ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2017 Управление, вычислительная техника и информатика № 38

УДК 519.2
DOI: 10.17223/19988605/38/6

С.П. Трофимов, А.В. Иванов

РАЗРЫВ ДВОЙСТВЕННОСТИ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ И АНАЛИЗ КАЧЕСТВА ОГРАНИЧЕНИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Рассматривается пара двойственных задач полубесконечного линейного программирования. Предлагается геометрический способ анализа соотношений двойственности пары задач, основанный на использовании конической оболочки коэффициентов системы ограничений. Устанавливается связь наличия разрыва двойственности с незамкнутостью границы конической оболочки точек в многомерном пространстве. Построен нетривиальный пример задачи ЛП, для которой разрыв двойственности выполняется для неколлинеарных целевых векторов. На основе стандартных оптимизационных функций MATLAB разработана программа для анализа соотношений двойственности.

Ключевые слова: задача линейного программирования; разрыв двойственности; множество допустимых решений; коническая оболочка коэффициентов; система линейных неравенств; критерий соотношения двойственности; выпуклый незамкнутый конус.

Задача полубесконечного линейного программирования (ПбЛП) является важным объектом исследования в теории оптимизации [1]. Задача обычно изучается с двух точек зрения.

Численные, количественные методы предполагают задание бесконечного множества ограничений с помощью параметров. В дальнейшем бесконечная система аппроксимируется конечной подсистемой и решается симплексными методами.

Качественные методы используют свойства топологических пространств, а также строят выпуклые и конические оболочки точек, составленных из коэффициентов системы. При этом задача построения выпуклой оболочки не рассматривается.

Одной из важных целей изучения задачи ПбЛП является проверка соотношения двойственности, т.е. равенства оптимальных значений исходной и двойственной задач ЛП. С одной стороны, возникновение разрыва двойственности означает резкое ухудшение свойств численных методов решения этой задачи, а с другой стороны, наличие разрыва говорит о недостаточном качестве ограничений допустимого множества задачи ПбЛП [2]. Таким образом, анализ соотношения двойственности может оказаться полезным при анализе качества задания геометрического объекта: при задании геометрического объекта в виде допустимого множества системы ограничений задачи ПбЛП оценка качества определяется существованием разрыва двойственности на некоторых целевых направлениях.

Отметим, что задача ПбЛП с разрывом двойственности обычно рассматривается как нежелательная и экзотическая. Между тем в настоящей работе мы показываем, что задачи ПбЛП с разрывом двойственности образуют богатое семейство задач, и связываем наличие разрыва двойственности с незамкнутостью границы конической оболочки точек в многомерном пространстве. Размерность этого пространства на единицу больше количества переменных задачи. С помощью пары двойственных задач ПбЛП с разрывом двойственности осуществляется анализ структуры этой незамкнутой границы.

1. Двойственные задачи линейного программирования

Пара двойственных задач линейного программирования в топологических векторных пространствах имеет вид

$$\inf\{(x,\ y_0): T\cdot x\in z_0+Q_Z,\ x\in Q_X\}, \tag{1}$$

$$\sup\ \{(z_0,\ \omega): -T^*\cdot\omega+y_0\in Q_X^*,\ \omega\in Q_Z^*\}\ . \tag{2}$$

Здесь топологические векторные пространства X и Y, Z и W находятся в двойственности; T – линейный непрерывный оператор из X в Z; T^*: $W \to Y$ – сопряжённый к нему; $Q_X \subset X$, $Q_Z \subset Z$ – замкнутые выпуклые конусы; $Q_X^* \subset Y$, $Q_Z^* \subset W$ – сопряжённые конусы.

Рассмотрим два частных случая пары двойственных задач (1)–(2).

1. Пространства X и Y – конечномерные пространства R^n, Z и W – бесконечномерные пространства, конусы Q_x и Q_z являются неотрицательными ортантами. Тогда задача (1) принимает вид полубесконечной задачи линейного программирования:

$$\upsilon = \inf \{(x, c) : Ax \geq b, x \geq 0\}. \tag{3}$$

В этой задаче A – полубесконечная матрица, строки которой $a_\alpha \in R^n$, $\alpha \in \Omega$, Ω – некоторое счетное множество индексов, $b = (b_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ – вектор-столбец из пространства R^Ω, υ – оптимальное значение задачи.

Двойственная задача (2) принимает вид

$$\upsilon^* = \sup \{(u, b) : A^T u \leq c, u \geq 0, u \in f\}, \tag{4}$$

где f – подпространство последовательностей из R^Ω, в которых лишь конечное число элементов отлично от нуля, υ^* – оптимальное значение двойственной задачи.

Запишем пару двойственных задач (3)–(4) в другой, более удобной для нас форме:

$$\upsilon = \inf \{(x, c) : Ax \geq b\}, \tag{5}$$

$$\upsilon^* = \sup \{(u, b) : A^T u = c, u \geq 0, u \in f\}. \tag{6}$$

2. Пространства X и Y – конечномерные пространства R^n; Z и W – конечномерные пространства R^m; Q_X и Q_Z – замкнутые выпуклые конусы соответственно в пространствах R^n и R^m.

Преобразуем задачу (1) к виду (3). Ограничение $x \in Q_X$ задачи (1) эквивалентно системе линейных неравенств

$$(x, y) \geq 0, \ \forall y \in Q_X^*. \tag{7}$$

Пусть $\{ e_i : i = 1,\dots,n \}$ – базис единичных ортов пространства R^n. Тогда $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ и ограничение $T \cdot x \in z_0 + Q_Z$ задачи (1) эквивалентно системе

$$(T \cdot (\sum_{i=1}^n x_i e_i) - z_0, \ \omega) \geq 0, \ \forall \omega \in Q_Z^*,$$

что равносильно

$$\sum_{i=1}^n x_i (T \cdot e_i, \omega) \geq (z_0, \ \omega), \ \forall \omega \in Q_Z^*. \tag{8}$$

Объединенная система ограничений (7) и (8) аналогична системе ограничений задачи (5).

2. Соотношение двойственности

Задачи (5) и (6) достаточно универсальны и изучаются во многих работах. В основном исследуются условия, при которых выполняется соотношение двойственности

$$\upsilon = \upsilon^*. \tag{9}$$

В [1] показано, в частности, что если $c \in \operatorname{int} (\operatorname{cone}\{ a_\alpha, \alpha \in \Omega \})$, то равенство (9) имеет место. В [4, 5] в качестве достаточного условия для (9) требуется выполнение условия Слейтера для системы ограничений задачи (5) и замкнутость конической оболочки множества

$$K = \operatorname{cone} \{[a_\alpha; b_\alpha] : \alpha \in \Omega\}.$$

Здесь и далее запись $[a_\alpha; b_\alpha]$ означает присоединение числа b_α к вектору-строке a_α.

В [6] для задачи (5) вводится понятие равномерной двойственности, при котором для каждого $c \in R^n$ должен иметь место один из следующих случаев: 1) $\upsilon = -\infty$, $\upsilon^* = -\infty$; 2) $\upsilon = +\infty$, $\upsilon^* = +\infty$; 3) $\upsilon = +\infty$, $\upsilon^* = -\infty$; 4) υ конечно, задача (6) разрешима и $\upsilon = \upsilon^*$.

Необходимым и достаточным условием равномерной двойственности при $\upsilon < +\infty$ является замкнутость конуса

$$K{\downarrow} = \operatorname{cone} \{\{[a_\alpha; b_\alpha], \alpha \in \Omega \}, [0; -1]\}.$$

3. Геометрический подход к анализу двойственных задач ЛП

В настоящей работе предлагается критерий, связывающий равенство (9) со свойствами некоторого промежутка. Фактически этот критерий позволяет взглянуть на задачи (5) и (6) с некоторой единой геометрической точки зрения, проясняет приведённые выше утверждения и приводит к новым результатам.

Введем обозначения

$$K\!\uparrow = \text{cone}\ \{\{[a_\alpha;\, b_\alpha],\ \alpha \in \Omega\},\ [0;\, 1]\},$$
$$P = \{[c;\, r] : r \in R\}.$$

Покажем, что из геометрических соотношений между конусом K и прямой P можно получить ряд важных свойств задач (5) и (6). Возможны следующие случаи взаимного расположения K и P:

$$\overline{K} \cap P = \varnothing, \tag{10}$$
$$K \cap P = \varnothing,\ \overline{K} \cap P \neq \varnothing, \tag{11}$$
$$K \cap P \neq \varnothing. \tag{12}$$

Найдем оптимальные значения υ и υ^* для каждого из этих случаев.

3.1. Бесконечность оптимальных значений пары двойственных задач

Пусть $\overline{K} \cap P = \varnothing$.

Тогда $K \cap P = \varnothing$, поэтому ограничения задачи (6) несовместны и, следовательно, $\upsilon^* = -\infty$.

Допустим система $Ax \geq b$ несовместна. Тогда, очевидно, $\upsilon = +\infty$.

Допустим, система $Ax \geq b$ совместна. Известно [5], что неравенство $(x, c) \geq r$ является следствием совместной системы $Ax \geq b$ тогда и только тогда, когда $[c, r] \in \overline{K}$. Допустим, для некоторого r_0 неравенство $(x, c) \geq r_0$ является следствием системы $Ax \geq b$. Тогда $r_0 \in \overline{K} \cap P = \varnothing$, что невозможно. Поэтому для любого r неравенство $(x, c) \geq r$ не может являться следствием совместной системы $Ax \geq b$. Отсюда $\upsilon = -\infty$.

Таким образом, в случае (10) возможны лишь две ситуации:

$$\upsilon = +\infty,\ \upsilon^* = -\infty \text{ или}$$
$$\upsilon = -\infty,\ \upsilon^* = -\infty.$$

3.2. Бесконечность оптимального значения двойственной задачи

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Если выполняется (11), то

$$\upsilon = \sup\ \{r : [c;\, r] \in \overline{K}\ \}, \tag{13}$$
$$\upsilon^* = -\infty.$$

Доказательство. Обозначим через r_0 правую часть равенства (13).

Так как $\overline{K} \cap P \neq \varnothing$, то $r_0 > -\infty$.

Если $r_0 = +\infty$, то для любого достаточно большого r выполняется $[c;\, r] \in \overline{K}$, т.е. $(x, c) \geq r$ является неравенством-следствием системы $Ax \geq b$. Для совместной системы $Ax \geq b$ это невозможно. Поэтому система $Ax \geq b$ несовместна, откуда $\upsilon = r_0 = +\infty$.

Пусть теперь r_0 конечно.

Докажем, что система $Ax \geq b$ совместна. Допустим, что это не так. Тогда из [5] получаем $[0;\, 1] \in \overline{K}$. Так как $\overline{K} \cap P \neq \varnothing$, то при некотором r_1 имеем $[c;\, r_1] \in \overline{K}$. Тогда для любого $s > r_1$ имеем

$$[c;\, s] = (s - r_1)\cdot[0;\, 1] + [c;\, r_1] \in \overline{K}\,.$$

Отсюда вытекает $r_0 = +\infty$, что противоречит конечности r_0. Таким образом, система $Ax \geq b$ совместна.

Возьмем произвольное r_1, при котором $[c;\, r_1] \in \overline{K}$. Неравенство $(x, c) \geq r_1$ является следствием совместной системы $Ax \geq b$. Поэтому $\upsilon \geq r_1$, откуда

$$\upsilon \geq \sup\ \{r : [\text{c};\, r] \in \overline{K} \cap P\ \} = r_0.$$

С другой стороны, так как $(x, c) \geq \upsilon$ является следствием совместной системы $Ax \geq b$ 2-го рода [7], то $[c; \upsilon] \in \overline{K}$, откуда $\upsilon \leq r_0$. Таким образом, $\upsilon = r_0$.

Вторая часть утверждения 1 вытекает из равенства $K \cap P = \varnothing$. В этом случае система ограничений задачи (6) несовместна, откуда $\upsilon^* = -\infty$. Утверждение 1 доказано.

3.3. Конечность оптимальных значений пары двойственных задач

Утверждение 2. Если выполняется (12), то

$$\upsilon = \sup \{r : [c; r] \in \overline{K}\},$$
$$\upsilon^* = \sup \{r : [c; r] \in K\}.$$

Доказательство. Первая часть утверждения совпадает с (13).

Обозначим $r_0 = \sup\{r: [c; r] \in K\}$. Тогда существует последовательность $\{r_j\}$, такая, что $\lim_{j\to\infty} r_j = r_0$ и $[c; r_j] \in K$. Отсюда каждый вектор $[c; r_j]$ можно представить как конечную положительную линейную комбинацию элементов множества $\{[a_\alpha; b_\alpha], \alpha \in \Omega\}$. Коэффициенты этих комбинаций являются допустимыми решениями двойственной задачи (6) со значениями целевой функции r_j. Следовательно, $\upsilon^* \geq r_0$.

Обратно: так как $K \cap P \neq \varnothing$, то система ограничений задачи (6) совместна. Тогда существует последовательность $\{u^i\}$ допустимых решений задачи (6), такая что $\lim_{i\to\infty}(b, u^i) = \upsilon^*$. Поэтому для каждого натурального i имеем $[c; (b, u^i)] \in K$, откуда $r_0 \geq \upsilon^*$.

Итак, $r_0 = \upsilon^*$. Утверждение 2 доказано.

3.4. Критерий наличия разрыва соотношения двойственности

Построим с помощью конуса K и прямой P одномерный интервал S, который назовем характеристическим интервалом задачи ПбЛП. С учетом утверждения 2 определим интервал S следующим образом:

$$S = [\sup \{r : [c; r] \in K\}, \sup \{r : [c; r] \in \overline{K}\}]. \tag{14}$$

Интервал S, если он не пуст, представляет собой точку, отрезок, луч или всю прямую P и расположено в пространстве R^{n+1}. Если интервал S не вырождается в точку, то он содержится на границе замыкания конуса K, но не содержится в самом конусе. В этом случае конус K не является замкнутым. Таким образом, интервал S содержится в незамкнутой части границы конуса K.

Интервал S позволяет определить оптимальные значения пары двойственных задач (5) и (6) и, следовательно, наличие разрыва двойственности.

Теорема 1. Для характеристического интервала S имеют место равенства

$$\upsilon = \sup \{r : [c; r] \in S\}, \tag{15}$$
$$\upsilon^* = \inf \{r : [c; r] \in S\}. \tag{16}$$

Доказательство. Теорема вытекает из определения интервала S и утверждений 1 и 2.

Следствие 1. (Критерий разрыва двойственности). Пусть $\upsilon^* > -\infty$. У пары задач (5) и (6) существует разрыв двойственности тогда и только тогда, когда множество S имеет непустую внутренность.

3.5. Существование оптимальных решений

Из вышесказанного следует, что конус K, прямая P и, вообще говоря, направление прямой P определяют оптимальные значения задач (5) и (6).

Исследуем вопрос о разрешимости двойственной задачи. Двойственная задача (6) достигает своего значения тогда и только тогда, когда супремум в утверждении 2 достигается.

Так как при переходе от множества $\{[a_\alpha; b_\alpha], \alpha \in \Omega\}$ к конусу K ограничения задачи (5) теряют свою индивидуальность, то восстановить оптимальное решение задачи (6), вообще говоря, невозможно.

Рассмотрим разрешимость исходной задачи. Известно, что в случае совместности системы ограничений задачи (5) функция оптимума $\upsilon(c)$ является собственной, вогнутой и по утверждению 2

$\upsilon(c) = \sup\ \{r : [c; r] \in \overline{K}\ \}$. Следствие 23.5.3 из [8] утверждает, что субдифференциал $\partial\upsilon(c)$ представляет собой всё множество оптимальных решений задачи (5). Из геометрического смысла субдифференциала получаем следующее утверждение.

Утверждение 3. Задача (5) имеет оптимальное решение тогда и только тогда, когда через точку $[c; \upsilon(c)]$ можно провести гиперплоскость, такую, что ее подграфик содержит конус $\overline{K}$.

3.6. Связь с ранее известными результатами

1. Из теоремы 3 статьи [9] вытекает следующее. Если конус K замкнут, то двойственная задача (6) достижима. Если конус $\{[Ax + z; (x, c) - r] : x \in R^n, z \geq 0, r \geq 0\}$ замкнут в декартовом произведении $R^\Omega \times R^1$ с топологией покоординатной сходимости, то исходная задача достижима. А из утверждения 2 вытекает, что из одного конуса K можно определить достижимость задач (5) и (6).

2. В пространстве R^Ω с покоординатной сходимостью положительный конус не имеет внутренности. Поэтому условия типа Слейтера (например, существует x_0 такой, что $(x_0, a_\alpha) > b_\alpha$ для каждого $\alpha \in \Omega$) недостаточны для анализа разрыва двойственности. Это и не удивительно, так как данное условие Слейтера равносильно $[x_0; -1] \in \operatorname{int} K^*$ и не связано с границей конуса K, от которой, в соответствии с утверждением 2, зависит разрыв.

3. Из утверждений 1 и 2 легко вывести теорему о слабой двойственности [4] в несколько измененной формулировке: если $\upsilon(c_0)$ конечно, то

$$\upsilon^*(c_0) = \lim_{dB(c_0)\to 0} \sup_{c \in B(c_0)} \upsilon^*(c),$$

где $B(c_0)$ – шар с центром в точке c_0 и радиусом $dB(c_0)$.

3.7. Противоположная задача ЛП

Заменим в исходной задаче (5) критерий и знаки неравенств в системе ограничений на противоположные. Полученную задачу назовем противоположной задачей ЛП:

$$\upsilon' = \sup\ \{(x, c) : Ax \leq b\}. \tag{17}$$

Двойственной к ней является задача

$$\upsilon'^* = \inf\ \{(b, u) : A^T u = c,\ u \geq 0\}. \tag{18}$$

Повторное применение процедуры построения противоположной задачи возвращает нас к исходной задаче (5). Таким образом, пара противоположных задач и пара двойственных задач ЛП обладают одним и тем же свойством взаимной обратимости.

Найдем υ'. Используем известное правило замены критериев при оптимизации произвольной функции $f(x)$:

$$\sup\ f(x) = -\inf\ (\ -f(x)\ ).$$

Тогда $\upsilon' = -\inf\ \{(x, -c) : -Ax \geq -b\}$. Используя утверждение 2, продолжаем:

$$\upsilon' = -\sup\ \{\ r : [-c; r] \in -\overline{K}\ \} = -\ (-\inf\ \{\ -r : [-c; r]\ \in -\overline{K}\ \}) = \inf\ \{-r : [-c; r]\ \in -\overline{K}\ \}.$$

Сделаем замену $t = -r$. Получаем

$$\upsilon' = \inf\ \{t : [-c; -t]\ \in -\overline{K}\ \} = \inf\ \{t : [c; t] \in \overline{K}\ \}.$$

Аналогично получаем

$$\upsilon'^* = \inf\ \{t : [c; t]\ \in K\ \} \leq \sup\ \{t : [c; t]\ \in K\ \} = \upsilon^*.$$

Теорема 2. Для противоположной системы выполняются соотношения

$$\upsilon' = \inf\ \{t : [c; t]\ \in \overline{K}\ \},$$

$$\upsilon'^* = \inf\ \{t : [c; t]\ \in K\ \}.$$

При этом справедливо тройное неравенство

$$\upsilon \geq \upsilon^* \geq \upsilon'^* \geq \upsilon'. \tag{19}$$

Относительно ограничений противоположной задачи можно высказать следующие утверждения.

Утверждение 4. Если $M=\{ x : Ax \geq b \}$ – непустое, ограниченное множество, не состоящее из одной точки, то $M' = \{ x : Ax \leq b \} = \varnothing$.

Доказательство. Допустим противное: $Ax_0 \leq b$ при некотором x_0. Тогда для любого x из $Ax \geq b$ вытекает $A(x - x_0) \geq 0$. Отсюда для любого $\lambda \geq 0$

$$A(x + \lambda(x - x_0)) = Ax + \lambda A(x - x_0) \geq b. \tag{20}$$

Так как $\{ x : Ax \geq b \}$ ограничено, то из (20) получаем $x = x_0$, т.е. $\{ x : Ax \geq b\} = \{x_0\}$, что противоречит условию.

Утверждение 5. Пусть $M = \{ x : Ax \geq b \}$ неограничено. Если множество $M' = \{ x : Ax \leq b \}$ непустое, то оно неограничено.

Доказательство. Пусть $x_0 \in M$. Из неограниченности M вытекает, что найдется ненулевой вектор e, такой, что для любого $t \geq 0$ выполняется $x_0 + te \in M$, т.е. $A(x_0 + te) \geq b$. С учетом $Ax_0 \geq b$ получаем $Ae \geq 0$. Допустим, $x' \in M'$. Тогда $A(x' - te) \leq b$, т.е. множество M' неограничено.

Из утверждений 4 и 5 следует, что противоположная задача может оказаться полезной именно при наличии конечного разрыва двойственности для задач (5) и (6), так как этот разрыв существует только тогда, когда $\{ x : Ax \geq b \}$ неограничено.

4. Примеры

Пример 1. В следующем примере исходная и противоположная задачи имеют конечные разрывы двойственности:

$$\inf x_2$$

$$\begin{cases} x_2 \geq 1, \\ x_2 \geq 2, \\ (1/n)x_1 + x_2 \geq 0, \\ (1/n)x_1 + x_2 \geq 3, \ (n = 1,\ 2,...). \end{cases}$$

Конус K натянут на следующие точки: $C = [0, 1; 1]$, $B = [0, \ 1; 2]$, $D^n = [1/n, \ 1; 0]$, $A^n = [1/n, \ 1; 3]$, не замкнут и содержится в пространстве R^3 (рис. 1).

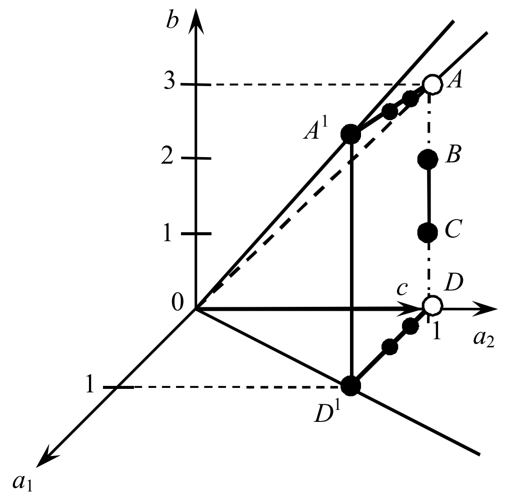

Рис. 1. Трехмерный конус K с незамкнутой границей

Последовательность $\{A^n\}$ сходится к точке $A = [0, 1; 3]$, $\{D^n\}$ сходится к точке $D = [0, \ 1; 0]$, причем точки A и D лежат на незамкнутой границе конуса K. Целевой вектор $c = [0, 1; 0]$. Прямая P проходит через точки A, B, C и D. Отрезок $[A, B]$ является характеристическим для исходной задачи, а отрезок $[C, D]$ является характеристическим для противоположной задачи. Используя теорему 2, получаем

$$\upsilon = 3,\ \upsilon^* = 2,\ \upsilon'^* = 1,\ \upsilon' = 0.$$

Пример 2. Приведем пример задачи ПбЛП с тремя переменными, для которой разрыв двойственности выполняется для неколлинеарных целевых векторов. Система ограничений задачи имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 - x_2 \ge 1, \\ (1-1/n)x_1 + x_2 + (1/n)x_3 \ge 2, \\ (1-1/n)x_1 - x_2 + (1/n)x_3 \ge 2,\ n = (2,\ 3, \ldots). \end{cases}$$

Для рассматриваемой системы конус K натянут на следующие точки: $A^n = [1 - 1/n, 1, 1/n; 2]$, $B^n = [1 - 1/n, -1, 1/n; 2]$, $C = [1, 1, 0; 1]$, $D = [1, -1, 0; 1]$.

Последовательность $\{A^n\}$ сходится к точке $A = [1, 1, 0; 2]$, $\{B^n\}$ сходится к точке $B = [1, -1, 0; 2]$. Рассмотрим трехмерную гиперплоскость $H : ([a; b], d) = 0$, где $d = [0, 0, 1; 0]$. Точки A, B, C, D, а также вектор h лежат в гиперплоскости H, а точки A^n и B^n – в полуплоскости $([a; b], d) > 0$. Поэтому точки A и B принадлежат замыканию конуса K, но не самому K, т.е. лежат на незамкнутой границе конуса K.

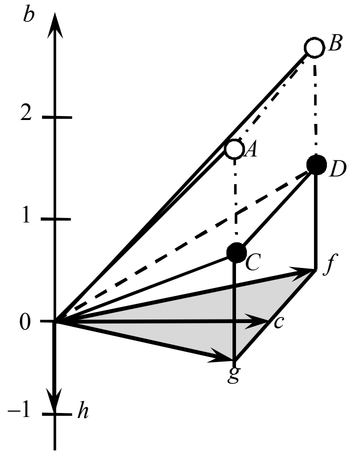

Рис. 2. Трехмерное сечение четырехмерного конуса K трехмерной гиперплоскостью

Построим сечение $K^1 = K \cap H$ (рис. 2). Возьмем два целевых вектора $g = [1, 1, 0; 0]$ и $f = [1, -1, 0; 0]$. Векторы g, f линейно независимы и принадлежат конусу K^1. Возьмем вектор c как произвольную выпуклую комбинацию этих векторов $c = \alpha \cdot g + (1 - \alpha) \cdot f$, $0 \le \alpha \le 1$. Для целевого вектора c по утверждению 2 имеем:

1) $\upsilon = \sup \{ r : [c; r] \in \overline{K} \} = 2$, и супремум достигается в точке $\alpha \cdot A + (1 - \alpha) \cdot B$;

2) $\upsilon^* = \sup \{ r : [c; r] \in K \} = 1$, и супремум достигается в точке $\alpha \cdot C + (1 - \alpha) \cdot D$.

5. Применение MATLAB для анализа соотношений двойственности

Для проведения численного анализа соотношений двойственности (19) разработана MATLAB-программа [12]. В программе используются стандартные оптимизационные функции *fseminf* и *linprog*, предназначенные для приближенного решения полубесконечных нелинейных и конечномерных линейных задач оптимизации соответственно. Функция *fseminf* может быть использована для нахождения оптимальных значений υ и υ' задач (5), (17), а *linprog* – для нахождения оптимальных значений υ^* и υ'^* задач (6), (18).

Особенностью MATLAB-программы является указание конечного значения n в полубесконечных ограничениях исходной задачи, что приводит к замене задачи ПбЛП задачей ЛП с конечным числом ограничений. Стоит отметить, что данная замена может привести к изменению оптимального значения обеих задач. В перспективе предполагается разработка новой MATLAB-программы с возможностью для пользователей указания бесконечной последовательности ограничений.

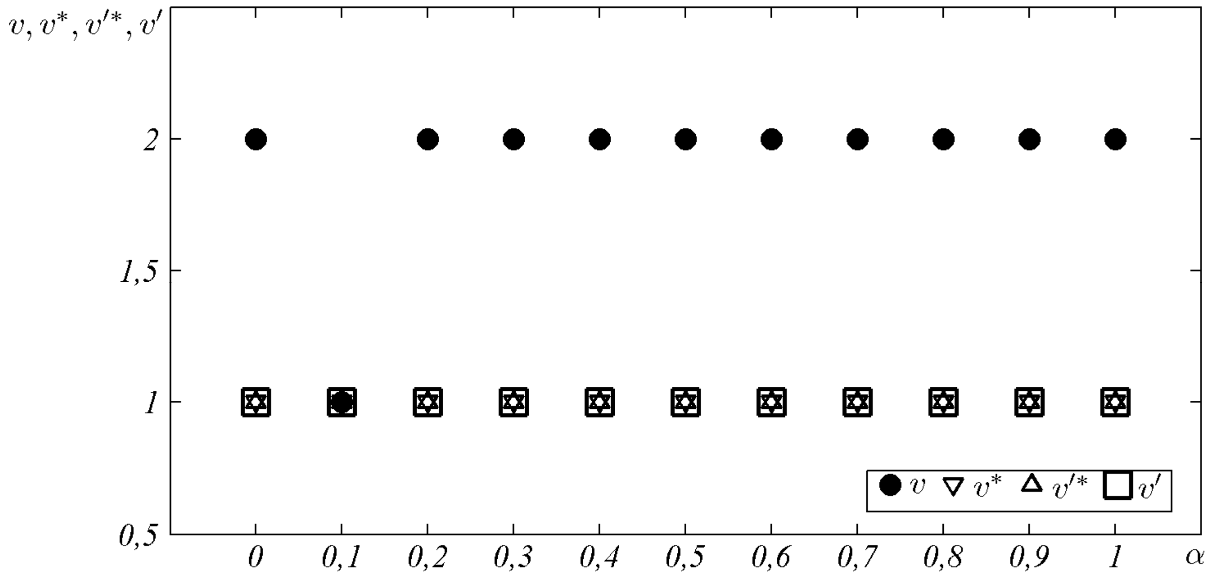

Рис. 3. Значения v, v^*, v', v'^* при $\{\alpha \mid \alpha = 0{,}1 \cdot k,\ 0 \le k \le 10\}$

На рис. 3 представлены результаты численного решения примера 2. Из рисунка видно, что практически при всех α $v = 2$, $v^* = 1$, $v' = 1$, $v'^* = 1$.

Заключение

В работе продемонстрирован геометрический подход к анализу полубесконечных задач ЛП. Данный подход позволяет моделировать задачи с заданными свойствами разрыва двойственности. Показано, что разрыв полностью определяется свойствами границы конуса коэффициентов. Ранее приводились примеры с разрывом двойственности для изолированных целевых векторов. В этом случае множество целевых векторов, для которых возникает конечный разрыв, образует луч. В данной статье показано, что множество целевых векторов с разрывом может представлять собой сложные многомерные области. Таким образом, задачи с разрывом двойственности не являются экзотическим нежелательным объектом, а должны исследоваться целенаправленно.

Разрыв двойственности возникает, когда ограничения множества допустимых решений имеют следующий недостаток. При бесконечно малых возмущениях правых частей ограничений допустимое множество на некоторых направлениях начинает аномально расширяться. Это проявляется в резком изменении оптимального значения исходной задачи. Таким образом, качество ограничений, которые определяют геометрический объект в виде допустимого множества, можно считать недостаточным. Наш подход позволяет находить направления, на которых проявляется аномальное расширение геометрических объектов. Подобные явления могут возникать в различных областях техники, экономики, социологии и политики.

Данный подход может использоваться также при анализе структуры незамкнутой границы выпуклых множеств в многомерных пространствах, поскольку мы с трудом можем представить себе многомерные множества, а также строить график функций с количеством переменных более двух.

ЛИТЕРАТУРА

1. Goberna M.A., Lopez M.A. Linear Semi-Infinite Optimization. Chichester : Wiley, 1998. 356 p.

2. Glashoff K., Gustafson S.A. Linear Optimization and Approximation: An Introduction to the Theoretical Analysis and Numerical Treatment of Semi-Infinite Programs. N.Y. : Springer, 1983. 212 p.
3. Karney D.F. Duality gaps in semi-infinite linear programming // Math. Progr. 1981. V. 20, No. 1. P. 129–143.
4. Duffin R.J., Karlovitz L.A. An infinite linear program with a duality gap // Management Sci. 1965. V. 12, No. 1. P. 122–134.
5. Черников С.Н. Линейные неравенства. М. : Наука, 1968. 489 с.
6. Jeroslow R.G. Uniform quality in semi-infinite convex optimization // Math. Progr. 1983. V. 27, No. 2. P. 144–155.
7. Еремин И.И., Астафьев Н.Н. Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. М. : Наука, 1976. 192 с.
8. Rockafellar R.T. Convex analysis. Princeton, NJ : Princeton University Press, 1970. 260 p.
9. Kretschmer K.S. Programmes in paired spaces // Canad. J. Math. 1961. V. 13. P. 221–238.
10. Schechter M. Linear program in topological vector spaces // J. Math. Anal. Appl. 1972. V. 37. P. 492–500.
11. Трофимов С.П. Критерий разрыва двойственности для полубесконечных задач линейного программирования // Противоречивые модели оптимизации : сб. науч. тр. Свердловск : ИММ УНЦ АН СССР, 1987. С. 64–70.
12. Программа численного анализа соотношений двойственности. Репозиторий MATLAB-программы. URL: https://github.com/re3burn/DGA (дата обращения: 20.08.2016).

Трофимов Сергей Павлович, канд. физ.-мат. наук, доцент. E-mail: tsp61@mail.ru
Иванов Алексей Витальевич. E-mail: av.ivanov.2014@yandex.ru
Уральский федеральный университет (г. Екатеринбург)

Поступила в редакцию 20 марта 2016 г.

Trofimov Sergey P., Ivanov Aleksey V. (Ural Federal University, Russian Federation).
The duality gap in semi-infinite linear programming and the quality analysis of geometrical objects' constraints.
Keywords: linear programming problem; duality gap; feasible set; conical hull of coefficients; system of linear inequalities; duality relation criteria; convex unclosed cone.

DOI: 10.17223/19988605/38/6

The paper focuses on the universal problem of linear programming (LP) with an infinite number of linear constraints and a finite number of variables. The authors demonstrate how the LP problem, which limits use a convex closed cone, is reduced to the above-mentioned one. The geometric interpretation using the conical *K* shell of the system constraints coefficients is proposed for a pair of the dual LP problems. The other two cones (i.e. the *K* cone epigraph and hypograph) are additionally constructed to analyze the dual problems. The one-dimensional interval using three cones and the target vector of the original problem is also constructed. The characteristics of the interval allow us to determine the main characteristics of the original problem: the optimal values and the solvability of both problems. The interval lies on the boundary of the multidimensional *K* cone.

With regard to the results achieved, we suggest a qualitative analysis of the geometric method of the semi-infinite LP problem without using either the Gauss method being commonly used or the simplex method. It is shown that the basic information of a pair of the dual problems is contained in the characteristics of the surface of an unclosed convex *K* cone.

A new type of dual problem is put forward for the LP problem. It is different from the classic one based on the Lagrange multipliers. It is sufficient to replace the criterion and the inequalities of constraints signs with the opposite ones. The similarity between the two is in the fact that their characteristics are determined by the epigraph and the hypograph of the *K* cone. Thus, they equally provide information on the surface of an unclosed *K* cone.

The paper shows that the duality gap is not an unwanted extraordinary case. The existence of a gap indicates the places where the feasible set starts to expand abnormally at infinitesimal relaxation of constraints. Thus, gap analysis allows to determine the "weak" places by setting constraints of a feasible set. Similar problems arise in politics, economy and any other sphere in which various constraints are imposed on a set of objects.

We construct numerical example of a semi-infinite LP problem with three variables. The characteristics of the surface of an unclosed four-dimensional *K* cone are analyzed. It is shown that the target vectors with duality gap do not form an isolated ray and fill the two-dimensional region in.

The example of the code allowing to carry out the numerical analysis of duality relations by the use of MATLAB are given. The program is based on such standard optimization functions as *fseminf* and *linprog* designed to find approximate solutions of finite-dimensional linear and non-linear semi-infinite optimization problems respectively. A distinguished feature of the MATLAB program is replacing of a semi-infinite linear programming original problem by a LP problem with a finite number of constraints. It is noted that this substitution may change the optimum value of both problems It is worth mentioning that the authors are planning to develop a new MATLAB-program with the ability for users to specify an infinite sequence of constraints.

REFERENCES

1. Goberna, M.A. & Lopez, M.A. (1998) *Linear Semi-Infinite Optimization*. Chichester: Wiley.
2. Glashoff, K. & Gustafson, S.A. (1983) *Linear Optimization and Approximation: An Introduction to the Theoretical Analysis and Numerical Treatment of Semi-Infinite Program*s. New York: Springer.
3. Karney, D.F. (1981) Duality gaps in semi-infinite linear programming – an approximation problem. *Math. Progr.* 20(1). pp. 129–143. DOI: 10.1007/BF01589340
4. Duffin, R.J. & Karlovitz, L.A. (1965) An infinite linear program with a duality gap. *Management Sci*. 12(1). pp. 122–134. DOI: 10.1287/mnsc.12.1.122
5. Chernikov, S.N. (1968) *Lineynye neravenstva* [Linear Inequalities]. Moscow: Nauka.

6. Jeroslow, R.G. (1983) Uniform quality in semi-infinite convex optimization. *Math. Progr*. 27(2). pp. 144–155.
7. Eremin, I.I. & Astafiev, N.N. (1976) *Introduction* to the Theory of Linear and Convex Programming. Moscow: Nauka.
8. Rockafellar, R.T. (1970) *Convex analysis*. New Jersey: Princeton University Press.
9. Kretschmer, K.S. (1961) Programmes in paired spaces. *Canad. J.Math*. 13. pp. 221–238. DOI: 10.4153/CJM-1961-019-2
10. Schechter, M. (1972) Linear program in topological vector spaces. *J. Math. Anal. Appl.* 37. pp. 492–500. DOI: 10.1016/0022-247X(72)90290-9
11. Trofimov, S.P. (1987) Kriteriy razryva dvoystvennosti dlya polubeskonechnykh zadach lineynogo programmirovaniya [A criterion for a discontinuity in the duality for semi-infinite problems of linear programming]. In: *Protivorechivye modeli optimizatsii* [Inconsistent Optimization Model]. pp. 64–70.
12. *Numerical analysis of duality relations program*. MATLAB Program Repository. [Online] Available from: https://github.com/re3burn/DGA. (Accessed: 20th August 2016). (In Russian).