УДК 532.5: 536: 537
DOI 10.17223/19988621/45/6

Б.В. Бошенятов

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПУЗЫРЬКОВЫХ ГАЗОЖИДКОСТНЫХ СРЕД ПОВЫШЕННОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ[1]

Получена аналитическая зависимость для расчета теплопроводности несжимаемой пузырьковой среды с учетом взаимного влияния пузырьков друг на друга. Сравнение с теоретическими и экспериментальными результатами других авторов показало, что формула Максвелла, которая не учитывает взаимодействия пузырьков, дает погрешность менее 5 % в диапазоне объемных концентраций от нуля до 0.52. Учет взаимодействия пузырьков практически не улучшает результат формулы Максвелла.

Ключевые слова: *пузырьковые газожидкостные среды, гидродинамическое взаимодействие, теплопроводность, электропроводность, диэлектрическая и магнитная проницаемости.*

Пузырьковые газожидкостные среды широко распространены в природе и технологических процессах атомной энергетики, а также нефтяной, химической, фармацевтической и других отраслях промышленности. В ряде случаев такую среду можно рассматривать как гомогенную, приписывая ей эффективные значения физических величин, усредненных по объемам много большим, чем масштаб структурных неоднородностей среды [1, 2]. Для дисперсных сред малой концентрации, когда взаимодействием дисперсных частиц можно пренебречь, эта проблема была решена в классических работах Максвелла, и Эйнштейна [3, 4]. Для более концентрированных сред необходимо учитывать взаимное влияние дисперсных частиц друг на друга. Для этой цели использовались различные теоретические методы и подходы [5–13].Наиболее полный обзор исследований проблемы теплопроводности гетерогенных дисперсных сред, имеющих статистически однороднуюи изотропную структуру, содержится в работе [9]. В более широком смысле аналитические и численные методы анализа физических свойств гетерогенных материалов изложены в монографии [10], список используемой литературы которой насчитывает более 1200 наименований. Однако проблему нельзя считать окончательно решенной, в частности, до сих пор отсутствует полное понимание степени влияния различных физических факторов, в том числе взаимодействия дисперсных частиц, на конечный результат при повышенных концентрациях дисперсной фазы.

Отметим, что теплопроводность среды, а также электропроводность, диффузия, статические диэлектрическая и магнитная проницаемости описываются одинаковыми уравнениями и граничными условиями. Поэтому, решив задачу для теплопроводности среды, мы получаем решение для любой другой из перечисленных выше задач путем простой замены буквенных обозначений. Кроме того, это обстоятельство позволяет нам использовать для решения задачи о теплопровод-

[1] Работа выполнена при частичной поддержке в рамках Программы повышения конкурентоспособности Томского государственного университета.

ности теоретический и экспериментальный материал, накопленный при решении других аналогичных задач.

В работе получена теоретическая зависимость (в аналитическом виде) эффективного коэффициента теплопроводности несжимаемой двухкомпонентной монодисперсной среды от объемной концентрации сферических дисперсных частиц при произвольном соотношении коэффициентов теплопроводности компонент, с учетом взаимного влияния дисперсных частиц друг на друга.

В первом разделе дается краткое изложение существующих теоретических моделей описания процессов переноса в дисперсных средах, в том числе при повышенных концентрациях дисперсных частиц. Во втором – изложен новый подход описания явлений переноса, основанный на использовании метода электрогидродинамической аналогии и решения задачи о взаимодействии фаз в гидродинамической постановке, полученного в работе [12]. Третий раздел посвящен исследованию адекватности рассмотренных теоретических моделей экспериментальным данным для частного случая, когда теплопроводность (электропроводность) дисперсных частиц много меньше теплопроводности дисперсионной жидкости, что соответствует несжимаемой пузырьковой среде.

1. Математические модели описания явлений переноса в дисперсных средах

Джеймс Максвелл был одним из первых, кто обратил внимание на проблему описания гетерогенных дисперсных сред при помощи эффективных физических параметров. В работе [3] он исследовал разреженную суспензию из сферических частиц, имеющих электропроводность σ_2, диспергированных в жидкости с электропроводностью σ_1. Далее, для любых физических величин нижний индекс 1 будет относиться к дисперсионной жидкости, а индекс 2 к дисперсным частицам или пузырькам. Опираясь на полученное им точное решение для одиночной сферы, помещенной в однородное электрическое поле, он предложил знаменитую формулу для эффективной электропроводности такой среды в виде

$$\frac{\sigma^*}{\sigma_1} = \frac{1+2\beta c}{1-\beta c}, \tag{1}$$

где c – объемная концентрация дисперсных частиц (или пузырьков), σ^* – эффективный коэффициент электропроводности суспензии, $\beta = \dfrac{\alpha-1}{\alpha+2}$, $\alpha = \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}$.

Однако многие авторы, например [6,9], считают, что формула (1), в силу предположений, сделанных при ее выводе, неприменима для сред с повышенной концентрацией дисперсных частиц и справедлива лишь при $c \ll 1$, т.е. в приближении $O(c^2)$:

$$\frac{\sigma^*}{\sigma_1} = 2\beta c + O(c^2). \tag{2}$$

Лорд Релей [5], чтобы проверить пригодность формулы (1) для расчетов при больших концентрациях, методом отражений рассмотрел частный случай, полагая, что дисперсные частицы (сферы) расположены в узлах периодической прямоугольной решетки. Основной вывод Релея состоял в том, что формула Максвелла (1) справедлива не только при малых, но и при средних объемных концентрациях дисперсных частиц до значений $c \approx 0.3$.

Примечательно, что между диэлектрической проницаемостью неполярных газов или жидкостей и поляризуемостью молекул существует определенное соотношение, называемое формулой Клаузиуса – Моссотти [14].Эту формулу легко получить на основе понятия «локального поля Лоренца». В отличие от макроскопического поля в диэлектрике $\boldsymbol{E}$, которое характеризуется средней напряженностью электрического поля в объеме, превышающем размеры молекулы, но достаточно малом, так что напряженность в пределах этого объема почти не изменяется, локальное поле $\boldsymbol{E}_L$ – это поле, действующее на одну молекулу (или частицу, способную поляризоваться). Лоренц вычислил [15], что для неполярных изотропных диэлектриков

$$\boldsymbol{E}_L = \frac{\varepsilon + 2}{3}\boldsymbol{E}\,, \tag{4}$$

где $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_d}{\varepsilon_0}$ – относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика (ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума). В вакууме $\varepsilon = 1$, и из формулы (4) следует, что $\boldsymbol{E}_L = \boldsymbol{E}$. Поляризацию молекулы (или частицы) определяет именно это локальное поле. Тогда поляризация единицы объема диэлектрика будет равна

$$\boldsymbol{P} = n\chi_{\mathrm{m}}\frac{\varepsilon + 2}{3}\boldsymbol{E} \tag{5}$$

Здесь n – число молекул в единице объема, χ_{m} – поляризуемость молекулы.

С другой стороны, между поляризацией диэлектрика и средним полем существует соотношение

$$\boldsymbol{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\boldsymbol{E}\,. \tag{6}$$

Исключив P и E из соотношений (5) и (6), получим известную формулу Клаузиуса – Моссотти для диэлектрической проницаемости неполярных газов или жидкостей:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4}{3}\pi n\chi_{\mathrm{m}}\,. \tag{7}$$

Заменяя в выражении (7) $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_d}{\varepsilon_0}$ на $\dfrac{\varepsilon^*}{\varepsilon_1}$ и учитывая, что коэффициент поляризуемости сферы, имеющей радиус a, равен $\chi = \varepsilon_1\beta a^3$, $c = \dfrac{4}{3}\pi a^3 n$, а $\boldsymbol{E}_1 = \dfrac{\boldsymbol{E}}{\varepsilon_1}$, получим формулу Клаузиуса – Моссотти применительно к дисперсным средам

$$\beta^* = \frac{\varepsilon^* - \varepsilon_1}{\varepsilon^* + 2\varepsilon_1} = \beta c\,, \tag{8}$$

которая, в контексте электропроводности, в точности совпадает с формулой Максвелла (1).

В разделе 2.2 будет показано, что формула Максвелла (1) строго обоснована и применима для дисперсных сред с повышенной концентрацией, но является приближенной, поскольку, как и формула (2), не учитывает взаимного влияния электрических полей дисперсных частиц друг на друга. Но в отличие от формулы (2) формула (1) учитывает влияние на эффективную электропроводность среды геометрического фактора, связанного с уменьшением относительного объема дисперсионной жидкости. Ясно, что значение геометрического фактора возрастает с повышением объемных концентраций дисперсных частиц. Количественные оценки относительного влияния на конечный результат геометрического фактора и взаимодействия физических полей дисперсных частиц при увеличении их объемной концентрации будут даны в разделе 3.

Проблема учета взаимодействия физических полей дисперсных частиц математически оказалась настолько сложной, что прошло около 60 лет, прежде чем появились первые теоретические работы по оценке второго коэффициента k_2 в вириальном разложении для электро- и теплопроводности суспензии сферических частиц:

$$\frac{\sigma^*}{\sigma_1} = k_1 c + k_2 c^2 + O(c^3) \tag{8}$$

Это работы Кирквуда (Kirkwood, 1936) и Явона (Yvon, 1937) [7], Хашина и Штрикмана (Hashinand Shtrikman, 1962) и др. [6]. В 1973 г., через сто лет после публикации Максвелла, в работе [6] Джеффри (Jeffrey D.J.), используя полученное им, точное решение для двух взаимодействующих сфер и метод Бэтчелора для решения проблемы расходящихся интегралов, вычислил коэффициент k_2 в зависимости от параметров α и β для дисперсных сред с изотропной статистически однородной структурой.

Значительный вклад в решение проблемы взаимодействия дисперсных частиц в гетерогенных средах внес известный физик-теоретик У. Фельдерхоф [7, 8, 11], который ввел понятие эффективного коэффициента поляризуемости и записал формулу Клаузиуса – Моссотти в виде

$$\frac{\varepsilon^* - \varepsilon_1}{\varepsilon^* + 2\varepsilon_1} = \frac{4}{3\varepsilon_1}\pi n \chi^*, \text{ где } \chi^* = \chi\left[1 - \frac{4\pi}{3\varepsilon_1}(\lambda + \mu) n \chi\right]^{-1}. \tag{9}$$

Фельдерхоф разработал метод приближенного расчета коэффициентов λ и μ с учетом мультипольных многочастичных взаимодействий, представив эти коэффициенты в виде кластерных разложений:

$$\lambda = \sum_{s=2}^{\infty} \lambda_s, \quad \mu = \sum_{s=2}^{\infty} \mu_s.$$

В работе [11] дана таблица численного расчета этих коэффициентов для двух- ($s = 2$) и трехчастичных($s = 3$) взаимодействий сферических дисперсных частиц.

2. Новый подход описания явлений переноса в дисперсных средах с повышенной концентрацией частиц

2.1. Эффективный коэффициент теплопроводности дисперсной среды и формула для его определения

Стационарный процесс переноса тепла (и электрического заряда) в однородной и изотропной среде внутри i-й компоненты дисперсной среды, подчиняется закону Фурье (и Ома):

$$q_i = -\lambda_i \nabla T_i. \tag{10}$$

В уравнении (10) $i = 1, 2$ (для двухкомпонентной среды); $\boldsymbol{q}_i$ – вектор теплового потока; λ_i – коэффициент теплопроводности, а T_i – температура внутри i-й компоненты дисперсной среды. Если среда представляет собой мелкодисперсную смесь, то можно рассматривать векторные поля $\langle q\rangle$ и $\langle\nabla T\rangle$, усредненные по объемам Ω, большим по сравнению с масштабами структурных неоднородностей, но достаточно малыми относительно масштабов исследуемой задачи. По отношению к таким средним полям дисперсная среда является однородной и изотропной и может характеризоваться эффективным значением коэффициента теплопроводности λ^* [6,16], тогда.

$$\langle q\rangle = -\lambda^*\langle\nabla T\rangle, \langle q\rangle = \frac{1}{\Omega}\int q_i d\Omega, \langle\nabla T\rangle = \frac{1}{\Omega}\int\nabla T_i d\Omega. \tag{11}$$

Из соотношений (10) и (11) следует

$$\langle\nabla T\rangle = \langle\nabla T_1\rangle(1-c) + \langle\nabla T_2\rangle c \tag{12}$$

и формула для определения λ^*:

$$\frac{\lambda^*}{\lambda_1}\langle\nabla T\rangle = \langle\nabla T\rangle + \langle\nabla T_2\rangle(\alpha-1)c, \tag{13}$$

где $\alpha = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$. Таким образом, в рамках феноменологического подхода имеем два уравнения (12), (13) и три неизвестных: $\lambda^*, \langle\nabla T_1\rangle$ и $\langle\nabla T_2\rangle$. Чтобы замкнуть систему уравнений, необходимо решать задачу на более детальном, структурном уровне.

Отметим, что линейный характер закона Фурье свидетельствует о том, что, в этом приближении процесс переноса тепла носит локальный характер, т.е. тепловой поток в заданной точке пространства определяется локальным значением градиента температуры в той же точке. Для дисперсной среды это означает, что вначале необходимо найти зависимость $\langle\nabla T_2\rangle$ от локального поля $\langle\nabla T_1\rangle$, после чего, используя формулы (12) и (13), определить эффективный коэффициент теплопроводности дисперсной среды.

2.2. Обоснование формулы Максвелла при повышенных концентрациях дисперсных частиц (без учета взаимодействия частиц)

Если не учитывать влияние физических полей соседних частиц на величину локального поля $\langle\nabla T_1\rangle$ вблизи пробной частицы, то зависимость $\langle\nabla T_2\rangle$ от $\langle\nabla T_1\rangle$ можно определить из точного решения задачи о теплопроводности (или диэлектрической проницаемости [16]) для одиночной сферы [3, 6]:

$$\langle\nabla T_2\rangle = \frac{3}{\alpha+2}\langle\nabla T_1\rangle. \tag{14}$$

Используя формулы (12), (13) и точное решение (14), получим формулу для расчета эффективной теплопроводности суспензии, совпадающую с формулой Максвелла (1).

Таким образом, формула Максвелла (1) математически обоснована для любых концентраций дисперсных сферических частиц, но является приближенной, так как получена на основе точного решения для одиночной сферы и поэтому не учитывает эффектов взаимного влияния физических полей дисперсных частиц друг на друга. При $c << 1$ из уравнения (12) имеем $\langle \nabla T \rangle = \langle \nabla T_1 \rangle$ и соответственно получим первое приближение $O(c^2)$ формулы (1), т.е. формулу (2).

Для теоретической оценки погрешности формулы (1) необходимо иметь более точное решение с учетом взаимодействия частиц.

2.3. Вывод формулы для расчета эффективной теплопроводности суспензии с учетом взаимодействия частиц

Аналитическую зависимость для вычисления эффективного коэффициента теплопроводности дисперсной среды с учетом взаимодействия частиц получим, используя метод физической аналогии и решение задачи о взаимодействии фаз в гидродинамической постановке [12, 13].

Метод физической аналогии основан на том, что потенциальные течения идеальной жидкости, как и поле температур, описываются уравнением Лапласа и одинаковым условием на бесконечности (при $\boldsymbol{r} \to \infty$, $\varphi \to 0$), но условие на границе сред отличается. Вместо $T_1 = T_2$ и $\lambda_1 \dfrac{dT_1}{dn} = \lambda_2 \dfrac{dT_2}{dn}$ (при идеальном тепловом контакте) в гидродинамике имеем $\dfrac{d\varphi_1}{dn} = \dfrac{d\varphi_2}{dn}$, где φ – потенциал скорости, n – нормаль к поверхности раздела сред. Таким образом, в гидродинамической задаче параметр ρ (плотность), эквивалентный параметру λ в задаче о теплопроводности, отсутствует и в уравнении Лапласа и в граничных условиях, а содержится в уравнении движения. Поэтому условия соответствия для физической аналогии находим из сравнения точного решения (14) и соответствующего решения гидродинамической задачи о движении одиночной сферы в однородном внешнем поле скорости [17] $\langle \nabla \varphi_2 \rangle = \dfrac{3}{1+2\gamma} \langle \nabla \varphi_1 \rangle$:

$$\langle \nabla \varphi_2 \rangle \to \langle \nabla T_2 \rangle, \langle \nabla \varphi_2 \rangle \to \langle \nabla T_2 \rangle, \gamma = \frac{\rho_2}{\rho_1} \to \frac{\alpha+1}{2}. \qquad (15)$$

Гидродинамическая задача о взаимодействии фаз $\dfrac{\langle \varphi_2 \rangle}{\langle \varphi_1 \rangle} = f(\gamma, c)$ решалась в два этапа. Вначале, было дано детальное описание движения N идентичных сферических частиц, произвольно расположенных в дисперсионной жидкости, при внезапном ускорении плоской бесконечной стенки от нулевой до заданной скорости $U^{(0)} = \langle \nabla \varphi \rangle$. При этом учитывались двухчастичные взаимодействия, включающие полный набор мультипольных разложений.

Затем, путем усреднения по ансамблю, находилась средняя скорость частиц, расположенных вдали от стенки $v_2 = \langle \nabla \varphi_2 \rangle$. Задача решена в аналитическом виде с учетом членов разложений искомых функций по малому параметру до степени $(a/L)^{14}$, где a – радиус дисперсной частицы, L – расстояние между центрами частиц. Упрощающие предположения: дисперсные частицы – жесткие сферы, которые распределены в пространстве статистически равномерно, количество частиц неизменно. Используя полученное в работе [12] решение, легко найти

$$\langle \nabla \varphi_2 \rangle = \langle \nabla \varphi_1 \rangle \frac{3}{1+2\gamma}\left[1+k(\gamma)c\right], \tag{16}$$

$$k(\gamma) = -\frac{7}{72}\frac{1-\gamma}{1+2\gamma} + \frac{1415}{5632}\left(\frac{1-\gamma}{1+2\gamma}\right)^2 - \frac{5}{2112}\left(\frac{1-\gamma}{1+2\gamma}\right)^3 .$$

Подставляя в решение гидродинамической задачи (16) формулы соответствия физической аналогии (15), получим решение задачи о соотношении градиентов температурных полей внутри отдельных компонент дисперсной среды:

$$\langle \nabla T_2 \rangle = \langle \nabla T_1 \rangle \frac{3}{\alpha+2}\left[1+k(\beta)\right], \tag{17}$$

$$k(\beta) = 0.0486\beta + 0.0628\beta^2 + 0.0003\beta^3 .$$

Используя (12), (13) и решение задачи о взаимодействии фаз (17), получим искомую аналитическую зависимость для эффективной теплопроводности дисперсной среды:

$$\lambda = \frac{\lambda^*}{\lambda_1} = 1 + 3\beta c(1+kc)\left[1-\left(1-\frac{3kc}{\alpha-1}\right)\beta c\right]^{-1} . \tag{18}$$

При $kc \ll 1$, как и следовало ожидать, формула (18) совпадает с формулой (1). При $\lambda_1 = \lambda_2$ ($\alpha = 1$) имеем $\lambda^* = \lambda_1$.

Если теплопроводность дисперсных частиц много меньше теплопроводности дисперсионной жидкости $\lambda_1 \gg \lambda_2$, что соответствует несжимаемой пузырьковой газожидкостной среде, то $\beta = \dfrac{\alpha-1}{\alpha+2} = -0.5$ и из второй формулы (17) следует $k(\beta) = -0.0086$.

3. Сравнение с теоретическими и экспериментальными данными других авторов для случая нетеплопроводных дисперсных частиц (пузырьков)

На рис. 1 дано сравнение аналитической зависимости (18) при $k(\beta) = -0.0086$ ($\lambda_1 \gg \lambda_2$) с соответствующими экспериментальными данными по измерению эффективной электропроводности газожидкостных дисперсных сред в диапазоне объемных концентраций газа от нуля до единицы (от пузырьков до пен), приведенными в работе [18]. Видно, что отклонение теоретической зависимости (18) от экспериментальных данных наблюдается лишь при концентрациях газа больше приблизительно 0.65, т.е. при концентрациях, близких к предельной для сферических дисперсных частиц с хаотической упаковкой. Штрихпунктирной линией на рис.1 показан расчет по формуле (2), линейное приближение формулы Максвелла (1). В работе [18] многочисленные эксперименты различных авторов обобщены в виде эмпирической формулы

$$\sigma_{\exp} = \frac{\sigma^*_{\exp}}{\sigma_1} = \frac{2p(1+12p)}{6+29p-9p^2}, \quad p = 1-c . \tag{19}$$

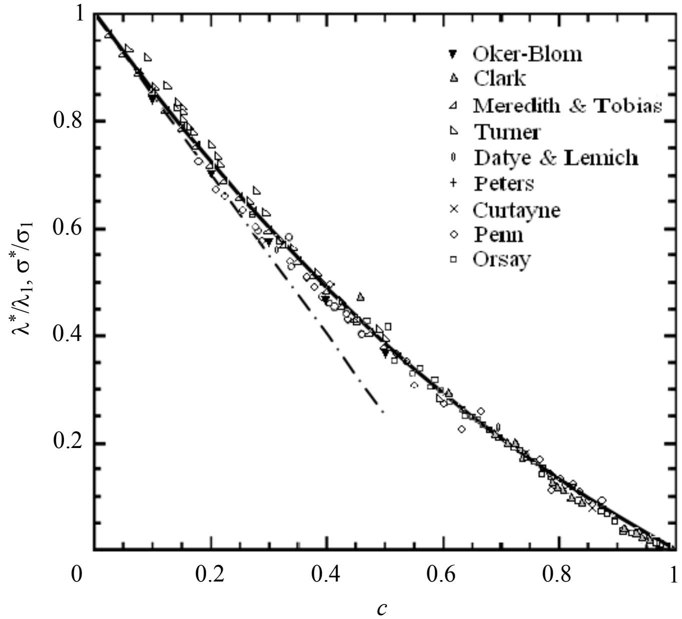

Рис. 1. Сравнение расчетных по формуле (18) значений эффективной теплопроводности (сплошная линия) с экспериментами (маркеры) различных авторов [18] для пузырьковых газожидкостных сред. Штрихпунктирная линия – расчет по формуле (2)

Fig. 1. Comparison of the effective thermal conductivity values (solid line) calculated by formula (18) with experiments (markers) of different authors [18] for bubble gas-liquid media. The dash-dot line indicates the calculation by formula (2)

На рис. 2 дано более точное сравнение в виде относительного отклонения теоретических данных различных авторов от обобщенной экспериментальной зависимости (19):

$$W(c) = \frac{\sigma - \sigma_{\exp}}{\sigma_{\exp}} = \frac{\lambda - \lambda_{\exp}}{\lambda_{\exp}}.$$

Из рис. 2 видно, что полученная аналитическая зависимость (18) с погрешностью менее 0.5 % совпадает с формулой Максвелла (1) в диапазоне объемных концентраций от нуля до 0.52. Численные расчеты Фельдерхофа (точки на графике), выполненные с учетом парных и тройных взаимодействий пузырьков [11], а также формула Джеффри, полученная в виде вириального разложения с точностью до $O(c^3)$, отличаются от зависимости (1) в том же диапазоне концентраций не более чем на 1.5 %.

Таким образом, для практических расчетов теплопроводности пузырьковых сред следует использовать формулу (2), которая не учитывает взаимодействия пузырьков. Из рис. 1. видно, что она дает отклонение от экспериментальной зависимости менее 5 % во всем диапазоне концентраций пузырьков, в то время как разброс экспериментальных данных составляет до 10 %. Линейная зависимость (2) имеет погрешность менее 5 % лишь в диапазоне объемных концентраций от нуля до 0.22.

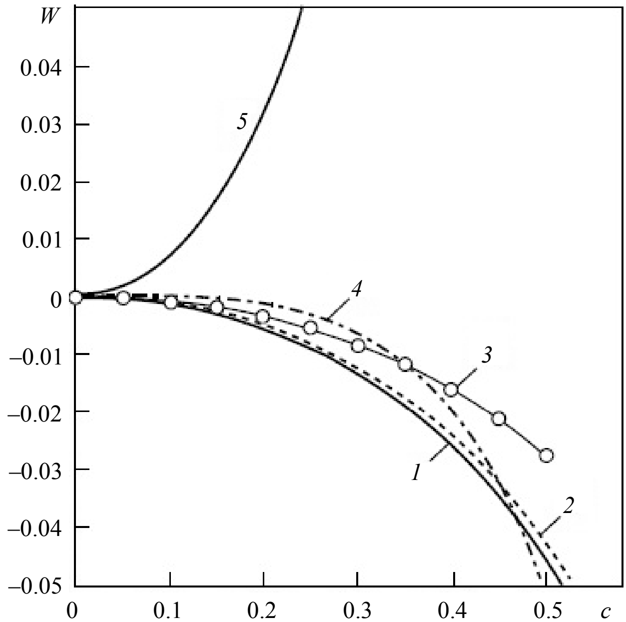

Рис. 2. Зависимость относительной погрешности различных теоретических методов вычисления коэффициента теплопроводности пузырьковой газожидкостной смеси от объемной концентрации пузырьков: кр. *1* – предложенная автором аналитическая зависимость (18), кр. *2* – эвристическая формула Максвелла (1), кр. *3* – численные расчеты Фельдерхофа [11], кр. *4* – формула Джеффри [6] в виде вириального разложения $O(c^3)$, кр. *5* – линейная аппроксимация формулы (1) при $c << 1$

Fig. 2. Relative error of different theoretical methods for calculating the thermal conductivity coefficient of the bubble gas-liquid mixture as a function of volume concentration of bubbles: *1*, an analytical dependence (18) proposed by the author, *2*, the heuristic Maxwell's equation (1), *3*, the numerical results of Felderhof [11], *4*, Jeffrey's formula [6] in the form of a virial expansion $O(c^3)$, *5*, a linear approximation of the formula (1) at $c<<1$

В заключение отметим, что поскольку электростатика и магнитостатика описываются полностью идентичными с теплопроводностью уравнениями и граничными условиями, то формулы (1) и (18) применимы, при соответствующей замене буквенных обозначений, и для расчета электрической и магнитной проницаемости дисперсных сред.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бошенятов Б.В.* О перспективах применения микропузырьковых газожидкостных сред в технологических процессах // Изв. вузов. Физика. 2005. № 11. Приложение. С. 49–54.
2. *Бошенятов Б.В.* Микропузырьковые газожидкостные среды и перспективы их использования. Издательский дом: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. 170 с.
3. *Maxwell J.C.* Electricity and magnetism (1st ed.). Clarendon Press, 1873.
4. *Einstein A.* EineneueBestimung der Molekuldimensionen // Ann. Phys. 1906. V. 19. P. 289–306.

5. *Lord Rayleigh*. On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the volume properties of a medium // Phil. Mag. 1892. V. 34. P. 481–502.
6. *Jeffrey D.J.* Conduction through a random suspension of spheres // Proc. Roy. Soc. London. 1973. V. A335. P. 355–367.
7. *Felderhof B.V., Ford G.W., Cohen E.G.D.* Two-particle cluster integral in the expansion of the dielectric constant // J. Stat. Phys. 1982. V. 28. P. 649–672.
8. *Cichoki B., Felderhof B.U.* // Journal of Statistical Physics. 1988. V. 53. No. 1/2. P. 499–521.
9. *Markov K.Z.* On the Heat Propagation Problem for Random Dispersions of Spheres // Mathematica Balkanica New Series. 1989. V. 3. Fasc. 3–4. P. 399–417
10. *Buryachenko V.A.* Micromechanics of Heterogeneous Materials. New York: Springer Science + Business Media. LLC, 2007. 686 p.
11. *Felderhof B.U.* Virtual mass and drag in two-phase flow // J. Fluid Mech. 1991. V. 225. P. 177–196.
12. *Гуськов О.Б., Бошенятов Б.В.* Гидродинамическое взаимодействие сферических частиц в потоке невязкой жидкости // Докл. РАН. 2011. Т. 438. № 5. С. 626–628.
13. *Гуськов О.Б., Бошенятов Б.В*. Взаимодействие фаз и присоединенная масса дисперсных частиц в потенциальных потоках жидкости // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Механика жидкости и газа. 2011. Вып. 4(3). С. 740–741.
14. *Clausius R.* Die mechanische Behandlung der Elektricitat. Vieweg, Braunshweig, 1879.
15. *Lorenz L.* Über die Refraktions konstante // Ann. Phys. Chem. 1880. V. 11. P. 70ff.
16. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. Теоретическая физика. Т. 8. М.: Наука, 1982. 620 с.
17. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: учеб. пособие в 10 т.: Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
18. *Feitosa K., Marze S., Saint-Jalmes A., Durian D.J.* // J. Physics: Condenced Matter. 2005. V. 17. P. 6301–6305.

Статья поступила 07.11.2016 г.

Boshenyatov B.V. (2017) THERMAL CONDUCTIVITY OF THE BUBBLE GAS-LIQUID MEDIA WITH A HIGH CONCENTRATION. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 45. pp. 69–79

DOI 10.17223/19988621/45/6

It is known that Maxwell's equation (the Clausius-Mossotti formula) is widely used for calculating the electrical and thermal conductivity, dielectric constant, and other effective transport coefficients of disperse media. This formula does not take into account the interaction of particles with each other; therefore, it is believed to be valid only for a low volume concentration of the dispersed particles. The analytical dependence for calculating the thermal conductivity of an incompressible bubble medium, with taking into account the mutual influence of the bubbles, has been obtained theoretically by the author. A comparison of the results with the calculations and experimental data of other authors has shown that Maxwell's formula, which leaves out of account the interaction of bubbles, leads to an error of less than 5% in the range of bubble concentration (by volume) from 0 to 0.55. The allowance for interaction of the bubbles almost does not improve the results of Maxwell's formula. This fact testifies that the main contribution to a change in the thermal conductivity with an increase in concentration of bubbles in the bubble medium is made by a purely geometric factor.

Keywords: bubble gas-liquid medium, hydrodynamic interaction, thermal conductivity, electrical conductivity, permittivity and magnetic permeability.

BOSHENYATOV Boris Vladimirovich (Doctor of Technical Sciences, Institute of Applied Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation)
E-mail: bosbosh@mail.ru

REFERENCES

1. Boshenyatov B.V. (2005) O perspektivakh primeneniya mikropuzyr'kovykh gazozhidkostnykh sred v tekhnologicheskikh protsessakh [On the prospects of applying microbubble gas-liquid media in technological processes]. *Izvestiya Vuzov. Fizika – Russian Physics Journal.* 48(11 appendix). pp. 49–54.
2. Boshenyatov B.V. (2016) *Mikropuzyr'kovye gazozhidkostnye sredy i perspektivy ikh ispol'zovaniya* [Microbubble gas-liquid media and their prospects of applying]. LAP LAMBERT Academic Publishing. 170 p.
3. Maxwell J.C. (1873) *Electricity and magnetism* (1st ed.). Clarendon Press.
4. Einstein A. (1906) Eine neue bestimung der molekuldimensionen. *Annalen der Physik*. 19. pp. 289–306. DOI: 10.1002/andp.19063240204.
5. Lord Rayleigh (1892) On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the volume properties of a medium. *Philosophical Magazine*. 34. pp. 481–502. DOI: 10.1080/14786449208620364.
6. Jeffrey D.J. (1973) Conduction through a random suspension of spheres. *Proc. Roy. Soc. London*. A335. pp. 355–367. DOI: 10.1098/rspa.1973.0130.
7. Felderhof B.V., Ford G.W., Cohen E.G.D. (1982) Two-particle cluster integral in the expansion of the dielectric constant. *J. Stat. Phys.* 28. pp. 649–672.
8. Cichoki B., Felderhof B.U. (1988) *Journal of Statistical Physics*. 53. No. 1/2. pp. 499–521.
9. Markov K.Z. (1989) On the heat propagation problem for random dispersions of spheres. *Mathematica Balkanica New Series.* 3. Fasc. 3–4. pp. 399–417.
10. Buryachenko V.A. (2007) *Micromechanics of heterogeneous materials*. New York: Springer Science+Business Media, LLC. 686 p.
11. Felderhof B.U. (1991) Virtual mass and drag in two-phase flow. *J. Fluid Mech.* 225. pp. 177–196. DOI: 10.1017/S002211209100201X.
12. Guskov O.B., Boshenyatov B.V. (2011) Gidrodinamicheskoe vzaimodeystvie sfericheskikh chastits v potoke nevyazkoy zhidkosti [Hydrodynamic interaction of spherical particles in an inviscid-fluid flow]. *Doklady Physics*. 56(6). pp. 352–354.
13. Guskov O.B., Boshenyatov B.V. (2011) Vzaimodeystvie faz i prisoedinennaya massa dispersnykh chastits v potentsial'nykh potokakh zhidkosti [Interaction of phases and virtual mass of dispersed particles in potential flows of fluid] *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Mekhanika zhidkost i igaza – Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*. 4(3). pp. 740–741.
14. Clausius R. (1879) *Die mechanische Behandlung der Elektrizität*. Vieweg, Braunschweig.
15. Lorenz L. (1880) Über die Refraktionsconstante. *Ann. Phys. Chem.* 11. pp. 70.
16. Landau L.D., Lifshitz E.M. (1960) *Electrodynamics of continuous media*. 8. Pergamon Press.
17. Landau L.D., Lifshitz E.M. (1959) *Fluid Mechanics.* 6. Pergamon Press. 551 p.
18. Feitosa K., Marze S., Saint-Jalmes A., Durian D.J. (2005) Electrical conductivity of dispersions: from dry foams to dilute suspensions. *Journal of Physics: Condensed Matter.* 17(41). pp. 6301–6305.