ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИКЛАДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

УДК 512.542

ГОМОМОРФНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

М. И. Кабенюк

Кемеровский государственный университет, г. Кемерово, Россия

Множество $\mathrm{Hom}\,(G,H)$ гомоморфизмов группы G в группу H является группой относительно поточечного умножения тогда и только тогда, когда образы любых двух таких гомоморфизмов поэлементно перестановочны. В таком случае группа $\mathrm{Hom}\,(G,H)$ коммутативна. Для конечных групп G и H изучаются алгебраические свойства группы $\mathrm{Hom}\,(G,H)$, а также объединения $\mathrm{Im}\,(G,H)$ образов всех таких гомоморфизмов. Пусть $\exp(G)$ — минимальное среди всех таких положительных целых чисел n, для которых $x^n = 1$ для каждого элемента $x \in G$; G' — коммутант группы G, $q = \exp(G/G')$ и $\Omega_q(H)$ — подгруппа в H, порождённая элементами периода q. Доказаны следующие утверждения:
– Если $\mathrm{Hom}\,(G,H)$ является группой, то $\Omega_q(H)$ коммутативна и группы $\mathrm{Hom}\,(G,H)$ и $\mathrm{Hom}\,(G/G',\Omega_q(H))$ изоморфны. Обратно, если $\Omega_q(H)$ коммутативна и ядро каждого гомоморфизма из $\mathrm{Hom}\,(G,H)$ содержит коммутант G', то множество $\mathrm{Hom}\,(G,H)$ является группой относительно поточечного умножения.
– Если $\mathrm{Im}\,(G,H)$ — подгруппа в H, то $\mathrm{Im}\,(G,H)$ эндоморфно допустима.
– Если G — такая конечная p-группа, что $q = \exp(G) = \exp(G/G')$, а H — регулярная p-группа, то $\mathrm{Im}\,(G,H) = \Omega_q(H)$.

Ключевые слова: *гомоморфизм групп, гомоморфная устойчивость, конечная группа, группа Фробениуса, регулярная p-группа.*

DOI 10.17223/20710410/35/1

HOMOMORPHIC STABILITY OF FINITE GROUPS

M. I. Kabenyuk

Kemerovo State University, Kemerovo, Russia

E-mail: kabenyuk@kemsu.ru

The set $\mathrm{Hom}\,(G,H)$ of all homomorphisms from a group G to a group H is a group with respect to the operation of pointwise products iff the images of any two such homomorphisms commute element-wise; in this case, the group is commutative. For finite G and H, we study algebraic properties of this group and of the union $\mathrm{Im}\,(G,H)$ of the images of all homomorphisms from G to H. Let $\exp(G)$ be the minimal positive integer n such that $x^n = 1$ for all $x \in G$, let G' be the commutator subgroup of G, $q = \exp(G/G')$, and let $\Omega_q(H)$ be the subgroup of H generated by all elements of order q. We obtain the following results.
If $\mathrm{Hom}\,(G,H)$ is a group, then $\Omega_q(H)$ is commutative and the groups $\mathrm{Hom}\,(G,H)$ and $\mathrm{Hom}\,(G/G',\Omega_q(H))$ are isomorphic. Conversely, if $\Omega_q(H)$ is commutative and $\phi(G') = \{1\}$ for all $\phi \in \mathrm{Hom}\,(G,H)$, then $\mathrm{Hom}\,(G,H)$ is a group.

If $\mathrm{Im}\,(G,H)$ is a subgroup of H, then it is endomorphically admissible in H.
If G is a finite p-group such that $\exp(G)=\exp(G/G')=q$ and H is a regular p-group, then $\mathrm{Im}\,(G,H)=\Omega_q(H)$.

Keywords: *homomorphism groups, homomorphic stability, finite group, Frobenius group, regular p-group.*

Введение

Пусть G и H — произвольные группы. Если ϕ и ψ — произвольные отображения, заданные на G и принимающие значения в H, то их произведением назовём отображение $\phi\psi:\ G\to H$, определяемое правилом

$$(\phi\psi)(x)=\phi(x)\psi(x),\ x\in G. \tag{1}$$

Символом $\mathrm{Hom}\,(G,H)$ будем обозначать множество всех гомоморфизмов группы G в группу H. Если H — абелева группа, то множество $\mathrm{Hom}\,(G,H)$ является группой относительно указанного выше умножения отображений. Эта группа тоже коммутативна. Если же H не является абелевой группой, то $\mathrm{Hom}\,(G,H)$ не обязано быть группой. Пару групп (G,H) назовём гомоморфно устойчивой, если объединение гомоморфных образов группы G в группе H является подгруппой группы H, т. е. множество

$$\mathrm{Im}\,(G,H)=\bigcup_{\phi\in\mathrm{Hom}\,(G,H)}\mathrm{Im}\,\phi$$

— подгруппа группы H. Это понятие рассматривается в работе [1]. Там же, а также в [2] исследуется вопрос о гомоморфной устойчивости пар абелевых групп. В частности, в [2, следствие 2] доказано, что пара (G,H) абелевых групп гомоморфно устойчива, если группа G периодическая, а H — произвольная группа (этот факт упоминается в [3, гл. VIII, § 43, упражнение 11]).

В [4] понятие гомоморфной устойчивости рассматривается для произвольных пар конечных групп. В [4, 5] для всех пар (G,H), $|G|\leqslant 12$, $|H|\leqslant 12$, с помощью компьютерных программ установлено, какие из них являются гомоморфно устойчивыми; в том случае, когда это так, вычислена группа $\mathrm{Im}\,(G,H)$. Кроме того, для всех указанных пар установлено, какие из множеств $\mathrm{Hom}\,(G,H)$ являются группами, и все эти группы вычислены.

В настоящей работе доказано несколько общих утверждений о множествах $\mathrm{Hom}\,(G,H)$ и $\mathrm{Im}\,(G,H)$, которые позволяют проделать все вычисления указанных выше работ без привлечения компьютерных программ и исправить несколько опечаток, допущенных авторами. Помимо этого, эти утверждения могли бы помочь проделать указанные вычисления для групп более высокого порядка.

Все используемые обозначения общеприняты. Редкие исключения разъяснены в тексте. Для группы G и $x\in G$ символы $|G|$ и $\mathrm{o}(x)$ обозначают порядок G и период (часто говорят «порядок») элемента x. Пусть G — конечная группа. *Высотой* (используют также термин «экспонента») группы G назовём такое целое положительное число q, что $x^q=1$ для любого элемента $x\in G$, и число q минимально с этим свойством. Высоту группы G будем обозначать символом $\exp(G)$. В частности, высота группы G — делитель $|G|$. Если m, n — целые числа, то символ $m|n$ означает, что m — делитель n. Для конечных абелевых групп и конечных p-групп A верно следующее равенство:

$$\exp(A)=\max_{x\in A}\{\mathrm{o}(x)\}.$$

С другой стороны, $\exp(S_3) = 6$, но в группе S_3 нет элементов периода 6; $\exp(A_5) = 30$, но максимальный период элементов A_5 равен 5. Пусть q — некоторое целое положительное число, H — некоторая группа. Будем обозначать

$$\Omega_q(H) = \mathrm{gr}\,(x \in H \mid x^q = 1).$$

Здесь и далее символом $\mathrm{gr}\,(X)$ обозначается подгруппа, порождённая множеством $X \subset H$. Символ 1 обозначает как нейтральный элемент мультипликативной группы, так и группу, состоящую из одного нейтрального элемента.

1. Множество гомоморфизмов пар конечных групп

Теорема 1. Пусть G и H — произвольные группы. Множество $\mathrm{Hom}\,(G, H)$ является группой относительно умножения (1) тогда и только тогда, когда образы $\mathrm{Im}\,\phi$ и $\mathrm{Im}\,\psi$ поэлементно перестановочны для любых $\phi, \psi \in \mathrm{Hom}\,(G, H)$.

Доказательство. Пусть множество $\mathrm{Hom}\,(G, H)$ является группой относительно умножения, определяемого формулой (1). Это означает, что если $\phi, \psi \in \mathrm{Hom}\,(G, H)$, то их произведение $\theta = \phi\psi$ — тоже гомоморфизм. Следовательно,

$$\theta(xy) = \theta(x)\theta(y) \tag{2}$$

для любых $x, y \in G$. Учитывая формулу (1) и тот факт, что ϕ и ψ — гомоморфизмы, из (2) получаем

$$\phi(x)\phi(y)\psi(x)\psi(y) = \phi(x)\psi(x)\phi(y)\psi(y). \tag{3}$$

Сократив (3) на $\phi(x)$ слева и на $\psi(y)$ справа, получим

$$\phi(y)\psi(x) = \psi(x)\phi(y) \tag{4}$$

для любых $x, y \in G$ и любых $\phi, \psi \in \mathrm{Hom}\,(G, H)$. Этим доказано прямое утверждение теоремы 1.

Для доказательства обратного утверждения последовательно переходим от (4) к (3), а затем к (2). В результате убеждаемся, что произведение $\theta = \phi\psi$ является гомоморфизмом группы G в группу H, если ϕ и ψ были такими. ■

Теорема 2. Если множество $\mathrm{Hom}\,(G, H)$ является группой, то
(i) образ $\mathrm{Im}\,\phi$ — коммутативная подгруппа в H для любого $\phi \in \mathrm{Hom}\,(G, H)$;
(ii) группа $\mathrm{Hom}\,(G, H)$ абелева.

Доказательство. Пункт (i) этой теоремы вытекает из формулы (4), где следует положить $\psi = \phi$.

Для доказательства п. (ii) вычислим по формуле (1) выражения $(\phi\psi)(x)$ и $(\psi\phi)(x)$, а затем из формулы (4) получим $(\phi\psi)(x) = (\psi\phi)(x)$ для любого $x \in G$. ■

Замечание 1. Последнее утверждение показывает, что в таблице 3 из работы [4] (таблица 5 из [5]) имеются неточности, требующие исправления для следующих пяти множеств: $\mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}_6, D_3)$, $\mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}_6, D_6)$, $\mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Q}_8)$, $\mathrm{Hom}\,(T_{12}, D_4)$, $\mathrm{Hom}\,(T_{12}, \mathbb{Q}_8)$. Здесь $\mathbb{Z}_n$ — циклическая группа порядка n; D_n — диэдральная группа порядка $2n$; $\mathbb{Q}_8$ — группа кватернионов порядка 8; T_{12} — группа, задаваемая с помощью порождающих и соотношений следующим образом:

$$T_{12} = \mathrm{gr}\,(a, b \mid a^3 = b^4 = 1,\ ba = ab^{-1}).$$

Ниже мы укажем, каким образом должны быть исправлены эти неточности.

Далее потребуется одно утверждение об абелевых группах.

Лемма 1. Пусть B — конечная абелева группа, $q = \exp(B)$. Тогда для любого целого числа n, для которого $n|q$, существует такая подгруппа $C < B$, что фактор-группа B/C — циклическая группа порядка n.

Доказательство. Известно, что каждая конечная абелева группа является прямым произведением конечного числа циклических групп, имеющих порядки, равные степеням простых чисел [3, теорема 15.2, гл. III, § 15]. Если $q = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$, где $p_1, \dots, p_s$ — попарно различные простые числа, то это прямое произведение должно иметь вид

$$B = B_1 \times \ldots \times B_s \times D,$$

где $B_1, \dots, B_s$ — циклические группы порядков $p_1^{k_1}, \dots, p_s^{k_s}$ соответственно, а D — некоторая подгруппа B. Группа $X = B_1 \times \ldots \times B_s$ является циклической группой порядка $q = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$. Итак, $B = X \times D$, $X = \mathrm{gr}\,(x)$ для некоторого $x \in X$, $\mathrm{o}(x) = q$. Искомая подгруппа — $C = \mathrm{gr}\,(x^m) \times D$, где $m = q/n$. ∎

Теорема 3. Пусть G и H — две группы, G' — коммутант группы G, $q = \exp(G/G')$, $A = \Omega_q(H)$. Если множество $\mathrm{Hom}\,(G, H)$ является группой, то A — коммутативная подгруппа в H и

$$\mathrm{Hom}\,(G, H) \approx \mathrm{Hom}\,(G/G', A). \tag{5}$$

Обратно, если $\Omega_q(H)$ — коммутативная подгруппа и ядро каждого гомоморфизма из $\mathrm{Hom}\,(G, H)$ содержит коммутант G', то множество $\mathrm{Hom}\,(G, H)$ является группой относительно умножения, заданного формулой (1).

Доказательство. Обозначим $B = G/G'$. Пусть $x \in A$. Так как $\mathrm{o}(x)|q$, то по лемме 1 существует такая подгруппа $C < B$, что B/C — циклическая группа порядка $\mathrm{o}(x)$. Пусть $\phi : G \longrightarrow H$ — гомоморфизм, являющийся композицией

$$G \xrightarrow{\varepsilon_1} G/G' = B \xrightarrow{\varepsilon_2} B/C \xrightarrow{i} \mathrm{gr}\,(x) < H.$$

Здесь $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — канонические гомоморфизмы; i — изоморфизм двух циклических групп одного порядка $\mathrm{o}(x)$. Видим, что $x \in \mathrm{Im}\,\phi$. Аналогично может быть построен гомоморфизм $\psi : G \longrightarrow H$, для которого $y \in \mathrm{Im}\,\psi$. По теореме 1 множества $\mathrm{Im}\,\phi$ и $\mathrm{Im}\,\psi$ поэлементно перестановочны. В частности, $xy = yx$. Этим доказано, что $A = \Omega_q(H)$ — коммутативная подгруппа в H.

Докажем формулу (5). Пусть $\phi \in \mathrm{Hom}\,(G, H)$. Так как $\mathrm{Hom}\,(G, H)$ является по условию группой, по теореме 2, (i) $\mathrm{Im}\,\phi$ — коммутативная подгруппа в H. Следовательно, $G' \subset \mathrm{Im}\,\phi$. Определим отображение $\widetilde{\phi} : G/G' \longrightarrow H$ по формуле

$$\widetilde{\phi}(\widetilde{x}) = \phi(x),$$

где $x \in G$, $\widetilde{x} = xG'$. Корректность определения $\widetilde{\phi}$ следует из включения $G' \subset \mathrm{Im}\,\phi$. Непосредственно проверяется, что $\widetilde{\phi}$ — гомоморфизм группы G/G' в группу H. Так как $n = \mathrm{o}(\phi(x)) = \mathrm{o}(\widetilde{\phi}(\widetilde{x}))$ и $\widetilde{x} \in G/G'$, то $n|\exp(G/G')$. Стало быть, $\phi(x) \in A = \Omega_q(H)$. Последнее верно для любого $x \in G$. Следовательно, $\widetilde{\phi} \in \mathrm{Hom}\,(G/G', A)$, а отображение $\phi \mapsto \widetilde{\phi}$ является изоморфизмом группы $\mathrm{Hom}\,(G, H)$ на группу $\mathrm{Hom}\,(G/G', A)$.

Докажем обратное утверждение. Пусть множество $A = \Omega_q(H)$ является подгруппой в H. (Между прочим, отметим, хотя это нам и не потребуется, что тогда A — нормальная подгруппа в H.) Достаточно доказать, что $\mathrm{Im}\,\phi \subset A$ для любого $\phi \in \mathrm{Hom}\,(G, H)$.

Так как ядро ϕ содержит G', то $\operatorname{Im}\phi = \phi(G)$ — абелева группа. В силу определения высоты q для любого элемента $x \in G$ выполняется условие $\mathrm{o}(x)|q$. Так как $\mathrm{o}(\phi(x))|\mathrm{o}(x)$, то $\mathrm{o}(\phi(x))|q$. Значит, $\phi(x) \in A$. ■

Замечание 2. Теорема 3 часто помогает свести вычисление группы $\mathrm{Hom}\,(G, H)$ к точно такой же задаче, но уже для абелевых групп. Последнее позволяет указать следующий алгоритм вычисления группы $\mathrm{Hom}\,(G, H)$:

1) Вычисляем коммутант G' группы G.
2) Вычисляем высоту $q = \exp(G/G')$ фактор-группы G/G'.
3) Вычисляем множество $X = \{x \in H : x^q = 1\}$.
4) Если элементы X попарно перестановочны, то переходим к шагу 5, иначе заканчиваем вычисления, так как в этом случае множество $\mathrm{Hom}\,(G, H)$ не является группой.
5) Проверяем наличие гомоморфизма $\phi : G \to H$, для которого $G' \nsubseteq \operatorname{Ker}\phi$. Если такого гомоморфизма нет, то переходим к шагу 6. Если такой гомоморфизм есть, то множество $\mathrm{Hom}\,(G, H)$ не является группой и вычисления заканчиваем.
6) Вычисляем $\mathrm{Hom}\,(G/G', A)$, где $A = \Omega_q(H)$. В силу формулы (5) это и есть $\mathrm{Hom}\,(G, H)$.

Отметим, что шаг 5 может оказаться довольно сложной задачей для групп большого порядка. Мы не обсуждаем здесь пути решения этой задачи.

В то же время шаг 6 может быть легко выполнен благодаря следующему обстоятельству. Для конечных абелевых групп B и C, порядки которых взаимно просты, $\mathrm{Hom}\,(B, C) = 0$. Если же обе группы B и C являются p-группами для некоторого простого числа p, то $\mathrm{Hom}\,(B, C)$ вычисляется по следующей формуле: пусть

$$B = \mathbb{Z}_{p^{k_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p^{k_2}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p^{k_r}},\ \ C = \mathbb{Z}_{p^{l_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p^{l_2}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p^{l_s}}.$$

Здесь $k_1, k_2, \ldots, k_r, l_1, l_2, \ldots, l_s$ — целые положительные числа. Тогда справедлива формула

$$\mathrm{Hom}\,(B, C) \approx \mathbb{Z}_{p^{m_{11}}} \oplus \mathbb{Z}_{p^{m_{12}}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p^{m_{1s}}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p^{m_{r1}}} \oplus \mathbb{Z}_{p^{m_{r2}}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p^{m_{rs}}}, \qquad (6)$$

где $m_{ij} = \min(k_i, l_j)$, $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, s$.

Формула (6) — простое следствие теорем 43.1 и 43.2 из [3, гл. VIII, § 43].

Следствие 1. Если G — конечная группа, H — конечная абелева группа, то $\mathrm{Hom}\,(G, H)$ — группа и

$$\mathrm{Hom}\,(G, H) \approx \mathrm{Hom}\,(G/G', H). \qquad (7)$$

Доказательство. Тот факт, что $\mathrm{Hom}\,(G, H)$ — группа, немедленно следует из формулы умножения (1) на множестве $\mathrm{Hom}\,(G, H)$. Вторая часть утверждения — прямое следствие формулы (5) теоремы 3. ■

Следствие 2. Пусть G — конечная абелева группа, H — произвольная конечная группа, $q = \exp(G)$ — высота группы G, $A = \Omega_q(H)$. Тогда $\mathrm{Hom}\,(G, H)$ является группой тогда и только тогда, когда A — коммутативная подгруппа H. Если это условие выполняется, то

$$\mathrm{Hom}\,(G, H) \approx \mathrm{Hom}\,(G, A).$$

Доказательство. Следствие верно ввиду того, что для абелевых групп G коммутант $G' = 1$. ■

2. Приложения общих утверждений

Проиллюстрируем применение доказанных утверждений для вычисления конкретных групп $\mathrm{Hom}\,(G, H)$. Рассмотрим таблицу 1 из [4] (или [5, таблица 3]). В ней перечислены все группы $\mathrm{Hom}\,(G, H)$ для всех конечных групп G и абелевых групп H, для которых $|G|, |H| \leqslant 12$. Эта таблица составлена с помощью компьютерной программы. Укажем, как она может быть заполнена с применением наших утверждений.

Если группа G абелева, то соответствующие строки этой таблицы можно заполнить, используя формулу (6).

Если группа G неабелева, то воспользуемся формулой (7). Для этого придётся вычислить фактор-группы G/G' всех неабелевых групп, порядок которых не больше 12. Таких групп ровно семь:

$$D_3,\ D_4,\ D_5,\ D_6,\ \mathbb{Q}_8,\ A_4,\ T_{12}.$$

Первые четыре группы — диэдральные группы соответствующего порядка. Для диэдральных групп имеем следующие общие формулы:

$$D_{2n}/D'_{2n} \approx \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2,\ D_{2n-1}/D'_{2n-1} \approx \mathbb{Z}_2,\ n = 2, 3, 4, \ldots \tag{8}$$

Далее

$$\mathbb{Q}_8/\mathbb{Q}'_8 \approx \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2,\ A_4/A'_4 \approx \mathbb{Z}_2,\ T_{12}/T'_{12} \approx \mathbb{Z}_4. \tag{9}$$

Поясним последний изоморфизм. Поскольку $T_{12} = \{a, b \mid a^3 = b^4 = 1,\ ba = ab^{-1}\}$, то $a^{-1}ba = b^{-1}$ и $b^{-1}a^{-1}ba = b$. Из первого равенства следует, что подгруппа $\mathrm{gr}\,(b)$ нормальна в T_{12}, а из второго — $\mathrm{gr}\,(b) \subset T'_{12}$. Отсюда выводим, что $\mathrm{gr}\,(b) = T'_{12}$ и $T_{12}/T'_{12} \approx \mathbb{Z}_4$.

Из (7)–(9) получаем, что для любой абелевой группы H имеют место изоморфизмы

$$\mathrm{Hom}\,(D_3, H) \approx \mathrm{Hom}\,(D_5, H) \approx \mathrm{Hom}\,(A_4, H) \approx \mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}_2, H),$$
$$\mathrm{Hom}\,(D_4, H) \approx \mathrm{Hom}\,(D_6, H) \approx \mathrm{Hom}\,(\mathbb{Q}_8, H) \approx \mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, H),$$
$$\mathrm{Hom}\,(T_{12}, H) \approx \mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}_4, H).$$

Отсюда следует, что должны полностью совпадать строки таблицы 1 из [4] (или [5, таблица 3]), помеченные $\mathbb{Z}_2, D_3, D_5, A_4$, а также строки $\mathbb{Z}_2^2, D_4, D_6, \mathbb{Q}_8$ и, наконец, строки $\mathbb{Z}_4, T_{12}$. И это действительно так, за исключением одного места, находящегося в строке $\mathbb{Z}_2^2$ и столбце $\mathbb{Z}_2$, где вместо $\mathbb{Z}_4$ должно стоять $\mathbb{Z}_2^2$.

Проиллюстрируем, как может работать теорема 3 и её следствия в случае, когда группа H неабелева. Рассмотрим в качестве H те же семь подгрупп. Укажем в каждой из них нетривиальную коммутативную подгруппу, равную $\Omega_q(H)$ для некоторого целого положительного числа q.

В группе D_3 такая подгруппа только одна: $\Omega_3(D_3) \approx \mathbb{Z}_3$. В группе D_4 таких подгрупп нет. В D_5: $\Omega_5(D_5) \approx \mathbb{Z}_5$. В D_6: $\Omega_3(D_6) \approx \mathbb{Z}_3$. В $\mathbb{Q}_8$: $\Omega_2(\mathbb{Q}_8) \approx \mathbb{Z}_2$. В A_4: подгруппа $V_4 = \Omega_2(A_4) \approx \mathbb{Z}_2^2$. В T_{12} таких подгрупп три: $\Omega_2(T_{12}) \approx \mathbb{Z}_2$, $\Omega_3(T_{12}) \approx \mathbb{Z}_3$, $\Omega_6(T_{12}) \approx \mathbb{Z}_6$.

Используя эту информацию, благодаря теореме 3 и её следствиям, можем выписать группы $\mathrm{Hom}\,(G, H)$ или указать, что это множество не является группой. Рассмотрим только случаи, соответствующие клеткам таблицы 3 из работы [4], где, по нашему мнению, содержатся неточности. Итак,

$$\mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}_6, D_3) \approx \mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_3) \approx \mathbb{Z}_3,$$
$$\mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}_6, D_6) \approx \mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_3) \approx \mathbb{Z}_3,$$
$$\mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Q}_8) \approx \mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Z}_2) \approx \mathbb{Z}_2.$$

Множество $\mathrm{Hom}\,(T_{12}, D_4)$ группой не является, поскольку в группе D_4 нет нетривиальных коммутативных подгрупп вида $\Omega_q(D_4)$. Отметим, однако, что $\mathrm{Hom}\,(T_{12}, D_4)$ содержит нетривиальные гомоморфизмы.

Вычислим $\mathrm{Hom}\,(T_{12}, \mathbb{Q}_8)$. Мы знаем, что

$$T_{12}/T'_{12} \approx \mathbb{Z}_4,\ A = \Omega_2(\mathbb{Q}_8) < \mathbb{Q}_8,\ A \approx \mathbb{Z}_2.$$

Ясно, что ядро каждого гомоморфизма из T_{12} в $\mathbb{Q}_8$ содержит коммутант. Поэтому $\mathrm{Hom}\,(T_{12}, \mathbb{Q}_8) \approx \mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2) \approx \mathbb{Z}_2$.

При этом в [4, таблица 3] на этих местах стоят соответственно D_3, D_3, $\mathbb{Q}_8$, D_4, $\mathbb{Q}_8$.

3. Гомоморфная устойчивость регулярных p-групп

Из приводимого ниже утверждения следует, в частности, что понятие гомоморфной устойчивости и понятие сильной гомоморфной устойчивости, введённое в [4], равносильны между собой.

Теорема 4. Если пара (G, H) гомоморфно устойчива, т. е. если $\mathrm{Im}\,(G, H)$ — подгруппа в H, то $\mathrm{Im}\,(G, H)$ — эндоморфно допустимая подгруппа группы H. В частности, $\mathrm{Im}\,(G, H)$ — нормальная подгруппа группы H.

Доказательство. Ясно, что если $\phi : G \to H$ и $\psi : H \to H$ — гомоморфизмы, то композиция $\theta = \psi \circ \phi$ — гомоморфизм группы G в группу H. Пусть $x \in \mathrm{Im}\,(G, H)$. Тогда существуют такие $\phi \in \mathrm{Hom}\,(G, H)$ и $y \in G$, что $\phi(y) = x$. Значит, для любого гомоморфизма $\psi : H \to H$ имеем

$$(\psi \circ \phi)(y) = \psi(\phi(y)) = \psi(x),$$

то есть $\psi(x) \in \mathrm{Im}\,(\psi \circ \phi) \subset \mathrm{Im}\,(G, H)$. Этим доказано, что вместе с каждым элементом в $\mathrm{Im}\,(G, H)$ лежат все его гомоморфные образы. Стало быть, если $\mathrm{Im}\,(G, H)$ — подгруппа группы H, то она эндоморфно допустима. ■

Далее приведём несколько примеров и докажем несколько общих утверждений о множестве $\mathrm{Im}\,(G, H)$.

Утверждение 1. Если $n = \exp(H)$, то пара $(\mathbb{Z}_n, H)$ гомоморфно устойчива. Более точно, $\mathrm{Im}\,(\mathbb{Z}_n, H) = H$.

Доказательство. Пусть $h \in H$ и $\mathrm{o}(h) = m$. Так как по условию $h^n = 1$, то $m|n$. Тогда формула $\phi(k) = h^k$, $k \in \mathbb{Z}_n$, корректно определяет гомоморфизм из группы $\mathbb{Z}_n$ в группу H, причём $\phi(1) = h$. Значит, $h \in \mathrm{Im}\,(\mathbb{Z}_n, H)$. Ввиду произвольности h утверждение доказано. ■

Например, $\mathrm{Im}\,(\mathbb{Z}_{30}, A_5) = A_5$. Здесь и далее A_n — группа чётных перестановок, S_n — группа всех перестановок порядка n, V_4 — четверная группа Клейна. Приведем ещё несколько примеров, опуская вычисления.

Пример 1.

1) $\mathrm{Im}\,(S_3, A_4) = V_4$;
2) $\mathrm{Im}\,(A_4, S_3) = \mathrm{gr}\,(123)$;
3) $\mathrm{Im}\,(S_3, S_4) = \{x \in S_4 | \mathrm{o}(x) \neq 4\}$;
4) $\mathrm{Im}\,(S_4, S_3) = S_3$;
5) $\mathrm{Im}\,(S_4, A_4) = V_4$;
6) $\mathrm{Im}\,(A_4, S_4) = A_4$;
7) $\mathrm{Im}\,(A_5, A_5 \times A_5) = \{(x, y) | \mathrm{o}(x) = \mathrm{o}(y)\}$.

Таким образом, среди перечисленных пар только две — (S_3, S_4) и $(A_5, A_5 \times A_5)$ — не являются гомоморфно устойчивыми.

Укажем ещё один важный, на наш взгляд, пример.

Пример 2. Пусть $H = A \cdot B$ — группа Фробениуса с ядром A и дополнением B, $q = \exp(A)$. Тогда $\mathrm{Im}\,(\mathbb{Z}_q \times B, H) = H$, то есть пара $(\mathbb{Z}_q \times B, H)$ гомоморфно устойчива.

Подробные определения и обширные списки примеров групп Фробениуса можно найти в [6, 7]. Для объяснения нашего примера важно лишь следующее свойство группы Фробениуса $H = A \cdot B$:

$$H \setminus A \subset \bigcup_{x \in H} xHx^{-1}.$$

На наш взгляд, интересна следующая задача.

Задача 1. Для заданной конечной группы H вычислить все такие группы G, $|G| \leqslant |H|$, что пара (G, H) гомоморфно устойчива.

Другой пример гомоморфно устойчивых пар групп доставляют регулярные p-группы. Для подробного ознакомления с этим понятием, а также с многочисленными примерами p-групп можно обратиться к [8, глава 12]. Укажем лишь самое необходимое. Конечная p-группа называется регулярной, если для любых двух элементов $x, y \in G$ существует такой элемент $z \in H'$, где $H = \mathrm{gr}\,(x, y)$, что

$$x^p \cdot y^p = (xy)^p z^p.$$

Вот три семейства регулярных p-групп: абелевы p-группы; p-группы, ступень нильпотентности которых меньше p; p-группы, порядок которых меньше p^p.

Нам потребуется следующее свойство регулярных p-групп: если G — регулярная p-группа, то для любого целого числа вида $q = p^k$ группа $A = \Omega_q(G)$ является нормальной подгруппой, для которой $q = \exp(A)$ [8, теорема 12.4.5].

Теорема 5. Пусть G и H — такие конечные p-группы, что $\exp(G) = \exp(G/G')$, а H — регулярная p-группа. Тогда пара (G, H) гомоморфно устойчива. Более точно:

$$\mathrm{Im}\,(G, H) = \Omega_q(H), \ q = \exp(G).$$

Доказательство. Пусть $h \in H$ и $n = \mathrm{o}(h)$. Если $h \in \Omega_q(H)$, то $h^q = 1$. Тогда $n|q$. Так как $q = \exp(G/G')$, по лемме 1 существует такая подгруппа $C < B = G/G'$, что фактор-группа B/C — циклическая группа порядка n. Далее, рассуждая, как в доказательстве теоремы 3, построим гомоморфизм $\phi : G \to H$, такой, что $h \in \mathrm{Im}\,\phi$. Этим доказано, что $\mathrm{Im}\,(G, H) = \Omega_q(H)$. ■

В заключение сформулируем еще одну задачу.

Задача 2. Можно ли в теореме 5 ослабить условие $\exp(G) = \exp(G/G')$? Например, вообще убрать его?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гриншпон С. Я., Ельцова Т. А.* Гомоморфно устойчивые абелевы группы // Вестник Томского государственного университетата. 2003. № 280. С. 31–33.
2. *Гриншпон С. Я., Ельцова Т. А.* Гомоморфная устойчивость абелевых групп // Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Т. 14. № 5. С. 67–76.
3. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. Т. 1. М.: Мир, 1974. 336 с.
4. *Шилин И. А., Китюков В. В.* Гомоморфная устойчивость пар групп малого порядка // Прикладная дискретная математика. 2011. № 4(14). С. 22–27.

5. *Шилин И. А., Китюков В. В., Александров А. А.* Вычисление групп гомоморфизмов и проверка гомоморфной устойчивости пар конечных групп // Прикладная информатика. 2012. Т. 37. № 1. С. 111–115.
6. *Brown R.* Frobenius Groups and Classical Maximal Orders. Amer. Math. Soc. 2001. 110 p.
7. *Perumal P.* On the Theory of the Frobenius Groups. `http://researchspace.ukzn.ac.za/handle/10413/8853`, 2012
8. *Холл М.* Теория групп. М.: ИЛ, 1962. 468 с.

REFERENCES

1. *Grinshpon S. Ya. and Yeltsova T. A.* Gomomorfno ustoychivye abelevy gruppy [Homomorphly stable Abelian groups]. Tomsk State University Journal, 2003, no. 280, pp. 31–33. (in Russian)
2. *Grinshpon S. Ya. and Yeltsova T. A.* Gomomorfnaya ustoychivost' abelevykh grupp [Homomorphic images of Abelian groups]. Fundam. Prikl. Mat., 2008, vol. 14, iss. 5, pp. 67–76. (in Russian)
3. *Fuchs L.* Infinite Abelian Groups, vol. 1. N. Y., San Francisco, London, Academic Press, 1970, 289 p.
4. *Shilin I. A. and Kityukov V. V.* Gomomorfnaya ustoychivost' par grupp malogo poryadka [Homomorphic stability of pairs of small order groups]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2011, no. 4(14), pp. 22–27.
5. *Shilin I. A., Kityukov V. V., and Aleksandrov A. A.* Vychislenie grupp gomomorfizmov i proverka gomomorfnoy ustoychivosti par konechnykh grupp [Homomorphism groups computing and homomorphic stability of pairs of finite groups verification]. Prikladnaya Informatika, 2012, vol. 37, no. 1, pp. 111–115. (in Russian)
6. *Brown R.* Frobenius Groups and Classical Maximal Orders. Amer. Math. Soc., 2001, 110 p.
7. *Perumal P.* On the Theory of the Frobenius Groups. `http://researchspace.ukzn.ac.za/handle/10413/8853`, 2012
8. *Hall M.* The Theory of Groups. Macmillan, 1959, 434 p.