

## МАТЕМАТИКА

УДК 519.711.3, 514.181.22  
DOI 10.17223/19988621/45/1

М.С. Бухтяк

**ОБОБЩЕНИЕ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ  
И МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОРМЫ КОНСТРУКЦИИ  
ИЗ ОРТОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА**

Данная публикация продолжает серию работ автора о моделировании деформированного лепестка осесимметричного параболического рефлектора. Строится геометрическая модель хорошо известного «матрасного эффекта», вполне аналогичного тому, который наблюдается при раскрытии зонтика. Модель базируется на гипотезе: поверхность сетеполотна параболического рефлектора – в изотропном случае – принимает форму, близкую к минимальной поверхности. Учтен тот факт, что для ортотропного сетеполотна сумма главных кривизн дальше от нуля, нежели в изотропном случае. Детально исследована область надежности модели. Математический аппарат модели – классическая дифференциальная геометрия.

**Ключевые слова:** параболический рефлектор, главные кривизны, ортотропия, минимальная поверхность, задание поверхности посредством семейства образующих кривых.

### 1. Псевдоминимальная поверхность

Моделирование деформированного лепестка осесимметричного параболического рефлектора рассматривалось автором в [1–5].

Строится геометрическая модель хорошо известного [6–8, 1] «матрасного эффекта», вполне аналогичного тому, который наблюдается при раскрытии зонтика. Основная гипотеза: поверхность сетеполотна параболического рефлектора – в изотропном случае – принимает форму, близкую к минимальной поверхности [9, 10]. Учтен тот факт, что для ортотропного сетеполотна сумма главных кривизн [9, 10] дальше от нуля, нежели в изотропном случае. Исследована область надежности модели. Математический аппарат модели – классическая дифференциальная геометрия [9, 10]. Алгоритм и его обоснование приведены в [1].

Пусть сетеполотно ортотропно и коэффициент его растяжения в радиальном направлении обозначим  $\text{коэфф}_{\text{рад}}$ , а вдоль окружностей, ортогональных радиусам, –  $\text{коэфф}_{\text{окр}}$ . Выясним, как соответствующие деформации отразятся на главных кривизнах.

В литературе известны исследования указанного эффекта (например, [6], там же приведена библиография). Авторы упомянутой книги в основу исследования положили механические свойства сетеполотна, испытывающего нагрузки, обу-

словленные скреплением с жесткими ребрами. Иногда, впрочем, данный эффект игнорируется (например, [11], где лепесток параболоида аппроксимируется куском параболического цилиндра, проходящего через соседние рёбра). Мы в своём подходе к проблеме исходим из того, что независимо от того, какие усилия заставили сетеполотно принять форму, воспроизводящую матрасный эффект, она (форма) в случае изотропного материала весьма близка к минимальной поверхности.

Существенную роль играет величина, которую естественно назвать коэффициентом ортотропности, а именно,

$$L = \left( \frac{\text{коэфф}\phi_{\text{рад}}}{\text{коэфф}\phi_{\text{окр}}} \right)^2.$$

В случае изотропного сетеполотна имеем, очевидно,  $L = 1$ .

Мыльная пленка, натянутая на замкнутый контур, принимает (как правило) форму поверхности с нулевой средней кривизной. Это связано с тем, что усилия, возникающие в данной точке пленки под действием сил натяжения и стремящиеся сместить ее в одном из двух нормальных направлений, должны быть уравновешены силами, также направленными по нормали в той же точке, но в противоположную сторону. Равновесие сил обеспечивается обращением в нуль суммы главных кривизн. Данное условие симметрично относительно главных кривизн и не зависит от ориентации поверхности.

Главная кривизна поверхности в её точке  $M_0$  есть величина, обратная длине окружности, соприкасающейся для линии кривизны в этой точке.

Данный факт позволяет считать правдоподобным следующее предположение. Пусть ортотропный материал имеет форму поверхности  $\Sigma$  и в точке  $M_0$  этой поверхности ортотропные направления материала совпадают с главными направлениями поверхности. Пусть, далее, материал принял форму поверхности  $\Sigma$  в результате приложения растягивающего усилия к плоскому листу так, что во всех касательных направлениях в любой точке усилие одинаково и реакция материала такова, что вдоль одного главного направления происходит удлинение материала с некоторым постоянным коэффициентом, а вдоль второго – удлинение с иным постоянным коэффициентом. Тогда модули главных кривизн пропорциональны указанным коэффициентам. Такое условие (при неравных коэффициентах) несимметрично и требует более детального описания.

Пусть  $\Sigma$  – лишенная омбилических точек достаточно гладкая поверхность (пока безотносительно к лепесткам и деформациям). Допустим, что располагаем заданием нашей поверхности

$$\Sigma : \bar{r} = \bar{r}(u, v) \in C^2. \quad (1.1)$$

Главные кривизны получают обозначения  $k_1, k_2$ . Отсутствие омбилических точек позволяет считать, что во всех точках

$$k_1 < k_2.$$

Наличие (1.1) дает возможность вычислить главные кривизны и алгоритмически отнести их к первому либо второму номеру.

Коэффициенты растяжения материала пусть  $m_1, m_2$ . Тогда

$$m_2 |k_1| - m_1 |k_2| = 0, \quad m_1 > 0, \quad m_2 > 0. \quad (1.2)$$

Заметим, что условие типа (1.2) имеет смысл и в том случае, когда коэффициенты при кривизнах не рассматриваются как коэффициенты растяжения. Тогда вместо (1.2) мы имеем условие

$$M_2 k_1 + M_1 k_2 = 0, \quad M_1^2 + M_2^2 \neq 0.$$

Последнее можно записать в виде

$$k_1 + a k_2 = 0, \quad a \neq 0, \quad a = const. \quad (1.3)$$

**Определение 1.** Поверхность (1.1) вместе с упорядоченной парой главных кривизн  $k_1, k_2$ , для которых выполнено условие (1.3), будем называть *псевдоминимальной* поверхностью веса  $a$ .

В частности, псевдоминимальная поверхность веса 1 (при любой упорядоченности главных кривизн) – минимальная поверхность. Данное обстоятельство автор не склонен рассматривать как терминологическое недоразумение: в [12, с. 60] псевдориманово многообразии определено таким образом, что риманово многообразие оказывается его частным случаем.

Вернемся к поверхности  $\Sigma$ , освободив её от вышеприведенных качеств. Данная поверхность может оказаться лишь объектом планирования будущих построений, и о её инвариантах – главных кривизнах – мы можем рассуждать лишь декларативно. В частности, декларативным является и нумерация главных кривизн. В этом случае актуально следующее. Допустим, что одна из главных кривизн пропорциональна другой главной кривизне с данным коэффициентом пропорциональности, но какая именно – неизвестно. Тогда нет возможности вариант (1.3) предпочесть варианту

$$k_2 + a k_1 = 0, \quad a \neq 0, \quad a = const. \quad (1.4)$$

В этом случае условие (1.3) заменится на условие

$$(k_1 + a k_2)(a k_1 + k_2) = 0, \quad a \neq 0, \quad a = const. \quad (1.5)$$

Последнее условие, очевидно, симметрично относительно  $k_1, k_2$  и сохраняется при замене  $a$  на  $a^{-1}$ .

**Определение 2.** Условие (1.5) будем называть *ослабленным условием псевдоминимальности поверхности*. Величину  $\frac{k_1}{k_2} + a$  будем называть безразмерным индексом *псевдоминимальности*.

Заметим, что корни уравнения

$$x^2 + px + q = 0$$

связаны условием (1.5) тогда и только тогда, когда

$$ap^2 + (1-a)^2 q = 0. \quad (1.6)$$

Пусть  $E, F, G$  – коэффициенты первой квадратичной формы поверхности (1), а  $L, M, N$  – коэффициенты второй квадратичной формы. Главные кривизны – корни уравнения

$$(EG - F^2)k^2 + (2MF - EN - LG)k + (LN - M^2) = 0. \quad (1.7)$$

Если мы потребуем, чтобы корни уравнения (1.7) удовлетворяли условию (1.6), то должно быть выполнено соотношение

$$a(2MF - EN - LG)^2 + (1-a)^2(LN - M^2)(EG - F^2) = 0. \quad (1.8)$$

Заметим, что если поверхность  $\Sigma$  задана уравнением

$$z = f(x, y) \in C^2,$$

то уравнение (1.8) примет вид

$$a\left[(1+f_x^2)f_{yy} - 2f_x f_y f_{xy} + (1+f_y^2)f_{xx}\right]^2 + (1+f_x^2 + f_y^2)(1-a)^2(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2) = 0.$$

Исследование данного уравнения осложнено (кроме прочего) тем, что неизвестно, является ли оно уравнением Эйлера – Лагранжа для какого-либо функционала.

## 2. Теорема существования

Рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве  $E_3$  подвижной репер [3]  $\{M, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ , деривационные формулы которого имеют вид

$$d\bar{M} = \omega^i \bar{e}_i, \quad d\bar{e}_i = \omega_i^j \bar{e}_j, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где  $\omega^i$ ,  $\omega_i^j$  – формы Пфаффа [3], удовлетворяющие уравнениям структуры аффинного пространства

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \quad d\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j, \quad i, j, k = 1, 2, 3,$$

и уравнениям, обусловленным евклидовой метрикой:

$$\omega_i^j + \omega_j^i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

Помещаем вершину репера  $M$  в текущую точку поверхности  $\Sigma$  (она предполагается имеющей тот класс гладкости, для которого наши дальнейшие построения корректны). Векторы  $\bar{e}_1$ ,  $\bar{e}_2$  репера помещаем в касательную плоскость поверхности в точке  $M$ . Тогда, очевидно,

$$\omega^3 = 0.$$

Внешнее дифференцирование этого уравнения приводит к внешнему квадратичному уравнению

$$\omega^1 \wedge \omega_1^3 + \omega^2 \wedge \omega_2^3 = 0.$$

Разрешая его по лемме Картана [3], получаем соотношения

$$\omega_1^3 = A\omega^1 + B\omega^2, \quad \omega_2^3 = B\omega^1 + C\omega^2, \quad (2.1)$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $C$  – функции параметров, управляющих смещением точки  $M$  по поверхности (главных параметров) и параметров, управляющих преобразованиями репера при закреплённой точке  $M$  (вторичных параметров).

Дифференцируя внешним образом последние пфаффовы уравнения, получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} (dA - 2B\omega_1^2) \wedge \omega^1 + (dB + (A - C)\omega_1^2) \wedge \omega^2 &= 0, \\ (dB + (A - C)\omega_1^2) \wedge \omega^1 + (dC - 2B\omega_2^1) \wedge \omega^2 &= 0. \end{aligned}$$

Разрешение этих уравнений по лемме Картана дает нам

$$\begin{aligned} dA - 2B\omega_1^2 &\equiv 0 \pmod{\omega^1, \omega^2}, \\ dB + (A - C)\omega_1^2 &\equiv 0 \pmod{\omega^1, \omega^2}, \\ dC + 2B\omega_1^2 &\equiv 0 \pmod{\omega^1, \omega^2}. \end{aligned}$$

Полагая в этих уравнениях  $\omega^1 = \omega^2 = 0$ , получаем в обозначениях [13] следующие соотношения:

$$\delta A = 2B\Pi_1^2, \quad \delta B = (C - A)\Pi_1^2, \quad \delta C = 2B\Pi_2^1. \quad (2.2)$$

В нашем подвижном репере, очевидно, первая квадратичная форма имеет вид

$$ds^2 = d\overline{M}^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2$$

и коэффициенты

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1.$$

Поскольку вторая квадратичная форма равна

$$(d^2\overline{M}, \overline{e}_3) = \omega^1\omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3 = A(\omega^1)^2 + 2B\omega^1\omega^2 + C(\omega^2)^2, \quad (2.3)$$

то для стандартных обозначений ее коэффициентов справедливо следующее:

$$L = A, \quad M = B, \quad N = C.$$

Уравнение главных кривизн (1.7) принимает вид

$$k^2 - (A + C)k + (AC - B^2) = 0.$$

С помощью (2.2) обычным путем [13] проводим частичную специализацию репера

$$C - A \neq 0, \quad B = 0, \quad \Pi_1^2 = 0. \quad (2.4)$$

Теперь величины  $A$  и  $C$  – инварианты (главные кривизны), а уравнения (2.1) принимают вид

$$\omega_1^3 = A\omega^1, \quad \omega_2^3 = C\omega^2, \quad (2.5)$$

и к ним следует присоединить уравнение

$$\omega_1^2 = \alpha\omega^1 + \beta\omega^2. \quad (2.6)$$

Внешнее дифференцирование уравнений (2.5) и (2.6) приводит к квадратичным уравнениям

$$\begin{aligned} d\alpha \wedge \omega^1 + d\beta \wedge \omega^2 + (\alpha^2 + \beta^2 + AC)\omega^1 \wedge \omega^2 &= 0, \\ (dA + \alpha(C - A)\omega^2) \wedge \omega^1 &= 0, \\ (dC + \beta(C - A)\omega^1) \wedge \omega^2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Потребуем теперь, чтобы отношение главных кривизн было постоянным, то есть пусть существует достаточно гладкая функция  $L$ , заданная на поверхности, такая, что

$$A = p_1L, \quad C = p_2L, \quad p_1, p_2 = const.$$

При этом полагаем, что гауссова кривизна не обращается в нуль и точка не омбилическая, то есть считаем, что

$$p_1p_2 \neq 0, \quad p_1 - p_2 \neq 0.$$

Тогда два последних уравнений в (2.7) принимают вид

$$\begin{aligned} (p_1 dL + \alpha(p_2 - p_1)L\omega^2) \wedge \omega^1 &= 0, \\ (p_2 dL + \beta(p_2 - p_1)L\omega^1) \wedge \omega^2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Однако формы  $\omega^1$  и  $\omega^2$  линейно независимы, и из (2.8) следует, что

$$\left( \frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2} \right) \frac{dL}{L} = \beta p_1 \omega^1 + \alpha p_2 \omega^2. \quad (2.9)$$

Таким образом, форма  $\beta p_1 \omega^1 + \alpha p_2 \omega^2$  – полный дифференциал, и, следовательно, ее внешний дифференциал равен нулю. Отсюда получаем соотношение

$$p_1 (d\beta - \alpha\beta\omega^2) \wedge \omega^1 + p_2 (d\alpha + \alpha\beta\omega^1) \wedge \omega^2 = 0. \quad (2.10)$$

Оба уравнения (2.8) выполняются вследствие (2.9). Внешние квадратичные уравнения, обеспечивающие существование исследуемого геометрического образа, суть первое уравнение в (2.7) и (2.10). Действуя обычным путем [13], находим, что система в инволюции и широта класса искомым поверхностям – две функции одного аргумента.

**Предложение.** Класс псевдоминимальных поверхностей гиперболического типа характеризуется постоянством угла между асимптотическими линиями.

Для доказательства достаточно заметить, что согласно (2.3) и (2.4) уравнение асимптотических направлений имеет вид

$$A(\omega^1)^2 + C(\omega^2)^2 = 0,$$

а базис  $\{e_1, e_2, e_3\}$  декартов.

### 3. Рассмотрение примера

Речь пойдет о поверхности, для которой условие (1.3) выполнено приближенно. Простой пример строится в классе поверхностей вращения. Индивидуализация главных кривизн совершается естественным путем:  $k_1$  – кривизна меридиана,  $k_2$  – кривизна (с обратным знаком) второй линии кривизны.

Пусть уравнения начального меридиана

$$y = 0, \quad z = f(x), \quad f(x) \in C^2.$$

Тогда

$$k_1 = \frac{\frac{d^2}{dx^2} f(x)}{\left( 1 + \left( \frac{d}{dx} f(x) \right)^2 \right)^{3/2}},$$

а вторая главная кривизна

$$k_2 = \frac{-1}{f(x) \sqrt{1 + \left( \frac{d}{dx} f(x) \right)^2}}.$$

Псевдосредняя кривизна

$$H(f(x), a) = \left( \frac{d^2}{dx^2} f(x) \right) f(x) - a \left( 1 + \left( \frac{d}{dx} f(x) \right)^2 \right). \quad (3.1)$$

Для отыскания обобщено-минимальных поверхностей следует решить дифференциальное уравнение  $H(a) = 0$ .

Как и следовало ожидать, при  $a = 1$  линия  $y = f(x)$  есть цепная линия.

Имеется счетное множество констант  $a$ , для которых это уравнение разрешается в квадратурах, однако, имея в виду практические применения конструкции, следует сосредоточиться на приближенных решениях, пригодных для континуума значений параметра  $a$ . Не видно никаких оснований связывать данное уравнение с условием равновесия нити ( $a$  значит, называть полученную линию  $y = f(x)$  обобщенной цепной линией). Точное решение уравнения (3.1) для произвольного вещественного значения  $a$  выражается через гипергеометрическую функцию и для применения неудобно. Приближенное решение в виде отрезка ряда Маклорена для начальных условий  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 0$  имеет вид

$$f(x) \approx g(x) = 1 + \frac{a}{2}x^2 + \left( \frac{a^3}{12} - \frac{a^2}{24} \right)x^4 + \left( -\frac{11a^4}{360} + \frac{7a^3}{720}a + \frac{a^5}{45} \right)x^6 + \\ + \left( \frac{43a^5}{3360} - \frac{127a^4}{40320} - \frac{11a^6}{672} + \frac{17a^7}{2520} \right)x^8.$$

Невязку решения уравнения (3.1) оцениваем выражением

$$\varepsilon(a) = \int_{-1}^1 (g(x), a)^2 dx.$$

Рис. 1 дает представление о невязке решения.

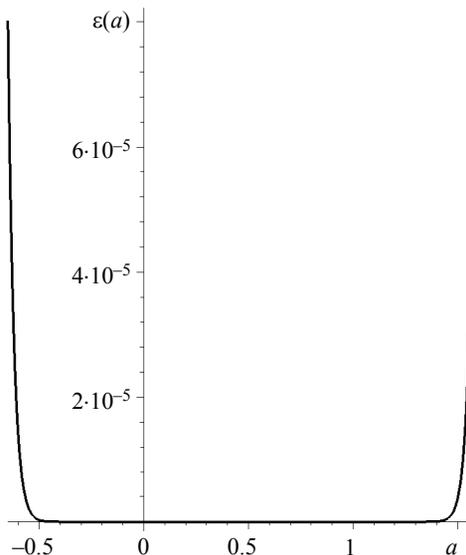
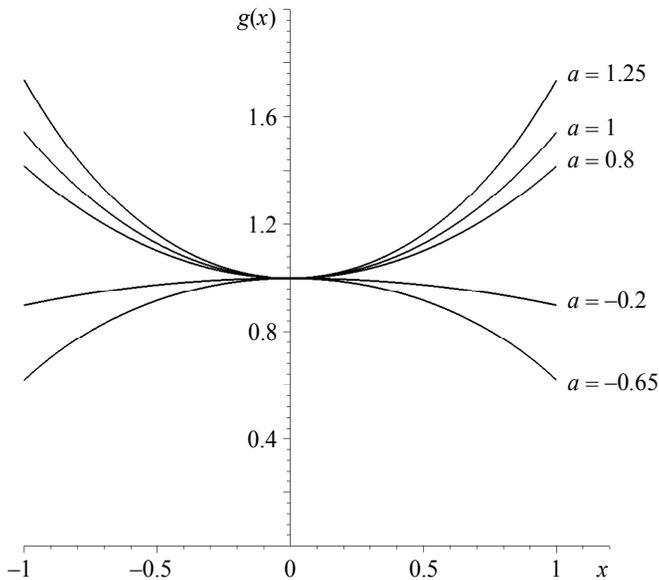


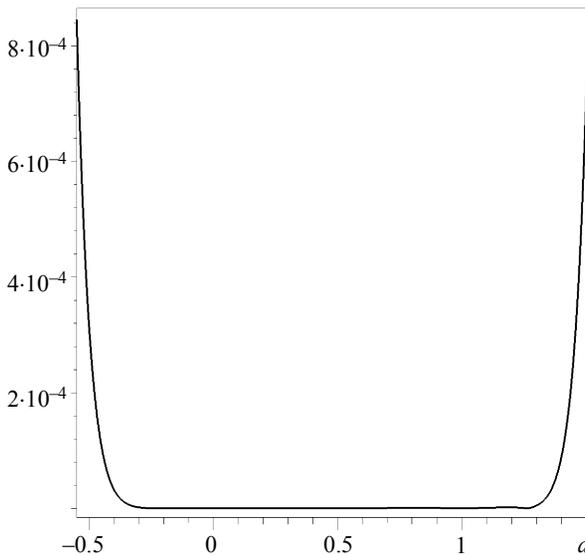
Рис. 1. График функции  $\varepsilon(a)$  для 14 слагаемых ряда Маклорена  
Fig. 1. Function  $\varepsilon(a)$  graph for the 14 summands of the Maclaurin series

Графики функций  $g(x)$  для некоторых значений параметра  $a$  представлены на рис. 2.



**Рис. 2.** График функции  $g(x)$  при различных значениях параметра  $a$   
**Fig. 2.** Function  $g(x)$  graph at different values of the parameter  $a$

Рис. 3 показывает хорошее соответствие поверхности вращения требованию псевдоминимальности.



**Рис. 3.** График зависимости интегрального среднего безразмерного индекса псевдоминимальности от  $a$   
**Fig. 3.** Integral average non-dimensional infinite index dependency on a graph

#### 4. Применение к моделированию лепестка сетеполотна

Осесимметричный рефлектор – в первом приближении – есть вырезка из параболоида вращения (он называется родительским параболоидом) круглым цилиндром, соосным с параболоидом. В системе координат, канонически связанной с параболоидом вращения (других мы не рассматриваем), уравнение параболоида имеет вид

$$z = \frac{x^2 + y^2}{4F}. \quad (4.1)$$

Здесь  $F$  – фокусное расстояние параболоида.

Сетеполотно, натянутое между соседними параболическими ребрами несущей конструкции, подвержено изгибанию внутрь купола, подобно тому, что мы наблюдаем, раскрывая зонтик. Это явление носит название «матрасного» (иногда «подушечного») эффекта [6–8, 14].



**Рис. 4.** Лепесток сетеполотна, искривленный вследствие «матрасного эффекта». Видна срединная (гребневая) линия

**Fig. 4.** Metallic mesh petal, bent due to “mattress effect”.

Mean (ridge) line is visible

Осесимметричный зонтичный рефлектор характеризуется следующими конструктивными параметрами:

$F$  – фокусное расстояние родительского параболоида;

$R$  – радиус вырезающего цилиндра;

$n$  – число жестких параболических ребер несущего каркаса;

$\text{коэфф}_{\text{рад}}$  – коэффициент растяжения сетеполотна в радиальном направлении;

$\text{коэфф}_{\text{окр}}$  – коэффициент растяжения сетеполотна в тангенциальном направлении;

Линейные размеры – в метрах.

Для вычислительных экспериментов мы (как правило) будем использовать вполне реалистичные значения конструктивных параметров, а именно,

$$F_0 = 8, R_0 = 6, L_0 = 1, n_0 = 12.$$

Впрочем, число ребер занимает особое положение. Учитывая его влияние на вычисляемые в дальнейшем числовые характеристики модели, зарезервируем возможность выбора параметра  $n$  из списка

$$nn = [12, 14, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 42].$$

Пусть сетеполотно ортотропно и (как сказано выше) коэффициент его растяжения в радиальном направлении равен  $\text{коэфф}_{\text{рад}}$ , а вдоль окружностей, ортогональных радиусам, –  $\text{коэфф}_{\text{окр}}$ . Выясним, как соответствующие деформации отразятся на главных кривизнах.

Хорошо известно [3, 4], что если  $k_1, k_2$  – главные кривизны поверхности в её точке  $M_0$ , то в некоторой декартовой системе координат  $\{M_0, X, Y, Z\}$  уравнение соприкасающегося параболоида [1] запишется в виде

$$Z = \frac{1}{2}(k_1 X^2 + k_2 Y^2). \quad (4.2)$$

Отметим, что деформированный лепесток есть поверхность отрицательной гауссовой кривизны, то есть его точки – гиперболические.

Для соприкасающегося параболоида  $Q$  деформированного лепестка точка  $M_0$  – вершина, а  $k_1, k_2$  – главные кривизны того же параболоида  $Q$  в его вершине. Заметим сразу, что в дифференциальной геометрии поверхностей кривизна нормального сечения имеет знак, зависящий от сонаправленности либо разнонаправленности главной нормали нормального сечения с нормалью поверхности. В гиперболической точке, таким образом, главные нормали имеют разные знаки.

Пусть поверхность  $\Sigma$  в окрестности точки  $M_0$  подвергнута деформации вдоль первого главного направления с коэффициентом  $a_1$ , а вдоль второго – с коэффициентом  $a_2$ . Получаем новую поверхность  $\tilde{\Sigma}$ . Соответственно соприкасающийся параболоид (4.2) деформируется вдоль оси  $M_0 X$  с коэффициентом  $a_1$  и вдоль оси  $M_0 Y$  с коэффициентом  $a_2$ .

Уравнение соприкасающегося параболоида теперь имеет вид

$$Z = \frac{1}{2} \left( k_1 \frac{X^2}{a_1^2} + k_2 \frac{Y^2}{a_2^2} \right).$$

Главные кривизны  $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2$  деформированного соприкасающегося параболоида в его вершине (они же – главные кривизны поверхности  $\tilde{\Sigma}$  в точке  $M_0$ ) связаны с главными кривизнами до деформации соотношениями

$$\tilde{k}_1 = \frac{k_1}{a_1^2}, \quad \tilde{k}_2 = \frac{k_2}{a_2^2}.$$

Соответственно

$$\frac{\tilde{k}_1}{\tilde{k}_2} = \left( \frac{a_2}{a_1} \right)^2 \frac{k_1}{k_2}. \quad (4.3)$$

В основе модели лежат следующие соображения. Перед прикреплением к несущим конструкциям сетеполотно на раскроечном столе подвергают нагружению, прилагая одинаковое усилие и в продольном и в поперечном направлениях. Реакция сетеполотна неодинакова в разных направлениях, что обусловлено ортотропностью. Вследствие этого главные кривизны поверхности деформированного лепестка сетеполотна ( $k_{\text{окр}}$  и  $k_{\text{рад}}$ ), имея разные знаки, будут отличаться по моду-

лю. Связь указанных кривизн с коэффициентами деформации сетеполотна имеет (что следует из (4.3)) вид

$$\left| \frac{k_{\text{окр}}}{k_{\text{рад}}} \right| = \left( \frac{\text{коэфф}_{\text{рад}}}{\text{коэфф}_{\text{окр}}} \right)^2 \triangleq L. \quad (4.4)$$

Надежда задать аналитически поверхность, во всех точках которой выполнено условие (4.4), невелика. Наша цель – обеспечить выполнение указанного условия приближенно.

Именно, к текущей точке  $M$  гребневой линии  $Gr$  (на рис. 5 – пунктирная линия) присоединяем переменную параболу  $Par(M)$ , расположенную в нормальной плоскости гребневой линии таким образом, что концевые точки параболической дуги лежат на параболических ребрах  $(OA)$  и  $(OB)$ . Эта парабола симметрична относительно главной нормали линии  $Gr$ . Заметим, что гребневая линия  $Gr$  и каждая из парабол  $Par(M)$  пока не рассматривается как линия на поверхности и у нас нет оснований приписывать их кривизнам знаки. Кривизну гребневой линии в точке  $M$  обозначим  $k_{\text{греб}}(M)$ , а кривизну параболы  $Par(M)$  в её вершине  $M$  обозначим  $k_{\text{пар}}(M)$ . В силу приведенных оговорок,

$$k_{\text{греб}}(M) > 0, \quad k_{\text{пар}}(M) > 0.$$

Потребуем выполнения условия (4.4) вдоль гребневой линии. Тогда для всякой точки  $M \in Gr$  должно выполняться равенство

$$\frac{k_{\text{пар}}(M)}{k_{\text{греб}}(M)} = \left( \frac{\text{коэфф}_{\text{рад}}}{\text{коэфф}_{\text{окр}}} \right)^2 \triangleq L.$$

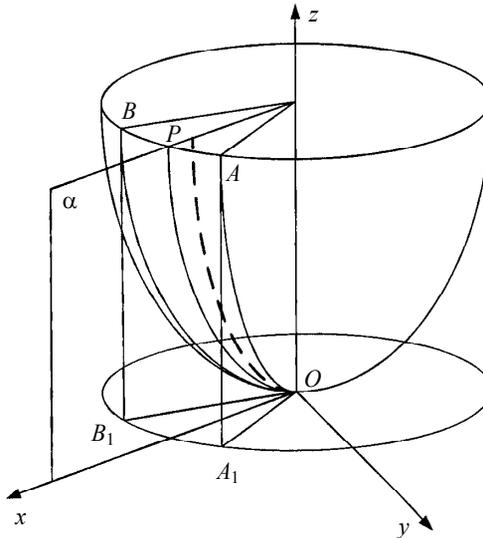


Рис. 5. Схема расположения соседних параболических спиц и гребневой линии (показана пунктиром)

Fig. 5. Layout of adjacent parabolic spokes and ridge line (shown dashed)

Приведенные здесь соображения, касающиеся поверхности сетеполотна деформированного лепестка, допускают распространение на произвольную достаточно гладкую поверхность. Теперь мы, однако, должны считаться, во-первых, с равноправием главных кривизн, а во-вторых, с зависимостью знака главной кривизны от ориентации нормали поверхности.

Полагаем, что модель, в точности учитывающая ортотропные свойства сетеполотна, должна приводить к псевдоминимальной поверхности. Однако ввиду приближенности наших построений, условие  $\tilde{H}_L = 0$  будет выполнено только вдоль гребневой линии. В остальной же области псевдосредняя кривизна даст оценку несовершенства модели

Безразмерный индекс псевдоминимальности теперь имеет вид

$$\frac{k_1(u, v)}{k_2(u, v)} + L. \quad (4.5)$$

Обратимся к рис. 5. Сетеполотно крепится к параболическим спицам (их  $n$  штук), проекции которых на плоскость  $xOy$  суть отрезки с равными углами между соседними отрезками. Нас интересует один из секторов в плоскости  $xOy$ , ограниченных соседними отрезками. Будем полагать, что ось  $Ox$  имеет биссектральное направление для этого сектора (см. рис. 5).

Соседние параболические ребра –  $OA$  и  $OB$ . Гребневая линия – пунктирная линия. Параболоид пересечен плоскостью  $xOz$  по параболе  $Op$ . Угол  $\angle A_1OB_1$  равен  $\frac{2\pi}{n}$ , а поскольку ось  $Ox$  биссектральная для этого угла, то уравнение плоскости  $OA_1A_1$  имеет вид

$$y = Kx, \text{ где } K = \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}.$$

Гребневая линия лежит в плоскости  $\alpha$ , и мы задаем её вектор-функцией

$$\mathbf{r} = \{t, 0, f(t)\}, \quad f(t) \in C^2, \quad (0 \leq t \leq R).$$

Если мысленно дополнить гребневую линию её зеркальным отражением от плоскости  $yOz$ , то получим линию  $\Psi$ , заданную вектор-функцией

$$\mathbf{r} = \{t, 0, \hat{f}(t)\}, \quad \hat{f}(t) \in C^2, \quad 0 \leq t \leq R,$$

где

$$\hat{f}(t) = \begin{cases} -f(t), & (-R \leq t \leq 0), \\ f(t), & (0 \leq t \leq R). \end{cases}$$

Таким образом, линия  $\Psi$  симметрична относительно замены  $t$  на  $-t$ . Далее,

$$\hat{f}(0) = \hat{f}'(0) = 0.$$

Следовательно, для  $f(t)$  имеем также

$$f(0) = f'(0) = 0,$$

и, поскольку  $f(t)$  есть ограничение четной функции, то маклореновское приближение её имеет вид

$$f(t) = Mt^2 + Nt^4 + o(t^5).$$

Отбросим слагаемые более четвертой степени и для оставшегося полинома сохраним обозначение  $f(t)$ . Тогда

$$f(t) = Mt^2 + Nt^4, \quad 0 \leq t \leq R. \quad (4.6)$$

Мы не закладываем в нашу модель учет особенности формы лепестка, обусловленной наличием свободного (незакрепленного) конца на периферии рефлектора, поскольку, как отмечено в [13, 1], данное обстоятельство заметно проявляется лишь в непосредственной близости края.

К текущей точке  $C$  гребневой линии присоединяем параболу, расположенную в нормальной плоскости указанной линии (точка  $C$  – вершина параболы) и проходящую через соседние параболические ребра. Ориентированная кривизна параболы в точке  $C$  должна (с учетом перемены знака) соотноситься с ориентированной кривизной гребневой линии в той же точке по формуле (1.4).

Если сетеполотно изотропно, то в (4.4) имеем  $L = 1$  и сумма главных кривизн построенной поверхности равна нулю вдоль гребневой линии. Таким образом, мы получаем (в изотропном случае) поверхность, для которой условие минимальности выполняется точно вдоль гребневой линии  $OC$  и приближенно – в окрестности этой линии.

Следует отметить, что полученная таким образом поверхность имеет форму, показанную на рис. 4 (и желательную для моделирования), лишь при условии, что гребневая линия расположена «выше», в очевидном смысле, нежели парабола  $Op$  (рис. 5), и зазор увеличивается при удалении от точки  $O$ . Отметим, что парабола

$$Op \text{ задается вектор-функцией } \mathbf{q} = \left\{ t, 0, \frac{t^2}{4F} \right\}.$$

Условие надежности нашей модели – положительность на промежутке  $(0, R]$  функции

$$g(t) = Mt^2 + Nt^4 - \frac{t^2}{4F},$$

а также положительность главных членов (слагаемых второй степени) функций  $f(t)$  и  $g(t)$  и производной функции  $g(t)$ . Учитывая, что практически всегда  $R < F$ , будем требовать выполнения условий на промежутке  $(0, F]$ . Таким образом, область надежности нашей модели описывается системой неравенств

$$M > 0, \quad N < 0, \quad 4MF - 1 > 0, \quad 4NF^3 + 4MF - 1 > 0.$$

В работе [4] автором получены выражения для  $M, N$  в виде

$$M = \frac{K^2 + 1}{4F(1 - K^2L)}, \quad N = \frac{K^2L(K^2 + 1)^3}{16F^3(6K^2L - 1)(1 - K^2L)^3}.$$

Для испытания модели полагаем  $F=8, R=6, L=1$ . Зададим несколько значений числа секторов и для них вычислим значения  $M, N$  и  $T$  (табл. 1).

Полиномиальные приближения для первой и третьей компонент вектор-функции  $\mathbf{R}$  по степеням параметров  $M$  и  $N$  принимаем в виде

$$\begin{aligned} X_s = & t + 24u^2Lt^5N^2 + 16u^2Lt^3NM + (2u^2Lt - 768u^2Lt^7N^2)M^2 - 192u^2Lt^5NM^3 + \\ & + (-16u^2Lt^3 + 9600u^2Lt^9N^2)M^4 + 1536u^2Lt^7NM^5, \end{aligned}$$

$$Zs = (t^4 - 6u^2Lt^2)N + (t^2 - u^2L + 224u^2Lt^6N^2)M + 80u^2Lt^4NM^2 + \\ + (8u^2Lt^2 - 3456u^2Lt^8N^2)M^3 - 672u^2Lt^6NM^4 + (-48u^2Lt^4 + 33792u^2Lt^{10}N^2)M^5.$$

В частности, для  $F = 8, R = 6, L = 1$  и  $n = 12$  имеем

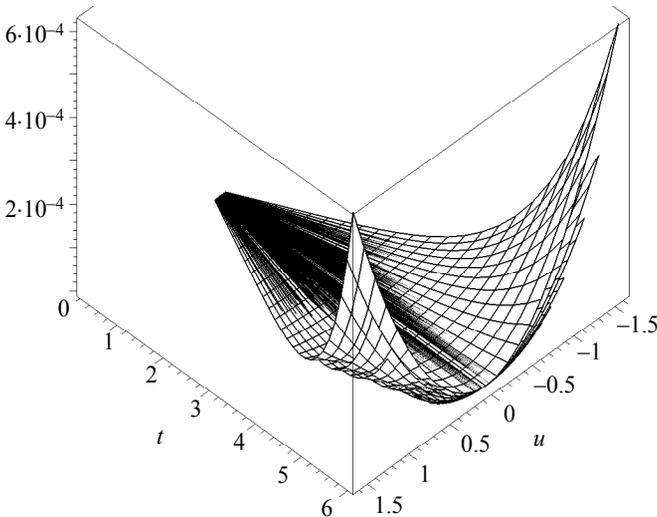
$$Xs = t + 0.000000227u^2t^5 - 0.00004081u^2t^3 + 0.002604u^2t - \\ - 0.0000000027895u^2t^7 + 9.1461 \cdot 10^{-12}u^2t^9, \\ Zs = -0.00002371t^4 + 0.0005181u^2t^2 + 0.03608t^2 - 0.03608u^2 + \\ 0.00000003155u^2t^6 - 0.000005406u^2t^4 - 9.1247 \cdot 10^{-11}u^2t^8 + 1.1617 \cdot 10^{-12}u^2t^{10}.$$

Таблица 1

Значения параметров модели

Номер	Число ребер	$M$	$N$	$K$	$T$
1	12	0.03608	-0.000024	0.26795	5.7956
2	14	0.03469	-0.000013	0.2282	5.8496
3	16	0.03383	$-0.8031 \cdot 10^{-5}$	0.1989	5.8847
4	20	0.03286	$-0.4190 \cdot 10^{-5}$	0.1584	5.9261
5	24	0.03235	$-0.2620 \cdot 10^{-5}$	0.1317	5.9487
6	28	0.03205	$-0.1810 \cdot 10^{-5}$	0.1127	5.9623
7	32	0.03186	$-0.1333 \cdot 10^{-5}$	0.0985	5.9711
8	36	0.03173	$-0.1025 \cdot 10^{-5}$	0.0875	5.9772
9	42	0.03160	$-0.7338 \cdot 10^{-6}$	0.0749	5.9832

О качестве данных полиномиальных приближений можно судить по относительной погрешности, представленной на рис. 6 для первой координаты.



**Рис. 6.** Графическое представление относительной погрешности полиномиального приближения координаты  $X$  для  $L = 1$  и  $n = 12, 14, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 42$  (очередность сверху вниз)  
**Fig. 6.** Graphical description of the relative error of poly-nominal approximation of coordinate  $X$  for  $L = 1$  and  $n = 12, 14, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 42$  (sequence from top to bottom)

Вполне аналогичен по числовым значениям график относительной погрешности полиномиального приближения координаты  $X$  для  $L = 1$  и  $n = 12, 14, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 42$ .

Хорошей оценкой удаленности точки с координатами  $(X, Y, Z)$  от параболоида (4.1) служит формула

$$\rho(X, Y, Z) = \frac{4FZ - X^2 - Y^2}{2\sqrt{X^2 + Y^2 + 4F^2}}. \quad (4.7)$$

Применим эту формулу для деформированного сетеполотна, то есть, используя (4.7), вычислим

$$\varphi(t, u) = \rho(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3). \quad (4.8)$$

Функция (4.8) весьма сложна и для наших целей неудобна. Полиномиальное приближение примем в виде

$$\Phi(t, u) = \sum_{j=0}^1 \left( \sum_{i=0}^3 b_{i,j} t^{2i} u^{2j} \right), \quad (4.9)$$

где

$$b_{0,0} = 0, \quad b_{0,1} = -\frac{4LMF + 1}{4F}, \quad b_{1,0} = \frac{4MF - 1}{4F},$$

$$b_{1,1} = \frac{1 + 2LMF - 2MF - 96LNF^3 - 16LM^2F^2 + 128LM^3F^3}{16F^3}, \quad b_{2,0} = \frac{1 + 32NF^3 - 4MF}{32F^3},$$

$$512 \cdot b_{2,2} \cdot F^5 = -9 + 40960LM^2F^5N + 128LM^2F^2 - 64NF^3 + 384LNF^3 - 768LM^3F^3 + 4096LM^4F^4 - 12LMF + 24MF - 4096MF^4LN - 24576LM^5F^5,$$

$$b_{3,0} = -\frac{3 + 64NF^3 - 12MF}{512F^5}$$

$$b_{3,1} \cdot 1024 \cdot F^7 = 48NF^3 - 144LNF^3 - 12288LN^2F^6 - 14848LM^2F^5N - 72LM^2F^2 + 5 + 98304LM^3F^6N + 384LM^3F^3 + 5LMF - 15MF + 229376MF^7LN^2 + 2048MF^4LN + 10240LM^5F^5 - 2048LM^4F^4 - 688128LM^4F^7N.$$

Приближение (4.9) следует признать удовлетворительным согласно рис. 7.

Оценка среднего квадратичного отклонения деформированного лепестка от родительского параболоида вычисляется по формуле

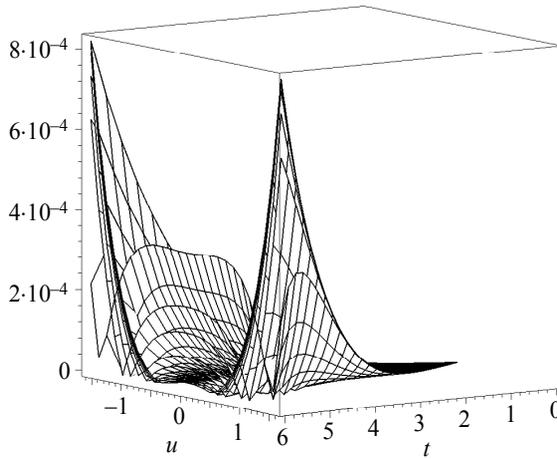
$$SKO = \sqrt{\frac{\int_0^{0.9R} dt \int_{-Kt}^{Kt} \Phi(t, u)^2 du}{\pi \int_0^{0.9R} h \sqrt{4F^2 + h^2} dh}}.$$

Верхний предел интегрирования равен  $0.9R$  для исключения эффекта провисания сетеполотна на периферии. Для различных значений  $n$  получаем следующие значения SKO (табл. 2).

Таблица 2

Значения SKO для различного количества ребер

$n$	12	14	16	20	24	28	32	36	42
SKO	0.0563	0.0415	0.0319	0.0209	0.0151	0.0116	0.0093	0.0077	0.0061

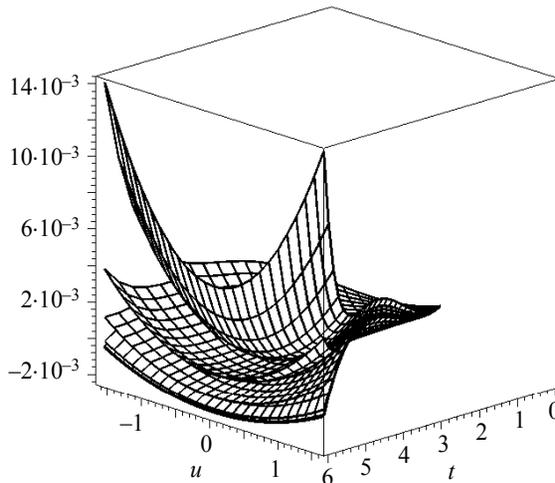


**Рис. 7.** Графическое представление погрешности полиномиального приближения (4.9) для  $L = 1$  и  $n = 12, 14, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 42$  (очередность сверху вниз)

**Fig. 7.** Graphical description of error of polynomial approximation (4.12) for  $L = 1$  and  $n = 12, 14, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 42$  (sequence from top to bottom)

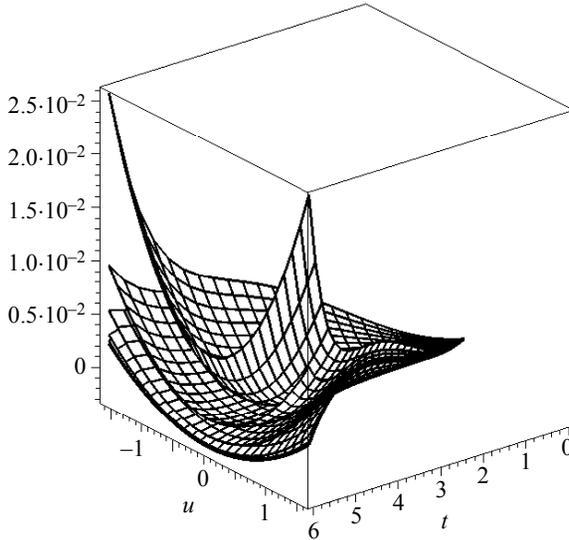
Для оценивания безразмерного инварианта, как и прежде, принимаем  $F = 8.0(m)$ ,  $R = 6.0(m)$ , оставляя  $L$  переменным. Строим графики величины (4.5) для значений  $L = 0.8$ ,  $L = 1.0$  (изотропное сетеполотно) и  $L = 1.2$ .

Эти графики представлены на рис. 8 – 10.



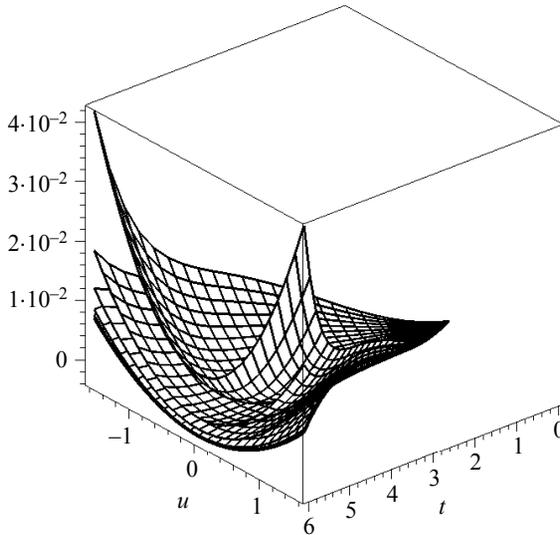
**Рис. 8.** График безразмерного индекса псевдоминимальности деформированного лепестка для  $L = 0.8$  и  $n = 12, 14, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 42$  (очередность сверху вниз)

**Fig. 8.** Graph of non-dimensional index for pseudo-minimality of deformed petal for  $L = 0.8$  and  $n = 12, 14, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 42$  (sequence from top to bottom)



**Рис. 9.** График безразмерного индекса псевдоминимальности деформированного лепестка для  $L = 1.0$  и  $n = 12, 14, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 42$  (очередность сверху вниз)

**Fig. 9.** Graph of non-dimensional index for pseudo-minimality of deformed petal for  $L = 1.0$  and  $n = 12, 14, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 42$  (sequence from top to bottom)



**Рис. 10.** График безразмерного индекса псевдоминимальности деформированного лепестка для  $L = 1.2$  и  $n = 12, 14, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 42$  (очередность сверху вниз)

**Fig. 10.** Graph of non-dimensional index for pseudo-minimality of deformed petal for  $L = 1.2$  and  $n = 12, 14, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 42$  (sequence from top to bottom)

### Заключение

Автор полагает, что предложенная им модель деформированного сетеполотна осесимметричного рефлектора в известной степени адекватна. В то же время, значения коэффициентов в (4.6) могут быть определены из иных соображений (вариационных). Получится иная модель. Представляет интерес их сравнение, но это – материал дальнейших исследований.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Бухтяк М.С. Геометрическое моделирование деформации сетеполотна параболического рефлектора // Математическое моделирование. 2016. Т. 39. № 1. С. 97–106.
2. Бухтяк М.С. Дефект отображения для деформированного лепестка сетеполотна // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 2(40). С. 5–17. DOI 10.17223/19988621/40/1.
3. Бухтяк М.С., Соломина А.В. Об одном инварианте пары поверхностей применительно к раскрою сетеполотна // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 1(39). С. 13–24. DOI: 10.17223/19988621/39/2.
4. Бухтяк М.С., Соломина А.В. Геометрическое моделирование раскроя сетеполотна для осесимметричного рефлектора. Часть 1 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 2(34). С. 5–17. DOI: 10.17223/19988621/34/1.
5. Бухтяк М.С., Соломина А.В. Геометрическое моделирование раскроя сетеполотна для осесимметричного рефлектора. Часть 2 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 4(29). С. 5–14. DOI: 10.17223/19988621/36/1.
6. Гряник М.В., Ломан В.И. Развертываемые зеркальные антенны зонтичного типа. М.: Радио и связь, 1987. 72 с.
7. Hedgepeth J.M. Accuracy Potential for Large Space Antenna Reflectors with Passive Structure // J. Spacecraft. 1982. V. 19. No. 3. P. 211–217.
8. Азюкин А.В. Специфика ДН и КНД зеркальных зонтичных антенн // Анализ и синтез антенных систем / под ред. Г.Г. Бубнова. – М., 1984. С. 82–88.
9. Раишевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. М.: ГИТТЛ, 1956. 420 с.
10. Фавар Ж. Курс локальной дифференциальной геометрии. М.: ГИТТЛ, 1960. 559 с.
11. Азюкин А.В., Классен В.И. О направленных свойствах раскрывающихся зеркальных антенн // Радиотехника и электроника. 1982. Т. 27. № 8. С. 1519–1526.
12. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М.: Мир, 1964. 533 с.
13. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана. М.-Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1948. 432 с.
14. Ingerson P.G., Wong W.C. The Analysis of Deployable Umbrella Parabolic Reflectors // IEEE Trans. 1972. V. AP-20. No. 4. P. 409–414.

Статья поступила 02.11.2016 г.

Bukhtyak M.S. (2017) GENERALIZATION OF MINIMAL SURFACES AND SIMULATION OF THE SHAPE OF AN ORTHOTROPIC MATERIAL CONSTRUCTION. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 45. pp. 5–24

DOI 10.17223/19988621/45/1

An axisymmetric reflector consists of parabolic spokes and metallic fabric attached to them. A piece of this fabric between the adjacent spokes is subject to the so-called ‘mattress effect’ (bending into the parabolic bowl). Simulation of the form of this petal is complicated by the fact that the stretching ratios for the fabric in two opposite orthogonal directions are not equal (the orthotropic property). The problem of modelling is solved with the help of the notion of a pseudominimal surface. It is a surface for which the ratio of main curvatures is constant (in other words, asymptotical lines intersect at a constant angle). The existence theorem for pseudominimal surfaces has been proven. The breadth of the class of such surfaces has been determined

(it coincides with that of the class of minimal surfaces). An example of a pseudominimal surface of revolution has been constructed. A special composite surface is used for the geometric simulation of a deformed metallic fabric petal: a parabola located in the normal plane of the line  $L$  is attached to each point of some line  $L$ . The vertex of the parabola is on the line  $L$ , the parabola crosses the adjacent hard edges of the reflector structure, and the ratio of curvatures of the line  $L$  and attached parabola does not depend on the point of pasting. Thus, a new substantiation of the construction applied by the author earlier has been developed. The standard mean square deviation of reflector's deformed petal from the parent paraboloid has been calculated. For the complicated functions describing the simulation, polynomial approximations have been constructed and their reliability have been estimated.

Keywords: parabolic reflector, principal curvatures, orthotropy, minimal surface, representation of a surface by a family of generating curves.

*BUKHTYAK Mikhail Stepanovich* (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

#### REFERENCES

1. Bukhtyak M.S. (2016) Geometrical Modeling of a Metallic Mesh Deformation of the parabolic Reflektor. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 8(4). pp. 453–461. DOI: 10.1134/S2070048216040050.
2. Bukhtyak M.S. (2016) Defekt otobrazheniya dlya deformirovannogo lepestka setepolotna [Defect of mapping for deformed segment of metallic mesh]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(40). pp. 5–17. DOI: 10.17223/19988621/40/1.
3. Bukhtyak M.S., Solomina A.V. (2016) Ob odnom invariante otobrazheniya poverkhnostey primenitel'no k raskroyu setepolotna [On an invariant of surface mapping as applied to metallic mesh tailoring]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(39). pp. 13–24. DOI: 10.17223/19988621/39/2.
4. Bukhtyak M.S., Solomina A.V. (2015) Geometricheskoe modelirovanie raskroya setepolotna dlya osesimmetrichnogo reflektora. Chast' 1 [Geometric modeling of metallic mesh sheet tailoring for an axisymmetric reflector. Part 1]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(34). pp. 5–17. DOI: 10.17223/19988621/34/1.
5. Bukhtyak M.S., Solomina A.V. (2015) Geometricheskoe modelirovanie raskroya setepolotna dlya osesimmetrichnogo reflektora. Chast' 2 [Geometric modelling of metallic mesh tailoring for axisymmetric refltor. Part 2]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(36). pp. 5–14. DOI: 10.17223/19988621/36/1.
6. Gryanik M.V., Loman V.I. (1987) *Razvertyvaemye zerkal'nye anteny zontichnogo tipa* [Deployable Mirror Umbrella-Type Antennas]. Moscow: Radio i svyaz'.
7. Hedgepeth J.M. (1982) Accuracy potential for large space antenna reflectors with passive structure. *J. Spacecraft*. 19(3). pp. 211–217.
8. Azyukin A.V. (1984) Spetsifika DN i KND zerkal'nykh zontichnykh antenn [Specificity of the directional pattern and directivity factor of mirror umbrella antennas]. *Analiz i sintez antenykh system* [Analysis and Synthesis of Antenna Systems]. Ed. by G.G. Bubnov. Moscow. pp. 82–88.
9. Rashevskiy P.K. (1956) *Kurs differentsial'noy geometrii* [A course of differential geometry]. Moscow; Leningrad: GITTL.
10. Favard J. (1957) *Cours de Geometrie Dfferentielle Locale*. Paris: Gauthier-Villars.
11. Azyukin A.V., Klassen V.I. (1982) O napravlennykh svoystvakh raskryvayushchikhsya zerkal'nykh antenn [Directional properties of folding reflector antenna]. *Radiotekhnika i elektronika – Journal of Communications Technology and Electronics*. 27(8). pp. 1519–1526.

12. Helgason S. (1962) *Differential Geometry and Symmetric Spaces*. New York, London: Academic Press, 1962.
13. Finikov S.P. (1948) *Metod vneshnikh form Kartana* [Cartan's method of exterior forms]. Moscow; Leningrad: GITTL.
14. Ingerson P.G., Wong W.C. (1972) The Analysis of Deployable Umbrella Parabolic Reflectors. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions*. Issue 4. V. 20. pp. 409–414.