УДК 517.983.24
DOI 10.17223/19988621/45/3

Д.Ю. Иванов

ЗАМКНУТОСТЬ СУММ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ, ДЕЙСТВУЮЩИХ ПО РАЗНЫМ ПЕРЕМЕННЫМ В ПРОСТРАНСТВАХ КВАДРАТИЧНО СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Доказана замкнутость сумм некоторых неограниченных операторов, действующих по разным переменным в пространствах квадратично суммируемых функций нескольких переменных. Входящие в такие суммы операторы являются генераторами сжимающих C_0-полугрупп, и все, кроме, быть может, одного, самосопряжены и имеют чисто точечные спектры. В качестве примера рассмотрены суммы обыкновенных дифференциальных операторов, возникающие в задачах многомерной нестационарной теплопроводности. Исследована гладкость функций, входящих в области определения таких замкнутых операторных сумм.

Ключевые слова: *замкнутый линейный оператор, сумма операторов, генератор C_0-полугруппы, область определения оператора.*

Получены достаточные условия замкнутости сумм некоторых неограниченных операторов в пространствах квадратично суммируемых функций нескольких переменных. А именно: для замкнутости операторных сумм достаточно, чтобы входящие в суммы операторы действовали по разным переменным, являлись генераторами сжимающих C_0-полугрупп и все, кроме, быть может, одного, были самосопряжены и имели чисто точечные спектры.

То обстоятельство, что сумма генераторов коммутирующих C_0-полугрупп сжатий замыкаема, хорошо известно [1, с. 269; 2, с. 88]. Но автору не встречались в литературе примеры совпадающих со своими замыканиями сумм неограниченных генераторов C_0-полугрупп сжатий.

Замыкание суммы генераторов сжимающих C_0-полугрупп, операторы которых коммутируют друг с другом, само является генератором сжимающей C_0-полугруппы [2, с. 88]. Генераторы C_0-полугрупп используются для постановки задач математической физики в виде краевых задач для дифференциально-операторных уравнений, в которых генератор C_0-полугруппы играет роль операторного коэффициента. Условия корректности таких краевых задач определяются на основе областей определения операторных коэффициентов. Поэтому замкнутость операторных сумм, играющих роль операторных коэффициентов, позволяет более просто описать области определения последних.

В работах [3, 4] исследовались краевые задачи для двумерных дифференциально-операторных уравнений $\Delta_2 \boldsymbol{u}(x)=\overline{\boldsymbol{D}_\Sigma}\,\boldsymbol{u}(x)$ ($x\equiv(x_1,x_2)\in\Omega$, $\Delta_2\equiv\partial^2_{x_1x_1}+\partial^2_{x_2x_2}$), соответствующие начально-краевым задачам теплопроводности в прямом цилиндре $\Omega\times I_Y$ ($I_Y\equiv[0,Y]$) на временном интервале $I_T\equiv[0,T]$ (Y и T – конечные положительные числа). Операторный коэффициент $\overline{\boldsymbol{D}_\Sigma}$ является замыканием операторной суммы $\boldsymbol{D}_\Sigma \equiv \boldsymbol{D}_t + \boldsymbol{D}_y$ в пространстве $L_2' \equiv L_2(I_Y \times I_T)$. При этом оператор $\boldsymbol{D}_t$: $(\boldsymbol{D}_t \boldsymbol{f})(y,t) = \partial_t f(y,t)$, определен на абсолютно непрерывных по t функциях $f(y,t) \in L_2'$, таких, что $\partial_t f \in L_2'$ и $f|_{t=0} = 0$ при $y \in I_Y$, а также на эквивалентных им. Оператор $\boldsymbol{D}_y$: $\left(\boldsymbol{D}_y \boldsymbol{f}\right)(y,t) = -\partial_{yy}^2 f(y,t)$, задан на абсолютно непрерывно дифференцируемых по y функциях $f(y,t) \in L_2'$, таких, что $\partial_{yy}^2 f \in L_2'$ и $\left(\partial_y f - \lambda_0 f\right)|_{y=0} = \left(\partial_y f + \lambda_Y f\right)|_{y=Y} = 0$ ($0 \le \lambda_0, \lambda_Y \le \infty$) при $t \in I_T$, а также на эквивалентных им. Получены решения указанных краевых задач с помощью двумерных граничных интегральных уравнений (ГИУ) с операторным ядром, выраженным через C_0-полугруппу, порождаемую оператором $\overline{\boldsymbol{D}_\Sigma}$. В работах [5, 6] разработан алгоритм численного решения указанных ГИУ на основе разрешающих их сеточных операторов, вычисляемых в алгебре полиномов, образованных степенями полугруппового оператора. Отметим, что для вычисления таких разрешающих операторов требуется значительно меньший объем вычислений, чем для получения разрешающих операторов, построенных на основе обычных трехмерных ГИУ.

Для обоснования аппроксимирующих свойств и устойчивости вычислительных схем [5, 6] в работе [7] установлена инвариантность пространств $C^k(\partial\Omega, H^n(I_Y \times I_T))$ относительно прямых и обратных операторов ГИУ, а также ограниченность таких операторов в указанных пространствах. Здесь $C^k(\partial\Omega, H^n(I_Y \times I_T))$ – пространство k раз непрерывно дифференцируемых вдоль границы $\partial\Omega$ векторных функций со значениями в $H^n(I_Y \times I_T)$; $H^n(I_Y \times I_T)$ – пространство типа Соболева, определяемое n первыми степенями оператора $\overline{\boldsymbol{D}_\Sigma}$.

Из инвариантности пространств $C^k(\partial\Omega, H^n(I_Y \times I_T))$ следует инвариантность областей определения операторов $\left(\overline{\boldsymbol{D}_\Sigma}\right)^n$ относительно обратных операторов ГИУ. Так как входными данными задачи являются правые части ГИУ, то этот факт позволяет задать гладкость решения ГИУ с помощью правой части, если известна гладкость функций, входящих в области определения операторов $\left(\overline{\boldsymbol{D}_\Sigma}\right)^n$. Очевидно, что задание гладкости решений ГИУ необходимо для определения аппроксимирующих свойств сеточного аналога прямого оператора ГИУ.

В силу результатов настоящей работы операторы $\boldsymbol{D}_\Sigma$ замкнуты, поэтому гладкость функций, входящих в области определения операторов $\left(\overline{\boldsymbol{D}_\Sigma}\right)^n$, непосредственно определяется гладкостью функций, входящих в области определения операторов $\boldsymbol{D}_t$ и $\boldsymbol{D}_y$. В заключительной части настоящей работы исследована гладкость функций, входящих в области определения степеней сумм обыкновенных дифференциальных операторов типа $\boldsymbol{D}_\Sigma$: доказано существование абсолютно непрерывных на множестве $I_Y \times I_T$ частных производных этих функций при $n \ge 2$.

Представление тензорных сумм операторов в виде обычных операторных сумм

Пусть H и G – комплексные гильбертовы пространства, $H\otimes G$ – пространство конечных линейных комбинаций билинейных форм вида $\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{q}$, где $\boldsymbol{p}\in H$, $\boldsymbol{q}\in G$, со скалярным произведением

$$\left(\sum_{i,j}\boldsymbol{p}_i'\otimes\boldsymbol{q}_j',\sum_{k,l}\boldsymbol{p}_k''\otimes\boldsymbol{q}_l''\right)_{H\otimes G}=\sum_{i,j,k,l}(\boldsymbol{p}_i',\boldsymbol{p}_k'')_H\left(\boldsymbol{q}_j',\boldsymbol{q}_l''\right)_G .$$

Определим гильбертово пространство $H\bar{\otimes}G$ как пополнение $H\otimes G$ по указанному скалярному произведению [8, с. 65].

Пусть $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ – линейные замыкаемые операторы в пространствах H и G соответственно, со всюду плотными областями определения $D(\boldsymbol{A})$ и $D(\boldsymbol{B})$. Обозначим через $D(\boldsymbol{A})\otimes D(\boldsymbol{B})$ множество конечных линейных комбинаций элементов вида $\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{q}$, где $\boldsymbol{p}\in D(\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{q}\in D(\boldsymbol{B})$. Оператор $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$, определенный на множестве $D(\boldsymbol{A})\otimes D(\boldsymbol{B})$:

$$(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})\sum_{i,j}\boldsymbol{p}_i\otimes\boldsymbol{q}_j=\sum_{i,j}\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_i\otimes\boldsymbol{B}\boldsymbol{q}_j ,$$

замыкаем в норме гильбертова пространства $H\bar{\otimes}G$ [8, с. 326]. Замыкания операторов $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{I}''+\boldsymbol{I}'\otimes\boldsymbol{B}$ обозначим соответственно как $\boldsymbol{A}\bar{\otimes}\boldsymbol{B}$ и $\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}$ ($\boldsymbol{I}'$, $\boldsymbol{I}''$ – тождественные операторы в H, G). Операторы $\boldsymbol{A}\bar{\otimes}\boldsymbol{B}$ и $\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}$ будем называть соответственно тензорным произведением и тензорной суммой операторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Операторную сумму $\boldsymbol{A}\bar{\otimes}\boldsymbol{I}''+\boldsymbol{I}'\bar{\otimes}\boldsymbol{B}$, определенную на $D(\boldsymbol{A}\bar{\otimes}\boldsymbol{I}'')\cap D(\boldsymbol{I}'\bar{\otimes}\boldsymbol{B})$, обозначим через $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$. В силу того, что имеют место включения

$$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{I}''+\boldsymbol{I}'\otimes\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\subseteq\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}, \tag{1}$$

оператор $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ замыкаем, и его замыкание совпадает с оператором $\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}$. Операторное произведение $\left(\boldsymbol{A}\bar{\otimes}\boldsymbol{I}''\right)\left(\boldsymbol{I}'\bar{\otimes}\boldsymbol{B}\right)$ обозначим через $\boldsymbol{AB}$. Если операторы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ ограничены, то $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}\bar{\otimes}\boldsymbol{B}$ и $\|\boldsymbol{AB}\|=\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|$.

Также нам понадобится понятие векторнозначного скалярного произведения $(\boldsymbol{f},\boldsymbol{q})_G$ элементов $\boldsymbol{f}\in H\bar{\otimes}G$ и $\boldsymbol{q}\in G$. Согласно [9, с. 135], оно определяется как некий элемент $\tilde{\boldsymbol{p}}\in H$, для которого при любом $\boldsymbol{p}\in H$ выполняется равенство $(\boldsymbol{f},\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{q})_{H\bar{\otimes}G}=(\tilde{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{p})_H$.

Лемма 1. Пусть $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ – линейные всюду плотно определенные и замыкаемые в соответствующих гильбертовых пространствах H и G операторы, причем ортонормированная система $\{\boldsymbol{e}_\beta,\ \beta\in\mathrm{B}\}$ собственных функций оператора $\boldsymbol{B}$ ($\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_\beta\equiv\sigma_\beta\boldsymbol{e}_\beta$) образует базис в пространстве G (множество В может быть несчетно). Тогда для того чтобы $\boldsymbol{f}\in D(\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}})$, необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{e}_\beta)_G \in D(\bar{\boldsymbol{A}}) \quad (\beta \in \mathrm{B}), \tag{2a}$$

$$([\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}]\boldsymbol{f},\boldsymbol{e}_\beta)_G = [\bar{\boldsymbol{A}} + \sigma_\beta \boldsymbol{I}'](\boldsymbol{f},\boldsymbol{e}_\beta)_G \quad (\beta \in \mathrm{B}); \tag{2b}$$

$$\sum_{\beta\in\mathrm{B}} \| [\bar{\boldsymbol{A}} + \sigma_\beta \boldsymbol{I}'](\boldsymbol{f},\boldsymbol{e}_\beta)_G \|_H^2 < \infty, \tag{3}$$

где $\bar{\boldsymbol{A}}$ – замыкание оператора $\boldsymbol{A}$. Обратно, для того чтобы $\boldsymbol{f} \in D(\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}})$, достаточно, чтобы $\boldsymbol{f} \in H \bar{\otimes} G$ и выполнялись соотношения (2a) и (3). При этом элемент $(\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}})\boldsymbol{f}$ может быть представлен в виде

$$(\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}})\boldsymbol{f} = \sum_{\beta\in\mathrm{B}} [\bar{\boldsymbol{A}} + \sigma_\beta \boldsymbol{I}'](\boldsymbol{f},\boldsymbol{e}_\beta)_G \otimes \boldsymbol{e}_\beta . \tag{4}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\boldsymbol{f} \in D(\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}})$ и $\boldsymbol{p} \in D(\boldsymbol{A}^*)$. Тогда справедливы равенства

$$([\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}]\boldsymbol{f},\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{e}_\beta)_{H\bar{\otimes}G} = (\boldsymbol{f},[\boldsymbol{A}^* + \overline{\sigma_\beta}\,\boldsymbol{I}']\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{e}_\beta)_{H\bar{\otimes}G} =$$

$$= ((\boldsymbol{f},\boldsymbol{e}_\beta)_G,[\boldsymbol{A}^* + \overline{\sigma_\beta}\,\boldsymbol{I}']\boldsymbol{p})_H \quad (\beta \in \mathrm{B}). \tag{5}$$

Кроме того, имеем

$$([\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}]\boldsymbol{f},\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{e}_\beta)_{H\bar{\otimes}G} = (([\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}]\boldsymbol{f},\boldsymbol{e}_\beta)_G,\boldsymbol{p})_H \quad (\beta \in \mathrm{B}). \tag{6}$$

Принимая во внимание произвольность элемента $\boldsymbol{p} \in D(\boldsymbol{A}^*)$, а также плотность множества $D(\boldsymbol{A}^*)$ в пространстве H вследствие замыкаемости оператора $\boldsymbol{A}$, при сравнении равенств (5) и (6) убеждаемся в справедливости соотношений (2).

В силу замкнутости ортонормированной системы $\{\boldsymbol{e}_\beta,\ \beta \in \mathrm{B}\}$ имеет место предельное соотношение $\sum_{\beta\in\mathrm{B}} \| ([\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}]\boldsymbol{f},\boldsymbol{e}_\beta)_G \|_H^2 < \infty$ [9, с. 137], которое с учетом (2) может быть записано в виде (3).

Достаточность. Пусть для элемента $\boldsymbol{f} \in H \bar{\otimes} G$ выполняются условия (2a) и (3). Обозначим через $\{\boldsymbol{d}_\alpha,\ \alpha \in \mathrm{A}\}$ произвольный ортонормированный базис в пространстве H. Тогда $\{\boldsymbol{d}_\alpha \otimes \boldsymbol{e}_\beta,\ \alpha \in \mathrm{A},\ \beta \in \mathrm{B}\}$ – ортонормированный базис в пространстве $H \bar{\otimes} G$. С учетом равенств Парсеваля:

$$\| [\bar{\boldsymbol{A}} + \sigma_\beta \boldsymbol{I}'](\boldsymbol{f},\boldsymbol{e}_\beta)_G \|_H^2 = \sum_{\alpha\in\mathrm{A}} | ([\bar{\boldsymbol{A}} + \sigma_\beta \boldsymbol{I}')(\boldsymbol{f},\mathbf{e}_\beta)_G,\boldsymbol{d}_\alpha)_H |^2 < \infty \quad (\beta \in \mathrm{B}),$$

предельное соотношение (3) может быть записано как

$$\sum_{\alpha\in\mathrm{A},\beta\in\mathrm{B}} | ([\bar{\boldsymbol{A}} + \sigma_\beta \boldsymbol{I}'](\boldsymbol{f},\boldsymbol{e}_\beta)_G,\boldsymbol{d}_\alpha)_H |^2 < \infty .$$

Вследствие полноты пространства $H \bar{\otimes} G$ отсюда можно сделать вывод, что существует элемент $\boldsymbol{g} \in H \bar{\otimes} G$, представимый в виде

$$\boldsymbol{g} = \sum_{\alpha\in\mathrm{A},\beta\in\mathrm{B}} ([\bar{\boldsymbol{A}} + \sigma_\beta \boldsymbol{I}'](\boldsymbol{f},\boldsymbol{e}_\beta)_G,\boldsymbol{d}_\alpha)_H\, \boldsymbol{d}_\alpha \otimes \boldsymbol{e}_\beta .$$

Суммируя по α, преобразуем последнее выражение:

$$\boldsymbol{g} = \sum_{\beta\in\mathrm{B}} [\bar{\boldsymbol{A}} + \sigma_\beta \boldsymbol{I}'](\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_\beta)_G \otimes \boldsymbol{e}_\beta .$$

Отсюда в силу замкнутости оператора $\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}$ имеем

$$\boldsymbol{g} = (\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}})\boldsymbol{f}, \ \boldsymbol{f} \in D(\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}).$$

Лемма полностью доказана.

Заметим, что формула (4) есть разложение оператора $\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}$ в прямую операторную сумму $\bigoplus\limits_{\beta\in\mathrm{B}} (\bar{\boldsymbol{A}} + \sigma_\beta \boldsymbol{I}')$, порождаемую спектральным разложением оператора $\boldsymbol{B}$.

Согласно лемме 1, область определения оператора $\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}$ может быть представлена в следующем виде:

$$D(\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}) = \left\{ \boldsymbol{f} \in H \bar{\otimes} G : (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_\beta)_G \in D(\bar{\boldsymbol{A}}) \ (\beta\in\mathrm{B}); \sum_{\beta\in\mathrm{B}} \| [\bar{\boldsymbol{A}} + \sigma_\beta \boldsymbol{I}'](\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_\beta)_G \|_H^2 < \infty \right\}. \quad (7)$$

Полагая $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}'$ ($\boldsymbol{O}'$ – нулевой оператор в пространстве H), получаем на основании формулы (7) область определения оператора $\boldsymbol{I}' \bar{\otimes} \boldsymbol{B}$:

$$D(\boldsymbol{I}' \bar{\otimes} \boldsymbol{B}) = \left\{ \boldsymbol{f} \in H \bar{\otimes} G : \sum_{\beta\in\mathrm{B}} |\sigma_\beta|^2 \| (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_\beta)_G \|_H^2 < \infty \right\}. \quad (8)$$

Аналогично, полагая $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}''$ ($\boldsymbol{O}''$ – нулевой оператор в пространстве G), имеем область определения оператора $\boldsymbol{A} \bar{\otimes} \boldsymbol{I}''$:

$$D(\boldsymbol{A} \bar{\otimes} \boldsymbol{I}'') = \left\{ \boldsymbol{f} \in H \bar{\otimes} G : (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_\beta)_G \in D(\bar{\boldsymbol{A}}) \ (\beta \in \mathrm{B}); \sum_{\beta\in\mathrm{B}} \| \bar{\boldsymbol{A}} (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_\beta)_G \|_H^2 < \infty \right\}. \quad (9)$$

Заметим, что в качестве $\{ \boldsymbol{e}_\beta, \ \beta \in \mathrm{B} \}$ в формуле (9) может быть использован произвольный ортонормированный базис в пространстве G.

Теорема 1. Пусть $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ – линейные, всюду плотно определенные и замыкаемые в соответствующих гильбертовых пространствах H и G операторы, причем ортонормированная система $\{ \boldsymbol{e}_\beta, \ \beta \in \mathrm{B} \}$ собственных функций оператора $\boldsymbol{B}$ образует базис в пространстве G. Кроме того, операторы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ удовлетворяют соотношениям

$$\mathrm{Re}(\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p})_H \ge \omega'(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p})_H \ \ (\boldsymbol{p} \in D(\bar{\boldsymbol{A}})),$$
$$\mathrm{Re}(\bar{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q})_G \ge \omega''(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q})_G \ \ (\boldsymbol{q} \in D(\bar{\boldsymbol{B}})) \quad (10)$$

при некоторых фиксированных $\omega', \omega'' \in \boldsymbol{R} \equiv (-\infty, +\infty)$ и хотя бы одному из условий

$$(\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p})_H \in \boldsymbol{R} \ \ (\boldsymbol{p} \in D(\bar{\boldsymbol{A}})), \ (\bar{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q})_G \in \boldsymbol{R} \ \ (\boldsymbol{q} \in D(\bar{\boldsymbol{B}})). \quad (11)$$

Тогда имеет место равенство

$$\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}. \quad (12)$$

Доказательство. Рассмотрим сначала частный случай, когда $\omega' = \omega'' = 0$. Неравенства (10) при этом принимают вид

$$\mathrm{Re}(\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p})_H \ge 0 \ \ (\boldsymbol{p} \in D(\bar{\boldsymbol{A}})), \quad \mathrm{Re}(\bar{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q})_G \ge 0 \ \ (\boldsymbol{q} \in D(\bar{\boldsymbol{B}})). \quad (13)$$

Поскольку выполняется одно из условий (11), то имеют место следующие оценки:

$$\| \overline{A}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{e}_\beta)_G \|_H^2 \le \| [\overline{A}+\sigma_\beta \boldsymbol{I}'](\boldsymbol{f},\boldsymbol{e}_\beta)_G \|_H^2 ,$$

$$|\sigma_\beta|^2 \| (\boldsymbol{f},\boldsymbol{e}_\beta)_G \|_H^2 \le \| [\overline{A}+\sigma_\beta \boldsymbol{I}'](\boldsymbol{f},\boldsymbol{e}_\beta)_G \|_H^2 , \qquad (14)$$

где $\boldsymbol{f} \in D(\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}})$ ($\beta \in \mathrm{B}$). На основании формул (7) – (9) и оценок (14) получаем следующие включения:

$$D(\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}) \subseteq D(\boldsymbol{A}\overline{\otimes}\boldsymbol{I}''), \; D(\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}) \subseteq D(\boldsymbol{I}'\overline{\otimes}\boldsymbol{B}).$$

В силу противоположного включения (1) это означает, что $D(\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}) = D(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$, следовательно, имеет место равенство (12).

Рассмотрим теперь общий случай: $\omega',\omega'' \in \boldsymbol{R}$. С помощью равенств $\boldsymbol{A}_\omega = \boldsymbol{A} - \omega'\boldsymbol{I}'$, $\boldsymbol{B}_\omega = \boldsymbol{B} - \omega''\boldsymbol{I}''$ зададим операторы $\boldsymbol{A}_\omega$, $\boldsymbol{B}_\omega$ на множествах $D(\boldsymbol{A})$, $D(\boldsymbol{B})$ соответственно. Операторы $\boldsymbol{A}_\omega$, $\boldsymbol{B}_\omega$ удовлетворяют условиям теоремы, причем для них справедливы неравенства (13). По доказанному имеем $\overline{\boldsymbol{A}_\omega + \boldsymbol{B}_\omega} = \boldsymbol{A}_\omega + \boldsymbol{B}_\omega$. Отсюда, учитывая, что $\boldsymbol{A}\overline{\otimes}\boldsymbol{I}'' = \boldsymbol{A}_\omega \overline{\otimes}\boldsymbol{I}'' + \omega'\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{I}'\overline{\otimes}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}'\overline{\otimes}\boldsymbol{B}_\omega + \omega''\boldsymbol{I}$, $\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}_\omega + \boldsymbol{B}_\omega} + (\omega'+\omega'')\boldsymbol{I}$ ($\boldsymbol{I}$ – тождественный оператор в пространстве $H\overline{\otimes}G$), приходим к равенству (12). Теорема доказана.

Известно [10, с. 202], что если операторы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ являются генераторами C_0-полугрупп $\boldsymbol{T_A}(\tau)$ и $\mathbf{T}_{\boldsymbol{B}}(\tau)$: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{f} = \lim\limits_{\tau\to+0} \tau^{-1}(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{T_A}(\tau)\boldsymbol{f})$ ($\boldsymbol{f} \in D(\boldsymbol{A})$), то операторы $\boldsymbol{T_A}(\tau)\boldsymbol{T_B}(\tau) = \boldsymbol{T_A}(\tau)\overline{\otimes}\boldsymbol{T_B}(\tau)$ образуют C_0-полугруппу, а тензорная сумма $\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}$ является ее генератором.

Следствие 1. Пусть линейные операторы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}_i$ ($i = \overline{1,n}$), действующие в соответствующих гильбертовых пространствах H и G_i, являются генераторами соответствующих C_0-полугрупп $\boldsymbol{T_A}(\tau)$ и $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{B}_i}(\tau)$ с условиями

$$\|\boldsymbol{T_A}(\tau)\| \le e^{\omega'\tau}, \; \|\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{B}_i}(\tau)\| \le e^{\omega_i''\tau}, \qquad (15)$$

при некоторых фиксированных $\omega',\omega_i'' \in \boldsymbol{R}$, причем операторы $\boldsymbol{B}_i$ самосопряжены и имеют чисто точечные спектры. Тогда справедливы равенства

$$\boldsymbol{C}_\Sigma \equiv \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2+\ldots+\boldsymbol{B}_n = \overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2+\ldots+\boldsymbol{B}_n}, \qquad (16)$$

и оператор $\boldsymbol{C}_\Sigma$ является генератором C_0-полугруппы $\boldsymbol{T}_\Sigma(\tau) \equiv \boldsymbol{T_A}(\tau)\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{B}_1}(\tau)\ldots\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{B}_n}(\tau)$.

Доказательство. Линейные операторы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}_i$, будучи генераторами C_0-полугрупп, всюду плотно определены в соответствующих пространствах H и G_i и замкнуты, причем в силу условий (15) для операторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}_i$ выполнены неравенства вида (10) [11, с. 112]. Так как операторы $\boldsymbol{B}_i$ самосопряжены, то для них выполнены условия вида (11). В силу того, что самосопряженные операторы $\boldsymbol{B}_i$ обладают чисто точечными спектрами, ортонормированные системы их собственных функций образуют базисы в соответствующих пространствах G_i. Учитывая также, что тензорная сумма генераторов C_0-полугрупп сама является генератором C_0-полугруппы, на основании теоремы 1 последовательно получаем равенства

$\boldsymbol{A}_i \equiv \boldsymbol{A}_{i-1} + \boldsymbol{B}_i = \overline{\boldsymbol{A}_{i-1} + \boldsymbol{B}_i}$ ($i = \overline{1,n}$, $\boldsymbol{A}_0 \equiv \boldsymbol{A}$), так как для операторов $\boldsymbol{A}_i$ выполняются те же условия теоремы 1, что и для оператора $\boldsymbol{A}$. Равенство $\boldsymbol{A}_n = \overline{\boldsymbol{A}_{n-1} + \boldsymbol{B}_n}$ совпадает с равенством (16). Утверждение доказано.

Замкнутость сумм неограниченных операторов, действующих по разным переменным в пространствах квадратично суммируемых функций нескольких переменных

Пусть Ω' и Ω'' – некоторые измеримые по Лебегу множества в метрических пространствах $\boldsymbol{R}^m$ и $\boldsymbol{R}^n$. Далее будут рассматриваться комплексные гильбертовы пространства $L_2(\Omega')$, $L_2(\Omega'')$, $L_2(\Omega' \times \Omega'')$. Между пространствами $L_2(\Omega') \overline{\otimes} L_2(\Omega'')$ и $L_2(\Omega' \times \Omega'')$ существует изоморфизм $\boldsymbol{U}$, такой, что выполняется равенство $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{q}) = \boldsymbol{p}\boldsymbol{q}$ для произвольных $\boldsymbol{p} \in L_2(\Omega')$ и $\boldsymbol{q} \in L_2(\Omega'')$ [8, с. 67]. На основании такого изоморфизма в пространство $L_2(\Omega' \times \Omega'')$ переносится ряд понятий, связанных с тензорными произведениями гильбертовых пространств. Так, например, векторнозначное скалярное произведение $(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{p})_{L_2(\Omega')}$ для произвольных $f(x', x'') \in L_2(\Omega' \times \Omega'')$ и $p(x') \in L_2(\Omega')$ задается при помощи равенства $(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{p})_{L_2(\Omega')}(x'') = \int_{\Omega'} \boldsymbol{f}(x', x'')\boldsymbol{p}(x')\,dx'$. Здесь $x' = (x'_1, x'_2, ..., x'_m)$, $x'' = (x''_1, x''_2, ..., x''_n)$ ($x'_i, x''_j \in \boldsymbol{R}$).

Кроме того, существует естественный изоморфизм между пространством $L_2(\Omega' \times \Omega'')$ и $L_2(\Omega'', L_2(\Omega'))$ – пространством квадратично суммируемых на Ω'' векторнозначных функций $\boldsymbol{f}(y)$ со значениями в $L_2(\Omega')$. Такой изоморфизм переводит $f(t, y) \in L_2(\Omega' \times \Omega'')$ в $\boldsymbol{f}(y) \in L_2(\Omega'', L_2(\Omega'))$. Поэтому условимся там, где это необходимо, рассматривать элементы $L_2(\Omega' \times \Omega'')$ как векторнозначные функции $\boldsymbol{f}(y)$.

Пусть $\boldsymbol{A}$ – произвольный линейный оператор в пространстве $L_2(\Omega')$. Определим в пространстве $L_2(\Omega' \times \Omega'')$ оператор $\tilde{\boldsymbol{A}}$ на основе равенств

$$(\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{f})(x'') = \boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(x'') \quad (\boldsymbol{f} \in D(\tilde{\boldsymbol{A}}),\ x'' \in \Omega''). \tag{17}$$

Равенства (17) означают, что элемент $\boldsymbol{f} \in L_2(\Omega' \times \Omega'')$, представленный некоторой функцией $\boldsymbol{f}(x'')$ со значениями в $D(\boldsymbol{A})$, принадлежит области определения $D(\tilde{\boldsymbol{A}})$, если существует элемент $\boldsymbol{g} \in L_2(\Omega' \times \Omega'')$, представленный такой функцией $\boldsymbol{g}(x'')$, что почти всюду по мере Лебега на множестве Ω'' выполняются поточечные равенства $\boldsymbol{g}(x'') = \boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(x'')$. Тогда $\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}$.

Определенный таким образом оператор $\tilde{\boldsymbol{A}}$ однозначен, т.е. определен корректно, и линеен.

Теорема 2. Пусть $\boldsymbol{A}$ – замкнутый, вообще говоря, неограниченный оператор со всюду плотной в пространстве $L_2(\Omega')$ областью определения, имеющий хотя бы одну резольвентную точку. Тогда $\hat{\boldsymbol{A}} = \tilde{\boldsymbol{A}}$, где $\hat{\boldsymbol{A}} \equiv \boldsymbol{U}(\boldsymbol{A} \overline{\otimes} \boldsymbol{I}'')\boldsymbol{U}^{-1}$.

Доказательство. Рассмотрим сначала частный случай, когда оператор $\boldsymbol{A}$ ограничен и всюду определен в пространстве $L_2(\Omega')$. Имеем равенства:

$$((\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{f},\boldsymbol{p})_{L_2(\Omega')},\boldsymbol{q})_{L_2(\Omega'')} = ((\boldsymbol{f},\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{p})_{L_2(\Omega')},\boldsymbol{q})_{L_2(\Omega'')},$$

где $\boldsymbol{f} \in L_2(\Omega' \times \Omega'')$, $\boldsymbol{p} \in L_2(\Omega')$, $\boldsymbol{q} \in L_2(\Omega'')$). Отсюда получаем сначала $((\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{f})(x''),\boldsymbol{p})_{L_2(\Omega')} = (\boldsymbol{f}(x''),\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{p})_{L_2(\Omega')}$ в силу произвольности $\boldsymbol{q} \in L_2(\Omega'')$, затем $(\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{f})(x'') = \boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(x'')$ в силу произвольности $\boldsymbol{p} \in L_2(\Omega')$ ($x'' \in \Omega''$) и, наконец, $\hat{\boldsymbol{A}} = \tilde{\boldsymbol{A}}$ в силу произвольности $\boldsymbol{f} \in L_2(\Omega' \times \Omega'')$. Таким образом, если оператор $\boldsymbol{A}$ ограничен и всюду определен в $L_2(\Omega')$, то $\hat{\boldsymbol{A}} = \tilde{\boldsymbol{A}}$.

Пусть теперь $\boldsymbol{A}$ – замкнутый, вообще говоря, неограниченный оператор со всюду плотной в пространстве $L_2(\Omega')$ областью определения, имеющий хотя бы одну резольвентную точку λ. Введем обозначения $\boldsymbol{R}_\lambda \equiv (\lambda \boldsymbol{I}' - \boldsymbol{A})^{-1}$ и $\hat{\boldsymbol{R}}_\lambda \equiv \boldsymbol{U}(\boldsymbol{R}_\lambda \overline{\otimes} \boldsymbol{I}'')\boldsymbol{U}^{-1}$. Так как оператор $\boldsymbol{R}_\lambda$ ограничен и всюду определен в пространстве $L_2(\Omega')$, то по доказанному выполняются соотношения $(\hat{\boldsymbol{R}}_\lambda \boldsymbol{f})(x'') = \boldsymbol{R}_\lambda \boldsymbol{f}(x'')$ ($\boldsymbol{f} \in L_2(\Omega' \times \Omega'')$), используя которые, приходим к равенствам

$$([\lambda \boldsymbol{I} - \tilde{\boldsymbol{A}}]\hat{\boldsymbol{R}}_\lambda \boldsymbol{f})(x'') = (\lambda \boldsymbol{I}' - \boldsymbol{A})\boldsymbol{R}_\lambda \boldsymbol{f}(x'') = \boldsymbol{f}(x'') \quad (\boldsymbol{f} \in L_2(\Omega' \times \Omega'')),$$

$$(\hat{\boldsymbol{R}}_\lambda [\lambda \boldsymbol{I} - \tilde{\boldsymbol{A}}]\boldsymbol{f})(x'') = \boldsymbol{R}_\lambda (\lambda \boldsymbol{I}' - \boldsymbol{A})\boldsymbol{f}(x'') = \boldsymbol{f}(x'') \quad (\boldsymbol{f} \in D(\tilde{\boldsymbol{A}})). \qquad (18)$$

Так как оператор $\hat{\boldsymbol{R}}_\lambda$ ограничен ($\|\hat{\boldsymbol{R}}_\lambda\| = \|\boldsymbol{R}_\lambda\|$), то равенства (18) означают, что $\hat{\boldsymbol{R}}_\lambda$ является резольвентой оператора $\tilde{\boldsymbol{A}}$ в точке λ. С другой стороны, $\hat{\boldsymbol{R}}_\lambda = (\lambda \boldsymbol{I} - \hat{\boldsymbol{A}})^{-1}$, следовательно, $\hat{\boldsymbol{A}} = \tilde{\boldsymbol{A}}$. Теорема доказана.

Следствие 2. Пусть линейный оператор $\boldsymbol{A}$, действующий в пространстве $L_2(\Omega')$, является генератором C_0-полугруппы $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{A}}(\tau)$. С помощью операторов $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{A}}(\tau)$ на основании равенств типа (17) в пространстве $L_2(\Omega' \times \Omega'')$ определены соответствующие операторы $\tilde{\boldsymbol{A}}$, $\tilde{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{A}}(\tau)$. Тогда операторы $\tilde{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{A}}(\tau)$ образуют C_0-полугруппу, генератором которой является оператор $\tilde{\boldsymbol{A}}$.

Доказательство. В самом деле, поскольку оператор $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}''$ является генератором C_0-полугруппы $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{B}}(\tau) = \boldsymbol{I}''$, то оператор $\overline{\boldsymbol{A} + \boldsymbol{O}''} = \boldsymbol{A} \overline{\otimes} \boldsymbol{I}''$ является генератором C_0-полугруппы $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{A}}(\tau) \overline{\otimes} \boldsymbol{I}''$. Утверждение доказано.

С учетом следствия 1 получаем следующее утверждение:

Следствие 3. Пусть линейные операторы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}_i$ ($i = \overline{1,n}$), действующие в соответствующих пространствах $L_2(\Omega')$ и $L_2(\Omega_i'')$, являются генераторами соответствующих C_0-полугрупп $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{A}}(\tau)$ и $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{B}_i}(\tau)$ с условиями

$$\|\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{A}}(\tau)\| \le e^{\omega'\tau}, \quad \|\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{B}_i}(\tau)\| \le e^{\omega_i''\tau},$$

при некоторых фиксированных $\omega', \omega_i'' \in \boldsymbol{R}$, причем операторы $\boldsymbol{B}_i$ самосопряжены и имеют чисто точечные спектры. С помощью перечисленных операторов на основании равенств типа (17) в пространстве $L_2(\Omega' \times \Omega_1'' \times \ldots \times \Omega_n'')$

определены соответствующие операторы $\tilde{\boldsymbol{A}}$, $\tilde{\boldsymbol{B}}_i$, $\tilde{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{A}}(\tau)$ и $\tilde{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{B}_i}(\tau)$. Тогда операторы $\tilde{\boldsymbol{T}}_\Sigma(\tau) \equiv \tilde{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{A}}(\tau)\tilde{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{B}_1}(\tau)...\tilde{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{B}_n}(\tau)$ образуют C_0-полугруппу, а оператор $\tilde{\boldsymbol{C}}_\Sigma \equiv \tilde{\boldsymbol{A}} + \tilde{\boldsymbol{B}}_1 + ... + \tilde{\boldsymbol{B}}_n$, определенный на пересечении областей определения операторов $\tilde{\boldsymbol{A}}$ и $\tilde{\boldsymbol{B}}_i$ ($i = \overline{1,n}$), замкнут и является генератором этой C_0-полугруппы.

Замкнутые суммы дифференциальных операторов, действующих по разным переменным в пространствах L_2

Оператор $\boldsymbol{D}_\Sigma$, определенный во введении, согласно следствию 3, замкнут. Действительно, $\boldsymbol{D}_t = \tilde{\boldsymbol{A}}_t$ и $\boldsymbol{D}_y = \tilde{\boldsymbol{B}}_y$, где оператор $\boldsymbol{A}_t$: $(\boldsymbol{A}_t \boldsymbol{f})(t) = f'(t)$, определен на абсолютно непрерывных функциях $f(t) \in L_2(I_T)$, таких, что $f'(t) \in L_2(I_T)$ и $f(0) = 0$, а также на эквивалентных им; оператор $\boldsymbol{B}_y$: $\left(\boldsymbol{B}_y \boldsymbol{f}\right)(y) = -f''(y)$, задан на абсолютно непрерывно дифференцируемых функциях $f(y) \in L_2(I_Y)$, таких, что $f''(y) \in L_2$ и $f'(0) - \lambda_0 f(0) = 0$, $f'(0) + \lambda_Y f(0) = 0$, а также на эквивалентных им. Оператор $\boldsymbol{A}_t$ является генератором C_0-полугруппы правых сдвигов $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{A}_t}(\tau)$: $\left(\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{A}_t}(\tau)\boldsymbol{f}\right)(t) = f(t-\tau)$ при $\tau < t$ и $\left(\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{A}_t}(\tau)\boldsymbol{f}\right)(t) = 0$ при $\tau \ge t$ [12, с. 189]. Оператор $\boldsymbol{B}_y$ самосопряжен и имеет неотрицательный чисто точечный спектр [13, с. 224]. Вследствие этого оператор $\boldsymbol{B}_y$ также является генератором сжимающей C_0-полугруппы, допускающей спектральное разложение по собственным функциям оператора $\boldsymbol{B}_y$.

Введем в рассмотрение самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы $\boldsymbol{B}_m$ ($m \in \boldsymbol{N} \equiv \{1,2,...\}$), имеющие чисто точечные спектры и полуограниченные снизу, которые согласно [14, с. 123], задаются с помощью самосопряженного дифференциального выражения

$$(-1)^m \left(p_0 f^{(m)}\right)^{(m)} + (-1)^{(m-1)}\left(p_1 f^{(m-1)}\right)^{(m-1)} + ... + p_m f$$

на функциях $\boldsymbol{f} \in L_2(I_Y)$ (и на эквивалентных им), имеющих квазипроизводные $f^{[k]}$ ($k = \overline{0,2m}$):

$$f^{[0]} = f\,,\ f^{[k]} = f^{(k)}\ (k = \overline{1,m-1}),\ f^{[m]} = p_0 f^{(m)},$$

$$f^{[m+k]} = p_k f^{(m-k)} - \left(f^{[m+k-1]}\right)' \quad (k = \overline{1,m}), \tag{19}$$

абсолютно непрерывные до порядка $2m-1$ включительно, и $f^{[2m]} \in L_2(I_Y)$. При этом функции $f(y)$ удовлетворяют системе граничных условий

$$\sum_{k=1}^{2m}\left[\alpha_{jk} f^{[k-1]}(0) + \beta_{jk} f^{[k-1]}(Y)\right] = 0 \quad (j = \overline{1,2m}),$$

где

$$\sum_{l=1}^{m}\left[\alpha_{jl}\overline{\alpha_{k,2m-l+1}} - \alpha_{j,2m-l+1}\overline{\alpha_{kl}}\right] = \sum_{l=1}^{m}\left[\beta_{jl}\overline{\beta_{k,2m-l+1}} - \beta_{j,2m-l+1}\overline{\beta_{kl}}\right] \quad (j,k = \overline{1,2m}).$$

Коэффициенты $p_i(y)$ ($i=\overline{0,m}$) имеют на I_Y непрерывные производные порядка $m-i$, функция $1/p_0(y)$ суммируема на I_Y и $p_0(y)>0$.

Операторы $\boldsymbol{B}_m$ порождают C_0-полугруппы, для которых выполнены условия (15). Одним из представителей операторов $\boldsymbol{B}_m$ при $m=1$ является оператор $\boldsymbol{B}_y$. Согласно следствию 3, операторы $\tilde{\boldsymbol{A}}_t+\tilde{\boldsymbol{B}}_m$ замкнуты. Заметим, что операторы типа $\tilde{\boldsymbol{B}}_m$, действующие по разным переменным, между собой также образуют замкнутые суммы.

Определим гладкость функций, входящих в области определения операторов $\left(\tilde{\boldsymbol{A}}_t+\tilde{\boldsymbol{B}}_m\right)^n$ при $n\ge 2$. В соответствии с [15, с. 246] введем понятие абсолютно непрерывной функции двух переменных:

Определение. Функция $f(y,t)$ называется абсолютно непрерывной функцией на множестве $I_Y\times I_T$, если:

(i) для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, такое, что если J_k ($k=\overline{1,n}$) – непересекающиеся между собой множества вида $J\equiv(y_1,y_2)\times(t_1,t_2)$ ($0\le y_1<y_2\le Y$, $0\le t_1<t_2\le T$), сумма площадей которых меньше δ, то выполнено неравенство $\left|\sum_{k=1}^{n}F(J_k)\right|<\varepsilon$, где

$$F(J)\equiv f(y_2,t_2)-f(y_1,t_2)-f(y_2,t_1)+f(y_1,t_1);$$

(ii) $f(0,t)$ и $f(y,0)$ – абсолютно непрерывные функции переменных t и y соответственно.

Лемма 2. Пусть функция $f(y,t)\in L_1(I_Y\times I_T)$ при почти всех $y\in I_Y$ абсолютно непрерывна по $t\in I_T$, а при почти всех $t\in I_T$ абсолютно непрерывна по $y\in I_Y$. Кроме того, пусть функция $f_t\equiv\partial_t f$ при почти всех $t\in I_T$ абсолютно непрерывна по $y\in I_Y$, а функция $f_{ty}\equiv\partial_y f_t$ абсолютно суммируема на $I_Y\times I_T$. Тогда функция $f_y\equiv\partial_y f$ абсолютно непрерывна по $t\in I_T$ при почти всех $y\in I_Y$, функции f_{ty} и $f_{yt}\equiv\partial_t f_y$ равны при почти всех $y\in I_Y$ и любых $t\in I_T$, а сама функция f при почти всех $y\in I_Y$ и всех $t\in I_T$ совпадает с некоторой абсолютно непрерывной на $I_Y\times I_T$ функцией.

Доказательство. Пусть числа $y_0\in I_Y$ и $t_0\in I_T$ таковы, что функция $f(y_0,t)$ абсолютно непрерывна по $t\in I_T$, а функция $f(y,t_0)$ абсолютно непрерывна по $y\in I_Y$. Так как функция f_t абсолютно непрерывна по $y\in I_Y$ при почти всех $t\in I_T$, то

$$g(y,t)\equiv\iint\limits_{[y_0,y]\times[t_0,t]} f_{ty}(t',y')\,dt'dy'=\int_{t_0}^{t}f_t(y.t')\,dt'-\int_{t_0}^{t}f_t(y_0,t')\,dt'$$

при $(y,t)\in I_Y\times I_T$. Так как функция $f(y_0,t)$ абсолютно непрерывна по $t\in I_T$, то

$$f(y,t)=f(y,t_0)+f(y_0,t)-f(y_0,t_0)+g(y,t) \qquad (20)$$

при почти всех $y \in I_Y$ и любых $t \in I_T$. Так как функция $f(y,t_0)$ абсолютно непрерывна по $y \in I_Y$ и $g(y,t) = \int_{y_0}^{y} \int_{t_0}^{t} f_{ty}(y',t')dt'dy'$, то

$$f_y(y,t) = f_y(y,t_0) + \int_{t_0}^{t} f_{ty}(y,t')\,dt'$$

при почти всех $y \in I_Y$ и любых $t \in I_T$. Следовательно, функция f_y абсолютно непрерывна по $t \in I_T$ при почти всех $y \in I_Y$, и равенство $f_{yt} = f_{ty}$ выполнено при почти всех $y \in I_Y$ и любых $t \in I_T$.

Зададим с помощью правой части равенства (20) функцию $\tilde{f}(y,t)$, непрерывную на $I_Y \times I_T$ и совпадающую при почти всех $y \in I_Y$ и всех $t \in I_T$ с функцией $f(y,t)$. Покажем, что функция $\tilde{f}(y,t)$ абсолютно непрерывна. Для одномерных функций $f(y,t_0)$ и $f(y_0,t)$ условие абсолютной непрерывности (i) выполняется тождественно, а для неопределенного интеграла $g(y,t)$ – в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега, по аналогии с одномерным случаем [16, с. 345]. Функция $\tilde{f}(0,t)$ может быть представлена в виде

$$f(0,t) = f(y_0,t) + \int_{t_0}^{t} h(t')dt' + C \quad \left(h(t) \equiv \int_{y_0}^{0} f_{ty}(y',t)dy' \in L_1(I_T)\right.,$$
$$\left. C \equiv f(0,t_0) - f(y_0,t_0) \right),$$

вследствие чего она абсолютно непрерывна по $t \in I_T$. Аналогичным образом абсолютно непрерывна по $y \in I_Y$ функция $\tilde{f}(y,0)$, поэтому условие (ii) для функции $\tilde{f}(y,t)$ также выполнено. Лемма доказана.

Потребуем дополнительно для операторов $\boldsymbol{B}_m$, чтобы функция $p_0(y)$ не имела нулей на множестве I_Y. Тогда в силу теоремы 1 [15, с. 234] и равенств (19) производные $f^{(k)}$ функции $f(y) \in D(\boldsymbol{B}_m)$, как и квазипроизводные $f^{[k]}$, абсолютно непрерывны до порядка $2m-1$ включительно и $f^{(2m)} \in L_2(I_Y)$. С учетом леммы 2 получаем утверждение:

Теорема 3. Если $f(y,t) \in D\left(\left(\tilde{\boldsymbol{A}}_t + \tilde{\boldsymbol{B}}_m\right)^n\right)$ ($m \in \boldsymbol{N}$, $n \geq 2$), то почти всюду на $I_Y \times I_T$ существуют производные $\partial_t^{l-1}\partial_y^{2m(n-l)-1} f$ ($l = \overline{1, n-1}$), эквивалентные абсолютно непрерывным на $I_Y \times I_T$ функциям.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность. М.: Мир, 1978. 400 с.
2. *Клемент Ф., Хейманс Х., Ангенент С., Дуйн К., Пахтер Б.* Однопараметрические уравнения. Абстрактные дифференциальные уравнения с приложениями. М.: Мир, 1992. 351 с.
3. *Иванов Д.Ю.* Решение двумерных краевых задач, соответствующих начально-краевым задачам диффузии на прямом цилиндре // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 8. С. 1094–1103.

4. *Иванов Д.Ю.* Использование векторных потенциалов для решения двумерной задачи Робена, описывающей теплопроводность в прямом цилиндре // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. 2016. № 3. С. 8–14.
5. *Иванов Д.Ю.* Экономичный метод вычисления операторов, разрешающих некоторые задачи теплопроводности в прямых цилиндрах // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. 2014. № 9. С. 16–32.
6. *Иванов Д.Ю.* Вычисление операторов, разрешающих задачи теплопроводности в прямых цилиндрах, с использованием полугрупповой симметрии // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2014. Т. 4. № 4(22). С. 26–38.
7. *Иванов Д.Ю.* Устойчивая разрешимость в пространствах дифференцируемых функций некоторых двумерных интегральных уравнений теплопроводности с операторно-полугрупповым ядром // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 6(38). С. 33–45.
8. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977. 360 с.
9. *Лянце В.Э., Сторож О.Г.* Методы теории неограниченных операторов. Киев: Наукова думка, 1982. 210 с.
10. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982. 428 с.
11. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.
12. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
13. *Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н.* Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1979. 685 с.
14. *Виленкин Н.Я., Горин Е.А., Костюченко А.Г., Красносельский М.А., Крейн С.Г. и др.* Функциональный анализ. Серия: Справочная математическая библиотека / под ред. С.Г. Крейна. М.: Наука, 1964. 425 с.
15. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 5. М.: ГИФМЛ, 1959. 655 с.
16. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 543 с.

Статья поступила 03.10.2016 г.

Ivanov D.Y. (2017) CLOSEDNESS OF SUMS OF UNBOUNDED OPERATORS ACTING ON DIFFERENT VARIABLES IN THE SPACES OF SQUARE-INTEGRABLE FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 45. pp. 35–48

DOI 10.17223/19988621/45/3

Let Ω' and Ω'' be some Lebesgue measurable sets in the metric spaces $\boldsymbol{R}^m$ and $\boldsymbol{R}^n$, respectively, and $\boldsymbol{A}$ be a linear operator in the space $L_2(\Omega')$. We define an operator $\tilde{\boldsymbol{A}}$ in the space $L_2(\Omega'\times\Omega'')$ on the basis of equalities

$$(\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{f})(x'') = \boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(x'') \quad (\boldsymbol{f}\in D(\tilde{\boldsymbol{A}}),\ x''\in\Omega''),$$

where $D(\tilde{\boldsymbol{A}})$ is the domain of the operator $\tilde{\boldsymbol{A}}$. These equations mean that an element $\boldsymbol{f}\in L_2(\Omega'\times\Omega'')$ represented by a function $\boldsymbol{f}(x'')$ with values in $D(\boldsymbol{A})$ belongs to the set $D(\tilde{\boldsymbol{A}})$ if there exists an element $\boldsymbol{g}\in L_2(\Omega'\times\Omega'')$ represented by the function $\boldsymbol{g}(x'')$ such that the pointwise equalities $\boldsymbol{g}(x'') = \boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(x'')$ are satisfied almost everywhere in the Lebesgue measure on the set Ω''. Then, $\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}$. Similarly, using a linear operator $\boldsymbol{B}$ acting in the space $L_2(\Omega'')$, we define an operator $\tilde{\boldsymbol{B}}$ in the space $L_2(\Omega'\times\Omega'')$. It is proved that the sum of operators $\tilde{\boldsymbol{A}}+\tilde{\boldsymbol{B}}$ defined on the set $D\left(\tilde{\boldsymbol{A}}\right)\cap D\left(\tilde{\boldsymbol{B}}\right)$ is closed if the operators $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$ are generators of some C_0-

semigroups of contractions; here, the operator $\boldsymbol{B}$ is selfadjoint and has a purely point spectrum. For example, if the operator $\boldsymbol{A}_t$, $(\boldsymbol{A}_t\boldsymbol{f})(t)=f'(t)$, is defined on absolutely continuous functions $f(t)\in L_2(I_T)$ ($I_T\equiv[0,T]$) such that $f'(t)\in L_2(I_T)$ and $f(0)=0$, as well as on equivalent functions and operator $\boldsymbol{B}_y$, $(\boldsymbol{B}_y\boldsymbol{f})(y)=-f''(y)$, is defined on absolutely continuously differentiable functions $f(y)\in L_2(I_Y)$ ($I_Y\equiv[0,Y]$) such that $f''(y)\in L_2$ and $f'(0)-\lambda_0 f(0)=0$, $f'(0)+\lambda_Y f(0)=0$ ($0\le\lambda_0,\lambda_Y\le\infty$), as well as on equivalent functions, the sum of differential operators $\tilde{\boldsymbol{A}}_t+\tilde{\boldsymbol{B}}_y$ is closed. The closure of the operator $\tilde{\boldsymbol{A}}_t+\tilde{\boldsymbol{B}}_y$ is used as a coefficient in operator-differential equations in the formulation of problems of multidimensional non-stationary heat conduction. We have studied smoothness of functions included in the domains of powers of operators $\tilde{\boldsymbol{A}}_t+\tilde{\boldsymbol{B}}_y$. It is proved that if $f(y,t)\in D\left(\left(\tilde{\boldsymbol{A}}_t+\tilde{\boldsymbol{B}}_y\right)^n\right)$ ($n\ge 2$), then, almost everywhere on the set $I_Y\times I_T$, there exist derivatives $\partial_t^{l-1}\partial_y^{2(n-l)-1}f$ ($l=\overline{1,n-1}$) equivalent to functions absolutely continuous on $I_Y\times I_T$.

Keywords: closed linear operator, sum of operators, generator of C_0-semigroup, domain of definition of operator.

IVANOV Dmitrii Yurievich (Candidate of Physics and Mathematics,
Moscow State Academy of Water Transport, Moscow, Russian Federation)
E-mail: ivanovdyu@yandex.ru

REFERENCES

1. Reed M., Simon B. (1975) *Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 2. Fourier Analysis, Self-adjointness.* New York; London: Academic Press.
2. Clément Ph., Heijmans H.J.A.M., Angenent S., Duijn C.J. van and Pagter B. de (1987) *One-parameter Semigroups*. CWI Monographs 5. Amsterdam; New York: Noth Holland.
3. Ivanov D.Yu. (2010) Solution of two-dimensional boundary-value problems corresponding to initial-boundary value problems of diffusion on a right cylinder. *Differential Equations.* 8(46). pp. 1104–1113. DOI: 10.1134/S0012266110080045.
4. Ivanov D.Yu. (2016) Ispolzovanie vektornykh potentsialov dlya resheniya dvumernoy zadachi Robena, opisyivayuschey teploprovodnost’ v pryamom tsilindre [Using of vector potentials for solving of the two-dimensional Robin problem describing the heat conductivity in a right cylinder]. *Aktual'nye problemy gumanitarnykh i estestvennykh nauk – Actual Problems of Humanitarian and Natural Sciences*. 3. pp. 8–14.
5. Ivanov D.Yu. (2014) Ehkonomichnyy metod vychisleniya operatorov, razreshayushchikh nekotorye zadachi teploprovodnosti v pryamykh tsilindrakh [An economical method of the calculation of operators resolving some heat conduction problems in straight cylinders]. *Aktual'nye problemy gumanitarnykh i estestvennykh nauk – Actual Problems of Humanitarian and Natural Sciences*. 9. pp. 16–32.
6. Ivanov D.Yu. (2014) Vychislenie operatorov, razreshayushchikh zadachi teploprovodnosti v pryamykh tsilindrakh, s ispol'zovaniem polugruppovoy simmetrii [Calculation of operators resolving problems of heat conduction in straight cylinders using the semigroup symmetry]. *Izvestiya Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta MAMI – Proceedings of Moscow State Technical University MAMI*. 4(4). pp. 26–38.
7. Ivanov D.Yu. (2015) Ustoychivaya razreshimost v prostranstvakh differentsiruemykh funktsiy nekotorykh dvumernykh integralnykh uravneniy teploprovodnosti s operatorno-polugruppovym yadrom [Stable solvability in spaces of differentiable functions of some two-dimensional integral equations of heat conduction with an operator-semigroup kernel]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State*

University Journal of Mathematics and Mechanics. 6(38). pp. 33–45. DOI 10.17223/19988621/38/4.
8. Reed M., Simon B. (1972) *Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 1. Functional Analysis*. New York; London: Academic Press.
9. Lyantse V.E., Storozh O.G. (1983) *Metody teorii neogranichennykh operatorov* [Methods of the Theory of Unbounded Operators]. Kiev: Naukova Dumka.
10. Reed M., Simon B. (1978) *Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 4. Analysis of Operators*. New York; London: Academic Press.
11. Kreyn S.G. (1967) *Lineynye differencial'nye uravneniya v banahovom prostranstve* [Linear Differential Equations in the Banach Space]. Moscow: Nauka.
12. Kato T. (1966) *Perturbation theory for linear operators*. Berlin; New York: Springer Verlag.
13. Budak B.M., Samarskiy A.A., Tikhonov A.N. (1979) *Sbornik zadach po matematicheskoy fizike* [Collection of Problems in Mathematical Physics]. Moscow: Nauka.
14. Vilenkin N.Ya., Gorin E.A., Kostyuchenko A.G., Krasnosel'skiy M.A., Kreyn S.G. et al. (1964) *Funktsionalnyy analiz* [Functional Analysis]. *Seriya: Spravochnaya matematicheskaya biblioteka* [Series: Reference mathematical library] (ed. Kreyn S.G.). Moscow: Nauka.
15. Smirnov V.I. (1959) *Kurs vysshey matematiki* [A Course of Higher Mathematics]. Vol. 5. Moscow: St. Publ. Phis. Math. Lit.
16. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. (1976) *Elementy teorii funktsiy i funktsionalnogo analiza* [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis]. Moscow: Nauka.