $g = g_0 g_1 \ldots g_n$, где $n \geq 0$ и для каждого $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $g_i \in A \backslash H$ или $g_i \in B \backslash K$. Рассмотрим четыре подслучая.

(i): $g_0, g_n \in A \backslash H$.

Зафиксируем произвольный элемент $b \in B \backslash K$ и рассмотрим коммутатор

$$x = [g, b^{-1}gb] = g^{-1}b^{-1}g^{-1}bgb^{-1}gb.$$

Поскольку x имеет в группе G несократимую запись длины $4n + 8$, он отличен от 1. Но, с другой стороны, для любого гомоморфизма σ группы G на группу из класса C $g\sigma \in H\sigma$ и потому найдется такой элемент $h \in H$, что $g\sigma = h\sigma$. Как и в случае 1, поскольку подгруппы H и K абелевы и нормальны в группах A и B,

$$x\sigma = [g, b^{-1}gb]\sigma = [h, b^{-1}hb]\sigma \in [H\sigma, H\sigma] = 1.$$

Следовательно, группа G не является C-аппроксимируемой и мы получили противоречие.

(ii): $g_0 \in A \backslash H$, $g_n \in B \backslash K$.

Поскольку $[A : H] > 2$, существует элемент $a \in A \backslash H$, такой, что a и g_0 лежат в разных смежных классах группы A по подгруппе H. Тогда $a^{-1}g_0 \notin H$ и, следовательно, элемент

$$a^{-1}ga = (a^{-1}g_0)g_1 \ldots g_n a$$

имеет несократимую запись длины $n + 2$. Зафиксируем элемент $b \in B \backslash K$ и рассмотрим коммутатор

$$x = [a^{-1}ga, b^{-1}a^{-1}gab] = a^{-1}g^{-1}ab^{-1}a^{-1}g^{-1}aba^{-1}gab^{-1}a^{-1}gab.$$

Так как x имеет в группе G несократимую запись длины $4n + 12$, то $x \neq 1$. Но, с другой стороны, для любого гомоморфизма σ группы G на группу из класса C найдется такой элемент $h \in H$, что $g\sigma = h\sigma$ и потому

$$x\sigma = [a^{-1}ha, b^{-1}a^{-1}hab]\sigma \in [H\sigma, H\sigma] = 1.$$

Как и выше, получили противоречие с C-аппроксимируемостью группы G.

(iii): $g_0 \in B \backslash K$, $g_n \in A \backslash H$.

Этот подслучай рассматривается так же, как и подслучай (ii). Разница состоит лишь в том, что элемент $a \in A \backslash H$ нужно выбрать не лежащим в одном смежном классе с элементом g_n^{-1}.

(iv): $g_0, g_n \in B \backslash K$.

Данный подслучай аналогичен подслучаю (i): в качестве элемента x следует взять коммутатор $[g, a^{-1}ga]$, где $a \in A \backslash H$.

Итак, в каждом из подслучаев мы пришли к противоречию и потому подгруппа H C-отделима в группе G. Предложение доказано.

Нам потребуется также следующий полученный ранее результат.

Предложение 4 [15, предл. 3]. *Пусть G – свободное произведение конечных π-групп A и B с объединенными подгруппами H и K, подгруппа H центральна в группе A, подгруппа K нормальна в группе B. Тогда группа G аппроксимируема конечными π-группами.*

3. Доказательство теорем 1 и 2

Доказательство теоремы 1. Легко видеть, что необходимость условия теоремы обеспечивается предложением 3. Докажем теперь достаточность. Для этого зафиксируем произвольный неединичный элемент $g \in G$ и укажем гомоморфизм группы G на нильпотентную группу, при котором образ g будет отличен от 1.

Если $g \notin H$, то образ g относительно естественного гомоморфизма $\varepsilon\colon G \to G/H$ отличен от 1. Поскольку фактор-группа G/H, изоморфная свободному произведению $A/H * B/K$, аппроксимируема нильпотентными группами, указанный гомоморфизм может быть продолжен до искомого отображения.

Теперь рассмотрим случай, когда $g \in H$. Пусть φ обозначает изоморфизм, в соответствии с которым объединяются подгруппы H и K. Так как эти подгруппы центральны в группах A и B соответственно, то наряду с обобщенным свободным произведением G можно рассмотреть обобщенное прямое произведение P групп A и B с объединенными подгруппами H и K. Напомним (см., напр., [20]), что группа P представляет собой фактор-группу прямого произведения $A \times B$ по его подгруппе D, состоящей из всевозможных элементов вида $h(h\varphi)^{-1}$, где $h \in H$. Легко видеть, что $D \cap A = 1 = D \cap B$ и, следовательно, группы A и B вкладываются в группу P. Очевидно также, что P – нильпотентная группа и что тождественные отображения $A \to A$ и $B \to B$ могут быть продолжены до гомоморфизма $\sigma\colon G \to P$, который и является искомым. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Как и выше, необходимость условия теоремы обеспечивается предложением 3, и нам остается проверить лишь достаточность. Выберем произвольный неединичный элемент $g \in G$ и покажем, что существует гомоморфизм группы G на конечную нильпотентную π-группу, при котором образ g будет отличен от 1.

Случай, когда $g \notin H$, рассматривается так же, как и при доказательстве теоремы 1. Поэтому далее будем считать, что $g \in H$.

Так как группа G аппроксимируема конечными π-группами, то существует гомоморфизм σ, отображающий ее на конечную π-группу и такой, что $g\sigma \neq 1$. Положим $N = \ker \sigma$, $R = N \cap A$, $S = N \cap B$. Легко видеть, что тогда

$$(R \cap H)\varphi = (N \cap H)\varphi = N \cap K = S \cap K$$

(где снова φ обозначает изоморфизм, в соответствии с которым объединяются подгруппы H и K). Поэтому в силу предложения 2 определены группа

$$G_{R,S} = (A/R * B/S;\ HR/R = KS/S,\ \varphi_{R,S})$$

и гомоморфизм $\rho_{R,S}\colon G \to G_{R,S}$, продолжающий естественные гомоморфизмы $A \to A/R$ и $B \to B/S$. Согласно тому же предложению $\ker \rho_{R,S} \leq N$ и, следовательно, $g\rho_{R,S} \neq 1$. Заметим еще, что A/R и B/S являются, во-первых, нильпотентными и, во-вторых, конечными π-группами. Последнее вытекает из соотношений

$$A/R = A/(N \cap A) \cong AN/N \leq G/N,$$
$$B/S = B/(N \cap B) \cong BN/N \leq G/N.$$

Введем следующие обозначения:

$$G_1 = G_{R,S},\ A_1 = A/R,\ B_1 = B/S,\ H_1 = HR/R,\ K_1 = KS/S,$$
$$\varphi_1 = \varphi_{R,S},\ \rho_1 = \rho_{R,S},\ g_1 = g\rho_{R,S}.$$

Ввиду включения $g_1 \in A_1$ порядок r элемента g_1 является π-числом. Пусть $p \in \pi$ – некоторый простой делитель числа r. Так как A_1 и B_1 – конечные нильпотентные группы, то в силу теоремы Бернсайда – Виландта (см., напр., [21, п. 17.1.4]) они раскладываются в прямые произведения своих силовских подгрупп:

$$A_1 = Q_1 \times Q_2 \times \ldots \times Q_m,\ B_1 = T_1 \times T_2 \times \ldots \times T_n.$$

Поскольку $g_1 \in H_1 = A_1 \cap B_1$, в обоих произведениях найдутся множители, соответствующие числу p. Без потери общности можно считать, что это – подгруппы Q_1 и T_1. Положим тогда

$$U = Q_2 \times \ldots \times Q_m,\ V = T_2 \times \ldots \times T_n.$$

Легко видеть, что подгруппы U и V совпадают с множествами всех элементов групп A_1 и B_1 соответственно, порядки которых взаимно просты с p. Отсюда следует, что $U \cap H_1$ и $V \cap K_1$ – множества элементов подгрупп H_1 и K_1, обладающих тем же свойством. Это означает, что $(U \cap H_1)\varphi_1 = V \cap K_1$ и согласно предложению 2 мы можем рассмотреть свободное произведение G_2 групп $A_2 = A_1/U$ и $B_2 = B_1/V$ с объединенными подгруппами $H_2 = H_1U/U$ и $K_2 = K_1V/V$, а также гомоморфизм ρ_2: $G_1 \to G_2$, продолжающий естественные гомоморфизмы $A_1 \to A_1/U$ и $B_1 \to B_1/V$.

Заметим, что элемент g_1 не принадлежит подгруппе U, поскольку его порядок делится на p. Следовательно, $g_1\rho_2 \neq 1$.

Группы A_2 и H_2 являются образами групп A и H относительно композиции гомоморфизмов $\rho_1 \cdot \rho_2$, поэтому H_2 центральна в A_2. По тем же причинам подгруппа K_2 нормальна в группе B_2, и так как A_2 и B_2 – конечные p-группы, то в силу предложения 4 группа G_2 аппроксимируема конечными p-группами. Отсюда и из соотношения $g_1\rho_2 \neq 1$ следует, что существует гомоморфизм θ группы G_2 на конечную p-группу F, отображающий $g_1\rho_2$ в неединичный элемент. Так как $p \in \pi$, то F является конечной нильпотентной π-группой. Следовательно, композиция $\rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \theta$ оказывается искомым гомоморфизмом. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Magnus W.* Beziehungen zwischen Gruppen und idealen in einem speziellen Ring // Math. Ann. 1935. V. 111. P. 259–280. DOI: 10.1007/BF01472217.
2. *Мальцев А.И.* Обобщенно нильпотентные алгебры и их присоединенные группы // Матем. сб. 1949. Т. 25. № 3. С. 347–366.
3. *Lichtman A. I.* Necessary and sufficient conditions for the residual nilpotence of free products of groups // J. Pure Appl. Algebra. 1978. V. 12. P. 49–64. DOI:10.1016/0022-4049(78)90020-8.
4. *Raptis E.*, *Varsos D.* The residual nilpotence of HNN-extensions with base group a finite or a f. g. abelian group // J. Pure Appl. Algebra. 1991. V. 76. No. 2. P. 167–178. DOI:10.1016/0022-4049(91)90059-B.
5. *Азаров Д.Н.* О нильпотентной аппроксимируемости свободных произведений свободных групп с циклическим объединением // Матем. заметки. 1998. Т. 64. Вып. 1. С. 3–8. DOI: 10.4213/mzm1366.
6. *Азаров Д. Н.*, *Иванова Е. А.* К вопросу о нильпотентной аппроксимируемости свободного произведения с объединением локально нильпотентных групп // Научные труды ИвГУ. Математика. 1999. Вып. 2. С. 5–7.
7. *Иванова Е.А.* Об аппроксимируемости нильпотентными группами свободного произведения с объединенной подгруппой двух абелевых групп // Чебышевский сб. 2002. Т. 3. Вып. 1. С. 72–77.
8. *Иванова Е.А.* О нильпотентной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Иваново, 2004.
9. *Иванова Е.А.* Аппроксимируемость нильпотентными группами свободного произведения двух групп с объединенными конечными подгруппами // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Биология, Химия, Физика, Математика. 2004. Вып. 3. С. 120–125.

10. *Азаров Д.Н.*, *Иванова Е.А.* Аппроксимационные свойства свободных произведений конечно порожденных нильпотентных групп с циклическим объединением // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Биология, Химия, Физика, Математика. 2008. Вып. 3. С. 56–62.
11. *Савельичева Н.С.*, *Соколов Е.В.* Одно необходимое условие нильпотентной аппроксимируемости HNN-расширения нильпотентной группы // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2015. Вып. 2. С. 64–68.
12. *Varsos D.* The residual nilpotence of the fundamental group of certain graphs of groups // Houston J. Math. 1996. V. 22. No. 2. P. 233–248.
13. *Gruenberg K.W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. Ser. 3. 1957. V. 7. P. 29–62. DOI: 10.1112/plms/s3-7.1.29.
14. *Соколов Е.В.* О применении метода Д. И. Молдаванского к исследованию аппроксимируемости HNN-расширений корневыми классами групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2016. Вып. 2. С. 87–103.
15. *Розов А.В.* Об аппроксимируемости конечными π-группами некоторых свободных произведений групп с центральными объединенными подгруппами // Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2016. № 2(40). С. 37–44. DOI: 10.17223/19988621/40/4.
16. *Розов А.В.* О нильпотентных группах конечного ранга // Математика и ее приложения. 2012. Вып. 9. С. 41–44.
17. *Магнус В.*, *Каррас А.*, *Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974. 456 с.
18. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106. P. 193–209. DOI: 10.2307/1993762.
19. *Туманова Е.А.* Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением // Изв. вузов. Математика. 2015. № 10. С. 27–44. DOI: 10.3103/S1066369X15100035.
20. *Молдаванский Д.И.* О пересечении подгрупп конечного индекса в некоторых обобщенных свободных произведениях групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Биология, Химия, Физика, Математика. 2008. Вып. 3. С. 114–122.
21. *Каргаполов М.И.*, *Мерзляков Ю.И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1977. 288 с.

Статья поступила 13.10.2016 г.

Rozov A.V., Sokolov E.V. ON THE RESIDUAL NILPOTENCE OF FREE PRODUCTS OF NILPOTENT GROUPS WITH CENTRAL AMALGAMATED SUBGROUPS. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 6(44). pp. 34–44

DOI 10.17223/19988621/44/3

Let G be a free product of nilpotent groups A and B with proper amalgamated subgroups H and K. We state that if H and K lie in the centers of A and B, respectively, then G is residually nilpotent if and only if the ordinary free product of A/H and B/K possesses the same property. We also prove that if π is a non-empty set of primes, H is central in A, and K is normal in B, then G is residually π-finite nilpotent if and only if G is residually π-finite and the free product of A/H and B/K is residually π-finite nilpotent. We obtain two corollaries of the second result for the cases when A and B have finite ranks or finite numbers of generators. In particular, we prove that if A and B are finitely generated, H is central in A, and K is normal in B, then G is residually π-finite nilpotent if and only if the periodic parts of A and B are π-groups and the periodic parts of A/H and B/K are p-groups for some prime p which belongs to π.

Keywords: nilpotent group, generalized free product of groups, residual nilpotence, residual finite nilpotence.

ROZOV Alexei Vyacheslavovich (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Ivanovo State University, Department of Applied Mathematics and Computer Sciences, Ivanovo State University, Ivanovo, Russian Federation)

E-mail: post-box023@mail.ru

SOKOLOV Evgeny Viktorovich (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Head of Department of Applied Mathematics and Computer Sciences, Ivanovo State University, Ivanovo, Russian Federation)

E-mail: ev-sokolov@yandex.ru

REFERENCES

1. Magnus W. (1935) Beziehungen zwischen Gruppen und idealen in einem speziellen Ring. *Math. Ann.* 111. pp. 259–280. DOI: 10.1007/BF01472217.
2. Mal′cev A.I. (1968) Generalized nilpotent algebras and their adjoint groups. *American Mathematical Society Translations: Series 2*. 69. pp. 1–21.
3. Lichtman A.I. (1978) Necessary and sufficient conditions for the residual nilpotence of free products of groups. *J. Pure Appl. Algebra*. 12. pp. 49–64. DOI:10.1016/0022-4049(78)90020-8.
4. Raptis E., Varsos D. (1991) The residual nilpotence of HNN-extensions with base group a finite or a f. g. abelian group. *J. Pure Appl. Algebra*. 76(2). pp. 167–178. DOI:10.1016/0022-4049(91)90059-B.
5. Azarov D.N. (1998) On the residual nilpotence of free products of free groups with cyclic amalgamation. *Mathematical Notes*. 64(1). pp. 3–7. DOI: 10.1007/BF02307189.
6. Azarov D.N., Ivanova E.A. (1999) K voprosu o nil'potentnoy approksimiruemosti svobodnogo proizvedeniya s ob"edineniem lokal'no nil'potentnykh grupp [To the question on the residual nilpotence of free product with amalgamation of locally nilpotent groups]. *Nauchnye Trudy Ivanovskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika. – Scientific Works of Ivanovo State University. Mathematics.* 2. pp. 5–7.
7. Ivanova E.A. (2002) Ob approksimiruemosti nil'potentnymi gruppami svobodnogo proizvedeniya s ob"edinennoy podgruppoy dvukh abelevykh grupp [On the residual nilpotence of a free product with an amalgamated subgroup of two Abelian groups by nilpotent groups]. *Chebyshevskiĭ Sbornik*. 3(1). pp. 72–77.
8. Ivanova E.A. (2004) *O nil'potentnoy approksimiruemosti obobshchennykh svobodnykh proizvedeniy grupp* [On the residual nilpotence of generalized free products of groups]. Abstract of Phys. and Math. Cand. Diss. Ivanovo.
9. Ivanova E.A. (2004) Approksimiruemost' nil'potentnymi gruppami svobodnogo proizvedeniya dvukh grupp s ob"edinennymi konechnymi podgruppami [The residual nilpotence of free product of two groups with finite amalgamated subgroups]. *Vestnik Ivanovskogo gosudarstvennogo universiteta – Ivanovo State University Bulletin. Ser.: Biology, Chemistry, Physics, Mathematics*. 3. pp. 120–125.
10. Azarov D.N., Ivanova E.A. (2008) Approksimatsionnye svoystva svobodnykh proizvedeniy konechno porozhdennykh nil'potentnykh grupp s tsiklicheskim ob"edineniem [The residual properties of free products of finitely generated nilpotent groups with cyclic amalgamation]. *Vestnik Ivanovskogo gosudarstvennogo universiteta – Ivanovo State University Bulletin. Ser.: Biology, Chemistry, Physics, Mathematics*. 3. pp. 56–62.
11. Savelicheva N.S., Sokolov E.V.(2015) Odno neobkhodimoe uslovie nil'potentnoy approksimiruemosti HNN-rasshireniya nil'potentnoy gruppy [A necessary condition of the residual nilpotence of an HNN-extension of a nilpotent group]. *Vestnik Ivanovskogo gosudarstvennogo universiteta – Ivanovo State University Bulletin. Ser.: Natural, Social Sciences*. 2. pp. 64–68.
12. Varsos D. (1996) The residual nilpotence of the fundamental group of certain graphs of groups. *Houston J. Math.* 22(2). pp. 233–248.
13. Gruenberg K.W.(1957) Residual properties of infinite soluble groups. *Proc. London Math. Soc. Ser.3.* 7. pp. 29–62. DOI: 10.1112/plms/s3-7.1.29.
14. Sokolov E.V. (2016) O primenenii metoda D. I. Moldavanskogo k issledovaniyu approksimiruemosti HNN-rasshireniy kornevymi klassami grupp [On the application of D. I. Moldavanskii's method to the study of the approximability of HNN-extensions by root classes of groups]. *Vestnik Ivanovskogo gosudarstvennogo universiteta – Ivanovo State University Bulletin. Ser.: Natural, Social Sciences*. 2. pp. 87–103.

15. Rozov A.V. (2016) Ob approksimiruemosti konechnymi π gruppami nekotorykh svobodnykh proizvedeniy grupp s tsentral'nymi ob"edinennymi podgruppami [On the residual π-finiteness of some free products of groups with central amalgamated subgroups]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(40). pp. 37–44. DOI: 10.17223/19988621/40/4.
16. Rozov A.V. (2012) O nil'potentnykh gruppakh konechnogo ranga [On nilpotent groups of finite rank]. *Matematika i ee prilozheniya – Mathematics and Its Applications.* 9. pp. 41–44.
17. Magnus W., Karras A., Solitar D. (1966) *Combinatorial group theory: presentations of groups in terms of generators and relations.* New York – London – Sydney: Interscience Publishers.
18. Baumslag G. (1963) On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups. *Trans. Amer. Math. Soc*. 106. pp. 193–209. DOI: 10.2307/1993762.
19. Tumanova E.A. (2015) On the root-class residuality of generalized free products with a normal amalgamation. *Russian Mathematics.* 59(10). pp. 23–37. DOI: 10.3103/S1066369X15100035.
20. Moldavanskii D.I. (2008) O peresechenii podgrupp konechnogo indeksa v nekotorykh obobshchennykh svobodnykh proizvedeniyakh grupp [On the intersection of finite index subgroups of certain generalized free products of groups]. *Vestnik Ivanovskogo gosudarstvennogo universiteta – Ivanovo State University Bulletin. Ser.: Biology*, *Chemistry*, *Physics*, *Mathematics*. 3. pp. 114–122.
21. Kargapolov M.I., Merslyakov Yu.I. (1977) *Osnovy teorii grupp* [Foundations of the Theory of Groups]. Moscow: Nauka.