УДК 517.95
DOI 10.17223/19988621/45/4

Р.К. Тагиев, Р.А. Касумов

ОБ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ПОСТАНОВКЕ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Рассматривается оптимизационная постановка коэффициентной обратной задачи для параболического уравнения с дополнительным интегральным условием. Исследованы вопросы корректности оптимизационной постановки обратной задачи. Доказана дифференцируемость целевого функционала и найдена формула для его градиента. Установлено необходимое условие оптимальности в виде вариационного неравенства.

Ключевые слова: *оптимальное управление, параболическое уравнение, интегральное граничное условие, условие оптимальности.*

Обратные задачи для уравнений с частными производными могут быть сведены к задачам оптимального управления соответствующими системами. Например, обратные задачи для уравнений тепломассообмена могут рассматривается как задачи оптимального управления тепловыми режимами технических объектов. При этом управляющие воздействия обычно входят в коэффициенты уравнений тепломассообмена или граничные условия для них. Эти воздействия должны быть определены таким образом, чтобы удовлетворить условия. Обычно эти критерия качества составляются на основе дополнительных информации и их называют функционалами невязки, или целевыми функционалами.

Одним из основных типов обратных задач для уравнений с частными производными являются задачи, в которых подлежат определению коэффициенты уравнений или величин, в них входящих, по некоторой дополнительной информации. Такие задачи называются коэффициентными обратными задачами для уравнений с частными производными.

В работе А.Н.Тихонова [1] предложена идея использования методов теории оптимального управления для решения обратных задач. В работах [2–7] и др. обратные задачи об определении коэффициентов соответствующих уравнений с частными производными сводились к задачам оптимизации для этих уравнений с управлениями в коэффициентах, т.е. исследовались оптимизационные постановки коэффициентных обратных задач. Во многих этих работах дополнительные условия, по которым подлежат определению коэффициенты уравнений, являются локальными. Оптимизационные постановки коэффициентных обратных задач с дополнительными нелокальными условиями мало изучены.

В данной работе рассматривается оптимизационная постановка одной коэффициентной обратной задачи для параболического уравнения с целевым функционалом, соответствующим дополнительному интегральному условию. Исследованы вопросы корректности оптимизационной постановки обратной задачи. Доказана дифференцируемость по Фреше целевого функционала и найдено выражение для его градиента. Установлено необходимое условие оптимальности в виде вариационного неравенства.

1. Постановка задачи

Пусть управляемый процесс описывается в $Q_T = \{(x,t) \in R^2 : 0 < x < \ell, 0 < t < T\}$ следующей начально-краевой задачей для линейного параболического уравнения

$$u_t - (k(x,t)u_x)_x + q(x,t)u = f(x,t),\ (x,t) \in Q_T; \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x),\ 0 \le x \le \ell; \tag{2}$$

$$u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\ell} = 0,\ 0 < t \le T. \tag{3}$$

Здесь $\ell, T > 0$ – заданные числа, $f(x,t) \in L_2(Q_T)$, $\varphi(x) \in W_2^1(0,\ell)$ – заданные функции, $k(x,t)$, $q(x,t)$ – неизвестные коэффициенты, $\upsilon(x,t) = (k(x,t), q(x,t))$ – управление, $u = u(x,t) = u(x,t;\upsilon)$ – решение задачи (1) – (3) – состояние процесса, соответствующее управлению $\upsilon = \upsilon(x,t)$.

Введем множество допустимых управлений

$$V = \{\upsilon(x,t) = (k(x,t), q(x,t)) \in H = W_2^1(Q_T) \times L_2(Q_T) : 0 < \nu \le k(x,t) \le \mu,$$
$$|k_x(x,t)| \le \mu_1, |k_t(x,t)| \le \mu_2, 0 \le q_0 \le q(x,t) \le q_1 \text{ п.в.на } Q_T\}, \tag{4}$$

где $\mu \ge \nu > 0$, $\mu_1, \mu_2 > 0$, $q_1 \ge q_0 \ge 0$ – заданные числа.

Поставим следующую коэффициентную обратную задачу типа оптимального управления: среди всех допустимых управлений $\upsilon(x,t) = (k(x,t), q(x,t)) \in V$ найти управление $\upsilon_*(x,t) = (k_*(x,t), q_*(x,t)) \in V$, минимизирующее функционал

$$J(\upsilon) = \int_0^T \left| \int_0^\ell K(x,t)u(x,t;\upsilon)dx - E(t) \right|^2 dt, \tag{5}$$

где $K(x,t) \in L_\infty(Q_T)$, $E(t) \in L_2(0,T)$ – заданные функции, причем $|K(x,t)| \le \mu_3$, п.в. на Q_T, $\mu_3 = const > 0$. Эту задачу ниже будем называть задачей (1) – (5).

Обозначения используемых в работе функциональных пространств соответствуют принятым в [8, с. 12–17]. Ниже положительные постоянные, не зависящие от оцениваемых величин и допустимых управлений, обозначаем через M_i $(i = 1, 2, ...)$.

Под решением краевой задачи (1) – (3), при каждом фиксированном управлении $\upsilon = \upsilon(x,t) \in V$, будем понимать обобщенное решение из $V_2^{1,0}(Q_T)$, т.е. функцию $u = u(x,t) = u(x,t;\upsilon) \in V_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющую для всех $\eta = \eta(x,t) \in W_2^1(Q_T)$, $\eta(x,T) = 0$ интегральному тождеству

$$\iint_{Q_T} [-u\eta_t + k(x,t)u_x\eta_x + q(x,t)u\eta]dxdt = \int_0^\ell \varphi(x)\eta(x,0)dx + \iint_{Q_T} f(x,t)\eta dxdt. \tag{6}$$

При сделанных предположениях краевая задача (1) – (3) имеет единственное обобщенное решение $u = u(x,t;\upsilon)$ из $V_2^{1,0}(Q_T)$ при каждом фиксированном $\upsilon = \upsilon(x,t) \in V$ и справедлива оценка [8, с. 181–189]

$$|u|_{V_2^{1,0}(Q_T)} = |u|_{Q_T} = \max_{0 \le t \le T} \|u(x,t;\upsilon)\|_{L_2(0,\ell)} + \|u_x\|_{L_2(Q_T)} \le M_1\left[\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|\varphi\|_{L_2(0,\ell)}\right]. \tag{7}$$

Более того, это решение принадлежит также пространству $W_2^{2,1}(Q_T)$, удовлетворяет уравнению (1) при почти всех $(x,t)\in Q_T$ и справедлива оценка [8, с. 203–211]

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q_T)} \le M_1\left[\|\varphi\|_{W_2^1(0,\ell)}+\|f\|_{L_2(Q\ )}\right]. \qquad (8)$$

Используя оценки (8) теорем вложения [8, с.78; 9, с. 33] и рассуждая аналогично работе [10] можно показать, что для решения краевой задачи (1) – (3) справедлива также оценка

$$\|u\|_{L_\infty(Q_T)}+\|u_x\|_{L_6(Q_T)} \le M_2\left[\|\varphi\|_{W_2^1(0,\ell)}+\|f\|_{L_2(Q_T)}\right]. \qquad (9)$$

Из оценки (7) следует, что функционал (5) определен на V и принимает конечные значения. Отметим, что функционал (5) нелинеен и исследование его выпуклости весьма сложно.

Задача (1) – (5) тесно связана с коэффициентной обратной задачей, заключающейся в определении функций $\{u(x,t;\upsilon),k(x,t),q(x,t)\}$, удовлетворяющих условиям (1) – (4) и дополнительному условию

$$\int_0^\ell K(x,t)u(x,t;\upsilon)dx = E(t),\ 0\le t\le T\ . \qquad (10)$$

Функционал (5) является функционалом невязки в $L_2(0,T)$ соответствующей условию (10). Если в задаче (1) – (5) окажется, что существует управление $\upsilon_*(x,t)=(k_*(x,t),q_*(x,t))\in V$, такое, что $J(\upsilon_*)=J_*\equiv\inf\{J(\upsilon):\upsilon\in V\}=0$, то это управление решает обратную задачу (1) – (4), (10).

Задача (1) – (5) является задачей оптимального управления для параболического уравнения с управлениями в коэффициентах. Такие задачи при других целевых функционалов исследованы в работах [10–12] и др.

2. Корректность постановки задачи

Теорема 1. Пусть выполнены условия, принятые в п. 1. Тогда множество оптимальных управлений задачи (1) – (5) $V_*=\{\upsilon_*\in V:J(\upsilon_*)=J_*\}$ не пусто, слабо компактно в H и любая минимизирующая последовательность $\{\upsilon_n\}=$ $=\{(k_n(x,t),q_n(x,t))\}\subset V$ функционала (5) слабо в H сходится к множеству V_*.

Доказательство. Множество V, определяемое равенством (4), выпукло, замкнуто и ограничено в рефлексивном банаховом пространстве H, и поэтому оно слабо компактно в H [13,с. 49]. Покажем, что функционал (5) слабо в H непрерывен на множестве V. Пусть $\upsilon(x,t)=(k(x,t),q(x,t))\in V$ – некоторый элемент, $\{\upsilon_n(x,t)\}=\{(k_n(x,t),q_n(x,t))\}\subset V$ – произвольная последовательность, такая, что $\upsilon_n\to\upsilon$ слабо в H, т.е.

$$k_n(x,t)\to k(x,t)\ \textit{слабо в}\ \ W_2^1(Q_T); \qquad (11)$$

$$q_n(x,t)\to q(x,t)\ \textit{слабо в}\ \ L_2(Q_T). \qquad (12)$$

Из (11) и компактности вложения $W_2^1(Q_T)\to L_{r_2}(Q_T)$ [8, с. 75] следует, что

$$k_n(x,t)\to k(x,t)\ \textit{сильно в}\ L_{r_1}(Q_T), \qquad (13)$$

где $r_1\ge 2$ – произвольное конечное число.

Кроме того, в силу однозначной разрешимости краевой задачи (1) – (3), каждому управлению $\upsilon_n \in V$ соответствует единственное решение $u_n = u(x,t;\upsilon_n)$ из $W_2^{2,1}(Q_T)$ задачи (1) – (3) и справедлива оценка

$$\|u_n\|_{W_2^{2,1}(Q_T)} \le M_3 \quad (n = 1,2,\cdots), \tag{14}$$

т.е. последовательность $\{u_n\}$ равномерно ограничена в пространстве $W_2^{2,1}(Q_T)$.

Тогда из (14) и компактности вложения $W_2^{2,1}(Q_T) \to L_{r_2}(Q_T)$ [9, с. 33] следует, что из последовательности $\{u_n\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{u_{n_m}\}$, такую , что

$$u_{n_m}(x,t) \to u(x,t) \ \textit{слабо в} \ W_2^{2,1}(Q_T) \ \textit{и сильно в} \ L_{r_2}(Q_T), \tag{15}$$

где $r_2 \ge 2$ – произвольное конечное число, $u(x,t)$ – некоторый элемент $W_2^{2,1}(Q_T)$.

Покажем, что $u(x,t) = u(x,t;\upsilon)$, $(x,t) \in Q_T$, т.е. $u(x,t)$ является решением задачи (1) – (3), соответствующим управлению $\upsilon \in V$. Ясно, что справедливы тождества

$$\iint\limits_{Q_T} \left[-u_{n_m}\eta_t + k_{n_m}(x,t)u_{n_m x}\eta_x + q_{n_m}(x,t)u\eta\right]dxdt =$$

$$= \int_0^\ell \varphi(x)\eta(x,0)dx + \iint\limits_{Q_T} f(x,t)\eta dxdt, \tag{16}$$

$$\forall \eta = \eta(x,t) \in W_2^1(Q_T), \ \ \eta(x,t) = 0 .$$

Используя соотношения (13) – (15) и неравенство Гельдера, имеем

$$\left|\iint\limits_{Q_t} k_{n_m}(x,t)u_{n_m x}\eta_x dxdt - \iint\limits_{Q_T} k(x,t)u_x\eta_x dxdt\right| \le \left|\iint\limits_{Q_T} k(x,t)\left[u_{n_m x} - u_x\right]\eta_x dxdt\right| +$$

$$+\left|\iint\limits_{Q_T}\left[k_{n_m}(x,t) - k(x,t)\right]u_{n_m x}\eta_x dxdt\right| \le \left|\iint\limits_{Q_T} k(x,t)\left[u_{n_m x} - u_x\right]\eta_x dxdt\right| +$$

$$\left\|k_{n_m} - k\right\|_{L_3(Q_T)}\left\|u_{n_m}\right\|_{L_6(Q_T)}\|\eta\|_{L_2(Q_T)} \to 0, \tag{17}$$

при $m \to \infty$.

Кроме того, используя соотношения (12), (15), получаем

$$\left|\iint\limits_{Q_t} q_{n_m}(x,t)u_{n_m}\eta dxdt - \iint\limits_{Q_T} q(x,t)u\eta dxdt\right| \le \left|\iint\limits_{Q_T} q_{n_m}(x,t)\left[u_{n_m} - u\right]\eta dxdt\right| +$$

$$+\left|\iint\limits_{Q_T}\left[q_{n_m}(x,t) - q(x,t)\right]u\eta dxdt\right| \le q_1\left\|u_{n_m} - u\right\|_{L_2(Q_T)}\|\eta\|_{L_2(Q_T)} +$$

$$+\left|\iint\limits_{Q_T}\left[q_{n_m}(x,t) - q(x,t)\right]u\eta dxdt\right| \to 0, \tag{18}$$

при $m \to \infty$.

Тогда, переходя к переделу при $m \to \infty$ в равенстве (16) и учитывая соотношения (15), (17), (18), получаем, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет тождеству (6). Отсюда и из включения $u(x,t) \in W_2^{2,1}(Q_T)$ следует, что $u(x,t) = u(x,t;\upsilon)$ т.е. функция $u(x,t)$ является решением задачи (1) – (3), соответствующим управлению $\upsilon \in V$.

Используя единственность решения задачи (1) – (3), соответствующего управлению $\upsilon \in V$, нетрудно показать, что соотношение (15) справедливо с функцией $u(x,t) = u(x,t;\upsilon)$ не только для под последовательности $\{u_{n_m}\}$, но и для всей последовательности $\{u\}$, т.е.

$$u_n(x,t) = u_n(x,t;\upsilon) \to u(x,t) = u(x,t;\upsilon)$$
$$\text{слабо в } W_2^{2,1}(Q_T) \text{ и сильно в } L_{r_2}(Q_T). \tag{19}$$

Рассмотрим теперь функционал цели $J(\upsilon)$, определенный формулой (5). Используя (5), нетрудно убедится, что

$$|J(\upsilon_n) - J(\upsilon)| =$$
$$= \left| \left\| \int_0^\ell K(x,t) u_n(x,t)\,dx - E(t) \right\|^2_{L_2(0,T)} - \left\| \int_0^\ell K(x,t) u(x,t)\,dx - E(t) \right\|^2_{L_2(0,T)} \right| \le$$
$$\le \left\| \int_0^\ell K(x,t)[u_n(x,t) - u(x,t)]\,dx \right\|_{L_2(0,T)} \left[\left\| \int_0^\ell K(x,t) u_n(x,t)\,dx - E(t) \right\|_{L_2(0,T)} + \right.$$
$$\left. + \left\| \int_0^\ell K(x,t) u(x,t)\,dx - E(t) \right\|_{L_2(0,T)} \right]. \tag{20}$$

Используя неравенство Коши – Буняковского и условие $|K(x,t)| \le \mu_3$ п.в. на Q_T, имеем

$$\left\| \int_0^\ell K(x,t)[u_n(x,t) - u(x,t)]\,dx \right\|_{L_2(0,T)} = \left\{ \int_0^T \left| \int_0^\ell K(x,t)[u_n(x,t) - u(x,t)]\,dx \right|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \le$$
$$\le \left\{ \int_0^T \left(\int_0^\ell K^2(x,t)\,dx \right) \left(\int_0^\ell |u_n(x,t) - u(x,t)|^2\,dx \right) dt \right\}^{\frac{1}{2}} \le \mu_3 \|u_n - u\|_{L_2(Q_T)};$$

$$\left\| \int_0^\ell K(x,t) u_n(x,t)\,dx - E(t) \right\|_{L_2(0,T)} = \left\{ \int_0^T \left| \int_0^\ell K(x,t) u_n(x,t)\,dx - E(t) \right|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \le$$
$$\le \sqrt{2} \left\{ \int_0^T \left[\int_0^\ell K^2(x,t)\,dx \int_0^\ell u_n^2(x,t)\,dx + E^2(t) \right] dt \right\}^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{2} \left[\mu_3 \|u_n\|_{L_2(Q_T)} + \|E\|_{L_2(0,T)} \right];$$
$$\left\| \int_0^\ell K(x,t) u(x,t)\,dx - E(t) \right\|_{L_2(0,T)} \le \sqrt{2} \left[\mu_3 \|u\|_{L_2(0,T)} + \|E\|_{L_2(0,T)} \right].$$

Учитывая эти неравенства в (20), получаем оценку

$$\left|J(\upsilon_n)-J(\upsilon)\right|\le\sqrt{2}\mu_3\left\|u_n-u\right\|_{L_2(Q_T)}\left[\mu_3\left(\left\|u_n\right\|_{L_2(Q_T)}+\left\|u\right\|_{L_2(Q_T)}\right)+2\left\|E\right\|_{L_2(0,T)}\right].$$

Тогда, используя оценку (14) и соотношение (19) получаем, что $J(\upsilon_n)\to J(\upsilon)$ при $n\to\infty$, т.е. целевой функционал (5) непрерывен на V в слабой топологии пространства H. Кроме того, множество V является выпуклым замкнутым ограниченным множеством в гильбертовом пространстве H. Тогда применяя результат из [13, с. 49] получаем, что задача (1) – (5) корректно поставлена в слабой топологии пространства H, т.е. справедливы все утверждения теоремы 1. Теорема 1 доказана.

3. Дифференцируемость целевого функционала и необходимое условие оптимальности

Для задачи (1) – (5) введем сопряженное состояние $\psi=\psi(x,t)=\psi(x,t;\upsilon)$ как решение задачи

$$\psi_t+\left(k(x,t)\psi_x\right)_x-q(x,t)\psi=$$
$$=-2K(x,t)\left[\int_0^{\ell}K(\xi,t)u(\xi,t;\upsilon)d\xi-E(t)\right],(x,t)\in Q_T; \tag{21}$$

$$\psi\big|_{t=T}=0,\ \ 0\le x\le\ell; \tag{22}$$

$$\psi_x\big|_{x=0}=\psi_x\big|_{x=\ell}=0,\ 0\le t<T. \tag{23}$$

Под решением краевой задачи (21) – (23), соответствующим управлению $\upsilon\in V$, будем понимать функцию $\psi=\psi(x,t)=\psi(x,t;\upsilon)$ из $V_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющую для всех $\eta=\eta(x,t)\in W_2^1(Q_T)$, $\eta(x,0)=0$ интегральному тождеству

$$\iint_{Q_T}\left[\psi\eta_t+k(x,t)\psi_x\eta_x+q(x,t)\psi\eta\right]dxdt=$$
$$=2\iint_{Q_T}K(x,t)\left[\int_0^{\ell}K(\xi,t)u(\xi,t;\upsilon)dx-E(t)\right]\eta dxdt. \tag{24}$$

Используя очевидное неравенство $(a+b)^2\le 2\left(a^2+b^2\right)$ и неравенство Коши – Буняковского, имеем

$$\iint_{Q_T}K^2(x,t)\left[\int_0^{\ell}K(\xi,t)u(\xi,t;\upsilon)d\xi-E(t)\right]^2dxdt\le$$
$$\le 2\left\{\iint_{Q_T}\left[K^2(x,t)\int_0^{\ell}K^2(\xi,t)d\xi\int_0^{\ell}u^2(\xi,t;\upsilon)d\xi\right]dxdt+\iint_{Q_T}K^2(x,t)E^2(t)dxdt\right\}\le$$
$$\le 2\ell^2\mu_3^4\left\|u\right\|_{L_2(Q_T)}^2+2\mu_3^2\ell\left\|E\right\|_{L_2(0,T)}^2.$$

Отсюда следует, что правая часть уравнения (21) является элементом пространства $L_2(Q_T)$. Тогда из результатов работы [8, с. 181–189] следует, что для каждого заданного $\upsilon \in V$ задача (21) – (23) имеет единственное решение из $V_2^{1,0}(Q_T)$ и справедлива оценка

$$\|\psi\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \le M_4\left[\|u\|_{L_2(Q_T)} + \|E\|_{L_2(0,T)}\right].$$

Учитывая здесь оценки (7), получаем

$$\|\psi\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \le M_5\left[\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|\varphi\|_{L_2(0,\ell)} + \|E\|_{L_2(0,T)}\right] \tag{25}$$

Кроме того, решение задачи (21) – (23) принадлежит также пространству $W_2^{2,1}(Q_T)$, удовлетворяет уравнению (21) при почти всех $(x,t) \in Q_T$ и справедлива оценка [8, с. 203–211]

$$\|\psi\|_{W_2^{2,1}(Q_T)} \le M_6\left[\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|\varphi\|_{W_2^1(0,\ell)} + \|E\|_{L_2(0,T)}\right].$$

Используя эту оценку, теорему вложения [8, с. 78; 9, с. 33] и рассуждая аналогично работе [10] получаем оценку

$$\|\psi\|_{L_\infty(Q_T)} + \|\psi_x\|_{L_6(Q_T)} \le M_7\left[\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|\varphi\|_{W_2^1(0,\ell)} + \|E\|_{L_2(0,T)}\right]. \tag{26}$$

Введем еще одну вспомогательную краевую задачу для определения функции $\omega = \omega(x,t) = \omega(x,t;\upsilon)$ из условий:

$$-\omega_{xx} - \omega_{tt} + \omega = u_x\psi_x,\ (x,t) \in Q_T; \tag{27}$$

$$\omega_x|_{x=0} = \omega_x|_{x=\ell} = 0,\quad 0 < x < \ell; \tag{28}$$

$$\omega_t|_{t=0} = \omega_t|_{t=T} = 0,\quad 0 < t < T. \tag{29}$$

Под решением краевой задачи (27) – (29), при заданном $\upsilon \in V$, будем понимать функцию $\omega = \omega(x,t) = \omega(x,t;\upsilon)$ из $W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\iint_{Q_T}(\omega_x\eta_x + \omega_t\eta_t + \omega\eta)\,dxdt = \iint_{Q_T} u_x\psi_x\eta\,dxdt, \tag{30}$$

при любой функции $\eta = \eta(x,t) \in W_2^1(Q_T)$.

Из вложений $u_x \in L_6(Q_T)$, $\psi_x \in L_6(Q_T)$ следует, что $u_x\psi_x \in L_3(Q_T)$. Тогда из результатов работы [14, с. 200] следует, что краевая задача (27) – (29), при заданном $\upsilon \in V$, имеет единственное обобщенное решение из $W_2^1(Q_T)$ и справедлива оценка

$$\|\omega\|_{W_2^1(Q_T)} \le M_8\|u_x\psi_x\|_{L_{6/5}(Q_T)} \le M_8\|u_x\|_{L_6(Q_T)}\|\psi_x\|_{L_2(Q_T)}.$$

Учитывая здесь оценки (8) и (26), получаем оценку

$$\|\omega\|_{W_2^1(Q_T)} \le M_9\left[\|\varphi\|_{W_2^1(0,\ell)} + \|f\|_{L_2(Q_T)}\right]\left[\|\varphi\|_{L_2(0,\ell)} + \|f\|_{L_2(Q_T)} + \|E\|_{L_2(0,T)}\right]. \tag{31}$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда функционал (5) непрерывно дифференцируем на V в норме пространства H и его градиент в точке $\upsilon \in V$ определяется равенством

$$J'(\upsilon) = (\omega(x,t;\upsilon), u(x,t;\upsilon)\psi(x,t;\upsilon)),\ (x,t) \in Q_T. \tag{32}$$

Доказательство. Пусть $\upsilon \in V$ – некоторое управление, $\Delta\upsilon = (\Delta K, \Delta q) \in H$ – произвольное приращение управления υ, такое, что $\upsilon + \Delta\upsilon \in V$. Пусть $\Delta u(x,t) = u(x,t;\upsilon+\Delta\upsilon) - u(x,t;\upsilon)$, $u(x,t) = u(x,t;\upsilon)$. Из условий (1) – (3) следует, что Δu является решением краевой задачи

$$\Delta u_t - ((k+\Delta k)\Delta u_x)_x + (q+\Delta q)\Delta u = (\Delta k u_x)_x - \Delta q u \,,\ (x,t) \in Q_T; \tag{33}$$

$$\Delta u|_{t=0} = 0 \,,\ 0 \le x \le \ell \,; \tag{34}$$

$$\Delta u_x|_{x=0} = \Delta u_x|_{x=\ell} = 0 \,,\ 0 < t \le T \,. \tag{35}$$

Можно показать, что для решения задачи (34) – (35) справедлива оценка [8, с. 181–189]:

$$\|\Delta u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \le M_{10}\left[\|\Delta k u_x\|_{L_2(Q_T)} + \|\Delta q u\|_{L_2(Q_T)}\right]. \tag{36}$$

Используя ограниченность вложений

$$W_2^1(Q_T) \to L_4(Q_T) \,,\ W_2^{2,1}(Q_T) \to L_\infty(Q_T)$$

и оценки (8), получаем следующие неравенства:

$$\|\Delta k u_x\|_{L_2(Q_T)} \le \|\Delta k\|_{L_4(Q_T)} \|u_x\|_{L_4(Q_T)} \le M_{11} \|\Delta k\|_{W_2^1(Q_T)} \,,$$

$$\|\Delta q u\|_{L_2(Q_T)} \le \|\Delta q\|_{L_2(Q_T)} \|u\|_{L_\infty(Q_T)} \le M_{12} \|\Delta q\|_{L_2(Q_T)} \,.$$

Учитывая эти неравенства в (36), получаем оценку

$$\|\Delta u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \le M_{11} \|\Delta\upsilon\|_H \,. \tag{37}$$

Приращение функционала (5) имеет вид

$$\Delta J(\upsilon) = J(\upsilon+\Delta\upsilon) - J(\upsilon) =$$
$$= 2\int_0^T \left\{\left[\int_0^\ell K(\xi,t) u(\xi,t;\upsilon)\, d\xi - E(t)\right] \int_0^\ell K(x,t)\Delta u(x,t)\, dx\right\} dt +$$
$$+ \int_0^T \left|\int_0^\ell K(x,t)\Delta K(x,t)\, dx\right|^2 dt. \tag{38}$$

С помощью решений краевых задач (21) – (23), (27) – (29) и (33) – (35) преобразуем приращение (38). Для решения краевой задачи (33) – (35) справедливо

$$\iint_{Q_T} [\Delta u_t \psi + (k+\Delta k)\Delta u_x \psi_x + (q+\Delta q)\Delta u \psi]\, dxdt = -\iint_{Q_T} (\Delta k u_x \psi_x + \Delta q u \psi)\, dxdt \tag{39}$$

Если в тождестве (24) положим $\eta = \Delta u$ и полученное равенство вычтем из (39), то получим

$$2\int_0^T \left\{\left[\int_0^\ell K(\xi,t) u(\xi,t;\upsilon)\, d\xi - E(t)\right] \int_0^\ell K(x,t)\Delta u(x,t)\, dx\right\} dt =$$
$$= \iint_{Q_T} (u_x \psi_x \Delta k - \Delta u_x \psi_x \Delta k + u\psi\Delta q - \Delta u \psi \Delta q)\, dxdt.$$

Учитывая это равенство в (38), имеем

$$\Delta J(\upsilon) = \iint_{Q_T} (u_x \psi_x \Delta k + u\psi\Delta q)\, dxdt + R \,, \tag{40}$$

где $$R=\int_0^T\left|\int_0^\ell K(x,t)\Delta u(x,t)\,dx\right|^2 dt-\iint_{Q_T}\left(\Delta u_x\psi_x\Delta k+\Delta u\psi\Delta q\right)dxdt\,. \qquad (41)$$

Полагая в тождестве (30) $\eta=\Delta k$ и учитывая полученное равенство в (40), имеем

$$\Delta J(\upsilon)=\iint_{Q_T}\left(\omega\Delta k+\omega_x\Delta k_x+\omega_t\Delta k_t+u\psi\Delta q\right)dxdt+R\,. \qquad (42)$$

Используя теоремы вложения, можно показать [10], что первое слагаемое в правой части (42) при заданном $\upsilon\in V$ определяет линейный ограниченный функционал от $\Delta\upsilon\in H$.

Теперь проведем оценку остаточного члена R, определяемого равенством (41). Используя неравенства Коши – Буняковского и Гельдера, имеем

$$|R|\le\int_0^T\left(\int_0^\ell K^2(x,t)dx\right)\left(\int_0^\ell \Delta u^2(x,t)dx\right)dt+\|\Delta u_x\|_{L_2(Q_T)}\|\psi_x\|_{L_4(Q_T)}\|\Delta k\|_{L_4(Q_T)}+$$
$$+\|\Delta u\|_{L_2(Q_T)}\|\psi\|_{L_\infty(Q_T)}\|\Delta q\|_{L_2(Q_T)}\le\mu_3^2\|\Delta u\|_{L_2(Q_T)}+M_{12}\|\Delta u_x\|_{L_2(Q_T)}\|\psi_x\|_{L_4(Q_T)}\|\Delta k\|_{W_2^1(Q_T)}+$$
$$+\|\Delta u\|_{L_2(Q_T)}\|\psi\|_{L_\infty(Q_T)}\|\Delta q\|_{L_2(Q_T)}\le M_{13}\|\Delta\upsilon\|_H^2\,.$$

Учитывая в (42) эту оценку, заключаем, что функционал (1) дифференцируем по Фреше на V и справедлива формула (32). Непрерывность отображения $\upsilon\to J'(\upsilon)$ доказывается как в работе [10]. Теорема 2 доказана.

Необходимое условие оптимальности в задаче (1) – (5) устанавливает

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для оптимальности управления $\upsilon_*=(k_*,q_*)\in V$ в задаче (1) – (5) необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\iint_{Q_T}\left[\omega_*(k-k_*)+\omega_{*_x}\left(k_x-k_{*_x}\right)+\omega_{*_t}\left(k_t-k_{*_t}\right)+u_*\psi_*(q-q_*)\right]dxdt\ge 0 \qquad (43)$$

для любого $\upsilon=(k,q)\in V$, где $u_*=u(x,t;\upsilon_*)$, $\psi_*=\psi(x,t;\upsilon_*)$, $\omega_*=\omega(x,t;\upsilon_*)$ – решения задач (1) – (3), (21) – (23), (27) – (29) соответственно при $\upsilon=\upsilon_*$.

Доказательство. Множество V , определяемое равенством (4), выпукло в H . Кроме того, согласно теореме 2, функционал (1) непрерывно дифференцируем на V . Тогда в силу теоремы 5 из [13, с. 28] на элементе $\upsilon_*\in V_*$ необходимо выполнение неравенства $\langle J'(\upsilon_*),\upsilon-\upsilon_*\rangle\ge 0$ при всех $\upsilon\in V$. Отсюда и из (32) следует справедливость неравенства (42). Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А.Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // ДАН СССР. 1963. Т. 151. № 3. С. 501–504.
2. *Гласко В.Б.* Обратные задачи математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1984. 112 с.
3. *Искендеров А.Д.* О вариационных постановках многомерных обратных задач математической физики // ДАН СССР. 1984. Т. 274. № 3. С. 531–533.
4. *Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988. 288 с.
5. *Karchevsky A.L.* Properties the misfit functional for a nonlinear one-dimensional coefficient hyperbolic inverse problem // J. Inverse Ill-Posed. Probl. 1997. V. 5. No. 2. P. 139–165. DOI: https://doi.org/10.1515/jiip.1997.5.2.139.

6. *Кабанихин С.И., Искаков К.Т.* Обоснование метода наискорейшего спуска в интегральной постановке обратной задачи гиперболического уравнения // Сиб. матем. журн. 2001. Т. 42. № 3. С. 567–584.
7. *Кабанихин С.И., Даирбаева Г.* Обратная задача нахождения коэффициента уравнения теплопроводности // Международная конференция «Обратные некорректные задачи математической физики», посвященная 75-летию академика М.М. Лаврентьева, 20–25 августа 2007 г., Новосибирск, Россия. С. 1–5.
8. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
9. *Лионс Ж-Л.* Управление сингулярными распределенными системами. М., 1987. 368 с.
10. *Тагиев Р.К.* Оптимальное управление коэффициентами в параболических системах // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 10. С. 1492–1501.
11. *Тагиев Р.К.* Оптимальное управление коэффициентами квазилинейного параболического уравнения // Автоматика и телемеханика. 2009. № 11. С. 55–69.
12. *Тагиев Р.К.* Задача оптимального управления для квазилинейного параболического уравнения с управлениями в коэффициентах и с фазовыми ограничениями // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 3. С. 380–392.
13. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.
14. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973, 576 с.

Статья поступила 07.09.2016 г.

Tagiev R.K., Kasumov R.A. (2017) ON THE OPTIMIZATION FORMULATION OF THE COEFFICIENT INVERSE PROBLEM FOR A PARABOLIC EQUATION WITH AN ADDITIONAL INTEGRAL CONDITION. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 45. pp. 49–59

DOI 10.17223/19988621/45/4

Let a controlled process be described in $Q_T = \{(x,t) \in R^2 : 0 < x < \ell, 0 < t < T\}$ by the following initial-boundary value problem for a linear parabolic equation:

$$u_t - (k(x,t)u_x)_x + q(x,t)u = f(x,t),\ (x,t) \in Q_T,$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x),\ 0 \le x \le \ell,$$

$$u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\ell} = 0,\ 0 < t \le T.$$

Here $\ell, T > 0$ are given numbers $f(x,t) \in L_2(Q_T)$, $\varphi(x) \in W_2^1(0,\ell)$ are given functions, $k(x,t)$, $q(x,t)$ are unknown coefficients, $\upsilon(x,t) = (k(x,t), q(x,t))$ is a control, $u = u(x,t) = u(x,t;\upsilon)$ is the solution to the boundary value problem corresponding to the control $\upsilon = \upsilon(x,t)$.

Let us introduce a set of admissible controls

$$V = \{\upsilon(x,t) = (k(x,t), q(x,t)) \in H = W_2^1(Q_T) \times L_2(Q_T) : 0 < \nu \le k(x,t) \le \mu,$$
$$|k_x(x,t)| \le \mu_1, |k_t(x,t)| \le \mu_2, 0 \le q_0 \le q(x,t) \le q_1 \text{ п.в.на } Q_T\},$$

where $\mu \ge \nu > 0$, $\mu_1, \mu_2 > 0$, $q_1 \ge q_0 \ge 0$ are given numbers.

Let us state the following coefficient inverse problem of optimal control type: among all the admissible controls $\upsilon(x,t) = (k(x,t), q(x,t)) \in V$, find the controls $\upsilon_*(x,t) = (k_*(x,t), q_*(x,t)) \in V$ minimizing the functional

$$J(\upsilon) = \int_0^T \left| \int_0^\ell K(x,t)u(x,t;\upsilon)dx - E(t) \right|^2 dt$$

where $K(x,t), E(t)$ are known functions, $\upsilon = \upsilon(x,t)$ is a control $u = u(x,t) = u(x,t;\upsilon)$ is a generalized solution to the boundary value problem from $V_2^{1,0}(Q_T)$ corresponding to the control $\upsilon = \upsilon(x,t)$ is a given set.

In the present work, the optimization formulation of the coefficient inverse problem for a parabolic equation with an additional integral condition is considered. The questions of correctness of the optimization formulation of the inverse problem are investigated. The differentiability of the objective functional is proved and the formula for its gradient is found. A necessary condition of optimality is found in the form of a variational inequality.

Keywords: optimal control, parabolic equation, integral boundary condition, optimality condition

TAGIEV Rafig Kalandar (Dr. Math. Sciences, prof. Baku State University, Azerbaijan)
E-mail: r.tagiyev@list.ru

KASUMOV Atakhan Rashid oglih (Senior Lecturer, Lankaran State University, Azerbaijan)
E-mail: rasid5757@mail.ru

REFERENCES

1. Tikhonov A.N. (1963) O reshenii nekorrektno postavlennykh zadach i metode regulyarizatsii [On the solution of ill-posed problems and regularization method]. *Dokl. USSR Academy of Sciences*. 151(3). pp. 501–504.
2. Glasko V.B. (1984) *Obratnye zadachi matematicheskoy fiziki* [Inverse problems of mathematical physics]. Moscow: MSU Publ.
3. Iskenderov A.D. (1984) O variatsionnykh postanovkakh mnogomernykh obratnykh zadach matematicheskoy fiziki [On the variational formulations of multidimensional inverse problems of mathematical physics]. *Dokl. USSR Academy of Sciences*. 274 (3). pp. 531–533.
4. Alifanov O.M., Artyuhin E.A., Rumyantsev S.V. (1988) *Ekstremal'nye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Extreme methods for solving ill-posed problems]. Moscow: Nauka.
5. Karchevsky A.L. (1997) Properties of the misfit functional for a nonlinear one-dimensional coefficient hyperbolic inverse problem. *J. Inverse Ill-Posed Probl*. 5(2). pp. 139–165. DOI: https://doi.org/10.1515/jiip.1997.5.2.139
6. Kabanikhin S.I., Iskakov K.T. (2001) Justification of the Steepest Descent Method for the Integral Statement of an Inverse Problem for a Hyperbolic Equation. *Sib. Mat. Zh*. 42(3). pp. 478–494. DOI: 10.1023/A:1010471125870.
7. Kabanikhin S.I. Dairbaeva G. (2007) Obratnaya zadacha nakhozhdeniya koeffitsienta uravneniya teploprovodnosti [The inverse problem of finding a coefficient of the heat equation]. *Proc. International Conference «Inverse ill-posed problems of mathematical physics" devoted to the 75th anniversary of academician M.M. Lavrentev*, Novosibirsk, Russia. pp. 1–5.
8. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Uraltseva N.N. (1967) *Lineynye i kvazilineynye uravneniya parabolicheskogo tipa* [Linear and quasilinear equations of the parabolic type]. Moscow: Nauka.
9. Lions J.L. (1985) *Control of Distributed Singular Systems*. Paris: Gauthier-Villars.
10. Tagiyev R.K. (2009) Optimal control of coefficients in parabolic systems. *Diff. equation*. 45(10). pp. 1492–1501. DOI: 10.1134/S0012266109100164.
11. Tagiyev R.K. (2009) Optimal control of coefficients of a quasilinear parabolic equation. *Automation and Remote Control*. 70(11). DOI: 10.1134/S0005117909110058.
12. Tagiyev R.K. (2013) An optimal control problem for a quasilinear parabolic equation with controls in the coefficients and phase constraints. *Diff. equation*. 49(3). pp. 369–381. DOI: 10.1134/S0012266113030129.
13. Vasilyev F.P. (1981) *Metody resheniya ekstremal'nykh zadach* [Methods for solving extreme problems]. Moscow: Nauka.
14. Ladyzhenskaya O.A., Uraltseva N.N. (1973) *Lineynye i kvazilineynye uravneniya ellipticheskogo tipa* [Linear and quasilinear equations of the elliptic type]. Moscow: Nauka.