УДК 512.545.8
DOI 10.17223/19988621/45/2

А.И. Забарина, Г.Г. Пестов, Е.А. Фомина

К ТЕОРИИ 2-УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУПП

В группе $l_{e,\alpha}$, не являющейся линейно упорядоченной, выделена линейно упорядоченная подгруппа. Доказано, что для каждого натурального $n \in \mathbf{N}$ количество элементов порядка n в 2-упорядоченной группе G не превосходит n, если группа $\langle \{x \in G \mid x^n = e\}, \cdot, \zeta \rangle$ – невырожденная.

Ключевые слова: *линейно упорядоченная группа, двумерный порядок, 2-упорядоченная группа, инволюция, прямая.*

В [1, 2] приведены различные примеры 2-упорядоченных групп и доказаны некоторые их свойства. В данной статье эта работа продолжена: обобщена теорема о мощности множества элементов порядка n и исследованы свойства порядка на прямой $l_{e,\alpha}$, где $o(\alpha) = 2$. Будем пользоваться терминологией теории 2-порядка, приведённой в [1, 2].

1. О порядке на прямой $l_{e,\alpha}$

Пусть $\langle G, \cdot, \zeta \rangle$ – невырожденная 2-упорядоченная группа, $\alpha \in G$, $o(\alpha) = 2$. Рассмотрим прямую

$$l_{e,\alpha} = \{x \in G \mid \zeta(\alpha, e, x) = 0\}.$$

В [2, с. 37] доказано, что $l_{e,\alpha} \lhd G$. В силу невырожденности группы G имеем

$$l_{e,\alpha} \neq G.$$

Следовательно,

$$\exists c \in G \; (\zeta(c, \alpha, e) \neq 0).$$

Так как

$$\zeta(c, \alpha, e) = -\zeta(c\alpha, \alpha, e),$$

то, не нарушая общности, будем считать, что

$$\zeta(c, \alpha, e) = 1. \tag{1}$$

Для любых $x, y \in l_{e,\alpha}$ положим

$$x < y \Leftrightarrow \zeta_c(x, y) = \zeta(c, x, y) = 1.$$

Известно [3, с. 19], что функция ζ_c задаёт на прямой $l_{e,\alpha}$ отношение линейного порядка. Заметим, что относительно этого порядка $\alpha < e$. Однако, так как $\alpha \in l_{e,\alpha}$, то группу $\langle l_{e,\alpha}, \cdot \rangle$ нельзя линейно упорядочить.

Наша задача: выделить в ней подгруппу, которая относительно указанного порядка ζ_c является линейно упорядоченной.

Пусть

$$P = \{x \in l_{e,\alpha} \mid x \geq e\}, \; H = P \cup P^{-1}.$$

Справедливая следующая

Теорема 1.1. Если $|P| \neq 1$, то $\langle H, \cdot, \zeta_c \rangle$ – линейно упорядоченная группа.

Докажем предварительно ряд утверждений.

Лемма 1.2. Пусть $x \in P$. Тогда функции ζ_c, ζ_{xc}, ζ_{cx}, $\zeta_{x^{-1}c}$, $\zeta_{cx^{-1}}$ задают на прямой $l_{e,\alpha}$ один и тот же порядок, то есть

$$\zeta_c = \zeta_{xc} = \zeta_{cx} = \zeta_{x^{-1}c} = \zeta_{cx^{-1}}\,. \tag{2}$$

Доказательство. Согласно [3, с. 19], для того чтобы доказать, что $\zeta_a = \zeta_b$, достаточно найти элементы u, $v \in l_{e,\alpha}$, для которых выполнено равенство

$$\zeta_a(u, v) = \zeta_b(u, v).$$

Так как

$$\zeta(c, \alpha, e) = \zeta(c\alpha, \alpha^2, \alpha) = -\zeta(c\alpha, \alpha, e),$$

то [3, с. 19] $\quad \forall u, v \in l_{e,\alpha} \quad [\zeta_c(u, v) = -\,\zeta_{c\alpha}(u, v)]$,

то есть функции ζ_c и $\zeta_{c\alpha}$ задают на прямой $l_{e,\alpha}$ противоположные порядки. Так как $\alpha \in Z(G)$ [1, с. 6], то

$$\zeta_c = -\zeta_{c\alpha} = -\zeta_{\alpha c}\,. \tag{3}$$

Пусть $x \in P$ и $x > e$ (для $x = e$ равенства (2) очевидны). Тогда $\zeta(c, e, x) = 1$. Отсюда, используя (3), получаем

$$\zeta(c\alpha, \alpha, x\alpha) = -\zeta(c\alpha, x\alpha, \alpha) = \zeta(c, x\alpha, \alpha) = 1,$$

то есть $x\alpha < \alpha$.

Применяя (1), получаем

$$x\alpha < \alpha < e < x.$$

Отсюда $x\alpha < x$, то есть

$$\zeta(c, x\alpha, x) = 1.$$

Таким образом,

$$\zeta(cx^{-1}, \alpha, e) = \zeta(x^{-1}c, \alpha, e) = 1,$$

поэтому $\quad \zeta_{cx^{-1}}(\alpha, e) = \zeta_{x^{-1}c}(\alpha, e) = \zeta_c(\alpha, e).$

Следовательно, $\quad \zeta_{cx^{-1}} = \zeta_{x^{-1}c} = \zeta_c.$

Так как

$$\zeta(c, e, x) = \zeta(x^{-1}c, e, x) = \zeta(c, x, x^2) = 1,$$

то $x < x^2$. И, наконец, из равенств

$$\zeta(c, e, x) = \zeta(cx, x, x^2) = \zeta(xc, x, x^2) = \zeta(c, x, x^2) = 1$$

следует, что

$$\zeta_c = \zeta_{cx} = \zeta_{xc}.\ \#$$

Следствие 1.3. Если $x > e$, то $x^{-1} < e$.

Доказательство. Истинность импликации вытекает из равенств

$$\zeta(c, e, x) = \zeta(cx^{-1}, x^{-1}, e) = \zeta(c, x^{-1}, e) = 1.\ \#$$

Заметим, что обратное утверждение ложно, например, для $x = \alpha$.

Предложение 1.4. Пусть $P = \{x \in l_{e,\alpha}, x \geq e\}$, $H = P \cup P^{-1}$. Тогда $\langle H, \cdot\rangle$ – группа.

Доказательство. Так как $H \subset l_{e,\alpha}$, то достаточно проверить замкнутость операции умножения на H.

а) Пусть $x, y \in P \setminus \{e\}$ и $x \leq y$. Согласно следствию 1.3,

$$x^{-1} < e < x \leq y.$$

Отсюда $\quad x^{-1} < y,$

то есть $\quad \zeta(c, x^{-1}, y) = 1 = \zeta(xc, e, xy).$

Воспользовавшись леммой 1.2, получаем

$$\zeta(c, e, xy) = 1,$$

то есть
$$xy \in P,\ xy \in H.$$

б) Пусть $x, y \in P^{-1} \setminus \{e\}$. Тогда $x^{-1}, y^{-1} \in P \setminus \{e\}$. Согласно пункту а),

$$y^{-1}x^{-1} = (xy)^{-1} \in P.$$

Следовательно,
$$xy \in P^{-1},\ xy \in H.$$

в) Пусть $x \in P, y \in P^{-1}$. Так как порядок на $l_{e,\alpha}$ – линейный, то

$$xy \geq e \ \text{ или } \ xy < e.$$

Если $xy \geq e$, то $xy \in H$. Пусть $xy < e$. Покажем, что $(xy)^{-1} \in P$.

Так как $y \in P^{-1}$, то $y^{-1} \in P, y^{-1} > e$. Применяя лемму 1.2 для элемента y^{-1}, имеем

$$\zeta(c, xy, e) = \zeta(cy^{-1}, x, y^{-1}) = \zeta(c, x, y^{-1}) = 1.$$

Следовательно,
$$\zeta(cx^{-1}, e, y^{-1}x^{-1}) = \zeta(c, e, y^{-1}x^{-1}) = 1,$$

то есть
$$e < (xy)^{-1},$$

отсюда
$$(xy)^{-1} \in P \text{ и } xy \in H.$$

г) Аналогичные рассуждения можно провести для случая $x \in P^{-1}, y \in P$. #

Предложение 1.5. Множество

$$P = \{x \in l_{e,\alpha} \mid \zeta(c, e, x) = 1\} \cup \{e\}$$

является положительным конусом группы $\langle H, \cdot\rangle$.

Доказательство. Согласно критерию положительного конуса линейного порядка в группе [4, с. 26], множество P должно удовлетворять условиям

$$P \cup P^{-1} = H; \quad P \cap P^{-1} = \{e\}; \quad P \cdot P \subset P; \quad \forall h \in H\ (h^{-1}Ph \subset P).$$

Из определения множества H и доказательства пункта а) предложения 1.4 следует истинность первых трёх условий. Докажем свойство инвариантности множества P.

Пусть $x \in P, x > e$ и $h \in P, h > e$. Так как

$$\zeta(c, e, x) = \zeta(ch, h, xh) = 1 \text{ и } h > e,$$

то
$$\zeta(c, h, xh) = 1.$$

Отсюда
$$\zeta(h^{-1}c, e, h^{-1}xh) = \zeta(c, e, h^{-1}xh) = 1,$$

то есть $h^{-1}xh \in P$.

Пусть $x \in P, h \in P^{-1}$. Следовательно, $x > e, h^{-1} > e$. Так как

$$\zeta(c, e, x) = \zeta(h^{-1}c, h^{-1}, h^{-1}x) = \zeta(\ c, h^{-1}, h^{-1}x) = 1,$$

то
$$\zeta(ch, e, h^{-1}xh) = \zeta(c, e, h^{-1}xh) = 1,$$

то есть $h^{-1}xh \in P$. #

Истинность теоремы 1.1 непосредственно следует из предложений 1.4 и 1.5.

В заключение приведём примеры прямых $l_{e,\alpha}$ и соответствующих им подгрупп H в некоторых 2-упорядоченных группах.

1) Пусть $\langle \mathbf{C}^*, \cdot, \eta\rangle$ – 2-упорядоченная группа ненулевых комплексных чисел, где функция 2-порядка есть естественная ориентация η. Имеем

$$\alpha = -1, \quad l_{1,-1} = \mathbf{R}^*, \quad H = \mathbf{R}^+.$$

2) В циклической группе $\langle \mathbf{C}_{2n}, \cdot, \zeta\rangle$ [4, с. 98]

$$l_{1,-1} = \{-1, 1\}, \quad H = \{1\}.$$

3) Пусть $\langle \Gamma, \cdot, \zeta_1 \rangle$ – произвольная линейно упорядоченная группа с функцией линейного порядка ζ_1, T_0 – тороидальная группа. Согласно Сверчковскому [4, с. 97],

$$G = \langle T_0 \times \Gamma, \cdot, \zeta_1 \rangle$$

– циклически упорядоченная группа, инволюцией которой является элемент $\alpha = (-1, e)$. Так как значение $\zeta_1(g_1, g_2, g_3)$ равно 0 тогда и только тогда, когда, по крайней мере, две координаты точки совпадают, то

$$l_{(1,e),(-1,e)} = \{(1, e), (-1, e)\} \text{ и } H = \{(1, e)\}.$$

На группе $\langle T_0 \times \Gamma, \cdot, \zeta \rangle$ удалось задать отличный от ζ_1 2-порядок [5, с. 25].

Пусть

$$g = (g_1, g_2, g_3),$$

$$g_k = (t_k, \gamma_k),\ t_k \in T_0,\ \gamma_k \in \Gamma,\ k \in \{1, 2, 3\},$$

$$t = (t_1, t_2, t_3),\ \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3).$$

Обозначим функцию двумерного циклического порядка на T_0 через ω и положим

$$\zeta_2(g) = \begin{cases} \omega(t), \text{ если } |set(t)| = 3; \\ \zeta_1(\gamma_1, \gamma_2)\omega(t_3^{-1}t_1, e, t_1^{-1}t_3), \text{ если } t_1 = t_2; \\ \zeta_2(\gamma_2, \gamma_3)\omega(t_1^{-1}t_2, e, t_2^{-1}t_1), \text{ если } t_2 = t_3; \\ \zeta_1(\gamma_3, \gamma_1)\omega(t_2^{-1}t_3, e, t_3^{-1}t_2), \text{ если } t_1 = t_3; \\ 0, \text{ если } |set(t)| = 1. \end{cases}$$

Тогда

$$l_{(1,e),(-1,e)} = \{(-1, \gamma), (1, \gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} \text{ и } H = \{(1, \gamma) \mid \gamma \in \Gamma\}.$$

4) Пусть $\langle F, F^u \rangle$ – двумерно упорядоченное поле с базой F_0, где

$$F^u = \{x \in F \mid \zeta(0, 1, x) \geq 0\} \text{ – верхний конус поля } F \text{ [3]};$$

$$F_0 = \{x \in F \mid \zeta(0, 1, x) = 0\} \text{ [3]}.$$

Элемент $a \in F$ называется *бесконечно близким к базе* F_0, если

$$\forall n\ \forall r \in F_0\ (r < a) \Rightarrow (a - r)^n \in F^u$$

или

$$\forall n\ \forall r \in F_0\ (r < a) \Rightarrow (a - r)^n \in -F^u.$$

Множество B бесконечно близких к базе F_0 элементов поля F относительно операций сложения и умножения образует *бесконечно узкое* поле $\langle B, +, \cdot \rangle$ [6].

Бесконечно узкие поля допускают как линейное, так и двумерное упорядочивание [7, 8].

В частности, $\mathbf{Q}(\pi)$ – бесконечно узкое поле. Произвольный элемент b этого поля представим в виде

$$b = \frac{f(\pi)}{g(\pi)},$$

где $f(x), g(x) \in \mathbf{Q}[x]$.

Мультипликативную группу $\langle \mathbf{Q}^*(\pi), \cdot \rangle$ этого поля можно двумерно упорядочить следующим образом [7]:

$$\forall b \in \mathbf{Q}^*(\pi)\ \ (\zeta(0, 1, b) = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' \Big|_{x=b} > 0\ ).$$

Тогда

$$\alpha = -1,\quad l_{1,-1} = \mathbf{Q}^*,\quad H = \mathbf{Q}^+.$$

В общем случае бесконечно узкого поля B имеем

$$\alpha = -e, \quad l_{e,-e} = F_0, \quad H = F_0^{+}.$$

2. О мощности множества элементов порядка *n* в 2-упорядоченной группе

Теорема о том, что в произвольной невырожденной 2-упорядоченной группе $\langle G, \cdot, \zeta\rangle$ существует не более одной инволюции, доказана в [2, с. 34].

Пусть $n \in \mathbf{N}$ и $H = \{x \in G \mid x^n = e\}$. Так как $T(G) \subset Z(G)$ [1, с. 6], то $H < G$ и H – абелева. Следовательно, $\langle H, \cdot, \zeta\rangle$ – локально конечная 2-упорядоченная группа. Рассмотрим случай, когда $\zeta \not\equiv 0$ на H.

Нашей целью является доказательство следующего утверждения.

Теорема 2.1. Пусть $\langle G, \cdot, \zeta\rangle$ – невырожденная 2-упорядоченная группа, $n \in \mathbf{N}$ и $H = \{x \in G \mid x^n = e\}$. Если $\zeta \not\equiv 0$ на H, то $|H| \le n$.

Известно, что периодическая часть циклически упорядоченной группы вкладывается с сохранением порядка в группу $\langle C, \cdot\rangle$ комплексных корней из 1 [4, с. 98].

Так как $T(H) = H$, то для доказательства теоремы достаточно убедиться, что $\langle H, \cdot, \zeta\rangle$ – циклически упорядоченная группа.

Истинность этого утверждения доказана методом математической индукции в [9, с. 32] для произвольных невырожденных n-упорядоченных групп. (Каждая локально конечная n-упорядоченная группа с невырожденным порядком является n-циклически упорядоченной.)

Для $n = 2$ это доказательство более наглядно и конструктивно. Приведём его.

Напомним, что известное определение циклически упорядоченной группы [4, с. 97] равносильно следующему.

Определение 2.1. Невырожденная 2-упорядоченная группа $\langle G, \cdot, \zeta\rangle$ называется ***циклически упорядоченной***, если в каждом невырожденном её подмножестве $\langle X_4, \zeta\rangle$ каждый элемент из множества X_4 является в нём внешней точкой [9, с. 24].

Нам понадобится также понятие отделимой точки в 2-упорядоченном множестве $\langle X, \zeta\rangle$, введённое в [10].

Определение 2.2. Пусть $\langle X, \zeta\rangle$ – 2-упорядоченное множество. Элемент $a \in X$ называется ***точкой, отделимой в*** $\langle X, \zeta\rangle$, если существует грань $P \subset X$, такая, что

$$\zeta(P, a) = 1 \ \text{ и } \ \forall x \in X \setminus \{a\} \ (\zeta(P, x) \le 0)$$

или

$$\zeta(P, a) = -1 \ \text{ и } \ \forall x \in X \setminus \{a\} \ (\zeta(P, x) \ge 0).$$

Здесь же [10, с. 238] доказано

Предложение 2.2. Если точка a отделима в $\langle X, \zeta\rangle$, $a \in X_4$, $X_4 \subset X$, множество $\langle X_4, \zeta\rangle$ – невырожденное, то точка a отделима в $\langle X_4, \zeta\rangle$.

Приведём план доказательства теоремы 2.1.

1) Пусть $X_4 \subset X$, $a \in X_4$. Докажем, что если точка a отделима в $\langle X_4, \zeta\rangle$, то a – внешняя точка в $\langle X_4, \zeta\rangle$.

2) Покажем, что в каждом конечном невырожденном 2-упорядоченном множестве $\langle X, \zeta\rangle$ существует отделимая точка.

3) Убедимся, что в каждой конечной невырожденной 2-упорядоченной группе все её элементы являются в ней отделимыми точками.

Из пунктов 1)–3) непосредственно следует, что невырожденная локально конечная группа $\langle H, \cdot, \zeta\rangle$ является циклически упорядоченной.

Действительно, пусть $X_4 \subset H$ и $\langle X_4, \zeta\rangle$ – невырожденное множество. Рассмотрим группу $S = \langle\langle X_4\rangle, \cdot, \zeta\rangle$. Очевидно, S – конечная невырожденная 2-упорядоченная группа. Согласно пункту 3) все её элементы являются отделимыми в $\langle S, \zeta\rangle$ точками.

Из предложения 2.2 следует, что все они отделимы в $\langle X_4, \zeta\rangle$. Осталось применить пункт 1). Таким образом, из истинности пунктов 1)–3) истинность теоремы 2.1 будет доказана.

При доказательстве пунктов 1)–3) будем пользоваться следующей аксиоматикой 2-упорядоченного множества [11].

Пусть $\zeta : X^3 \to \{-1, 0, 1\}$, функция ζ – антисимметрична (то есть меняет значение на противоположное при каждой перестановке двух аргументов). Пара $\langle X, \zeta\rangle$ называется 2-*упорядоченным множеством*, если ζ удовлетворяет следующим условиям:

С1. Если $X_4 \subset X$, множество $\langle X_4, \zeta\rangle$ – невырожденное, то в $\langle X_4, \zeta\rangle$ существует, по крайней мере, две внешние грани.

С2. Если $X_2 \subset X$, $a, b, c \in X$ и

$$\zeta(X_2, a) = \zeta(X_2, b) = \zeta(X_2, c) = 1,$$

$$\zeta(X_1, a, b) = \zeta(X_1, b, c) = 1,$$

то

$$\zeta(X_1, a, c) = 1.$$

С3. Пусть $S \subset X$, $|S| \le 6$; G', G'' – грани в $\langle S, \zeta\rangle$, причём

$$\forall x \in G''\ (\zeta(G', x) = 0).$$

Тогда существует $\varepsilon = \pm 1$, такое, что

$$\forall x \in S\ (\zeta(G', x) = \varepsilon\zeta(G'', x)).$$

Это одна из систем аксиом 2-порядка, предложенных в работах Г. Г. Пестова [3, 11]. Там же рассмотрен вопрос об их равносильности.

Предложение 2.3. Пусть $\langle X, \zeta\rangle$ – 2-упорядоченное множество; $X_4 \subset X$, $a \in X_4$. Если точка a отделима в $\langle X_4, \zeta\rangle$, то a – внешняя точка в $\langle X_4, \zeta\rangle$.

Доказательство. Пусть $X_4 = \{a, x_1, x_2, x_3\}$ и точка a – отделима в $\langle X_4, \zeta\rangle$. Не нарушая общности, можно считать, что

$$\zeta(x_1, x_2, a) = 1 \text{ и } \zeta(x_1, x_2, x_3) \le 0.$$

Следовательно, $\langle X_4, \zeta\rangle$ – невырожденное множество. Согласно аксиоме С1, в $\langle X_4, \zeta\rangle$ существует внешняя грань P.

Если $a \in P$, то a – внешняя в $\langle X_4, \zeta\rangle$. Пусть $a \notin P$. Так как $P \ne \{x_1, x_2\}$, то

$$P = \{x_1, x_3\} \text{ или } P = \{x_2, x_3\}.$$

Рассмотрим оба случая.

$$\zeta(x_1, x_3, x_2) = \zeta(x_1, x_3, a) \ne 0,$$

отсюда

$$\zeta(x_1, x_3, a) = 1.$$

Следовательно,

$$\zeta(x_1, a, x_3) = \zeta(x_1, a, x_2) = -1,$$

то есть точка a – внешняя точка в $\langle X_4, \zeta\rangle$.

Аналогично,

$$\zeta(x_2, x_3, x_1) = \zeta(x_2, x_3, a) = -1.$$

Значит,

$$\zeta(x_2, a, x_3) = \zeta(x_2, a, x_1) = 1,$$

отсюда – точка a является внешней точкой в $\langle X_4, \zeta\rangle$. #

Истинность пункта 1) доказана.

Предложение 2.4. В каждом конечном невырожденном 2-упорядоченном множестве $\langle X, \zeta\rangle$ существуют отделимые точки.

Доказательство. Пусть $\langle X, \zeta\rangle$ – конечное невырожденное 2-упорядоченное множество. Согласно [12, с. 31], во множестве X существует нестрогая внешняя грань $P = \{x_1, x_2\}$, такая, что

$$\forall x \in X\,(\zeta(x_1, x_2, x) \geq 0).$$

Так как $\zeta \not\equiv 0$ на X, то

$$\exists a \in X\,(\zeta(x_1, x_2, a) = 1).$$

Рассмотрим прямую

$$l_{x1,x2} = \{x \in X \mid \zeta(x_1, x_2, x) = 0\}.$$

Линейно упорядоченное множество $\langle l_{x1,x2}; \zeta_a\rangle$ является конечным. Следовательно, в нём существуют наибольший и непосредственно предшествующий ему элементы b и k соответственно. Таким образом,

$$\begin{cases} \zeta_a(k, b) = \zeta(a, k, b) = 1, \\ \forall x \in l_{x_1,x_2} \setminus \{b\}\ \ (\zeta_a(k, x) \leq 0). \end{cases} \tag{4}$$

Покажем, что элемент b – отделимая точка во множестве $\langle X, \zeta\rangle$. Пусть $Y = X \setminus l_{x1,x2}$. Так как $a \in Y$, то $Y \neq \varnothing$. Для любых $u, v \in Y$ положим

$$u < v \iff \zeta(k, u, v) \leq 0.$$

Убедимся, что $<$ – отношение линейного предпорядка на множестве Y. Очевидно, что $<$ является рефлексивным и связным отношением. Покажем, что оно транзитивно.

Лемма 2.5. Пусть $\langle X, \zeta\rangle$ – конечное невырожденное 2-упорядоченное множество, тогда

$$\forall x \in X\ \ (\zeta(x_1, x_2, x) = \zeta(k, b, x)).$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$. Рассмотрим множество

$$S = \{x_1, x_2, k, b, a, x_0\}.$$

Очевидно, $|S| \leq 6$. Так как

$$x_1 \neq x_2,\quad k \neq b,\quad \zeta(x_1, x_2, a) \neq 0,\quad \zeta(k, b, a) \neq 0$$

то $\qquad G_1 = \{x_1, x_2\};\quad G_2 = \{k, b\}$ –

грани в $\langle S, \zeta\rangle$.

Так как k, b – элементы прямой $l_{x1,x2}$, то

$$\zeta(G_1, k) = \zeta(G_1, b) = 0.$$

Согласно свойству элемента a и (4),

$$\zeta(G_1, a) = \zeta(G_2, a).$$

Применив аксиому C3, имеем

$$\zeta(G_1, x_0) = \zeta(G_2, x_0),$$

то есть лемма доказана.

Пусть $x, y, z \in Y$, $x < y$, $y < z$. Следовательно,

$$\zeta(k, x, y) \leq 0;\ \ \zeta(k, y, z) \leq 0.$$

Убедимся, что

$$\zeta(k, x, z) \leq 0. \tag{5}$$

Так как $x, y, z \notin l_{x1,x2}$, то согласно лемме

$$\zeta(k, b, x) = 1;\quad \zeta(k, b, y) = 1;\quad \zeta(k, b, z) = 1 \tag{6}$$

Рассмотрим все возможные случаи:

а) $\zeta(k, x, y) = \zeta(k, y, z) = -1$.

Так как $\zeta(k, y, x) = \zeta(k, z, y) = 1$, то применяя (6) и аксиому C2, получаем

$$\zeta(k, x, z) = -1,$$

неравенство (5) – истинно.

б) $\zeta(k, x, y) = -1$; $\zeta(k, y, z) = 0$.

Пусть $S = \{k, y, z, x, b\}$. Очевидно,

$$G_1 = \{k, y\}; \quad G_2 = \{k, z\} -$$

грани в $\langle S, \zeta\rangle$, причём

$$\zeta(G_1, k) = \zeta(G_1, z) = 0.$$

Так как согласно (6), $$\zeta(k, y, b) = \zeta(k, z, b),$$

то согласно C3, $$\zeta(k, y, x) = \zeta(k, z, x) = 1,$$

отсюда $\zeta(k, x, z) = -1$, то есть неравенство (5) – истинно.

в) Случай $\zeta(k, x, y) = 0$; $\zeta(k, y, z) = 1$ рассматривается аналогично случаю б).

г) $\zeta(k, x, y) = \zeta(k, y, z) = 0$.

Пусть $S = \{k, x, y, z, b\}$. Предположим, что $\zeta(k, x, z) = 1$. Тогда

$$G_1 = \{k, y\}; \quad G_2 = \{x, z\} -$$

грани в $\langle S, \zeta\rangle$, такие, что

$$\zeta(G_1, x) = \zeta(G_1, z) = 0.$$

Согласно C3,

$$\exists \varepsilon = \pm 1 \ \forall s \in S \ \ (\zeta(k, y, s) = \varepsilon\zeta(x, z, s)),$$

но $$\zeta(k, y, k) \neq \varepsilon\zeta(x, z, k).$$

Получили противоречие. Таким образом, $\zeta(k, x, z) \leq 0$ и отношение $<$ на Y транзитивно.

Так как Y является конечным множеством, то

$$\exists c \in Y \ \forall x \in Y \ \ (x < c),$$

то есть $$\forall x \in Y \ \ (\zeta(k, x, c) \leq 0). \tag{7}$$

Покажем, что грань $P = \{k, c\}$ отделяет элемент b во множестве $\langle X, \zeta\rangle$. Согласно (7),

$$\forall x \in Y \ \ (\zeta(k, c, x) \geq 0). \tag{8}$$

Так как $c \notin l_{x1,x2}$, то

$$\zeta(x_1, x_2, a) = \zeta(x_1, x_2, c),$$

значит, функции порядка ζ_c и ζ_a на прямой $l_{x1,x2}$ равны: $\zeta_c = \zeta_a$.

Из (4) получаем

$$\begin{gathered} \zeta(k, c, b) = \zeta(k, a, b) = -1; \\ \forall x \in l_{x_1,x_2} \ \ (x \neq b \to \zeta(k, c, x) \ = \ \zeta(k, a, x) \geq 0). \end{gathered} \tag{9}$$

Из (8) и (9) следует, что элемент b является точкой, отделимой в $\langle X, \zeta\rangle$. #

Пункт 2) доказан.

Следствие 2.6. В каждой конечной невырожденной 2-упорядоченной группе $\langle G, \cdot, \zeta\rangle$ все элементы являются отделимыми во множестве $\langle G, \zeta\rangle$ точками.

Доказательство. Пусть c – отделимая в $\langle G, \zeta\rangle$ точка и $P = \{x_1, x_2\}$ – грань, такая, что

$$\zeta(x_1, x_2, c) = 1 \ \text{ и } \ \forall x \in G \setminus \{c\} \ \ (\zeta(x_1, x_2, x) \leq 0).$$

Пусть $g \in G$. Тогда

$$\zeta(gc^{-1}x_1, gc^{-1}x_2, g) = 1.$$

Пусть $x_0 \neq g$. Значит, $cg^{-1}x_0 \neq c$, отсюда

$$\zeta(x_1, x_2, cg^{-1}x_0) \leq 0.$$

Тогда

$$\zeta(gc^{-1}x_1, gc^{-1}x_2, x_0) \leq 0.$$

Таким образом, произвольный элемент $g \in G$ является отделимой в $\langle G, \zeta\rangle$ точкой. #

Пункт 3) доказан. Таким образом, теорема 2.1 доказана полностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Забарина А.И., Пестов Г.Г.* Двумерно упорядоченные группы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2011. № 1(13). С. 5–8.
2. *Пестов Г.Г., Забарина А.И., Тоболкин А.А., Фомина Е.А.* О 2-упорядоченных группах // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 2(34). С. 30–40.
3. *Пестов Г.Г.* Двумерно упорядоченные поля. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2003. 128 с.
4. *Фукс Л.* Частично упорядоченные алгебраические системы. М.: Мир, 1965. 342 с.
5. *Тоболкин А.А.* К теории *n*-упорядоченных групп: дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.06. Томск, 2009. 71 с. URL: http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000370652
6. *Пестов Г.Г., Фомина Е.А.* Подполе *B* бесконечно близких к базе элементов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2009. № 2(6). С. 41–47.
7. *Пестов Г.Г., Фомина Е.А.* Конструкция бесконечно узкого двумерно упорядоченного поля // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2007. № 1(1). С. 50–53.
8. *Фомина Е.А.* Критерий бесконечно узкого поля // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2009. № 1(5). С. 27–30.
9. *Забарина А.И.* О циклически упорядоченных группах: дис. … канд. физ-мат. наук: 01.01.06. Томск, 1984. 84 с.
10. *Терре А.И.* Элементы геометрии *n*-мерного порядка. Томск, 1982. 36 с. [Деп. в ВИНИТИ 27-10-82, № 5941 82].
11. *Пестов Г.Г.* К теории упорядоченных алгебраических систем: дис. … докт. физ.-мат. наук: 01.01.06. Томск, 2003. 273 с.
12. *Пестов Г.Г.* Исследования по теории *n*-мерной функции порядка: дис. … канд. физ.-мат. наук. Томск, 1966. 131 с.

Статья поступила 04.10.2016 г.

Zabarina A.I., Pestov G.G., Fomina E.A. (2017) ON THE THEORY OF 2-ORDERED GROUPS. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 45. pp. 25–34

DOI 10.17223/19988621/45/2

1. On the order on a straight line $l_{e,\alpha}$.

Let $\langle G, \cdot, \zeta\rangle$ is a non-degenerate 2-ordered group, $\alpha \in G$, $o(\alpha) = 2$, $l_{e,\alpha} = \{x \in G | \zeta(\alpha, e, x) = 0\}$.

It is known that $l_{e,\alpha} \lhd G$. As $l_{e,\alpha} \neq G$, then $\exists c \in G$ $(\zeta(c, \alpha, e) \neq 0)$. Let $\zeta(c, \alpha, e) = 1$.

Let: $$x < y \Leftrightarrow \zeta_c(x, y) = \zeta(c, x, y) = 1.$$

It is known that the function ζ_c sets linear order on the line $l_{e,\alpha}$. Let us note that $\alpha < e$ regarding this order. As $\alpha \in l_{e,\alpha}$ then the group $\langle l_{e,\alpha}, \cdot\rangle$ cannot be linearly ordered. Let us find a subgroup which is linearly ordered regarding to the specified order ζ_c.

Theorem 1.1. Let $P = \{x \in l_{e,\alpha} \mid x \geq e\}$, $H = P \cup P^{-1}$. If $|P| \neq 1$, then $\langle H, \cdot, \zeta_c\rangle$ is a linearly ordered group.

2. On the cardinality of the set of elements of order *n* in 2-ordered group

Let $n \in \mathbf{N}$ and $H = \{x \in G \mid x^n = e\}$. As $T(G) \subset Z(G)$, then $H < G$ and H is an Abelian group. Consequently, $\langle H, \cdot, \zeta\rangle$ is a locally finite 2-ordered group. Let $\zeta \not\equiv 0$ on the set H.

Theorem 2.1. Let $\langle G, \cdot, \zeta\rangle$ be a non-degenerate 2-ordered group, $n \in \mathbf{N}$ and $H = \{x \in G \mid x^n = e\}$. If $\zeta \not\equiv 0$ on the set H, then $|H| \le n$.

Keywords: linearly ordered group, two-dimensional order, 2-ordered group, involution, straight line.

ZABARINA Anna Ivanovna (Candidate of Physics and Mathematics,
Tomsk State Pedagogical University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: aizabarina@gmail.com

PESTOV German Gavrilovich (Doctor of Physics and Mathematics,
Tomsk State University Tomsk, Russian Federation)

FOMINA Elena Anatolievna (Candidate of Physics and Mathematics,
Tomsk State Pedagogical University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: ef254@mail.ru

REFERENCES

1. Zabarina A.I., Pestov G.G. (2011). Dvumerno uporyadochennye gruppy [Two-dimensionally ordered groups]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1 (13). pp. 5–8.
2. Pestov G.G., Zabarina A.I., Tobolkin A.A., Fomina E.A. (2015). O 2-uporyadochennykh gruppakh [On 2-ordered groups]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(34). pp. 30–40. DOI: 10.17223/19988621/34/3.
3. Pestov G.G. (2003). *Dvumerno uporyadochennye polya* [Two-dimensionally ordered fields]. Tomsk: Tomsk St. Univ. Publ.
4. Fuchs L. (1963). *Partially ordered algebraic systems*. Oxford: Pergamon Press.
5. Tobolkin A.A. (2009). *K teorii n-uporyadochennykh grupp* [On the theory of *n*-ordered groups]. Dis. kand. fiz.-mat. nauk: 01.01.06. Tomsk. 71 p. URL: http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000370652 (in Russian)
6. Pestov G.G., Fomina E.A. (2009). Podpole *B* beskonechno blizkikh k baze elementov [A subfield *B* of elements which are infinitely close to the base of elements]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(6). pp. 41–47.
7. Pestov G.G., Fomina E.A. (2007). Konstruktsiya beskonechno uzkogo dvumerno uporyadochennogo polya [Construction of an infinitely narrow 2-dimensionally ordered field]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(1). pp. 50–53.
8. Fomina E.A. (2009). Kriteriy beskonechno uzkogo polya [A criterion of an infinitely narrow field]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(5). pp. 27–30.
9. Zabarina A.I. (1984). *O tsiklicheski uporyadochennykh gruppakh* [On cyclically ordered groups]. Dis. kand. fiz-mat. nauk: 01.01.06. Tomsk. 84 p.
10. Terre A.I. (1982). Elementy geometrii *n*-mernogo poryadka [Elements of geometry of the *n*-dimensional order]. Tomsk [*Dep. VINITI 27-10-82, № 5941 82*]. 36 p.
11. Pestov G.G. (2003). *K teorii uporyadochennykh algebraicheskykh system* [On the theory of ordered algebraic systems]. Dis. doct. fiz.-mat. nauk: 01.01.06. Tomsk. 273 p.
12. Pestov G.G. (1966). *Issledivanya po teorii n-mernoy funktsii poryadka* [Research on the theory of the *n*-dimensional order function]. Dis. kand. fiz.-mat. nauk: 01.01.06. Tomsk. 131 p.