ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2017 Управление, вычислительная техника и информатика № 38

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.8
DOI: 10.17223/19988605/38/2

Д.П. Бураков, М.И. Гарина

ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ПРЕДПОЧТЕНИЙ ЛПР С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТИПОВЫХ ОБОБЩАЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Предлагаются алгоритм тестирования предпочтений ЛПР на соответствие ожидаемым им результатам выбора при использовании обобщающих функций и методы определения типа обобщающей функции и вектора её весовых коэффициентов, способных сделать выбранную ЛПР точку наилучшей. Рассматриваются аддитивная, мультипликативная и максиминная обобщающие функции.
Ключевые слова: обобщающая функция; многокритериальная теория полезности; предпочтения; Парето-доминирование.

Известно, что если структура предпочтений лица, принимающего решение (ЛПР), отвечает требованиям «рациональности», т.е. соответствует аксиоматике Эджворта–Парето, то альтернатива, выбираемая в задаче определения оптимальной на основании учета многих критериев, должна находиться в множестве Парето X_P, т.е. недоминируемых по всем критериям альтернатив [1]. Таким образом, если для альтернативы $a \in X$ имеется доминирующая ее по Парето-альтернатива $b \in X$ (т.е. выполняется $b \underset{P}{\succ} a$), то при любом способе упорядочения альтернатива b должна занять более высокое место, чем a.

Этап формулирования предпочтений ЛПР предшествует выбору оптимальной альтернативы через выбор соответствующего ей недоминируемого вектора $\mathbf{y}(x)$. Поэтому полученные результаты выбора могут не соответствовать интуитивным ожиданиям, которыми ЛПР руководствовался при формулировании предпочтений. Предпочтения ЛПР, представленные отношением векторного доминирования, могут быть описаны одной из трех обобщающих функций F_O [3]: аддитивной АОФ, мультипликативной МОФ или максиминной функцией Гермейера mОФ [2], которые монотонны относительно этого отношения. Указанные функции используют векторный параметр $\mathbf{w} > \mathbf{0}$, компоненты которого выражают относительную важность критериев с точки зрения ЛПР.

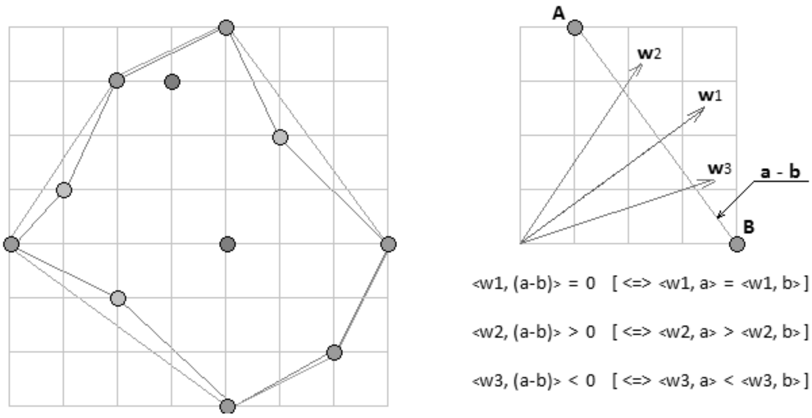
Поставим следующую задачу. Существует ли для векторной оценки $\mathbf{y}(x)$, выбранной в множестве $Y = F(X)$, $Y \subset \mathbf{R}^n$, такая функция F_O и такой вектор весов $\mathbf{w}$ ($\mathbf{w} > \mathbf{0}$, $\langle \mathbf{w}, \mathbf{e} \rangle = 1$, $\mathbf{w}, \mathbf{e}, \mathbf{0} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{e} = (1, \ldots, 1)$, $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$), которые доставили бы указанной точке наибольшее значение скалярной обобщающей функции F_O? И если да, то какая это функция и каковы компоненты $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$.

1. Модель оценивания

В многокритериальных задачах рассматриваются альтернативы, характеризуемые набором из n признаков, выражающихся функциями $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ так, что альтернативе x в соответствие ставится векторная оценка $\mathbf{y}(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$, а множеству альтернатив X – множество их векторных оценок Y (если функции $f_j(x)$ числовые, то $Y \subset \boldsymbol{R}^n$) [2]. На наборе признаков ЛПР определяет набор критериев вида $f_j(x) \to \text{extr}$, $j = 1, \ldots, n$ (этого всегда можно добиться, введя соответствующие замены на множестве признаков и требований ЛПР). После этого отношение доминирования Парето индуцируется отношением покомпонентного векторного доминирования на Y так, что $\forall a, b \in X : \mathbf{y}(a) \geq \mathbf{y}(b) \Leftrightarrow a \underset{P}{\succ} b$, а множество недоминируемых векторов $Y_P \subseteq Y$ образует образ $X_P \subseteq X$.

Назовем *Парето-оболочкой множества* Y $\mathrm{conv}_P(Y)$ множество векторных оценок из Y, которые образуют объединение множеств Парето, получаемых на Y при всех сочетаниях направлений оптимизации критериев. Точки, входящие в Парето-оболочку, принадлежат поверхности тела (необязательно выпуклого) минимального объема, заключающего в себе множество Y целиком. В простейшем случае (рис. 1) это тело может представлять собой невыпуклый многогранник, вершинами которого являются точки $\mathrm{conv}_P(Y)$.

Ясно, что для любой внутренней точки $\mathbf{y} \in Y \setminus \mathrm{conv}_P(Y)$ при любом сочетании направлений оптимизации критериев найдется такая точка $\mathbf{y}^* \in \mathrm{conv}_P(Y)$, что $\mathbf{y}^* \geq \mathbf{y}$. Следовательно, точка $\mathbf{y}$ ни при каких условиях и способах упорядочения на данном наборе критериев не может получить первое место.



a *b*

Рис. 1. Парето-оболочки: *a* – Парето-оболочка и линейная оболочка Y; *b* – двумерный случай использования аддитивной ОФ

Предлагается алгоритм тестирования предпочтений ЛПР на соответствие ожидаемым им результатам выбора. Для этого ЛПР указывает произвольную альтернативу $x \in X$. Первый тест заключается в определении потенциальной оптимальности указанной альтернативы. Чтобы альтернатива была потенциально-оптимальной, она должна принадлежать $\mathrm{conv}_P(Y)$ – *Парето-оболочке* множества Y, получаемой объединением 2^n множеств Парето Y_P для всех возможных сочетаний направлений оптимизации критериев. Если $\mathbf{y}(x) \notin \mathrm{conv}_P(Y)$, то ни при каком сочетании требований вида $f_j(x) \to \mathrm{extr}$ альтернатива x не может являться оптимальной. Следовательно, если ЛПР предполагает, что эта альтернатива оптимальна, то ему следует добавить дополнительные признаки и критерии (так как $|\, Y_P \,|$ растет с увеличением n). Если $\mathbf{y}(x) \in \mathrm{conv}_P(Y)$, то имеется способ выбора указанной альтернативы x в качестве оптимальной, более того, среди указанных функций F_O найдется такая, для которой можно подобрать $\mathbf{w}$, делающий $\mathbf{y}(x)$ оптимальной.

2. Аддитивная обобщающая функция

В силу линейности аддитивной обобщающей функции (АОФ) ее поверхности безразличия (изокванты) представляют собой гиперплоскости в $\mathbf{R}^n$, подмножеством которого является Y. Поэтому АОФ может доставить наибольшее значение (при некотором конкретном векторе весов $\mathbf{w}$) только тем точкам Y, которые входят в его *выпуклую линейную оболочку*, $\mathrm{conv}_L(Y)$, т.е. являются вершинами выпуклого многогранника минимального объема, полностью включающего в себя Y (см. рис. 1, *a*). Для любой конфигурации множества Y выполняется $\mathrm{conv}_L(Y) \subseteq \mathrm{conv}_P(Y) \subseteq Y \subseteq \mathbf{R}^n$.

В этом смысле АОФ схожа с целевой функцией стандартной задачи линейного программирования, которая всегда в качестве оптимального решения выбирает одну из вершин выпуклого многогранника или в случае перпендикулярности одной из его граней – любую из точек, принадлежащих этой грани.

Рассмотрим двумерный случай. Пусть имеются две векторных оценки $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и скалярная АОФ: $F_A(\mathbf{w}; \mathbf{y}) = \langle\mathbf{w}, \mathbf{y}\rangle$, где $\mathbf{w}$ – вектор весов, $\mathbf{w} > \mathbf{0}$, $\mathbf{w}\cdot\mathbf{e}^T = 1$. Чтобы векторные оценки $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ имели одинаковую оценку АОФ, необходимо, чтобы градиент АОФ был перпендикулярен прямой, проходящей через точки **a** и **b**. Так как градиент АОФ – вектор **w**, то это равносильно условию <**w**, (**a** – **b**)> = 0 – скалярное произведение равно нулю. Это условие равносильно <**w**, **a**> = <**w**, **b**>. Заодно заметим, что по правилам матричного умножения $F_A(\mathbf{w}; \mathbf{a}) = \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{a}$, а $F_A(\mathbf{w}; \mathbf{b}) = \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{b}$. Следовательно, если требуется найти такой вектор **w**, чтобы выполнялось $F_A(\mathbf{w}; \mathbf{a}) > F_A(\mathbf{w}; \mathbf{b})$, он должен удовлетворять системе

$$\begin{cases} \langle \mathbf{w}, \mathbf{a} \rangle > \langle \mathbf{w}, \mathbf{b} \rangle \\ \mathbf{w} > \mathbf{0} \\ \langle \mathbf{w}, \mathbf{e} \rangle = 1 \end{cases} \text{, или, что равносильно: } \begin{cases} \langle \mathbf{w}, (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \rangle > 0 \\ \mathbf{w} > \mathbf{0} \\ \langle \mathbf{w}, \mathbf{e} \rangle = 1. \end{cases}$$

Нарушение требования неотрицательности **w** сигнализирует, что для достижения векторной оценкой наибольшего значения АОФ соответствующий критерий должен минимизироваться (в исходной постановке задача неявно требует максимизации всех критериев). Иллюстрация для двумерного случая приведена на рис. 1, *б*.

В n-мерном случае любые n векторных оценок $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n$ образуют в $\mathbf{R}^n$ гиперплоскость. Чтобы они имели одинаковые оценки АОФ $F_A(\mathbf{w}; \mathbf{a}_i) = \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{a}_i$, требуется выполнение условия

$$\left\langle \mathbf{w}, (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j) \right\rangle = 0, \forall j = 1, \ldots, N, i \neq j .$$

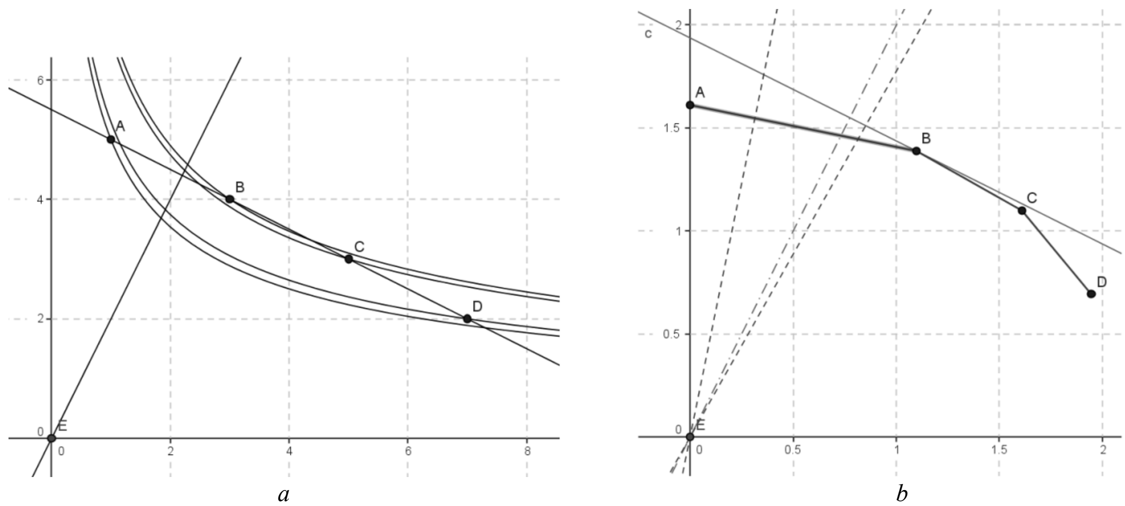
Следовательно, чтобы некоторая оценка $\mathbf{a}_i$ в данной гиперплоскости имела наибольшую величину АОФ, необходимо найти вектор **w**, удовлетворяющий условию

$$\left\langle \mathbf{w}, (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j) \right\rangle > 0, \forall j = 1, \ldots, N, i \neq j .$$

В матричной форме совокупность строк $\left\langle \mathbf{w}, (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j) \right\rangle = 0$ имеет вид $\mathbf{w} \cdot \Delta\mathbf{A}^T = \mathbf{0}$, где $\Delta\mathbf{A}$ – матрица, строками которой являются векторы $(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j)$. Если точка **a** – вершина многогранника, т.е. лежит на пересечении k граней, то для ее оптимальности достаточно взять в качестве **w** любой вектор, являющийся выпуклой комбинацией векторов $\mathbf{w}_{\perp 1}, \ldots, \mathbf{w}_{\perp k}$ нормалей соответствующих граней.

3. Мультипликативная обобщающая функция

Если точка лежит на грани, но не является вершиной многогранника, АОФ сможет сделать альтернативу, соответствующую этой точке, оптимальной (при **w**, являющемся нормалью к этой грани), но не сможет различить ее с другими точками этой грани. Для различения точек можно привлечь мультипликативную обобщающую функцию (МОФ). Например, на рис. 2, *а*, АОФ $F_A(\mathbf{w}; \mathbf{y})$ с вектором весов $\mathbf{w} = (1/3, 2/3)$ присвоит одинаковые оценки точкам A, B, C и D, но любое изменение весов сделает наилучшей по АОФ точку A или D; не удастся подобрать вектор **w**, выбирающий B или C.



a *b*

Рис. 2. Изокванта МОФ: *a* – различающие свойства МОФ; *b* – логарифмическое преобразование МОФ в АОФ

МОФ $F_M(\mathbf{w};\mathbf{y}) = \prod_{j=1}^{n} y_j^{w_j}$ может различить точки внутри грани. Например, для того же вектора весов $\mathbf{w}$ = (1/3, 2/3) МОФ упорядочивает точки грани следующим образом: $B \succ C \succ D \succ A$. На рис. 2 в виде гипербол показаны изокванты МОФ для случая $\mathbf{R}^2$.

Задача поиска вектора **w**, такого, чтобы МОФ $F_M(\mathbf{w}; \mathbf{y})$ в качестве наилучшей выбрала бы указанную точку **y** грани, сводится к уже рассмотренной выше задаче на поиск вектора **w**, доставляющего наибольшее значение АОФ для указанной точки логарифмированием $F_M(\mathbf{w}; \mathbf{y})$:

$$\ln\left(F_M(\mathbf{w};\mathbf{y})\right) = \ln\left(\prod_{j=1}^{n} y_j^{w_j}\right) = \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot \ln(y_j) = \left\langle \mathbf{w}, \ln(\mathbf{y}) \right\rangle.$$

В множестве логарифмированных оценок ln(Y) точки A, B, C и D перестанут лежать на одной грани, а образуют выпуклую поверхность, как показано на рис. 2, *b*. Следовательно, можно решить задачу о подборе вектора весов, находящегося внутри конуса, образованного нормалями граней, пересекающихся в указанной вершине (например, вектор $\mathbf{w}$ = (1/3, 2/3), доставляющий наибольшее на грани значение МОФ для точки B и изображенный штрих-пунктирной линией, находится внутри конуса, образованного нормалями для граней AB и BC, пересекающихся в точке B).

4. Максиминная обобщающая функция (mОФ)

МОФ не может ни при каком векторе **w** сделать лучшей точку, лежащую в области $\mathrm{conv}_P(Y) \setminus \mathrm{conv}_L(Y)$ ниже изокванты МОФ, проходящей через вершины соответствующей грани линейной оболочки $\mathrm{conv}_L(Y)$. Однако это может сделать максиминная функция $F_m(\mathbf{w}, \mathbf{y}) = \min_{j=1,\ldots,n} \{y_j \cdot w_j\}$, способная в качестве лучшего выбрать любой недоминируемый вектор – как находящийся выше, так и ниже максимальных на Y изоквант F_A и F_M [4]. Это связано с тем, что у этой ОФ самая нелинейная форма изокванты, представляющая собой поверхность прямоугольного конуса, направленного противоположно конусу доминирования точки. Наилучшее место получает точка, расположенная на наиболее удаленной от начала координат линии уровня.

Для определения вектора **w** можно провести вектор **w'** из начала координат непосредственно в интересующую точку. Он всегда будет внутри конуса предпочтения этой точки по mОФ. Назовем его вектором «квази»-весов, потому что для предпочтения выбранной точки по mОФ надо взять вектор **w**, являющийся одной из перестановок **w'**. Для двумерного случая **w** будет вектором **w'**, отраженным относительно главной диагонали, а в случае размерности пространства $n > 2$ таких векторов потенциально оказывается $(n! - 1)$.

Заключение

Таким образом показано, что тип используемой для выбора оптимального решения функции определяется местоположением $\mathbf{y}(x)$ в оболочке Y: если $\mathbf{y}(x) \in \mathrm{conv}_P(Y) \cap \mathrm{conv}_L(Y)$, то можно использовать АОФ, если $\ln(\mathbf{y}(x)) \in \mathrm{conv}_P(\ln(Y)) \cap \mathrm{conv}_L(\ln(Y))$, то можно использовать МОФ, а в противном случае – максиминную функцию. При $\mathbf{y}(x) \in \mathrm{conv}_P(Y)$ можно определить пару $<F_O, \mathbf{w}>$, позволяющую сделать указанную ЛПР альтернативу x оптимальной. При этом ЛПР имеет возможность провести тест предпочтений с указанием своего вектора **w** или с указанным им порядком предпочтения на множестве критериев, порождающем семейство векторов {**w**}, компоненты которых удовлетворяют заданному отношению порядка. В этом случае проверяется, могут ли указанные предпочтения быть описаны одной из трех типовых F_O. Если такое описание возможно, считается, что структура предпочтений ЛПР представима типовой обобщающей функцией. Если же подобное описание противоречит предпочтениям ЛПР, то он имеет возможность как скорректировать свои предпочтения, заменив **w** на автоматически определенный, так и использовать другой способ решения. В предельном случае с согласия ЛПР осуществляется автоматическая настройка предпочтений под требуемый результат, т.е. в результате указания оптимизируемой альтернативы x ЛПР получает автоматическую настройку задачи выбора, гарантирующую оптимальность указанной альтернативы. Предлагается следующий алгоритм исследования предпочтений ЛПР:

1. Поиск оболочки Парето и линейной выпуклой оболочки $\mathrm{conv}_P(Y)$ и $\mathrm{conv}_L(Y)$ для облака векторных оценок Y.

2. Проверка возможности сделать выбранную ЛПР точку наилучшей и при утвердительном ответе – поиск подходящей ОФ и вектора весовых коэффициентов:

a. Если точка входит в $Y \setminus \mathrm{conv}_P(Y)$, она не может стать наилучшей.

b. Если точка входит в $\mathrm{conv}_P(Y) \setminus \mathrm{conv}_L(Y)$, она может стать наилучшей при использовании mОФ.

c. Если точка входит в $\mathrm{conv}_L(Y)$ и является вершиной, она может стать наилучшей, причем имеется аналитический способ определения направлений оптимизации и вектора **w** для АОФ.

d. Если точка входит в $\mathrm{conv}_L(Y)$, но не является вершиной, то сделать ее первой среди вершин ее грани сможет МОФ, причем имеется аналитический способ определения направлений оптимизации и вектора **w**.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. М. : Физматлит, 2005. 176 с.
2. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М. : Физматлит, 2007. 256 с.
3. Микони С.В. Теория принятия управленческих решений. СПб. : Лань, 2015. 448 с.
4. Ногин В.Д. Границы применимости распространенных методов скаляризации при решении задач многокритериального выбора // Методы возмущений в гомологической алгебре и динамика систем : межвуз. сб. науч. тр. Саранск : Изд-во Мордов. ун-та, 2004. С. 59–68.

Бураков Дмитрий Петрович, канд. техн. наук. E-mail: bdsw@yandex.ru
Гарина Марина Игоревна, канд. техн. наук. E-mail: migarina@gmail.com
Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I (г. Санкт-Петербург)

Поступила в редакцию 14 марта 2016 г.

Burakov Dmitry P., Garina Marina I. (Saint-Petersburg State Transport University, Russian Federation).
Analysis of decision maker's preferences structure with standard aggregative functions.
Keywords: aggregative function; multicriteria utility theory; preferences; Pareto dominance.

DOI: 10.17223/19988605/38/2

If decision maker preferences structure is under the conditions of rationality (axioms of Edgeworth-Pareto), then any object determined as optimal with any multicriteria aggregative function must be in Pareto set X_P, e.g. set of non-dominated. All objects in multicriteria tasks are characterized by n features, which are evaluated by functions $f_1(x)$, …, $f_n(x)$. E.g. an object x has an assigned vector $\mathbf{y}(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$, and a set of objects X has an image – a set of vectors Y (if all functions $f_i(x)$ are numerical, then $Y \subset \boldsymbol{R}^n$). The decision maker forms for every feature a criteria $f_j(x) \to \mathrm{extr}$, $j = 1, \ldots, n$. At that, the component-wise vector domination relation in Y induces the Pareto dominance relation, and the set of non-dominated vectors $Y_P \subseteq Y$ determines $X_P \subseteq X$. Because the step of formalization of preferences precedes the step of choosing of an optimal object as one of non-dominated vectors $\mathbf{y}(x)$, the choice results may differ from decision maker's intuitive expectations.

We consider an algorithm of testing the decision maker preferences for compliance with his expectation. The decision maker chooses any object $x \in X$. The first test is about if this object can be optimal. The object can be optimal if it belongs to $\mathrm{conv}_P(Y)$ – *Pareto's envelope* of the set Y. This envelope is a union of 2^n Pareto sets Y_P for all possible combinations of criteria directions. If $\mathbf{y}(x) \notin \mathrm{conv}_P(Y)$, then object cannot be optimal with any combination of conditions $f_j(x) \to \mathrm{extr}$. Therefore, if the decision maker wants it to be optimal, he must add some more features and form the addition criteria for them (because $|Y_P|$ increases with n).

If $\mathbf{y}(x) \in \mathrm{conv}_P(Y)$, the conditions with which the object x can be optimal, are exist. Any of three aggregative functions F_O can describe the decision maker's preferences expressed as the vector dominance relation: additive function, multiplicative function or maxmin Germeyer function. All of them are monotone in respect of this relation. They use a vector parameter $\mathbf{w} > \mathbf{0}$, which components fix the relative criteria importance for the decision maker. If $\mathbf{y}(x) \in \mathrm{conv}_P(Y)$, then one of these functions can be used with some vector $\mathbf{w}$ to choose $\mathbf{y}(x)$ as optimal, and we can calculate that vector $\mathbf{w}$. The type of function is determined by the $\mathbf{y}(x)$ location in the envelope of Y: if $\mathbf{y}(x) \in \mathrm{conv}_P(Y) \cap \mathrm{conv}_L(Y)$, then we can use the additive function, if $\ln(\mathbf{y}(x)) \in \mathrm{conv}_P(\ln(Y)) \cap \mathrm{conv}_L(\ln(Y))$, then we can use the multiplicative function, and otherwise – maximin function. Here $\mathrm{conv}_L(Y)$ is the linear convex envelope of Y. So, if $\mathbf{y}(x) \in \mathrm{conv}_P(Y)$, our second test makes for decision maker a pair $<F_O, \mathbf{w}>$ to choose the specified object x as optimal.

The decision maker may perform the preference test for concrete vector $\mathbf{w}$, or for concrete order of preference of criteria. There is the large set of $\{\mathbf{w}\}$, components of which satisfy a given order. In this case, we must test if there is a standard aggregative function F_O that can describe the given preferences. If yes, we declare that the decision maker's preference structure can be represented by this standard function. Otherwise, the decision maker can change his preferences by using the calculated vector $\mathbf{w}$ instead his own or another decision method. If the decision maker agrees, then the automatic preferences configuration, which will provide the desired result, is possible.

REFERENCES

1. Nogin, V.D. (2005) *Prinyatie resheniy v mnogokriterial'noy srede: kolichestvennyy podkhod* [The multicriteria decision making: quantitative approavh]. Moscow: Fizmatlit.
2. Podinovskiy, V.V. & Nogin, V.D. (2007) *Pareto-optimal'nye resheniya mnogokriterial'nykh zadach* [Pareto-optimal decisions of multicriteria tasks]. Moscow: Fizmatlit.
3. Mikoni, S.V. (2015) *Teoriya prinyatiya upravlencheskikh resheniy* [The managerial decision making theory]. St. Petersburg: Lan'.
4. Nogin, V.D. (2004) Granitsy primenimosti rasprostranennykh metodov skalyarizatsii pri reshenii zadach mnogokriterial'nogo vybora [The scope of applicability of common methods of scalarization in solving problems of multicriteria choice]. In: Shchennikov, V.N. (ed.) *Metody vozmushcheniy v gomologicheskoy algebre i dinamika sistem* [Methods of disturbance in homological algebra and systems dynamics]. Saransk: Ogarev Mordovia State University. pp. 59–68.