

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2017

№ 46

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учредитель:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский Томский государственный университет»

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменишчиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), К.М. Моисеева (отв. секретарь по разделу «Механика»), И.А. Александров, В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.М. Гришин, А.Н. Ищенко, В.В. Конеv, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, С.В. Панько, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер, Н.Р. Щербаков.

EDITORIAL COUNCIL

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

EDITORIAL BOARD

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Elena G. Lazareva (Executive Editor of the Mathematics Section), Kseniya M. Moiseeva (Executive Editor of the Mechanics Section), Igor A. Aleksandrov, Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimatov, Aleksey M. Bubenchikov, Igor M. Vasenin, Anatoliy M. Grishin, Aleksandr N. Ishchenko, Viktor V. Konev, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Sergey V. Panko, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager, Nikolay R. Shcherbakov.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д.36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

H-index: <http://elibrary.ru>, <http://Math-Net.ru>

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Бухтяк М.С. Составная поверхность, близкая к псевдоминимальной.....	5
Галанова Н.Ю. Линейно упорядоченные поля с симметричными сечениями	14
Danchev P.V. On p^n -Ext projective abelian p -groups.....	21
Зарипов С.К. Построение аналога теоремы Фредгольма для одного класса модельных интегродифференциальных уравнений первого порядка с сингулярной точкой в ядре.....	24
Сухачева Е.С., Хмылева Т.Е. О модификациях прямой Зоргенфрея	36
Эргашев Т.Г. Обобщенные решения одного вырождающегося гиперболического уравнения второго рода со спектральным параметром	41

МЕХАНИКА

Володченко С.И., Синяев С.В. Импульсный нагрев среды ансамблями полых цилиндрических проводников, индукционно нагреваемых магнитным полем соленоида	50
Гаврилов Д.Ю. Напряженное состояние бруса прямоугольного сечения, выполненного из материала пористой структуры при чистом изгибе	64
Картавых А.А., Губанов С.М., Крайнов А.Ю. Оценка влияния неконденсируемых газов на процесс десублимации фтористого водорода.....	70
Хмелева М.Г., Даммер В.Х., Тохметова А.Б., Миньков Л.Л. Численное исследование вихреобразования в жидком металле под действием дискового завихрителя.....	76
Шагапов В.Ш., Чиглицева А.С., Белова С.В. Задача об образовании газогидрата в замкнутом объеме, насыщенном газом и снегом	86

МЕМОУАРЫ, ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ, ПЕРСОНАЛИИ

Берцун В.Н., Косова Е.С. О первом центре высшего математического образования в Сибири	102
--	-----

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	113
---------------------------	-----

CONTENTS

MATHEMATICS

Bukhtyak M.S. A composite surface close to pseudo-minimal	5
Galanova N.Yu. Totally ordered fields with symmetric gaps	14
Danchev P.V. On p^n -Bext projective abelian p -groups.....	21
Zaripov S.K. Construction of an analog of the Fredholm theorem for a class of model first order integro-differential equations with a singular point in the kernel.....	24
Sukhacheva E.S., Khmyleva T.E. On modification of the Sorgenfrey line.....	36
Ehrgashev T.G. Generalized solutions of the degenerate hyperbolic equation of the second kind with a spectral parameter.....	41

MECHANICS

Volodchenkov S.I., Sinyaev S.V. Pulse heating of a medium by assemblies of hollow cylindrical conductors inductively heated in the magnetic field of a solenoid	50
Gavrilov D. Yu. The stress state of a rectangular cross section beam made of a material with porous structure at pure bending	64
Kartavykh A.A., Gubanov S.M., Krainov A.Yu. Estimation of the effect of non- condensable gases on the process of hydrogen fluoride desublimation	70
Khmeleva M.G., Dammer V.Kh., Tokhmetova A.B., Min'kov L.L. Numerical investi- gation of the vortex formation in a liquid metal under the action of disk agitator.....	76
Shagapov V.Sh., Chiglintseva A.S., Belova S.V. The problem of gas hydrate formation in a closed volume saturated with gas and snow	86

MEMOIRS, MEMORABLE DATES, PERSONALITIES

Bertsun V.N., Kosova E.S. About the first center of higher mathematical education in Siberia.....	102
BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS	113

МАТЕМАТИКА

УДК 519.711.3, 514.181.22
DOI 10.17223/19988621/46/1

М.С. Бухтяк

СОСТАВНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ,
БЛИЗКАЯ К ПСЕВДОМИНИМАЛЬНОЙ

Данная публикация продолжает серию работ автора о моделировании деформированного лепестка осесимметричного параболического рефлектора. Схема моделирования формы деформированного лепестка сетеполотна осесимметричного рефлектора, предложенная В.М. Гряником и В.И. Ломаном, разработана для изотропного упругого материала, прикрепляемого к параболическим жестким ребрам, и не видно способов адаптировать её для ортотропного сетеполотна с иными способами закрепления. Автором в публикациях 2016 года предложена методика моделирования формы ортотропного упругого материала, основанная на использовании поверхности, для которой отношение главных кривизн есть величина постоянная (выражающаяся через отношение коэффициентов растяжения материала в двух ортогональных направлениях). Такая поверхность названа псевдоминимальной. В указанных публикациях методика адаптирована под конкретную ситуацию, описанную Гряником и Ломаном (лепесток сетеполотна осесимметричного рефлектора). Автором решены вопросы и более общего характера. Доказана теорема существования (широта класса псевдоминимальных поверхностей оказалась такая же, как и для минимальных поверхностей – две функции одного аргумента, то есть – в принципе – псевдоминимальная поверхность указанного веса определяется граничной линией). Данные о широте класса допускают иное истолкование: возможность (теоретическая!) построить составную псевдоминимальную поверхность, присоединяя к одной плоской линии семейство других плоских линий. Пример построения такой поверхности (она задается вектор-функцией) строится в данной статье. Для этой же поверхности строится явное задание. Это открывает возможности для моделирования поверхности ортотропного материала при выборе иных способов закрепления.

Ключевые слова: *гладкая поверхность, главные кривизны, ортотропия, псевдосредняя кривизна, задание поверхности посредством семейства обрезающих кривых, явное задание поверхности.*

1. Постановка задачи

Автор продолжает исследование о моделировании деформированного лепестка осесимметричного параболического рефлектора [1–6]. Схема моделирования формы деформированного лепестка сетеполотна осесимметричного рефлектора, предложенная в [7], разработана для изотропного упругого материала, и не видно способов адаптировать её для ортотропного сетеполотна. Автором в [1, 6] предложена методика моделирования формы ортотропного упругого материала, осно-

ванная на использовании поверхности, для которой отношение главных кривизн есть величина постоянная (выражающаяся через отношение коэффициентов растяжения материала в двух ортогональных направлениях. Такая поверхность названа псевдоминимальной. В [1] методика адаптирована под конкретную ситуацию (лепесток сетеполотна осесимметричного рефлектора). Работа [6] посвящена вопросам более общего характера. Доказана теорема существования (широта класса псевдоминимальных поверхностей оказалась такая же, как и для минимальных поверхностей – две функции одного аргумента, то есть – в принципе – псевдоминимальная поверхность указанного веса [6] определяется граничной линией). Данные о широте класса допускают иное истолкование: возможность (теоретическая!) построить составную псевдоминимальную поверхность, присоединяя к одной плоской линии семейство других плоских линий. Пример построения такой поверхности (она задается вектор-функцией) строится в данной статье. Для этой же поверхности строится явное задание.

В работе [1] применен способ моделирования ортотропных свойств лепестка сетеполотна осесимметричного рефлектора, основанный на зависимости отношения главных кривизн поверхности сетеполотна от коэффициентов растяжения в указанных направлениях.

На этом пути автор пришел к понятию псевдосредней кривизны и псевдоминимальной поверхности [6]. А именно, если главные кривизны поверхности

$$\Sigma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) \in C^2$$

упорядочены номерами (k_1 и k_2), то псевдосредней кривизной веса L называется величина

$$H_L = k_1 + Lk_2, \quad (L = const, \quad L \neq 0),$$

а поверхность, для которой

$$H_L = 0, \quad (1)$$

называется псевдоминимальной поверхностью веса L . Ясно, что при $L = 1$ получаем минимальную поверхность.

Если отсутствует правило упорядочения главных кривизн, то, имея в виду условность нумерации, говорим об ослабленном условии псевдоминимальности в виде

$$(k_1 + Lk_2)(Lk_1 + k_2) = 0,$$

которое, очевидно, от перемены номеров не меняется.

Пусть g_{11}, g_{12}, g_{22} – коэффициенты первой квадратичной формы поверхности Σ , а b_{11}, b_{12}, b_{22} – коэффициенты второй квадратичной формы. Тогда ослабленное условие псевдоминимальности веса a запишется [4] в виде

$$L(2b_{12}g_{12} - g_{11}b_{22} - b_{11}g_{22})^2 + (1-L)^2(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)(g_{11}g_{22} - g_{12}^2) = 0. \quad (2)$$

Соответственно безразмерный показатель псевдоминимальности с весом L

$$\delta(u, v) = \frac{(2b_{12}g_{12} - g_{11}b_{22} - b_{11}g_{22})^2}{(b_{12}^2 - b_{11}b_{22})(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)} - \frac{(1-L)^2}{L}.$$

2. Построение поверхности

В [1, 2] составлено дифференциальное уравнение, решение которого позволяет построить псевдоминимальную поверхность, проходящую через сечение параболоида вращения двумя плоскостями, проходящими через ось его симметрии. Уравнение в общем случае решается приближенно. Указанная поверхность может быть отнесена к составным поверхностям: она образована однопараметрическим семейством парабол, «подклеенных» своими вершинами к определенной линии G («гребневая линия») – она и определяется упомянутым дифференциальным уравнением.

Возникает вопрос о моделировании псевдоминимальной поверхности (хотя бы приближенно), при этом можно обойтись более скромными средствами: обычно это упрощает исследование. Именно, пусть «гребневая линия» G – заданная парабола и к её текущей точке «подклеивается» парабола, зависящая от точки приращения так, что условие (1) выполняется вдоль линии G (рис. 1). Вопрос в том, насколько точно при этом выполняется хотя бы ослабленное условие (1.6) уже вдоль поверхности.

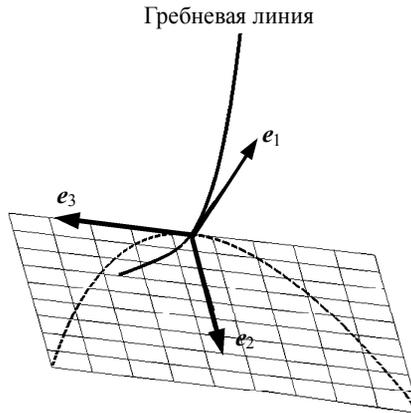


Рис. 1. Схема построения составной поверхности
Fig. 1. Scheme of constructing the combined surface

Схема построения пояснена на рис. 1. Заштрихована часть нормальной плоскости гребневой линии. Векторы e_i составляют ортогональный репер. Пунктирная линия – «подклеенная парабола».

Гребневая линия пусть задана вектор-функцией

$$\mathbf{r} = \{t, 0, at^2\}, \quad a = \text{const}, \quad a > 0.$$

Кривизна равна

$$k_g = \frac{2a}{\sqrt{1 + 4a^2t^2}}.$$

Базисные векторы

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{r}'(t), \quad \mathbf{e}_3 = \{0, 1, 0\}, \quad \mathbf{e}_2 = [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]$$

Радиус-вектор текущей точки присоединенной параболы

$$\mathbf{P}(t, u) = \mathbf{r}(t) - h(t)u^2 \mathbf{E}_2(t) + u \mathbf{E}_3(t).$$

Таким образом,

$$P(t, u) = \{t - 2au^2h(t), u, at^2 + u^2h(t)\}. \quad (3)$$

Условие (2), примененное вдоль гребневой линии, дает нам уравнение

$$L^2ha + ha + 4ha^3t^2 + Lh^2 + La^2 + 96Lh^2a^4t^4 + 256Lh^2a^6t^6 + \\ + 16Lh^2a^2t^2 + 256Lh^2a^8t^8 + 4L^2ha^3t^2 + 8Lha^3t^2 + 32Lha^5t^4 = 0. \quad (4)$$

Уравнение второй степени относительно $h(t)$. Дискриминант равен

$$a^2(1 + 4a^2t^2)^2(L-1)^2(L^2 + 16La^2t^2 + 2L + 1).$$

Совпадение корней равносильно тому, что вдоль гребневой линии сумма главных кривизн равна нулю.

В качестве первого корня уравнения (4) примем

$$h(t) = \frac{(-8La^2t^2 - 1 - L^2 + \sqrt{16La^2t^2 + 16L^3a^2t^2 + 1 - 2L^2 + L^4 - 32a^2L^2t^2})a}{2L(1 + 8a^2t^2 + 16a^4t^4)(1 + 4a^2t^2)}.$$

Тогда при $a = 1$ для различных значений L получаем поверхности (3), изображенные на рис. 2.

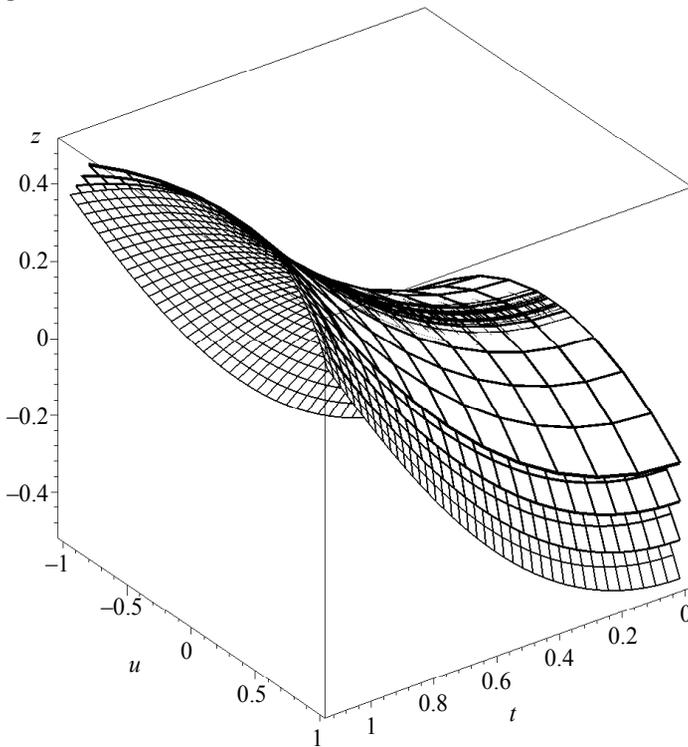


Рис. 2. Поверхности, приближенно псевдоминимальные при $L = 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ (очередность сверху вниз)

Fig. 2. Surfaces approximately pseudominimal at $L = 0.4, 0.6, 0.8, \text{ and } 1.0$ (from top to bottom)

Вектор-функция (3) слишком сложна для дальнейшего анализа, и для неё строится дробно-рациональное приближение

$$P_s = \{X_s, Y, Z_s\}. \quad (5)$$

Здесь

$$X_s = \frac{t \left(12a^2 L^2 t^2 + 12La^2 t^2 + 48L^2 a^4 t^4 + 48La^4 t^4 + 64L^2 a^6 t^6 + 64La^6 t^6 + L^2 + L + 16a^4 u^2 L t^2 + 2a^2 u^2 L + 2a^2 u^2 \right)}{(L+1)L(1+4a^2 t^2)^3},$$

$$Y = u, \quad (6)$$

$$Z_s = \frac{a \left(64L^2 t^8 a^6 + 64Lt^8 a^6 + 48L^2 t^6 a^4 + 48Lt^6 a^4 + 12L^2 t^4 a^2 + 12Lt^4 a^2 + L^2 t^2 + Lt^2 - 8u^2 La^2 t^2 - u^2 L - u^2 \right)}{(L+1)L(1+4a^2 t^2)^3}.$$

Относительная погрешность построенного приближения оценивается выражением

$$\varepsilon = \frac{|P - P_s|}{|P|}.$$

Значения погрешности при $a = 1$ и $L \in \{0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0\}$ приведены на рис. 3.

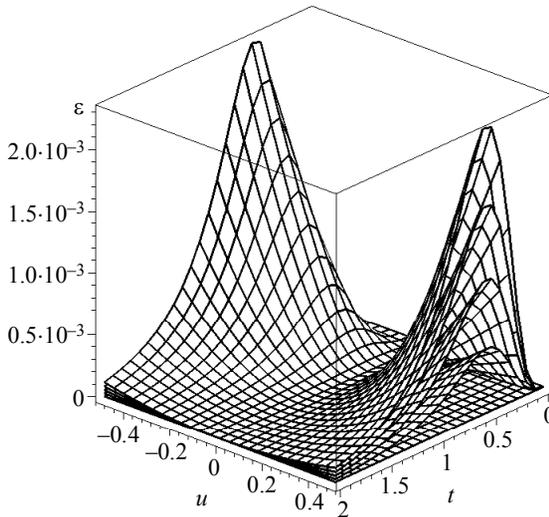


Рис. 3. Относительная погрешность ε для $L = 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0$ (очередность снизу вверх). Для $L \in \{1.0, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4\}$ результат аналогичный

Fig. 3. Relative error ε for $L = 0.6, 0.7, 0.8, 0.9,$ and 1.0 (from bottom to top). For $L = \{1.0, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4\}$, the result is similar.

Безразмерный индекс псевдоминимальности для $a = 1$ и $L \in \{1.00, 1.05, 1.10, 1.15, 1.20\}$ представлен на рис. 4. Этот же индекс для $a = 1$ и $L \in \{0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0\}$ приведен на рис. 5. Использование второго корня уравнения (4) в качестве функции $h(t)$ принципиально картину не меняет.

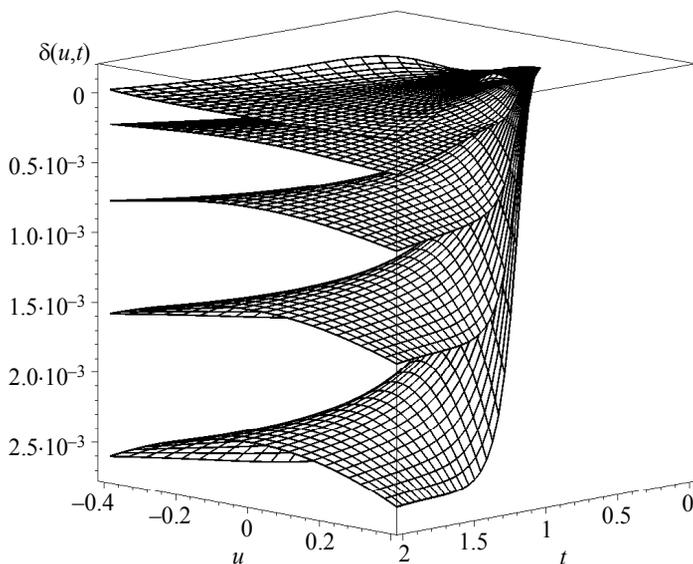


Рис. 4. Безразмерный индекс псевдоминимальности для $L = 1.00, 1.05, 1.10, 1.15, 1.20$ (очередность сверху вниз)

Fig. 4. Dimensionless index of pseudominimality for $L = 1.00, 1.05, 1.10, 1.15,$ and 1.20 (from top to bottom)

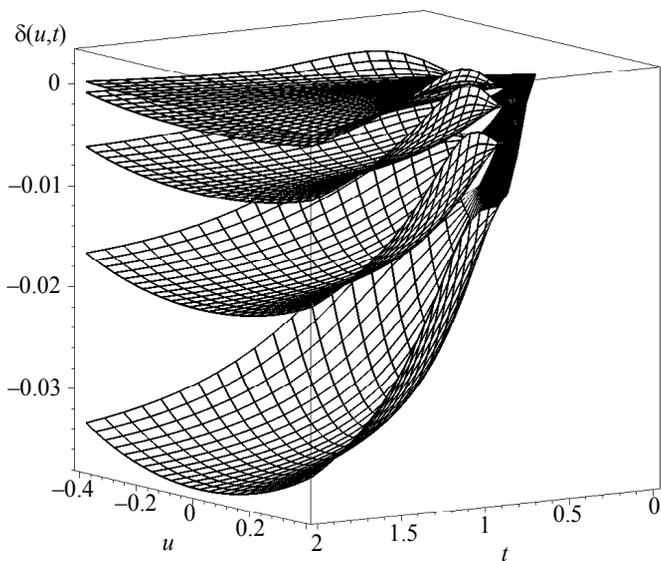


Рис. 5. Безразмерный индекс псевдоминимальности для $L = 0.80, 0.85, 0.90, 0.95, 1.00$ (очередность снизу вверх)

Fig. 5. Dimensionless index of pseudominimality for $L = 0.80, 0.85, 0.90, 0.95,$ and 1.00 (from bottom to top)

3. Задание поверхности явным уравнением

В некоторых случаях задание поверхности как годографа вектор-функции не столь удобно как использование уравнения вида

$$z = f(x, y). \quad (7)$$

Наличие уравнений (6) позволяет решить этот вопрос локально и приближенно. В окрестности начала координат приближенное разрешение первых двух уравнений приводит к соотношению

$$t \approx T = x - 2 \frac{a^2 xy^2}{L} + 8 \frac{a^4 (L+3)x^3 y^2}{L^2 + L} + 4 \frac{xa^4 y^4}{L^2} - 64 \frac{x^3 a^6 (L+3)y^4}{L^2 (L+1)}.$$

Уравнение вида (7) получаем, внося в третье из уравнений (6) T вместо t и y вместо u . Результат подстановки не приводим ввиду крайней громоздкости. Для $a = 1$, $L = \frac{6}{5}$ приводим изображение поверхности (5) и поверхности (7).

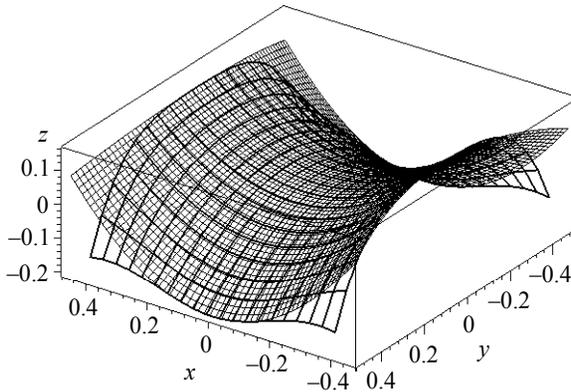


Рис. 6. Изображение поверхности (5) (крупная клетка) и поверхности (7) (мелкая клетка)

Fig. 6. Image of surface (5) (large squares) and surface (7) (small squares)

4. Заключение

Автор полагает, что предложенная работа (наряду с предшествующими) служит прояснению понятия псевдоминимальной поверхности, способов её аналитического построения (приближенно) и использования для моделирования формы поверхности упругого ортотропного материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бухтяк М.С. Геометрическое моделирование деформации сетеполотна параболического рефлектора // Математическое моделирование. 2016. Т. 39. № 1. С. 97–106.
2. Бухтяк М.С. Дефект отображения для деформированного лепестка сетеполотна // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 2(40). С. 5–17.
3. Бухтяк М.С., Соломина А.В. Об одном инварианте пары поверхностей применительно к раскрою сетеполотна // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 1(39). С. 13–24.

4. Бухтяк М.С., Соломина А.В. Геометрическое моделирование раскроя сетеполотна для осесимметричного рефлектора. Часть 1 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 2(34). С. 5–17.
5. Бухтяк М.С., Соломина А.В. Геометрическое моделирование раскроя сетеполотна для осесимметричного рефлектора. Часть 2 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 4(29). С. 5–14.
6. Бухтяк М.С. Обобщение минимальных поверхностей и моделирование формы конструкции из ортотропного материала // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 6(44). С. 5–17.
7. Гряник М.В., Ломан В.И. Развертываемые зеркальные антенны зонтичного типа. М.: Радио и связь, 1987. 72 с.

Статья поступила 21.11.2016 г.

Bukhtyak M.S. (2017) A COMPOSITE SURFACE CLOSE TO PSEUDO-MINIMAL. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 46. pp. 5–13

DOI 10.17223/19988621/46/1

This publication continues the series of the author's papers on simulation of a deformed petal of an axisymmetric parabolic reflector. V.M. Gryanik and V.I. Loman proposed a simulation scheme for the deformed petal shape of the metallic mesh axisymmetric parabolic reflector. The scheme was developed for an isotropic elastic material attached to parabolic hard edges and there seem to be no method to adapt it for an orthotropic metallic mesh with other methods of fixing. The author's papers of 2016 propose a shape simulation method for an orthotropic elastic material. The method is based on using a surface for which the ratio of principal curvatures is constant (expressed by the ratio of the stretching factors of the material in two orthogonal directions). Such a surface is called pseudo-minimal. The method is adapted in these papers to a specific situation described by Gryanik and Loman (metallic mesh petal of an axisymmetric reflector). The author has also solved more general problems. The existence theorem has been proven (the latitude of the class of pseudo-minimal surfaces is the same as for minimal surfaces, namely, two functions of one argument; basically, a pseudo-minimal surface with a specified weight is determined by the boundary line). The data about the latitude class data allow other interpretation: a composite pseudo-minimal surface can be (theoretically!) constructed by attaching a family of flat lines to one flat line. An example of such a surface (given by a vector function) is constructed in this paper. The same surface is constructed in an explicit form. This opens possibilities for simulating an orthotropic material surface when choosing different methods of fixing.

Keywords: smooth surface, principal curvatures, orthotropy, pseudomean curvature, plotting a surface by a family of generating curves, explicit surface plotting.

БУХТЯК Mikhail Stepanovich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

REFERENCES

1. Bukhtyak M.S. (2016) Geometrical modeling of a metallic mesh deformation of the parabolic reflektor. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 8(4). pp. 453–461. DOI: 10.1134/S2070048216040050.
2. Bukhtyak M.S. (2016) Defekt otobrazheniya dlya deformirovannogo lepestka setepolotna [Defect of mapping for deformed segment of metallic mesh]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(40). pp. 5–17. DOI: 10.17223/19988621/40/1.
3. Bukhtyak M.S., Solomina A.V. (2016) Ob odnom invariante otobrazheniya poverkhnostey primenitel'no k raskroyu setepolotna [On an invariant of surface mapping as applied to metallic mesh tailoring]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i*

- mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(39). pp. 13–24. DOI: 10.17223/19988621/39/2.
4. Bukhtyak M.S., Solomina A.V. (2015) Geometricheskoe modelirovanie raskroya setepolotna dlya osesimmetrichnogo reflektora. Chast' 1 [Geometric modeling of metallic mesh sheet tailoring for an axissymmetric reflector. Part 1]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(34). pp. 5–17. DOI: 10.17223/19988621/34/1.
 5. Bukhtyak M.S., Solomina A.V. (2015) Geometricheskoe modelirovanie raskroya setepolotna dlya osesimmetrichnogo reflektora. Chast' 2 [Geometric modelling of metallic mesh tailoring for axisymmetric refltor. Part 2]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(36). pp. 5–14. DOI: 10.17223/19988621/36/1.
 6. Bukhtyak M.S. (2017) Obobshchenie minimal'nykh poverkhnostey i modelirovanie formy konstruksii iz ortotropnogo materiala [Generalization of minimal surfaces and simulation of the shape of an orthotropic material construction]. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 45. pp. 5–24. DOI: 10.17223/19988621/45/1.
 7. Gryanik M.V., Loman V.I. (1987) *Razvertyvaemye zerkal'nye antenny zontichnogo tipa* [Deployable Mirror Umbrella-Type Antennas]. Moscow: Radio i svyaz'.

УДК 512.623.23
DOI 10.17223/19988621/46/2

Н.Ю. Галанова

ЛИНЕЙНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ ПОЛЯ С СИММЕТРИЧНЫМИ СЕЧЕНИЯМИ

Исследуются свойства упорядоченных полей с симметричными сечениями. Рассматриваются вещественно замкнутые упорядоченные поля K , $|K| = |G| = cf(G) = \beta > \aleph_0$, где G есть группа архимедовых классов поля K , такие, что конфинальность каждого симметричного сечения K равна β . Показывается, что такой класс полей совпадает с классом всех полей ограниченных формальных степенных рядов $\mathbf{R}[[G, \beta]]$, где G есть делимая абелева группа, $|G| = cf(G) = \beta > \aleph_0$, при условии ОКГ. По заданному упорядоченному полю с симметричным сечением строится его подполе с симметричным сечением того же типа конфинальности.

Ключевые слова: *линейно упорядоченная абелева группа, линейно упорядоченное поле, поле ограниченных формальных степенных рядов, простое трансцендентное расширение упорядоченного поля, вещественное замыкание, симметричное сечение, конфинальность сечения.*

Предварительные сведения

Строение сечений в упорядоченном поле несёт существенную информацию о свойствах самого поля. В данной статье будем использовать понятия симметричного и трансцендентного сечений из классификации сечений, разработанной Г.Г. Пестовым [1–4]. Автором статьи были полностью исследованы симметричные сечения для полей ограниченных формальных степенных рядов и некоторых моделей нестандартной вещественной прямой [5–7]. В данной статье исследование симметричных сечений продолжается для более общего случая.

Сечение (A, B) упорядоченного поля K называется *симметричным*, если для каждого $a \in A$ существует такое $a_1 \in A$, что $(a_1 + (a_1 - a)) \in B$, и для каждого $b \in B$ существует такое $b_1 \in B$, что $(b_1 - (b - b_1)) \in A$ [1–4].

Пусть A – упорядоченное множество. Говорят, что подмножество X множества A *конфинально* A , если для каждого $x \in A$ существует $y \in X$, такой, что $x \leq y$. Наименьшая мощность среди мощностей всех множеств, конфинальных A , называется *конфинальностью* A и обозначается $cf(A)$ [4].

Конфинальностью симметричного сечения (A, B) называется $cf(A)$ [4, 8].

Пусть P – упорядоченное расширение поля K . Будем говорить, что элемент $t \in P \setminus K$ *порождает сечение* (A, B) в упорядоченном поле K , если $A < t < B$.

Говорят, что *многочлен* $f(x)$ *меняет знак на сечении* (A, B) упорядоченного поля P , если существуют такие $a \in A$, $b \in B$, что на множестве $A \cap [a, b]$ многочлен строго положителен (отрицателен), а на множестве $B \cap [a, b]$ строго отрицателен (положителен). Если все многочлены из $P[x]$ не меняют знак на сечении, то

это сечение называется *трансцендентным*. В противном случае сечение называется *алгебраическим* [1–4].

Теорема 1.1. [1] Упорядоченное поле P вещественно замкнуто тогда и только тогда, когда все сечения P трансцендентны.

Пусть G – линейно упорядоченная мультипликативная абелева группа, \mathbf{R} – поле вещественных чисел.

Через $\mathbf{R}[[G]]$ обозначается [9] *поле формальных степенных рядов* вида $x = \sum_{g \in G} r_g g$, $r_g \in \mathbf{R}$, где носитель ряда $\text{supp}(x) = \{g \in G \mid r_g \neq 0\}$ – вполне анти-

упорядоченное (каждое непустое подмножество имеет наибольший элемент) подмножество группы G .

Полагаем $x > 0 \Leftrightarrow r_{g_0} > 0$, $g_0 = \max(\text{supp}(x))$.

Пусть β – кардинал, $\aleph_0 < \beta \leq |G|$. Через $\mathbf{R}[[G, \beta]]$ обозначается [8] поле таких формальных степенных рядов x , что $|\text{supp}(x)| < \beta$. Это поле называется *полем ограниченных формальных степенных рядов*.

Элементы a, b упорядоченного поля K называются *архимедовски эквивалентными*, если существует такое натуральное число n , что $n|a| > |b|$ и $n|b| > |a|$. Если a и b архимедовски эквивалентны, то пишем $a \sim b$.

С каждым упорядоченным полем K связано понятие его *группы архимедовых классов*, она получается как фактор-группа мультипликативной группы $K \setminus \{0\}$ по отношению к архимедовской эквивалентности [1–4].

Группа архимедовых классов упорядоченного поля $\mathbf{R}[[G]]$ изоморфна G .

Как было доказано Капланским [8, 9], каждое линейно упорядоченное поле вкладывается с сохранением порядка в поле формальных степенных рядов, построенное по группе архимедовых классов данного поля.

Мультипликативная группа G называется *делимой* [8], если для любого $g \in G$ и любого натурального n существует решение уравнения $h^n = g$. Доказано [8], что если группа G – делимая, то поля $\mathbf{R}[[G]]$, $\mathbf{R}[[G, \beta]]$ вещественно замкнуты.

Поле $\mathbf{R}[[G]]$ является архимедовски замкнутым, что равносильно отсутствию симметричных сечений [2–4], [10].

Теорема 1.2. [2] Если сечение (A, B) поля K трансцендентно, то порядок из K единственным образом продолжается на поле $K(t)$, полученном заполнением этого сечения.

Теорема 1.3. [3] Пусть P есть упорядоченное расширение поля K , такое, что для каждого $x \in P$ существует $y \in K$, такое, что $x \sim y$. Тогда каждый элемент из $P \setminus K$ индуцирует симметричное сечение в K .

Теорема 1.4. [3] Пусть K есть подполе архимедовски замкнутого поля P и (A, B) есть симметричное сечение в K . Тогда существует $t \in P$ такое, что $A < t < B$.

Теорема 1.5. [2] Пусть упорядоченные вещественно замкнутые поля F_1, F_2 таковы, что $|F_1| = |F_2| = \alpha$ и конфинальность каждого симметричного сечения в обоих полях равна α . Тогда для того чтобы F_1, F_2 были упорядоченно изоморф-

ны, необходимо и достаточно, чтобы группы архимедовых классов этих полей были изоморфны.

Теорема 1.6. [10] Пусть G – линейно упорядоченная делимая абелева группа. Пусть β – кардинал, $\aleph_0 < \beta \leq |G|$. Тогда конфинальность каждого симметричного сечения поля $\mathbf{R}[[G, \beta]]$ равна $cf(\beta)$. В частности, если β – регулярный кардинал, то конфинальность каждого симметричного сечения $\mathbf{R}[[G, \beta]]$ равна β .

Следствие 1.7. (ОКГ) Пусть G – линейно упорядоченная делимая абелева группа, β – регулярный кардинал, $\aleph_0 < \beta = cf(G) = |G|$. Тогда каждое вещественно замкнутое поле K мощности β с группой архимедовых классов G , в котором каждое симметричное сечение имеет конфинальность β , упорядоченно изоморфно полю $\mathbf{R}[[G, \beta]]$.

Доказательство. Так как $\beta = cf(G)$, группа G имеет вполне антиупорядоченные подмножества мощности β . Поэтому $\mathbf{R}[[G]] \setminus \mathbf{R}[[G, \beta]] \neq \emptyset$. При ОКГ мощность поля $\mathbf{R}[[G, \beta]]$ равна $|G|$ (см. [8]). Пусть поле K удовлетворяет условиям следствия, тогда $|K| = |\mathbf{R}[[G, \beta]]| = \beta$. Группы архимедовых классов обоих полей равны G . Симметричные сечения обоих полей имеют конфинальность β . По теореме 1.5 K изоморфно $\mathbf{R}[[G, \beta]]$.

Свойства упорядоченных полей с симметричными сечениями

Рассмотрим некоторые следствия теории сечений, изложенной в [1–4], [10].

Лемма 2.1. Пусть P – упорядоченное расширение поля K , (A, B) – сечение поля K и между берегами сечения (A, B) нет элементов из P . Тогда пара множеств (\tilde{A}, \tilde{B}) , заданная следующим образом: $\tilde{A} = \{x \in P \mid \exists a \in A \ x \leq a\}$, $\tilde{B} = \{x \in P \mid \exists b \in B \ b \leq x\}$, является сечением поля P и $cf(A, B) = cf(\tilde{A}, \tilde{B})$. При этом если (A, B) симметричное сечение, то (\tilde{A}, \tilde{B}) также симметричное сечение.

Доказательство. По условию $A \subset \tilde{A}$, $B \subset \tilde{B}$. Так как между берегами (A, B) нет элементов из P , то (\tilde{A}, \tilde{B}) – сечение P . Множество наименьшей мощности, конфинальное A , будет также и множеством наименьшей мощности, конфинальным \tilde{A} , поскольку A конфинально \tilde{A} . Отсюда получаем $cf(A, B) = cf(\tilde{A}, \tilde{B})$. Пусть теперь (A, B) – симметричное сечение; докажем, что (\tilde{A}, \tilde{B}) также симметрично. Пусть $\tilde{a} \in \tilde{A}$. Найдётся $a \in A$ такое, что $\tilde{a} \leq a$. Далее, по определению симметричного сечения существует такое $a_1 \in A$, что $(a_1 + (a_1 - a)) \in B$. Из того, что $(a_1 + (a_1 - a)) \leq (a_1 + (a_1 - \tilde{a}))$ и $(a_1 + (a_1 - \tilde{a})) \in P$, следует, что $(a_1 + (a_1 - \tilde{a})) \in \tilde{B}$. Аналогично, для каждого $\tilde{b} \in \tilde{B}$ существует такое $b_1 \in B$, что $(b_1 - (\tilde{b} - b_1)) \in \tilde{A}$.

Утверждение 2.2. Пусть упорядоченное поле K имеет группу архимедовых классов G . Сечение (A, B) поля K симметрично тогда и только тогда, когда существует элемент $t \in \mathbf{R}[[G]] \setminus K$ такой, что $A < t < B$.

Доказательство. Если $t \in \mathbf{R}[[G]] \setminus K$ таково, что $A < t < B$, то по теореме 1.3 (A, B) симметрично. Это следует также и из теоремы 1.4, так как поле $\mathbf{R}[[G]]$ архимедовски замкнуто [10].

С другой стороны, если между (A, B) нет элементов из $\mathbf{R}[[G]]$, то (A, B) индуцирует (по лемме 2.1) симметричное же сечение (\tilde{A}, \tilde{B}) в $\mathbf{R}[[G]]$, но в $\mathbf{R}[[G]]$ нет симметричных сечений [10].

Докажем следующий факт, используя теорию сечений.

Лемма 2.3. Пусть Γ – вполне упорядоченное множество, $\{F_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ – семейство вещественно замкнутых упорядоченных полей, таких, что $\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ $\gamma_1 < \gamma_2 \Rightarrow F_{\gamma_1} \subset F_{\gamma_2}$. Тогда $F = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} F_\gamma$ – упорядоченное вещественно замкнутое поле.

Доказательство. Очевидно, что F – упорядоченное поле. Проверим вещественную замкнутость F . Согласно теореме 1.1, достаточно доказать, что все сечения поля F трансцендентны. Допустим противное, т.е. пусть существует алгебраическое сечение (A, B) поля F . Тогда существует многочлен $f(x) \in F[x]$ и такие $a \in A, b \in B$, что на множестве $A \cap [a, b]$ многочлен $f(x)$ строго положителен (отрицателен), а на множестве $B \cap [a, b]$ строго отрицателен (положителен). Найдётся F_{γ_0} , такое, что $f(x) \in F_{\gamma_0}[x]$ и $a, b \in F_{\gamma_0}$. Тогда $f(x)$ строго положителен (отрицателен) на $A \cap [a, b] \cap F_{\gamma_0}$, а на множестве $B \cap [a, b] \cap F_{\gamma_0}$ строго отрицателен (положителен). Это означает, что сечение $(A \cap F_{\gamma_0}, B \cap F_{\gamma_0})$ поля F_{γ_0} – алгебраическое, что противоречит вещественной замкнутости F_{γ_0} .

Конструкция упорядоченного поля с симметричными сечениями

Пусть вещественно замкнутые упорядоченные поля P и K имеют одинаковую группу архимедовых классов $G, K \subset P$.

Пусть (A, B) – симметричное сечение поля P , β – кардинал, $\aleph_0 < \beta \leq |G|$, $cf(A, B) = \beta$. Обозначим через $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \beta}$ множество наименьшей мощности, конфинанальное A .

Далее, пусть $x_\gamma \in P \setminus K$ для всех $\gamma \in \beta$.

Построим по трансфинитной рекурсии последовательность вещественно замкнутых полей $\{K_\gamma\}_{\gamma \in \beta}$. Полагаем $K_1 = \overline{K(x_1)}$ – вещественное замыкание простого трансцендентного расширения поля K .

Если γ – не предельный ординал, то $K_\gamma = \overline{K_{\gamma-1}(x_\gamma)}$. Заметим, что если $x_\gamma \in K_{\gamma-1}$, то $K_\gamma = K_{\gamma-1}$.

Если γ – предельный ординал, то $K_\gamma = \overline{\left(\bigcup_{\alpha < \gamma} K_\alpha \right)}(x_\gamma)$.

Полагаем $H = \bigcup_{\gamma \in \beta} K_\gamma$.

Теорема 3.1. Множество H является вещественно замкнутым упорядоченным полем, имеющим симметричное сечение конфинальности β .

Доказательство. Очевидно, что $K \subset H$. По построению $\gamma_1 < \gamma_2 \Rightarrow K_{\gamma_1} \subset K_{\gamma_2}$ и каждое K_γ – вещественно замкнуто. Поэтому $H = \bigcup_{\gamma \in \beta} K_\gamma$ – вещественно замкнутое упорядоченное поле (лемма 2.3).

Так как поле P – вещественно замкнутое, то $H \subset P$.

Сечение (A, B) поля P – симметричное, поэтому (утверждение 2.2) найдётся $t \in \mathbf{R}[[G]] \setminus P$, такой, что $A < t < B$. Элемент t будет порождать симметричное сечение поля H . Обозначим его (\tilde{A}, \tilde{B}) , по построению $\tilde{A} \subset A$. Так как $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \beta}$ – множество наименьшей мощности, конфинальное A , и $x_\gamma \in \tilde{A}$, то $cf(A, B) = cf(\tilde{A}, \tilde{B}) = \beta$.

Пример. Пусть G – линейно упорядоченная делимая абелева группа, β – регулярный кардинал, $\aleph_0 < \beta < \beta^+ \leq |G|$. Обозначим $K = \mathbf{R}[[G, \beta]]$, $P = \mathbf{R}[[G, \beta^+]]$.

Пусть $\Gamma = \{g_\gamma\}_{\gamma \in \beta^+}$ – подмножество группы G , такое, что отображение $\gamma \mapsto g_\gamma$ задаёт инверсное подобие кардинала β^+ и множества Γ . Зададим ряд: $t = \sum_{g \in \Gamma} 1g$, $t \in \mathbf{R}[[G]] \setminus P$. Ряд t порождает в поле $P = \mathbf{R}[[G, \beta^+]]$ сечение конфинальности β^+ , обозначим его (A, B) .

Для каждого γ , $\beta \leq \gamma < \beta^+$, обозначим через x_γ срезку ряда t с носителем $\text{supp}(x_\gamma) = \{g \in \Gamma \mid g > g_\gamma\}$. Так как мощность $\text{supp}(x_\gamma)$ равна β , каждый ряд x_γ принадлежит полю $P = \mathbf{R}[[G, \beta^+]]$.

Возрастающая последовательность $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \beta^+}$ конфинальна A .

Поле H из теоремы 3.1 имеет симметричное сечение конфинальности β^+ . При этом $\mathbf{R}[[G, \beta]] \subset H \subset \mathbf{R}[[G, \beta^+]]$.

Остаются открытыми вопросы: будет ли H равно (изоморфно) $\mathbf{R}[[G, \beta^+]]$; существует ли линейно упорядоченное поле с симметричными сечениями разной конфинальности?

Сечение (A, B) упорядоченного поля K называется *фундаментальным*, если $\forall \varepsilon \in K^+ \setminus \{0\} \exists a \in A \exists b \in B \mid b - a < \varepsilon$.

Замечание. Пусть принимается обобщённая континуум-гипотеза. Если β – регулярный кардинал, $\aleph_0 < \beta < \beta^+ = cf(G) = |G|$, то по следствию 1.7 из теоремы 1.5 об изоморфизме каждое вещественно замкнутое поле с группой архимедовых классов G , в котором каждое симметричное сечение имеет конфинальность β^+ , упорядоченно изоморфно полю $\mathbf{R}[[G, \beta^+]]$. Поле H в этом случае будет изоморфно $\mathbf{R}[[G, \beta^+]]$ тогда и только тогда, когда все симметричные сечения в H

будут иметь конфинальность β^+ . При этом симметричные фундаментальные сечения всегда имеют конфинальность равную $cf(G)$ [10]. Поэтому для установления изоморфизма полей H и $\mathbf{R}[[G, \beta^+]]$ достаточно исследовать конфинальность только нефундаментальных симметричных сечений поля H .

ЛИТЕРАТУРА

1. Пестов Г.Г. Строение упорядоченных полей. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1980.
2. Пестов Г.Г. К теории сечений в упорядоченных полях // Сиб. матем. журн. 2001. Т. 42. № 6. С. 1350–1360.
3. Пестов Г.Г. К теории упорядоченных полей и групп: дис. ... докт. физ.-мат. наук. Томск, 2003.
4. Пестов Г.Г. Исследования по упорядоченным группам и полям в Томском государственном университете // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2011. № 3(15).
5. Галанова Н.Ю. Симметрия сечений в полях формальных степенных рядов и нестандартной вещественной прямой // Алгебра и логика. 2003. Т. 42. № 1. С. 26–36.
6. Galanova N.Yu. Symmetric and asymmetric gaps in some fields of formal power series // *Serdica Math.* 2004. V. 30. P. 495–504.
7. Galanova N.Y. An investigation of the fields of bounded formal power series by means of theory of cuts // *Acta Appl. Math.* 2005. V. 85. P. 121–126.
8. Dales H.J., Woodin H. *Super real fields.* Oxford: Clarendon Press, 1996.
9. Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. М.: Мир, 1965.
10. Галанова Н.Ю., Пестов Г.Г. Симметрия сечений в полях формальных степенных рядов // Алгебра и логика. Т. 47. № 2. 2008. С. 174–185.

Статья поступила 30.08.2016 г.

Galanova N.Yu. (2017) TOTALLY ORDERED FIELDS WITH SYMMETRIC GAPS. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 46. pp. 14–20

DOI 10.17223/19988621/46/2

The paper investigates properties of totally ordered fields with symmetric gaps. Let (A, B) be a gap of an ordered field K . The set A is called long-shore if for all $a \in A$ there exists $a_1 \in A$ such that $(a_1 + (a_1 - a)) \in B$. If both of the shores A and B are long-shore, then the gap (A, B) is called symmetric. We consider under (GCH) a real closed field K , $|K| = |G| = cf(G) = \beta > \aleph_0$, where G is the group of Archimedean classes of K and cofinality of each symmetric gap of K is β . We show that K is order-isomorphic to the field of bounded formal power series $\mathbf{R}[[G, \beta]]$. We prove that a gap (A, B) of an ordered field K is symmetric iff $\exists t \in \mathbf{R}[[G]] \setminus K$, $A < t < B$, where G is the group of Archimedean classes of K . For any ordered field, with a symmetric gap of cofinality β we construct a subfield, with a symmetric gap of the same cofinality. We consider an example of real closed field H , $\mathbf{R}[[G, \beta]] \subset H \subset \mathbf{R}[[G, \beta^+]]$, with a symmetric gap of cofinality β^+ .

Keywords: totally ordered Abelian group, totally ordered field, field of bounded formal power series, simple transcendental extension of ordered field, real closure, symmetric gap, cofinality of a gap.

GALANOVA Nataliya Yur'evna (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: galanova@math.tsu.ru

REFERENCES

1. Pestov G.G.(1980) *Stroenie uporyadochennykh poley* [The structure of ordered fields]. Tomsk: TSU publ.
2. Pestov G.G. (2001) On the Theory of Cuts in Ordered Fields. *Sib. Math. J.* 42(6) 1123–1131. DOI: 10.1023/A:1012800828633.
3. Pestov G.G. (2003). K teorii uporyadochennykh poley i grupp [To the theory of ordered fields and groups]. Dis. doct. fiz.-mat. nauk: 01.01.06. Tomsk. 273 p.
4. Pestov G.G. (2011) Issledovaniya po uporyadochennym gruppam i polyam v Tomskom gosudarstvennom universitete [Investigations on ordered groups and fields in Tomsk State University]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 3(15).
5. Galanova N.Yu. (2003) Symmetry of sections in fields of formal power series and non-standard real line. *Algebra and Logic.* 42. pp. 14–19. DOI:10.1023/A:1022672606591.
6. Galanova N.Yu. (2004) Symmetric and asymmetric gaps in some fields of formal power series. *Serdica Math.* 30. pp. 495–504.
7. Galanova N.Y. (2005) An investigation of the fields of bounded formal power series by means of theory of cuts. *Acta Appl. Math.* 85. pp. 121–126. DOI: 10.1007/s10440-004-5593-5.
8. Dales H.J., Woodin H. (1996) *Super real fields*. Oxford: Clarendon Press.
9. Fuchs L.(1963) *Partially ordered algebraic systems*. Oxford: Pergamon Press.
10. Galanova N.Y., Pestov G.G. (2008) Symmetry of cuts in fields of formal power series. *Algebra and Logic.* 47. 2. pp. 100–106. DOI: 10.1007/s10469-008-9001-5.

УДК 512.742
DOI 10.17223/19988621/46/3

Peter V. Danchev

ON p^n Bext PROJECTIVE ABELIAN p -GROUPS¹

We introduce the concept of p^n Bext projective abelian p -groups and show that they form a class which properly contains the class of all n -balanced projective p -groups. This somewhat enlarges a result due to Keef-Danchev in Houston J. Math. (2012).

Keywords: *balanced projectives, n -balanced projectives, p^n Bext projectives.*

1. Introduction and Background

Everywhere in the text of this brief paper our groups are p -primary abelian, where p is a fixed prime for the duration of the article. The undefined explicitly below notions and notations are in agreement with [5]. For instance, a group G is called *balanced projective* if the equality $\text{Bext}(G, X) = \{0\}$ holds for all groups X . In order to generalize this, imitating [3], for any integer $n \geq 0$, we say that the short exact sequence $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow G \rightarrow 0$ is *n -balanced exact* if it represents an element of $p^n\text{Bext}(G, X)$. Thus we will say that a group G is *n -balanced projective* provided every such n -balanced exact sequence splits. Evidently, these two notions coincide when $n = 0$.

It is worthwhile noticing that certain non-trivial properties of these groups are given in [3] (see also [4]). These ideas lead us to the next new concept:

Definition 1.1. Let $n \geq 0$. A group G is said to be *p^n Bext-projective* if

$$(\forall X), p^n - \text{Bext}(G, X) = \{0\}.$$

The aim of this note is to prove that each n -balanced projective group is p^n yields Bext-projective but the converse fails. We close the work with a specific question arisen from unexpected difficulties in the proof of the central statement.

2. Main Result and Problem

Theorem 2.1. *Suppose that G is a group and $n < \omega$ is a natural. If G is n -balanced projective, then it is p^n Bext-projective.*

Proof. Letting the short exact sequence E defined by

$$0 \rightarrow X \rightarrow B \xrightarrow{f} G \rightarrow 0$$

is in $p^n\text{Bext}(G, X)$, then there is another element E' of $\text{Bext}(G, X)$ given by

$$0 \rightarrow X \rightarrow B' \xrightarrow{f'} G \rightarrow 0$$

such that the following pull-back diagram can be completed:

¹ 2010 Mathematics Subject Classification. 20 K10.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \rightarrow & X & \rightarrow & B & \xrightarrow{f} & G & \rightarrow & 0 \\
 & & & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow p^n \\
 0 & \rightarrow & X & \rightarrow & B' & \xrightarrow{f'} & G & \rightarrow & 0.
 \end{array}$$

Let $H(G)$ be the standard functorial group, depending on G , as defined in [7] (cf. [3] too). If $\pi_G : H(G) \rightarrow G$ is our usual homomorphism used in defining E_G , then $p^n(\pi_G(G[p^n])) = \{0\}$, so $p^n\pi_G$ induces a homomorphism $H(G)/G[p^n] \rightarrow G$. Since E' is balanced exact and $H(G)/G[p^n]$ is totally projective, there is a homomorphism $g' : H(G) \rightarrow B'$ such that $f' \circ g' = p^n\pi_G$. Now the well-known universal properties of pull-back diagrams yield that there exists a homomorphism $g : H(G) \rightarrow B$ such that $f \circ g = \pi_G$. However, this means that E is n -balanced exact. Since we are assuming G is n -balanced projective, it follows now that E splits, as wanted. \square

Example 2.2. There is a p Bext-projective group which is not 1-balanced projective.

Proof. Referring to [6] there exists a summable C_{ω_1} -group A which is a proper p^{ω_1+1} -projective group (thus it is manifestly *not* totally projective by virtue of [5]). Moreover, since it is summable, it follows that it is also not 1-balanced projective.

However, on the other side, since A is a C_{ω_1} -group, it follows that $\text{Bext}(A, X) = p^{\omega_1}\text{Ext}(A, X)$ for all groups X (compare with [5]). And finally, because it is a p^{ω_1+1} -projective as well, we can conclude that A has to be p Bext-projective, as claimed. \square

A reasonable query is whether or not for any $n \geq 2$ does there exist a p^n Bext-projective group that is not n -totally projective? Resuming, we have restricted our attention only on $n = 1$, though essentially the same argument works for larger values of n (see cf. [1] and [2] too). In fact, last argument stated above asserts that any element of $p^n\text{Bext}(A, X)$ will be n -balanced exact, so that every group which is projective with respect to the collection of n -balanced exact sequences will also be projective with respect to the functor $p^n\text{Bext}$. The second assertion then implies that there are n -balanced exact sequences that are not elements of $p^n\text{Bext}(A, X)$.

Besides, notice that the totally projective (i.e., the balanced projective) groups are exactly $p^0\text{Bext}$ -projective groups, and there are an abundance of them. Nevertheless, it is actually *not* at all clear whether there are enough $p^n\text{Bext}$ -projectives whenever $n > 0$. So, the following homological question is of some interest:

Problem. Is it true that the collection of n -balanced exact sequences form the largest subfunctor of $p^n\text{Bext}$ which does have this important homological property?

REFERENCES

1. Danchev P.V. (2012) Valuated p^n -socles and C_λ n -summable abelian p -groups. *Pioneer J. Math. and Math. Sci.* 6. pp. 233–249.
2. Danchev P.V. and Keef P.W. (2010) n -Summable valuated p^n -socles and primary abelian groups. *Commun. Algebra.* 38. pp. 3137–3153.

3. Keef P.W. and Danchev P.V. (2012) On n -simply presented primary abelian groups. *Houston J. Math.* 38. pp. 1027–1050.
4. Keef P. and Danchev P. (2012) On properties of n -totally projective abelian p -groups. *Ukrain. Math. J.* 64. pp. 875–880.
5. Fuchs L. (2015) *Abelian Groups*. Switzerland: Springer.
6. Hill P. (1968) A summable C_Ω -group. *Proc. Amer. Math. Soc.* 23. pp. 428–430.
7. Richman F. and Walker E. (1979) Valuated groups. *J. Algebra.* 56. pp. 145–167.

Received: 08.02.2017

Peter V. DANCHEV (Professor, Mathematical Department, Plovdiv State University, Bulgaria)
E-mail: pvdanchev@yahoo.com

Данчев П.В. (2017) О p^n -Bext ПРОЕКТИВНЫХ АБЕЛЕВЫХ p -ГРУППАХ. *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* № 46. С. 21–23

DOI 10.17223/19988621/46/3

Вводится понятие p^n -Bext проективных абелевых p -групп и доказывается, что эти группы образуют собственный подкласс в классе всех n -сбалансированных проективных p -групп. Данное утверждение улучшает соответствующий полученный результат, опубликованный Кифом и Данчевым в журнале *Houston J. Math.* (2012).

Ключевые слова: сбалансированная проективность, n -сбалансированная проективность, p^n -Bext проективность.

УДК 517.968.73
DOI 10.17223/19988621/46/4

С.К. Зарипов

ПОСТРОЕНИЕ АНАЛОГА ТЕОРЕМЫ ФРЕДГОЛЬМА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МОДЕЛЬНЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ В ЯДРЕ

Для одного модельного интегродифференциального уравнения первого порядка с сингулярной точкой в ядре, в зависимости от корней характеристического уравнения, найдены интегральные представления многообразия решений через произвольные постоянные. Найдены случаи, когда данное интегродифференциальное уравнение имеет единственное решение. Построены аналоги теоремы Фредгольма для этого интегродифференциального уравнения. Используемый метод можно применять для изучения модельных и немодельных интегродифференциальных уравнений высшего порядка.

Ключевые слова: модельное интегродифференциальное уравнение, граничные сингулярные точки, интегральные представления, интегральные уравнения, характеристическое уравнение.

Теория интегродифференциальных уравнений с регулярными коэффициентами и с сингулярными коэффициентами является одним из важных разделов теории интегральных и дифференциальных уравнений, которая находит широкое и многообразное применение в физике и технике. На истории возникновения и применения теории интегродифференциальных уравнений наши классики и современники подробно останавливались в своих работах, например в [1–6] и в приведённой там литературе.

За последние годы теория интегродифференциальных уравнений в основном развивается в двух направлениях. Первое направление связано с изучением интегродифференциальных уравнений, появляющихся в конкретных физических или механических задачах [1, 4, 6, 7]. Второе направление связано с построением общей теории для неисследованных классов интегродифференциальных уравнений. Ко второму направлению также относится изучение различных абстрактных интегродифференциальных уравнений в банаховых пространствах [8, 9]. Также в последние годы активно развивается решение прямых и обратных задач или задач с малыми параметрами для интегродифференциальных уравнений [10–12]. Одной из малоизученных задач в теории интегродифференциальных уравнений является изучение интегродифференциальных уравнений с сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами. Некоторые результаты в этом направлении получены для сингулярно возмущённых систем интегродифференциальных уравнений [13–16]. Но заметим, что сингулярность в зависимости от изучаемой задачи бывает разной природы, и поэтому подход отдельных авторов в изучении сингулярных задач бывает разнообразным.

В классических сингулярных интегродифференциальных уравнениях интегралы в основном понимаются в смысле главного значения по Коши, и поэтому для решения таких уравнений применяются методы теории аналитических функций.

В отличие от этого ниже мы будем рассматривать сингулярное интегродифференциальное уравнение, в котором интегралы понимаются в обычном смысле Римана. То есть будем рассматривать вопрос об изучении интегродифференциального уравнения вида

$$y'(x) + \frac{A}{x-a}y(x) + \int_a^x \left[\frac{B}{(t-a)^\alpha} y'(t) + \frac{C}{(t-a)^{\alpha+1}} y(t) \right] dt = f(x), \quad (1)$$

для случая $\alpha = 1$, где A, B, C – заданные постоянные числа, $f(x)$ – заданная функция, $y(x)$ – искомая функция.

Определение 1. Уравнение (1) будем называть модельным интегродифференциальным уравнением первого порядка с сингулярным коэффициентом, когда $\alpha = 1$; со сверхсингулярным коэффициентом, когда $\alpha > 1$ и со слабосингулярным коэффициентом, когда $\alpha < 1$.

Как видно, в (1) коэффициенты при $y'(t)$ и $y(t)$ под интегралом в случае $\alpha \geq 1$ являются не фредгольмовыми и уравнение (1) в таком виде до настоящего времени никем не изучено. Нефредгольмовость ядра уравнения (1), как будет показано ниже, влечёт за собой новые и интересные свойства решения этого уравнения.

Постановка задач и их решение

Пусть $\Gamma = \{x : a < x < b\}$ – множество точек на вещественной оси. На Γ рассмотрим модельное интегродифференциальное уравнение (1) в сингулярном случае ($\alpha = 1$), т.е. рассмотрим уравнение вида

$$y'(x) + \frac{A}{x-a}y(x) + \int_a^x \left[\frac{B}{t-a} y'(t) + \frac{C}{(t-a)^2} y(t) \right] dt = f(x), \quad (2)$$

где A, B, C – заданные постоянные числа, $f(x)$ – заданная функция, $y(x)$ – искомая функция.

Следуя работам [17 – 20], прежде всего, через $C_a^1[a, b]$ обозначим класс таких функций, которые имеют производные первого порядка и в точке $x = a$ обращаются в нуль с асимптотическим поведением:

$$y(x) = o\left[(x-a)^{\gamma_1}\right], \gamma_1 > 1,$$

а первые производные от этих функций в точке $x = a$ обращаются в нуль с асимптотическим поведением:

$$y(x) = o\left[(x-a)^{\gamma_2}\right], \gamma_2 > \varepsilon,$$

и решения однородного уравнения (2) будем искать в этом классе.

Таким образом, для нахождения общего решения однородного уравнения (2) частные решения этого уравнения будем искать в виде $y(x) = (x-a)^\lambda$, где λ – постоянное число. Подставляя эту функцию в левую часть уравнения (2), для определения λ получим следующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - (1 - A - B)\lambda + C - A = 0. \quad (3)$$

В зависимости от корней характеристического уравнения (3) решение уравнения (2) получим в следующем виде:

I. 1. Пусть $D = (1 - A - B)^2 - 4(C - A) > 0$, $\lambda_{1,2} = \frac{1 - A - B \pm \sqrt{D}}{2}$ и корни характеристического уравнения (3) удовлетворяют неравенству $1 < \lambda_1 < \lambda_2$, тогда частные решения однородного уравнения (2) имеют вид

$$y_1(x) = (x - a)^{\lambda_1}, \quad y_2(x) = (x - a)^{\lambda_2},$$

а его общее решение согласно общей теории даётся при помощи формулы

$$y(x) = (x - a)^{\lambda_1} c_1 + (x - a)^{\lambda_2} c_2,$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные числа. Далее, используя метод вариации произвольных постоянных, решение неоднородного уравнения (2) легко находим в таком виде:

$$\begin{aligned} y(x) &= (x - a)^{\lambda_1} c_1 + (x - a)^{\lambda_2} c_2 - \\ &- \frac{1}{\sqrt{D}} \int_a^x \left[(\lambda_1 - 1) \left(\frac{x - a}{t - a} \right)^{\lambda_1} - (\lambda_2 - 1) \left(\frac{x - a}{t - a} \right)^{\lambda_2} \right] f(t) dt \equiv \\ &\equiv E_1^+ [c_1, c_2, f(x)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Для сходимости интегралов в правой части (4) потребуем, чтобы функция $f(x)$ в точке $x = a$ обращалась в нуль с асимптотическим поведением:

$$f(x) = o \left[(x - a)^{\delta_1} \right], \quad \delta_1 > \lambda_2 - 1. \quad (5)$$

Заметим, что если выполняется неравенство $1 < \lambda_1 < \lambda_2$, тогда полученное решение (4) принадлежит классу $C_a^1[a, b]$.

Подставляя выражения (4) в уравнение (2), легко находим, что оно действительно удовлетворяет этому уравнению.

Теперь пусть $\lambda_1 \leq 1 < \lambda_2$. В этом случае частное решение $y_1(x) = (x - a)^{\lambda_1}$ не принадлежит классу $C_a^1[a, b]$, и поэтому оно не удовлетворяет однородному уравнению (2). Поэтому взяв в решение вида (4) $c_1 = 0$, общее решение уравнения (2) получим в виде

$$\begin{aligned} y(x) &= (x - a)^{\lambda_2} c_2 - \frac{1}{\sqrt{D}} \int_a^x \left[(\lambda_1 - 1) \left(\frac{x - a}{t - a} \right)^{\lambda_1} - (\lambda_2 - 1) \left(\frac{x - a}{t - a} \right)^{\lambda_2} \right] f(t) dt \equiv \\ &\equiv E_1^+ [0, c_2, f(x)]. \end{aligned} \quad (6)$$

В этом случае для сходимости интегралов в правой части (6) функция $f(x)$ также должна обращаться в нуль с асимптотическим поведением (5).

Если $\lambda_1 < \lambda_2 \leq 1$, тогда для того, чтобы решение уравнения (2) принадлежало классу $C_a^1[a, b]$, из всевозможных значений произвольных постоянных c_1 и c_2 возьмём только $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, т.е. в этом случае однородное уравнение (1) имеет только нулевое решение, а неоднородное уравнение для каждой функции

$f(x) \in C[a, b]$ и $f(a) = 0$ имеет единственное решение, которое даётся при помощи формулы

$$y(x) = -\frac{1}{\sqrt{D}} \int_a^x \left[(\lambda_1 - 1) \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{\lambda_1} - (\lambda_2 - 1) \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{\lambda_2} \right] f(t) dt \equiv E_1^+ [0, 0, f(x)]. \quad (7)$$

Таким образом, когда корни характеристического уравнения (3) являются вещественными и разными, решение уравнения (2) запишется при помощи формулы

$$y(x) = \begin{cases} (x-a)^{\lambda_1} c_1 + (x-a)^{\lambda_2} c_2 - \frac{1}{\sqrt{D}} \int_a^x \left[(\lambda_1 - 1) \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{\lambda_1} - (\lambda_2 - 1) \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{\lambda_2} \right] \times \\ \times f(t) dt \equiv E_1^+ [c_1, c_2, f(x)], \text{ когда } 1 < \lambda_1 < \lambda_2, \\ (x-a)^{\lambda_2} c_2 - \frac{1}{\sqrt{D}} \int_a^x \left[(\lambda_1 - 1) \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{\lambda_1} - (\lambda_2 - 1) \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{\lambda_2} \right] f(t) dt \equiv \\ \equiv E_1^+ [0, c_2, f(x)], \text{ когда } \lambda_1 < 1 < \lambda_2, \\ -\frac{1}{\sqrt{D}} \int_a^x \left[(\lambda_1 - 1) \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{\lambda_1} - (\lambda_2 - 1) \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{\lambda_2} \right] f(t) dt \equiv \\ \equiv E_1^+ [0, 0, f(x)], \text{ когда } \lambda_1 < \lambda_2 < 1. \end{cases} \quad (8)$$

Таким образом, доказано:

Теорема 1. Пусть в интегродифференциальном уравнении (2) коэффициенты A, B и C такие, что корни характеристического уравнения (3) являются вещественными и разными. Функция $f(x) \in C[a, b]$ и в случае, когда $1 < \lambda_1 < \lambda_2$ и $\lambda_1 < 1 < \lambda_2$ $f(a) = 0$ с асимптотическим поведением (5).

Тогда неоднородное уравнение (2) в классе функций $y(x) \in C_a^1[a, b]$, обращающихся в нуль в точке $x = a$, всегда разрешимо и его общее решение даётся при помощи формулы (8), где c_1, c_2 – произвольные постоянные числа.

На основе вышеприведённые результаты для интегродифференциального уравнения (2) можно построить аналог альтернативе Фредгольма в таком виде:

Аналог теоремы об альтернативе Фредгольма для интегродифференциального уравнения (1) в случае, когда корни характеристического уравнения (3) являются вещественными и разными: Если корни характеристического уравнения (3) удовлетворяют условию $\lambda_1 < \lambda_2 \leq 1$, то однородное уравнение (2) имеет только тривиальное решение, а неоднородное уравнение (2) для каждой функции $f(x) \in C[a, b]$ и $f(a) = 0$ имеет решение, и притом единственное, которое даётся по формуле (7). Если корни характеристического уравнения (3) удовлетворяют условию $\lambda_1 \leq 1 < \lambda_2$, то однородное уравнение (2) имеет нетривиальное решение и его общее решение содержит одну произвольную постоянную, а неоднородное уравнение (2) разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть удовлетворяет условию (5). В этом случае неоднородное уравнение (2) имеет бесконечное число решений и его общее решение тоже содержит одну произвольную постоянную и даётся при помощи формулы (6). Если корни характеристического уравнения (3) удовлетворяют условию $1 < \lambda_1 < \lambda_2$, то однород-

ное уравнение (2) имеет два линейно независимых решения и его общее решение содержит две произвольных постоянных, а неоднородное уравнение (2) разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть удовлетворяет условию (5). В этом случае также неоднородное уравнение (2) имеет бесконечное число решений и его общее решение зависит от двух произвольных постоянных и даётся по формуле (4).

II. Пусть $D = 0$ и $\lambda = \frac{1-A-B}{2} > 1$, тогда частные решения однородного уравнения (2) имеют вид

$$y_1(x) = (x-a)^\lambda, \quad y_2(x) = (x-a)^\lambda \ln(x-a),$$

а его общее решение имеет вид

$$y(x) = (x-a)^\lambda c_3 + (x-a)^\lambda \ln(x-a) c_4.$$

Решение неоднородного уравнения (2) легко находится в таком виде:

$$y(x) = (x-a)^\lambda c_3 + (x-a)^\lambda \ln(x-a) c_4 + \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^\lambda \left[(\lambda-1) \ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right) + 1 \right] f(t) dt \equiv E_2^+ [c_3, c_4, f(x)]. \quad (9)$$

где c_3, c_4 – произвольные постоянные числа.

Заметим, что в этом случае, если поведение функция $f(x)$ в точке $x = a$ определяется из асимптотической формулы

$$f(x) = o\left[(x-a)^{\delta_2}\right], \quad \delta_2 > \lambda - 1, \quad \text{когда } x \rightarrow a, \quad (10)$$

тогда интегралы в правой части (8) будут сходящимися.

Если $\lambda < 1$, тогда для того, чтобы решение вида (9) принадлежало классу $C_a^1[a, b]$, произвольные постоянные c_3 и c_4 должны равняться нулю, т.е. $c_3 = 0$, $c_4 = 0$. В этом случае решение уравнения (2) имеет вид

$$y(x) = \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^\lambda \left[(\lambda-1) \ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right) + 1 \right] f(t) dt \equiv E_2^+ [0, 0, f(x)]. \quad (11)$$

Заметим, что в этом случае неоднородное уравнение (2) для каждой функции $f(x) \in C[a, b]$ и $f(a) = 0$ имеет единственное решение.

Таким образом, в случае, когда корни характеристического уравнения (3) являются вещественными и равными, решение уравнения (2) даётся при помощи формулы

$$y(x) = \begin{cases} (x-a)^\lambda c_3 + (x-a)^\lambda \ln(x-a) c_4 + \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^\lambda \left[(\lambda-1) \ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right) + 1 \right] \times \\ \times f(t) dt \equiv E_2^+ [c_3, c_4, f(x)], \text{ когда } \lambda > 1, \\ \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^\lambda \left[(\lambda-1) \ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right) + 1 \right] f(t) dt \equiv E_2^+ [0, 0, f(x)], \text{ когда } \lambda < 1. \end{cases} \quad (12)$$

То есть имеет место следующая теорема:

Теорема 2. Пусть в интегродифференциальном уравнении (2) коэффициенты A, B и C такие, что корни характеристического уравнения (3) являются вещественными и равными. Функция $f(x) \in C[a, b]$ и в случае, когда $\lambda > 1$, $f(a) = 0$ с асимптотическим поведением (10).

Тогда неоднородное уравнение (2) в классе функций $y(x) \in C_a^1[a, b]$ всегда разрешимо и его общее решение даётся при помощи формулы (12), где c_3, c_4 – произвольные постоянные числа.

В этом случае аналог об альтернативе Фредгольма можно построить в таком виде:

Аналог теоремы об альтернативе Фредгольма для интегродифференциального уравнения (2) в случае, когда корни характеристического уравнения (3) являются вещественными и равными: Если корни характеристического уравнения (3) удовлетворяют условию $\lambda < 1$, то однородное уравнение (2) имеет только тривиальное решение, а неоднородное уравнение (2) для каждой функции $f(x) \in C[a, b]$ и $f(a) = 0$ имеет решение и притом единственное, которое даётся по формуле (11). Если корни характеристического уравнения (3) удовлетворяют условию $\lambda > 1$, то однородное уравнение (2) имеет два линейно независимых решения и его общее решение содержит две произвольных постоянных, а неоднородное уравнение (2) разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть удовлетворяет условию (10). В этом случае неоднородное уравнение (2) имеет бесконечное число решений и его общее решение зависит от двух произвольных постоянных и даётся по формуле (9).

$$\text{III. Если } D < 0, \lambda_{1,2} = \frac{1-A-B}{2} \pm \frac{\sqrt{4(C-A)-(1-A-B)^2}}{2} i = \alpha \pm \beta i$$

$$\text{и } \alpha = \frac{1-A-B}{2} > 1,$$

тогда общее решение однородного уравнения (2) даётся по формуле

$$y(x) = (x-a)^\alpha \cos[\beta \ln(x-a)]c_5 + (x-a)^\alpha \sin[\beta \ln(x-a)]c_6.$$

Используя метод, подобный методу вариации произвольных постоянных, решение неоднородного уравнения (2) легко находим в таком виде:

$$\begin{aligned} y(x) = & (x-a)^\alpha \cos[\beta \ln(x-a)]c_5 + (x-a)^\alpha \sin[\beta \ln(x-a)]c_6 + \\ & + \frac{1}{\beta} \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^\alpha \left[(\alpha-1) \sin \left[\beta \ln \left(\frac{x-a}{t-a} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \beta \cos \left[\beta \ln \left(\frac{x-a}{t-a} \right) \right] \right] f(t) dt \equiv E_3^- [c_5, c_6, f(x)]. \end{aligned} \quad (13)$$

Для сходимости интегралов в правой части равенства (12) требуем, чтобы функция $f(x)$ в точке $x \rightarrow a$ обращалась в нуль с асимптотическим поведением

$$f(x) = o \left[(x-a)^{\delta_3} \right], \quad \delta_3 > \alpha - 1, \text{ когда } x \rightarrow a. \quad (14)$$

Пусть в интегральном представлении (12) $\alpha < 1$, тогда если решение уравнения (2) из класса $C_a^1[a, b]$ при $\alpha < 1$ существует, то оно имеет вид

$$y(x) = \frac{1}{\beta} \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^\alpha \left[(\alpha-1) \sin \left[\beta \ln \left(\frac{x-a}{t-a} \right) \right] + \beta \cos \left[\beta \ln \left(\frac{x-a}{t-a} \right) \right] \right] f(t) dt \equiv \\ \equiv E_3^- [0, 0, f(x)], \quad (15)$$

т.е. в этом случае для того, чтобы решение вида (12) принадлежало классу $C_a^1[a, b]$, произвольные постоянные c_5, c_6 должны равняться нулю.

В этом случае от функции $f(x)$ никаких условий, кроме его непрерывности, т.е. $f(x) \in C[a, b]$ и $f(a) = 0$, не требуется.

Таким образом, в случае, когда корни характеристического уравнения (3) являются комплексно-сопряженными, решение уравнения (2) даётся при помощи формулы

$$y(x) = \begin{cases} (x-a)^\alpha \cos[\beta \ln(x-a)]c_5 + (x-a)^\alpha \sin[\beta \ln(x-a)]c_6 + \\ + \frac{1}{\beta} \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^\alpha \left[(\alpha-1) \sin \left[\beta \ln \left(\frac{x-a}{t-a} \right) \right] + \beta \cos \left[\beta \ln \left(\frac{x-a}{t-a} \right) \right] \right] f(t) dt \equiv \\ \equiv E_3^- [c_5, c_6, f(x)], \text{ когда } \alpha > 1, \\ \frac{1}{\beta} \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^\alpha \left[(\alpha-1) \sin \left[\beta \ln \left(\frac{x-a}{t-a} \right) \right] + \beta \cos \left[\beta \ln \left(\frac{x-a}{t-a} \right) \right] \right] f(t) dt \equiv \\ \equiv E_3^- [0, 0, f(x)], \text{ когда } \alpha < 1. \end{cases} \quad (16)$$

Таким образом, имеет место следующая теорема:

Теорема 3. Пусть в интегродифференциальном уравнении (2) коэффициенты A, B и C такие, что корни характеристического уравнения (3) являются комплексно-сопряженными. Функция $f(x) \in C[a, b]$ и в случае, когда $\alpha > 1$, $f(a) = 0$ с асимптотическим поведением (14).

Тогда неоднородное уравнение (2) в классе функций $y(x) \in C_a^1[a, b]$ всегда разрешимо и его общее решение даётся при помощи формулы (16), где c_5, c_6 – произвольные постоянные числа.

Теперь можно сформулировать следующий аналог об альтернативе Фредгольма для интегродифференциального уравнения (2):

Аналог теоремы об альтернативе Фредгольма для интегродифференциального уравнения (2) в случае, когда корни характеристического уравнения (3) являются комплексно-сопряжёнными: Если корни характеристического уравнения (3) являются комплексно-сопряжёнными и $\alpha < 1$, то однородное уравнение (2) имеет только тривиальное решение, а неоднородное уравнение (2) для каждой функции $f(x) \in C[a, b]$ и $f(a) = 0$ имеет решение и притом единственное и даётся по формуле (15). Если корни характеристического уравнения (3) такие, что выполняется условие $\alpha > 1$, то однородное уравнение (2) имеет два линейно независимых решения и его общее решение содержит две произвольных постоянных, а неоднородное уравнение (2) разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть удовлетворяет условию (14). В этом случае, неоднородное уравнение (2) имеет бесконечное число решений и его общее решение зависит от двух произвольных постоянных и даётся при помощи формулы (13).

ПРИМЕРЫ

Приведём примеры:

Пример 1. Найдём решение уравнения

$$y'(x) - \frac{2}{x-a} y(x) + \int_a^x \left[-\frac{6}{t-a} y'(t) + \frac{18}{(t-a)^2} y(t) \right] dt = (x-a)^5. \quad (17)$$

Решение. Составим характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 9\lambda + 20 = 0$.

Его корни будут $\lambda_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{9 \pm 1}{2}$, $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 5$. Видно что $1 < \lambda_1 < \lambda_2$. Отсюда общее решение однородного уравнения (17) имеет вид

$$y(x) = (x-a)^4 c_1 + (x-a)^5 c_2,$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные числа. Далее, так как правая часть уравнения (17) удовлетворяет условию (5), то решение неоднородного уравнения (17) даётся в виде

$$y(x) = (x-a)^4 c_1 + (x-a)^5 c_2 - \int_a^x \left[3 \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^4 - 4 \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^5 \right] (t-a)^5 dt,$$

или
$$y(x) = (x-a)^4 c_1 + (x-a)^5 c_2 + \frac{5}{2} (x-a)^6.$$

Легко можно проверить, что найденное решение удовлетворяет уравнению (17).

Пример 2. Найдём решение уравнения

$$y'(x) + \frac{1}{x-a} y(x) + \int_a^x \left[\frac{4}{t-a} y'(t) + \frac{5}{(t-a)^2} y(t) \right] dt = x-a. \quad (18)$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0.$$

Его корни будут $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -2$. Видно что $\lambda < 1$. Отсюда, согласно теореме 2, однородное уравнение (18) имеет только нулевое решение, а неоднородное уравнение имеет единственное решение, которое даётся при помощи формулы

$$y(x) = \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{-2} \left[-3 \ln \left(\frac{x-a}{t-a} \right) + 1 \right] (t-a) dt,$$

или после вычисления интеграла $y(x) = \frac{(x-a)^2}{16}$. Легко проверяется, что найденное решение удовлетворяет уравнению (18).

Пример 3. Найдём решение уравнения

$$y'(x) + \frac{1}{x-a} y(x) + \int_a^x \left[-\frac{4}{t-a} y'(t) + \frac{6}{(t-a)^2} y(t) \right] dt = (x-a)^3. \quad (19)$$

Решение. Составим характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$.

Его корни будут $\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = 2 \pm i$, где $\text{Re}(\lambda_{1,2}) = 2 > 1$. Отсюда, согласно теореме 3, общее решение однородного уравнения (19) имеет вид

$$y_{oo}(x) = (x-a)^2 \cos[\ln(x-a)]c_5 + (x-a)^2 \sin[\ln(x-a)]c_6,$$

где c_5, c_6 – произвольные постоянные числа. Правая часть уравнения (19) удовлетворяет условию (14), и поэтому частное решение неоднородного уравнения даётся по формуле

$$y_{ч.н}(x) = \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^2 \left[\sin \left[\ln \left(\frac{x-a}{t-a} \right) \right] + \cos \left[\ln \left(\frac{x-a}{t-a} \right) \right] \right] (t-a)^3 dt,$$

или после вычисления интеграла $y_{ч.н}(x) = \frac{3}{5}(x-a)^4$. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения (19) даётся по формуле

$$y(x) = (x-a)^2 \cos[\ln(x-a)]c_5 + (x-a)^2 \sin[\ln(x-a)]c_6 + \frac{3}{5}(x-a)^4.$$

В этом случае тоже легко проверяется, что найденное решение удовлетворяет уравнению (19).

Заключение

В заключение приведём некоторые отличительные свойства уравнения (2) от ранее рассмотренных уравнений Вольтерра:

1) Хотя коэффициенты при $y'(t)$ и $y(t)$ в уравнении (2) являются не фредгольмовыми, решение этого уравнения в классе функций, обращающихся в нуль в точке $x = a$, найдено в явном виде.

2) Выяснено что решение уравнения (2) содержит либо две произвольных постоянных, либо одну произвольную постоянную.

3) Выделяется случай, когда уравнение (2) имеет единственное решение.

4) Для уравнения (2) построен аналог об альтернативе Фредгольма.

5) Существование произвольных постоянных в общем решении уравнения (2) даёт возможность ставить и решать начальные или краевые задачи для этого уравнения. Но нужно заметить, что в отличие от обычных задач в нашем случае эти задачи ставятся с разными весами.

6) Методику решения модельного уравнения (2) можно применять для исследования немодельных интегродифференциальных уравнений с сингулярными и сверхсингулярными ядрами, а также для исследования уравнений более высокого порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вольтерра В.* Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 304 с.
2. *Некрасов А.И.* Об одном классе линейных интегродифференциальных уравнений. М.-Л.: ГТТИ, 1934. С. 1–17.
3. *Вейнберг М.М.* Интегродифференциальные уравнения // Итоги науки. Сер. Мат. анализ. Теор. вероятн. Регул. 1964. С. 5–37.
4. *Векуа И.Н.* Об интегродифференциальном уравнении Прандтля // Прикл. матем. и мех. 1945. Т. 9. № 2. С. 143–150.
5. *Магнарадзе Л.Г.* Об одной системе линейных сингулярных интегродифференциальных уравнений и о линейной граничной задаче Римана // Сообщ. АН Груз. ССР. 1943. Т. 5. № 1. С. 3–9.
6. *Магнарадзе Л.Г.* Об одном новом интегральном уравнении теории крыла самолёта // Сообщ. АН Груз. ССР. 1942. Т. 3. № 6. С. 503–508.

7. Бьянка К., Феррара М., Гуеррину Л. Асимптотический предел интегродифференциального уравнения, моделирующего сложные системы // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2014. Т. 78. № 6. С. 49–64.
8. Фалалеев М.В. Сингулярные интегродифференциальные уравнения специального вида в банаховых пространствах и их приложения // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. 2013. Т. 6. № 4. С. 128–137.
9. Фалалеев М.В. Вырожденные интегродифференциальные уравнения типа свертки в банаховых пространствах // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. 2016. Т. 17. С. 77–85.
10. Дурдиев Д.К. Глобальная разрешимость одной обратной задачи для интегродифференциального уравнения электродинамики // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44. № 7. С. 867–873.
11. Сафаров Ж.Ш. Оценки устойчивости решений некоторых обратных задач для интегродифференциальных уравнений // Вестник Удмуртского университета. Серия: Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. № 3. С. 75–82. DOI: 10.20537/vm140307.
12. Юлдашев Т.К. Обратная задача для одного нелинейного интегродифференциального уравнения третьего порядка // Вестник Самарского государственного университета. Естественная серия. 2013. № 9/1. С. 58–66.
13. Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф. Метод нормальных форм в сингулярно возмущенных системах интегродифференциальных уравнений Фредгольма с быстро изменяющимися ядрами // Матем. сб. 2013. Т. 204. № 7. С. 47–70. DOI: 10.4213/sm8139.
14. Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф. Задача с обратным временем для сингулярно возмущенного интегродифференциального уравнения с диагональным вырождением ядра высокого порядка // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2016. Т. 80. № 2. С. 3–15.
15. Талиев А.А. Затягивание потери устойчивости для сингулярно возмущенных уравнений с непрерывными правыми частями // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 4(30). С. 36–42.
16. Турсунов Д.А., Эркебаев У.З. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для кольца с особенностью на границе // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 1(39). С. 42–52.
17. Раджабов Н. Интегральные уравнения типов Вольтера с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверхсингулярными ядрами и их приложения. Душанбе: Деваштич, 2007. 221 с.
18. Раджабов Н., Раджабова Л.Н., Репин О.А. Об одном классе двумерных сопряженных интегральных уравнений вольтеровского типа // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 9. С. 1320–1330.
19. Зарипов С.К. Об одном классе модельного интегродифференциального уравнения первого порядка с одной сингулярной точкой в ядре // Вестник Таджикского национального университета. 2015. № 1/3(164). С. 27–32.
20. Зарипов С.К. Об одном классе модельных интегродифференциальных уравнений первого порядка со сверх сингулярной точкой в ядре // Вестник Таджикского национального университета. 2015. № 1/6(191). С. 6–12.

Статья поступила 08.12.2016 г.

Zaripov S.K. (2017) CONSTRUCTION OF AN ANALOG OF THE FREDHOLM THEOREM FOR A CLASS OF MODEL FIRST ORDER INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A SINGULAR POINT IN THE KERNEL. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 46. pp. 24–35

DOI 10.17223/19988621/46/4

In this work, integral representations of the manifold of solutions in terms of two arbitrary constants have been found for a model first order integro-differential equation with a singular point in the kernel. Although the kernel of this equation is not of the Fredholm type, the solution

of this equation in the class of functions vanishing at $x = a$ has been found in an explicit form. It has been shown that the solution of the equation contains either two arbitrary constants or one arbitrary constant. Moreover, the case where the integro-differential equation has a unique solution has been revealed.

For the integro-differential equation, analogs of the Fredholm theorem have been constructed.

The existence of arbitrary constants in the general solution gives us chance to investigate some initial or boundary value problems for this equation. However, it is necessary to note that, in contrast to usual problems, these problems in our case are posed with different weights.

Correctness of the obtained results is verified with the help of detailed solutions of examples.

The method can be used for solving higher order model and non-model integro-differential equations with singular and supersingular kernels.

Keywords: model integro-differential equation, boundary singular points, manifold of solutions, integral representation, integral equation, characteristic equation.

ZARIPOV Sarvar Kakgramonovich (Candidate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer of Department of the Mathematical Analysis and Function Theory, Tajik National University, Republic of Tajikistan). E-mail: sarvar8383@list.ru

REFERENCES

1. Volterra V. (1930) *Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations*. Blackie & Son.
2. Nekrasov A.I. (1934) *Ob odnom klasse lineynykh integro-differentsial'nykh uravneniy* [On a class of linear integro-differential equations]. Moscow; Leningrad: GTTI.
3. Veynberg M.M. (1964) Integro-differentsial'nye uravneniya [Integro-differential equations]. *Itogi nauki. Ser. Mat. anal. Teor. veroyatn. Regulir.* pp. 5–37.
4. Vekua I.N. (1945) Ob integro-differentsial'nom uravnenii Prandtl'ya [On the Prandtl integro-differential equation]. *Prikl. matem. i mekh.* 9(2). pp.143–150.
5. Magnaradze L.G. (1943) Ob odnoy sisteme lineynykh singulyarnykh integro-differentsial'nykh uravneniy i o lineynoy granichnoy zadache Rimana [On a system of linear singular integro-differential equations and on a Riman linear boundary value problem]. *Soobsh. AN Gruz SSR.* 5(1). pp. 3–9.
6. Magnaradze L.G. (1942) Ob odnom novom integral'nom uravnenii teorii kryla samoleta [On a new integral equation of the airplane wing theory]. *Soobsh. AN Gruz SSR.* 3(6). pp. 503–508.
7. Bianca C., Ferrara M., Guerrini L. (2014) The asymptotic limit of an integro-differential equation modelling complex systems. *Izvestiya: Mathematics.* 78(6). pp. 1105–1119.
8. Falaleev M.V. (2013) Singulyarnye integro-differentsial'nye uravneniya spetsial'nogo vida v banakhovykh prostranstvakh i ikh prilozheniya [Singular integro-differential equations of a special type in Banach spaces and their applications]. *Izv. Irkutskogo gos. un-ta. Ser. Matematika.* 6(4). pp. 128–137.
9. Falaleev M.V. (2016) Vyrozhdennye integro-differentsial'nye uravneniya tipa svertki v banakhovykh prostranstvakh [Degenerate integro-differential convolution type equations in Banach spaces]. *Izv. Irkutskogo gos. un-ta. Ser. Matematika.* 17. pp. 77–85.
10. Durdiev D.K. (2008) Global solvability of an inverse problem for an integro-differential equation of electrodynamics. *Differential Equations.* 44(7). pp. 893–899.
11. Safarov Zh.Sh. (2014) Otsenki ustoychivosti resheniy nekotorykh obratnykh zadach dlya integro-differentsial'nykh uravneniy [Estimates of stability of some inverse problems solutions for integro-differential equations]. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki.* 3. pp. 75–82. DOI: 10.20537/vm140307.
12. Yuldashev T.K. (2013) Obratnaya zadacha dlya odnogo nelineynogo integro-differentsial'nogo uravneniya tret'ego poryadka [Inverse problem for a nonlinear integro-differential equation of the third order]. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Estestvenno-Nauchnaya Seriya.* 9/1. pp. 58–66.

13. Bobodzhanov A.A., Safonov V.F. (2013) The method of normal forms for singularly perturbed systems of Fredholm integro-differential equations with rapidly varying kernels. *Matem. Sb.* 204(7). pp. 979–1002. DOI:10.1070/SM2013v204n07ABEH004327.
14. Bobodzhanov A.A., Safonov V.F. (2016) A problem with inverse time for a singularly perturbed integro-differential equation with diagonal degeneration of the kernel of high order. *Izv. RAN. Ser. Mat.* 80(2). pp. 285 – 298. DOI: 10.1070/IM8335.
15. Taliev A.A. (2014) Zatyagivanie poteri ustoychivosti dlya singulyarno vozmushchennykh uravneniy s nepreryvnymi pravymi chastyami [Stability loss protraction for singularly perturbed equations with continuous right-hand sides]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 4(30). pp. 36–42.
16. Tursunov D.A., Erkebaev U.Z. (2016) Asimptoticheskoe razlozhenie resheniya zadachi Dirikhle dlya kol'tsa s osobennost'yu na granitse [Asymptotic expansion of the solution of the Dirichlet problem for a ring with a singularity on the boundary]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 1(39). pp. 42–52.
17. Rajabov N. (2011) Volterra type integral equations with boundary and interior fixed singularity and super-singularity kernels and their applications. Germany: Lap Lambert.
18. Radjabov N., Radjabova L.N., Repin O.A. (2011) On a class of two-dimensional adjoint integral equations of Volterra type. *Differential Equations.* 47(9). pp. 1333–1343. DOI: 10.1134/S0012266111090102.
19. Zaripov S.K. (2015) Ob odnom klasse model'nogo integro-differentsial'nogo uravneniya pervogo poryadka s odnoy singulyarnoy tochkoy v yadre [On a class of the first order model integro-differential equation with a singular point in the kernel]. *Vestnik Tadzhikskogo natsionalnogo universiteta.* 1/3(164). pp. 27–32.
20. Zaripov S.K. (2015) Ob odnom klasse model'nykh integro-differentsial'nykh uravneniy pervogo poryadka so sverkh singulyarnoy tochkoy v yadre [On a class of the first order model integro-differential equation with a super-singular point in the kernel]. *Vestnik Tadzhikskogo natsionalnogo universiteta.* 1/6(191). pp. 6–12.

УДК 515.12
DOI 10.17223/19988621/46/5

Е.С. Сухачева, Т.Е. Хмылева

О МОДИФИКАЦИЯХ ПРЯМОЙ ЗОРГЕНФРЕЯ

Рассматривается топологическое пространство S_A , которое является модификацией прямой Зоргенфрея S и определяется следующим образом: если точка $x \in A \subset \mathbf{R}$, то базой окрестностей точки x является семейство полуинтервалов $\{[x, x + \varepsilon), \varepsilon > 0\}$; если $x \in \mathbf{R} \setminus A$, то базой окрестностей точки x является семейство полуинтервалов $\{(x - \varepsilon, x], \varepsilon > 0\}$. Получен критерий гомеоморфности пространств S_A и S_Q .

Ключевые слова: Прямая Зоргенфрея, гомеоморфизм, бэровское пространство, пространство второй категории.

В работе используются следующие обозначения: \mathbf{N} – множество натуральных чисел; \mathbf{R} – пространство вещественных чисел, наделенное стандартной евклидовой топологией; символом S обозначается прямая Зоргенфрея (или «стрелка»), представляющая собой множество вещественных чисел, топология в котором порождена базой $\{(a, b] : a, b \in \mathbf{R}, a < b\}$. Если множество $A \subset \mathbf{R}$, то символом S_A обозначим топологическое пространство, в котором база окрестностей точки x определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} & \{[x, x + \varepsilon), \varepsilon > 0\}, \text{ если } x \in A \subset \mathbf{R}; \\ & \{(x - \varepsilon, x], \varepsilon > 0\}, \text{ если } x \in \mathbf{R} \setminus A. \end{aligned}$$

В частности если $A = \emptyset$, то $S_A = S$. Для любого подмножества вещественных чисел $X \subset \mathbf{R}$ через \overline{X} обозначается замыкание множества X в пространстве \mathbf{R} .

Известно [1, 2], что пространства S и S_Q не гомеоморфны, а пространства S гомеоморфно пространству S_A , если множество $A \subset \mathbf{R}$ замкнуто или множество \overline{A} счетно. В данной работе рассматривается следующий вопрос: для каких подмножеств $A \subset \mathbf{R}$ пространства S_A и S_Q гомеоморфны. Подобные проблемы рассматривались в работе V.A. Chatyrko, Y. Nattori [3], где база окрестностей точки $x \in A \subset S_A$ заменялась на базу окрестностей в евклидовой топологии.

Теорема 1. Пусть $A \subset \mathbf{R}$ счетное множество. Пространство S_A гомеоморфно пространству S_Q тогда и только тогда, когда подмножество $A \subset S_A$ всюду плотно в S .

Доказательство. (\Leftarrow) Известно [4, 4.3Н], что существует гомеоморфизм $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ такой, что $\varphi(A) = \mathbf{Q}$ и условие $a_i < a_j$ равносильно $\varphi(a_i) < \varphi(a_j)$ для любых a_i и a_j из множества A , т.е. отображение $\varphi|_A$ является монотонно возрастающим. Поскольку подмножество A всюду плотно на прямой, то

$\varphi: \mathbf{R} \xrightarrow{na} \mathbf{R}$ является монотонно возрастающей функцией. Следовательно, отображение $\varphi: S_A \rightarrow S_{\mathbf{Q}}$ – гомеоморфизм.

(\Rightarrow) Покажем, что если подмножество A не всюду плотно на прямой S , то пространство S_A не гомеоморфно пространству $S_{\mathbf{Q}}$. Пусть $\bar{A} \neq S$. Предположим, что существует гомеоморфизм $\varphi: S_A \rightarrow S_{\mathbf{Q}}$. Рассмотрим интервал $(a, b) \subset S_A \setminus \bar{A}$ и положим $J = (a, b) \setminus \varphi^{-1}(\mathbf{Q})$. По лемме 4.4 [5] $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, где множества F_n замкнуты в J и такие, что $\varphi|_{F_n}$ – возрастающая функция для каждого $n \in \mathbf{N}$. Поскольку интервал (a, b) гомеоморфен S и, значит, является бэровским пространством, а множество J – всюду плотное и типа G_{δ} в интервале (a, b) , то J – бэровское пространство [6, S276]. Это означает, что для некоторого $n \in \mathbf{N}$ множество F_n содержит внутреннюю точку, т.е. существует интервал (c, d) , такой, что $J \cap (c, d) \subset F_n$. Так как множество $\varphi^{-1}(\mathbf{Q})$ всюду плотно в S_A , то существует точка $q_0 \in \mathbf{Q}$, такая, что $\varphi^{-1}(q_0) \in (c, d)$. Рассмотрим последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset J \cap (c, d)$, сходящуюся к точке $\varphi^{-1}(q_0)$ в пространстве S_A . Не нарушая общности, можно считать, что последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ является возрастающей. Так как $\varphi|_{J \cap (c, d)}$ – возрастающее отображение, то $\{\varphi(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ является возрастающей последовательностью. В силу непрерывности отображения φ эта последовательность сходится к точке q_0 возрастая, что невозможно, так как монотонно возрастающие последовательности в $S_{\mathbf{Q}}$ могут сходиться только к точкам из множества $S_{\mathbf{Q}} \setminus \mathbf{Q}$. \square

Пусть подмножество $A \subset S$ счетно и не всюду плотно в S , но существует интервал I , такой, что $A \cap I$ – всюду плотное подмножество в I . Тогда по теореме 1 пространство S_A не гомеоморфно пространству $S_{\mathbf{Q}}$. Но в этом случае пространство S_A не гомеоморфно и пространству S (доказательство аналогично доказательству негомеоморфности пространств S и $S_{\mathbf{Q}}$ [1]).

Теорема 2. Пусть A и его дополнение $S \setminus A$ – несчетные, всюду плотные подмножества в S , а подмножество $D \subset S$ – счетно. Тогда пространства S_A и S_D не гомеоморфны.

Доказательство. Предположим, что существует гомеоморфизм $\varphi: S_A \rightarrow S_D$. Поскольку подмножество $S_A \setminus \varphi^{-1}(D)$ всюду плотное и типа G_{δ} в S_A , то оно является бэровским пространством [6, S276]. Тогда одно из пространств $\tilde{A} = A \setminus \varphi^{-1}(D)$ или $\tilde{B} = (S \setminus A) \setminus \varphi^{-1}(D)$ является пространством второй категории. Для определенности, пусть \tilde{A} – пространство второй категории. Заметим, что $\varphi(\tilde{A}) \subset S \setminus D \subset S$. Тогда по лемме 4.4 [5] множество $\tilde{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, где F_n замк-

нуты в \tilde{A} и отображение $\varphi|_{F_n}$ является возрастающим для каждого $n \in \mathbf{N}$. Так как пространство \tilde{A} второй категории, то существует $n \in \mathbf{N}$, такое, что множество F_n содержит внутреннюю точку, т.е. существует интервал (a, b) , такой, что $(a, b) \cap \tilde{A} \subset F_n$. Рассмотрим последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset (a, b) \cap \tilde{A}$, сходящуюся к точке $x_0 \in (a, b) \cap \tilde{A}$ в пространстве S_A . Не нарушая общности, можно считать, что последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ является убывающей. Так как $\varphi|_{A \cap (a, b)}$ – возрастающее отображение, то $\{\varphi(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ является убывающей последовательностью. В силу непрерывности отображения φ эта последовательность сходится к точке $\varphi(x_0)$ справа, что невозможно, так как монотонно убывающие последовательности в S_D могут сходиться только к точкам из множества D . \square

Следствие 3. Пусть A и $S \setminus A$ – несчетные, всюду плотные подмножества в S . Тогда S_A не гомеоморфно $S_{\mathbf{Q}}$.

Следствие 4. Пространство S_A гомеоморфно пространству $S_{\mathbf{Q}}$ тогда и только тогда, когда подмножество $A \subset S_A$ счетно и всюду плотно в S .

Проблема 5. Получить необходимые и достаточные условия для подмножеств A и B из \mathbf{R} , при которых пространства S_A и S_B гомеоморфны.

Заметим, что гомеоморфизм множеств A и B не влечет гомеоморфизм пространств S_A и S_B . Например, пространства $S_{\mathbf{Q}}$ и $S_{\mathbf{Q} \cap (0,1)}$ не гомеоморфны, хотя множества \mathbf{Q} и $\mathbf{Q} \cap (0,1)$ являются гомеоморфными. С другой стороны, пространства $S_{(0,1)}$ и $S_{[0,1]}$ гомеоморфны [2].

В работе [5] дан критерий гомеоморфности подмножеств S всему пространству S . В частности доказано, что если $X \subset S$ замкнутое, плотное в себе подмножество, то X гомеоморфно S . Очевидно, что подобное утверждение для пространства $S_{\mathbf{Q}}$ неверно, поскольку существуют замкнутые и плотные в себе подмножества $X \subset S_{\mathbf{Q}}$, такие, что $X \subset S_{\mathbf{Q}} \setminus \mathbf{Q}$ и, значит, X гомеоморфно S [2]. Нетрудно видеть, что необходимым условием гомеоморфности подмножества X и $S_{\mathbf{Q}}$ является условие $\overline{X \cap \mathbf{Q}} = X$. Следующий пример показывает, что это условие не является достаточным.

Пример 6. Пусть C – ограниченное, совершенное, нигде не плотное подмножество на прямой \mathbf{R} , $B = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ – правые концы смежных интервалов множества C и $C \cap \mathbf{Q} = B$. Тогда подмножество $C \subset S_{\mathbf{Q}}$ не гомеоморфно $S_{\mathbf{Q}}$.

Действительно, предположим, что существует гомеоморфизм $\varphi: S_{\mathbf{Q}} \rightarrow C$. Рассмотрим множество $J = S_{\mathbf{Q}} \setminus (\mathbf{Q} \cup \varphi^{-1}(B)) \subset S$. Поскольку $\varphi(J) \subset C \setminus B \subset S$, то

по лемме 4.4. [5] $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, где множества F_n замкнуты в J и такие, что $\varphi|_{F_n}$ – возрастающая функция для каждого $n \in \mathbf{N}$. Так как $S_{\mathbf{Q}}$ – бэровское пространство,

а J – всюду плотное подмножество типа G_δ в $S_{\mathbf{Q}}$, то пространство J – бэровское [6]. Это означает, что для некоторого $n \in \mathbf{N}$ множество F_n содержит внутреннюю точку, т.е. существует интервал (a, b) , такой, что $J \cap (a, b) \subset F_n$. Рассмотрим точку $r_0 \in (a, b) \cap \mathbf{Q}$ и возрастающую последовательность $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset J \cap (a, b)$, сходящуюся к точке r_0 в пространстве \mathbf{R} . Это означает, что в пространстве $S_{\mathbf{Q}}$ последовательность $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ не имеет предельных точек. Так как $\varphi|_{F_n}$ – монотонно возрастающее отображение, то последовательность $\{\varphi(x_k)\}_{k=1}^\infty$ является возрастающей и ограниченной сверху числом $\varphi(r_0)$. Следовательно, последовательность $\{\varphi(x_k)\}_{k=1}^\infty$ сходится к некоторой точке $y_0 \leq \varphi(r_0)$ в евклидовой топологии прямой \mathbf{R} . Нетрудно видеть, что $y_0 \in C \setminus B$ и, значит, последовательность $\{\varphi(x_k)\}_{k=1}^\infty$ сходится к точке y_0 в топологии пространства $S_{\mathbf{Q}}$. Полученное противоречие доказывает, что не существует гомеоморфизма между C и $S_{\mathbf{Q}}$. \square

Проблема 7. Получить необходимые и достаточные условия при котором подмножество $X \subset S_{\mathbf{Q}}$ гомеоморфно $S_{\mathbf{Q}}$.

Статья поступила 10.02.2017 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хмылева Т.Е. О гомеоморфизме прямой Зоргенфрея и ее модификации $S_{\mathbf{Q}}$ // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 1(39). С. 53–56.
2. Сухачева Е.С., Хмылева Т.Е. О некоторых линейно упорядоченных топологических пространствах, гомеоморфных прямой Зоргенфрея // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 5(31). С. 63–68.
3. Chatyrko V.A., Hattori Y. A poset of topologies on the set of real numbers // Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae. 2013. V. 54. No. 2. P. 189–196.
4. Энгелькинг П. Общая топология. М.: Мир, 1986. С. 751.
5. Burke D.K., Moore J.T. Subspaces of the Sorgenfrey line // Topology and its Applications. 1998. V. 90. No. 1–3. P. 57–68.
6. Tkachuk V.V. A Cp-theory problems book. Topological and functions space. New York: Springer, 2011.

Sukhacheva E.S., Khmyleva T.E. (2017) ON MODIFICATION OF THE SORGENFREY LINE. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 46. pp. 36–40

DOI 10.17223/19988621/46/5

In this paper, we consider a topological space S_A that is a modification of the Sorgenfrey line S and is defined as follows: if a point $x \in A \subset \mathbf{R}$, then the base of neighborhoods of the point is $\{[x, x + \varepsilon), \forall \varepsilon > 0\}$; if a point $x \in \mathbf{R} \setminus A$, then the base of neighborhoods of the point is $\{(x - \varepsilon, x], \forall \varepsilon > 0\}$. The following criterion for a homeomorphism of the spaces S_A and $S_{\mathbf{Q}}$ has been obtained: the spaces S_A and $S_{\mathbf{Q}}$ are homeomorphic if and only if a subset $A \subset S_A$ is countable and dense in S .

Keywords: Sorgenfrey line, homeomorphism, Baire space, the space of the second category.

SUKHACHEVA Elena Sergevna (Tomsk State University, Russian Federation)
E-mail: sirius9113@mail.ru

KHMYLEVA Tatiana Evgenievna (Candidate of Physics and Mathematics,
Tomsk State University, Russian Federation)
E-mail: TEX2150@yandex.ru

REFERENCES

1. Khmyleva T.E. (2016) O gomeomorfizme pryamoy Zorgenfrey i ee modifikatsii S_Q [On the homeomorphism of the Sorgenfrey line and its modifications S_Q]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(39). pp. 53–56. DOI 10.17223/19988621/39/6.
2. Sukhacheva E.S., Khmyleva T.E. (2014) O nekotorykh lineynno uporyadochennykh topologicheskikh prostranstvakh, gomeomorfnykh pryamoy Zorgenfrey [On some linearly ordered topological spaces homeomorphic to the Sorgenfrey line]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(31). pp. 63–68.
3. Chatyrko V.A., Hattori Y. (2013) A poset of topologies on the set of real numbers. *Comment. Math. Univ. Carolin.* 54(2). pp. 189–196.
4. Engel'king R. (1977) *General Topology*. Warsaw: PWN.
5. Burke D.K., Moore J.T. (1998) Subspaces of the Sorgenfrey line. *Topology and its Applications*. 90(1). pp. 57–68.
6. Tkachuk V.V. (2011) *A Cp-Theory Problems Book. Topological and Functions Space*. New York: Springer Verlag.

УДК 517.956.6; 517.44
DOI 10.17223/19988621/46/6

Т.Г. Эргашев

**ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ
ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО РОДА
СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ**

Для вырождающегося гиперболического уравнения второго рода со спектральным параметром изучены задачи Коши, Коши – Гурса и Гурса в новом классе обобщенных решений и приведен пример, показывающий важность введения понятия такого класса. Вводятся в рассмотрение операторы с функциями Бесселя в ядрах. Установленные здесь тождества для этих операторов играли важную роль при получении явных интегральных представлений исследуемых задач.

Ключевые слова: *вырождающееся уравнение гиперболического типа второго рода, спектральный параметр, обобщенное решение, оператор с функциями Бесселя в ядрах.*

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$y^m U_{xx} - U_{yy} + \lambda^2 y^m U = 0, \tag{1}$$

где m – действительное число, причем $-1 < m < 0$, а λ – действительное или чисто мнимое постоянное число.

Пусть a, b, M, N – некоторые действительные числа, причем $M < N < +\infty$, $a, b \in [M, N]$; пусть D – область, ограниченная отрезком $AB = \{(x, y) : y = 0, a < x < b\}$ и характеристиками $AB : \xi = a$, $BC : \eta = b$ уравнения (1) при $y > 0$.
Здесь

$$\xi = x - \frac{2}{m+2} y^{(m+2)/2}, \quad \eta = x + \frac{2}{m+2} y^{(m+2)/2}. \tag{2}$$

Для уравнения (1) прямая параболического вырождения является особой характеристикой – огибающей обоих семейств характеристик. В зависимости от степени вырождения m предельные значения $\tau(x) \equiv U(x, +0)$, $\nu(x) \equiv U'_y(x, +0)$ могут иметь особенности. Чтобы обеспечить необходимую гладкость решения $U(x, y)$ вне линии характеристического вырождения, необходимо требовать повышенную гладкость функций $\tau(x)$ и $\nu(x)$. С целью ослабить это требование в [1] дано определение и изучены свойства так называемого класса R_{2k}^λ (здесь и далее k принимает значения a и b) обобщенных решений уравнения (1) в области D , который при $\lambda = 0$ и $k = 0$ совпадает с классом R_2 , введенным и изученным И.Л. Каролем [2]. Кроме того, на основе известной формулы классического решения задачи Коши [3] для уравнения (1) в [1] получен явный и удобный для даль-

нейших исследований вид обобщенного решения этой же задачи в классе R_{2k}^λ и исследованы обобщенные решения, для которых $\tau'(x), v(x) \in C(a, b)$ вместо требуемого $C^2[a, b]$.

В настоящей работе исследуются задачи Коши – Гурса и Гурса для уравнения (1) в классе обобщенных решений R_{2k}^λ и приводится пример, показывающий важность введения понятия такого класса. Прежде чем перейти к решению поставленных задач вводятся в рассмотрение некоторые операторы с функциями Бесселя в ядрах. Именно выявленные здесь новые свойства этих операторов играют важную роль при получении явных интегральных представлений исследуемых задач.

Задача Коши – Гурса. Требуется найти в области D решение $U(\xi, \eta)$ уравнения (1) из класса R_{2k}^λ , удовлетворяющее начальному условию

$$U'_y(x, +0) = v(x) \quad (3)$$

и одному из условий

$$U|_{AB} = \psi_a(x), \quad a \leq x \leq (a+b)/2; \quad (4)$$

$$U|_{BC} = \psi_b(x), \quad (a+b)/2 \leq x \leq b, \quad (5)$$

где $v(x), \psi_a(x), \psi_b(x)$ – заданные функции.

Задача Гурса. Требуется найти в области D решение $U(\xi, \eta)$ уравнения (1) из класса R_{2k}^λ , удовлетворяющее условиям (4), (5) и условию согласования

$$\psi_a[(a+b)/2] = \psi_b[(a+b)/2]. \quad (6)$$

В характеристических координатах(2) уравнение (1) переходит в уравнение

$$u_{\xi\eta} - \frac{\beta}{\eta - \xi}(u_\eta - u_\xi) + \frac{1}{4}\lambda^2 u = 0, \quad (7)$$

область D преобразуется в треугольник Δ , ограниченный прямыми $\xi = a$, $\eta = b$ и $\eta = \xi$, а условия (3) – (6) соответственно принимают вид

$$\left(\frac{m+2}{4}\right)^{2\beta} \lim_{\eta \rightarrow \xi} (\eta - \xi)^{2\beta} (u_\xi - u_\eta) = v(\xi), \quad a < \xi < b; \quad (8)$$

$$u|_{\xi=a} = \varphi_a(\eta), \quad a \leq \eta \leq b; \quad (9)$$

$$u|_{\eta=b} = \varphi_b(\xi), \quad a \leq \xi \leq b; \quad (10)$$

$$\varphi_a(b) = \varphi_b(a), \quad (11)$$

где

$$\beta = \frac{m}{2(m+2)}, \quad -1 < 2\beta < 0; \quad u(\xi, \eta) = U \left[\frac{\eta + \xi}{2}, - \left(\frac{\eta - \xi}{2(1-2\beta)} \right)^{1-2\beta} \right];$$

$$\varphi_a(\eta) = \psi_a \left(\frac{a + \eta}{2} \right), \quad \varphi_b(\xi) = \psi_b \left(\frac{\xi + b}{2} \right), \quad \varphi_k \in C[a, b] \cap C^{(1, \alpha_k)}(a, b), \quad \alpha_k > -2\beta.$$

2. Некоторые операторы с функциями Бесселя в ядрах и их свойства

Введем в рассмотрение операторы

$$A_{abx}^{n,\lambda}[f(x)] \equiv f(x) - \int_a^x f(t) \left(\frac{b-t}{b-x} \right)^n \frac{\partial}{\partial t} J_0 \left[\lambda \sqrt{(x-b)(x-t)} \right] dt; \quad (12)$$

$$B_{abx}^{n,\lambda}[f(x)] \equiv f(x) + \int_a^x f(t) \left(\frac{b-x}{b-t} \right)^{1-n} \frac{\partial}{\partial x} J_0 \left[\lambda \sqrt{(b-t)(x-t)} \right] dt, \quad (13)$$

где n – неотрицательное целое число, а $J_\alpha(z)$ – функция Бесселя первого рода порядка α : $J_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k+\alpha}}{k! \Gamma(k+\alpha+1)}$. Здесь следует особо отметить, что $a \leq b$.

При рассмотрении операторов (12) и (13) предположим, что $f(x) \in C(M, N) \cap L_1[M, N]$. При таких предположениях относительно функции $f(x)$ выражения $A_{abx}^{n,\lambda}[f(x)]$ и $B_{abx}^{n,\lambda}[f(x)]$ будут определены в (M, N) и принадлежат классу $C(M, N)$.

Отметим, что операторы (12) и (13) при $a = b$, $n = 0$ и $n = 1$ введены и исследованы в [4].

Следующая теорема выражает основное свойство этих операторов.

Теорема. Если $f(x) \in C[M, N]$, то для любых $a, b \in [M, N]$ и $x \in (M, N)$ справедливы следующие равенства:

$$B_{abx}^{n,\lambda} \{ A_{abx}^{n,\lambda}[f(x)] \} = f(x), \quad A_{abx}^{n,\lambda} \{ B_{abx}^{n,\lambda}[f(x)] \} = f(x),$$

т.е. в классе непрерывных на $[M, N]$ функций операторы (12) и (13) являются взаимно обратными.

Доказательство. Подействовав на оператор $A_{abx}^{n,\lambda}[f(x)]$ оператором $B_{abx}^{n,\lambda}$, получаем

$$B_{abx}^{n,\lambda} \{ A_{abx}^{n,\lambda}[f(x)] \} = f(x) - (b-x)^{1-n} \int_0^x f(t) L(x, t; \lambda) (b-t)^n dt,$$

где

$$L(x, t; \lambda) = \frac{1}{b-x} \frac{\partial}{\partial t} J_0 \left[\lambda \sqrt{(x-b)(x-t)} \right] - (b-t) \frac{\partial}{\partial x} J_0 \left[\lambda \sqrt{(b-t)(x-t)} \right] + \\ + \int_t^x \frac{1}{b-s} \frac{\partial}{\partial x} J_0 \left[\lambda \sqrt{(b-s)(x-s)} \right] \frac{\partial}{\partial t} J_0 \left[\lambda \sqrt{(s-b)(s-t)} \right] ds.$$

После несложных преобразований выражению $L(x, t; \lambda)$ можно придать вид

$$L(x, t; \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{2k+2} \frac{(x-t)^k (x-b)^k}{k!} F_k(z),$$

где

$$F_k(z) = \sum_{i=0}^{k+1} \frac{(-1)^i}{i!(k-i+1)!} F(-k, k-i+1; k+1; z), \\ k = 0, 1, 2, \dots, \quad z = (x-t)/(x-b).$$

Здесь $F(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} z^n$ – гипергеометрическая функция Гаусса [5], а $(a)_n$ – символ Похгаммера [5]:

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_n = a(a+1)(a+2) \cdot \dots \cdot (a+n-1), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Несколько преобразуем $F_k(z)$ при любых k . Меняя порядок суммирования, получаем

$$F_k(z) = \sum_{m=0}^k \frac{(-k)_n}{n!} F(-k-1, -k; -k-m; 1) z^m.$$

Пользуясь теперь известной формулой [5, с. 489]

$$F(-n, b; c; 1) = \frac{(c-b)_n}{(c)_n}, \quad c-b > -n,$$

имеем

$$F_k(z) = \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m (-k)_m (-m)_{k+1}}{m! (k+1)_m} z^m.$$

С учетом формулы $(-m)_{k+1} = 0$, $m \leq k$, заключаем, что $F_k(z) \equiv 0$.

Отсюда следует, что оператор $B_{abx}^{n, \lambda}$ – обратный оператору $A_{abx}^{n, \lambda}$, т.е. справедливо первое из равенств теоремы.

Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

Имеет место

Лемма 1. При $\beta < 1$ и $x \in [a, b]$ справедливы равенства

$$\int_a^x (x-t)^{-\beta} \bar{J}_{-\beta} \left[\lambda \sqrt{(x-t)(b-t)} \right] f(t) dt = \Gamma(1-\beta) D_{ax}^{\beta-1} \left\{ B_{abx}^{1, \lambda} [f(x)] \right\}, \quad (14)$$

$$\int_x^b (t-x)^{-\beta} \bar{J}_{-\beta} \left[\lambda \sqrt{(t-x)(t-a)} \right] f(t) dt = \Gamma(1-\beta) D_{xb}^{\beta-1} \left\{ B_{bax}^{1, \lambda} [f(x)] \right\}, \quad (15)$$

где D_{ax}^l и D_{xb}^l – известные операторы дробного интегрирования при $l < 0$ и дробного дифференцирования при $l > 0$; $\bar{J}_{\alpha}(z) = \Gamma(\alpha+1)(z/2)^{-\alpha} J_{\alpha}(z)$ – функция Бесселя – Клиффорда.

Доказательство равенств (14)-(15) проводится разложением функций Бесселя в степенные ряды и сравнением коэффициентов.

3. Обобщенное решение задачи Коши

Решение задачи Коши для уравнения (7), удовлетворяющее начальным условиям (8) и

$$u(\xi, \xi) = \tau(\xi), \quad a \leq x \leq b, \quad (16)$$

известно [3]:

$$u(\xi, \eta) = \kappa_1 (\eta - \xi)^{-2\beta-1} \int_{\xi}^{\eta} (r^{\beta} \bar{I}_{-\beta}(\lambda \sqrt{r}) - \frac{2\lambda^2}{(1+\beta)(1+2\beta)} r^{1+\beta} \bar{I}_{1+\beta}(\lambda \sqrt{r})) \tau(t) dt - \frac{\kappa_1}{2(1+2\beta)} (\eta - \xi)^{-2\beta-1} \int_{\xi}^{\eta} r^{\beta} \bar{I}_{\beta}(\lambda \sqrt{r}) (\eta + \xi - 2t) \tau'(t) dt - \kappa_2 \int_{\xi}^{\eta} r^{-\beta} \bar{I}_{-\beta}(\lambda \sqrt{r}) v(t) dt, \quad (17)$$

где

$$r = |(\eta - t)(t - \xi)|, \quad \kappa_1 = \frac{\Gamma(2 + 2\beta)}{\Gamma^2(1 + \beta)}, \quad \kappa_2 = [2(1 - 2\beta)]^{2\beta - 1} \frac{\Gamma(2 - 2\beta)}{\Gamma^2(1 - \beta)}, \quad \bar{I}_\alpha(z) = \bar{J}_\alpha(iz).$$

Если $\tau(x) \in C^3[a, b]$ и $v(x) \in C^2[a, b]$, то функция $u(\xi, \eta)$, определенная формулой (17), является классическим, дважды непрерывно дифференцируемым решением задачи Коши для уравнения (7) с начальными данными (8) и (16) в области Δ .

Определение 1. Если функции $\tau'(x)$ и $v(x)$ непрерывны при $a < x < b$, то выражение вида (17) будем называть *обобщенным решением* уравнения (7) в области Δ .

Для того чтобы обобщенное решение обладало той или иной гладкостью, необходимо, чтобы функции $\tau(x)$ и $v(x)$ имели определенную гладкость.

Рассмотрим класс R_{2k}^λ обобщенных решений уравнения (7). Здесь и далее k принимает значения a и b .

Определение 2. *Обобщенным решением класса R_{2k}^λ* уравнения (7) будем называть функцию $u(\xi, \eta)$ вида (17), где $\tau(x)$ представимо в виде

$$\tau(x) = \tau(k) + \operatorname{sgn}(x - k) \int_k^x |x - t|^{-2\beta} \bar{J}_{-\beta}[\lambda|x - t|] T(t) dt, \quad (18)$$

а $v(x)$ и $T(x)$ – непрерывные и интегрируемые в (a, b) функции.

Замечание 1. Из (18) нетрудно заключить, что $\tau(x) \in C[a, b]$ и существует $\tau'(x) \in C(a, b)$. Следовательно, обобщенное решение класса R_{2k}^λ является обобщенным решением в смысле определения 1.

Замечание 2. Не ограничивая общности, будем считать, что $\tau(k) = 0$. При невыполнении этого условия, прибавив к функции $u(\xi, \eta)$ частное решение уравнения (7) вида

$$w(\xi, \eta) = A \operatorname{ch}(\lambda(\eta + \xi)/2) + B \operatorname{sh}(\lambda(\eta + \xi)/2),$$

можно распорядиться коэффициентами A и B так, что новая функция в точке $(k, 0)$ примет нулевое значение.

Для определенности, обобщенное решение, принадлежащее к R_{2k}^λ обозначим через $u_{2k}(\xi, \eta)$.

Согласно [1], интегральные представления обобщенных решений задачи Коши из классов R_{2a}^λ и R_{2b}^λ соответственно записываются следующим образом:

$$u_{2a}(\xi, \eta) = \int_a^\xi r^{-\beta} \bar{J}_{-\beta}(\lambda\sqrt{r}) T(t) dt + \int_\xi^\eta r^{-\beta} \bar{I}_{-\beta}(\lambda\sqrt{r}) N(t) dt; \quad (19)$$

$$u_{2b}(\xi, \eta) = \int_\eta^b r^{-\beta} \bar{J}_{-\beta}(\lambda\sqrt{r}) T(t) dt + \int_\xi^\eta r^{-\beta} \bar{I}_{-\beta}(\lambda\sqrt{r}) N(t) dt, \quad (20)$$

где

$$N(t) = [2 \cos \beta \pi]^{-1} T(t) - \kappa_2 v(t).$$

Лемма 2. Обобщенное решение $u_{2k}(\xi, \eta) \in R_{2k}^\lambda$ обладает следующими свойствами:

$$1) u_{2k}(\xi, \eta) \in C(\bar{\Delta}) \cap C^1(\Delta), \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \in C(\Delta);$$

2) $u_{2k}(\xi, \eta)$ удовлетворяет уравнению (7) и условиям (8), (16).

Для $\lambda = 0$ лемма 2 доказана в [6]. При наличии λ доказательство леммы существенно не отличается.

4. Обобщенное решение задачи Коши – Гурса

При решении задачи Коши – Гурса для уравнения (7) будем пользоваться соответствующим интегральным представлением задачи Коши.

Пусть $k = a$. В этом случае, полагая в формуле (19) $\xi = a$ и учитывая условие (9), получаем интегральное уравнение для определения $N(x)$:

$$\int_a^x (x-t)^{-\beta} (t-a)^{-\beta} \bar{I}_{-\beta} \left[\lambda \sqrt{(x-t)(t-a)} \right] N(t) dt = \varphi_a(x).$$

Последнее уравнение в результате применения равенства (14) при $a = b$ можно привести к виду, удобному для дальнейшего исследования:

$$D_{ax}^{\beta-1} \left\{ B_{aax}^{1,\lambda} [(x-a)^{-\beta} N(x)] \right\} = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \varphi_a(x). \quad (21)$$

Применяя теперь к обеим частям уравнения (21) последовательно операторы $D_{ax}^{1-\beta}$ и $A_{aax}^{1,\lambda}$, получаем

$$T(x) = \kappa_3 v(x) + 2 \cos \beta \pi \cdot \Phi_a(x), \quad (22)$$

где $\kappa_3 = 2\kappa_2 \cos \beta \pi$, $\Phi_a(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} (x-a)^\beta A_{aax}^{1,\lambda} \left\{ D_{ax}^{1-\beta} [\varphi_a(x)] \right\}$.

Подставляя (22) в (19), находим представление решения задачи Коши – Гурса (7) – (9) из класса R_{2a}^λ в явном виде

$$u_{2a}(\xi, \eta) = \int_a^\xi (\xi-t)^{-\beta} (\eta-t)^{-\beta} \bar{J}_{-\beta} \left[\lambda \sqrt{(\eta-t)(\xi-t)} \right] [k_3 v(t) + 2 \cos \beta \pi \cdot \Phi_a(t)] dt + \\ + \int_\xi^\eta (\eta-t)^{-\beta} (t-\xi)^{-\beta} \bar{I}_{-\beta} \left[\lambda \sqrt{(\eta-t)(t-\xi)} \right] \Phi_a(t) dt. \quad (23)$$

Доказательство, приведенное нами, переносится и на случай $k = b$.

Таким образом, представление решения задачи Коши – Гурса (7), (8), (10) из класса R_{2b}^λ выписывается в явном виде:

$$u_{2b}(\xi, \eta) = \int_\eta^b (t-\xi)^{-\beta} (t-\eta)^{-\beta} \bar{J}_{-\beta} \left[\lambda \sqrt{(t-\eta)(t-\xi)} \right] [k_3 v(t) + 2 \cos \beta \pi \cdot \Phi_b(t)] dt + \\ + \int_\xi^\eta (\eta-t)^{-\beta} (t-\xi)^{-\beta} \bar{I}_{-\beta} \left[\lambda \sqrt{(\eta-t)(t-\xi)} \right] \Phi_b(t) dt, \quad (24)$$

где
$$\Phi_b(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} (b-x)^\beta A_{bbx}^{1,\lambda} \{ D_{bx}^{1-\beta} [\Phi_b(x)] \} .$$

Здесь также можно доказать лемму, аналогичную лемме 2.

Замечание 3. Полученные явные интегральные представления (23) и (24) обобщенного решения задачи Коши – Гурса для уравнения (1) играют важную роль при исследовании задач для уравнений смешанного типа, так как из них при $\eta = \xi$ легко вывести основные функциональные соотношения между $\tau(x)$ и $v(x)$ на линии вырождения, принесенные из гиперболической части смешанной области.

Замечание 4. Класс обобщенных решений уравнения (7) при изучении задачи Коши – Гурса (8), (9) является существенным: если решение уравнения (7), удовлетворяющее условиям (8), (9), не принадлежит к R_{2a}^λ , то нарушается единственность решения задачи.

Пример. Функция [7]

$$u(\xi, \eta) = [(\xi - a)(\eta - a)]^{-\beta} \bar{J}_{-\beta} \left(\lambda \sqrt{(\xi - a)(\eta - a)} \right)$$

является решением уравнения (7), удовлетворяющим однородным условиям (8) и (9). Однако она не принадлежит к классу функций R_{2a}^λ . В справедливости последнего утверждения можно убедиться, например, с помощью метода от противного.

5. Обобщенное решение задачи Гурса

Рассмотрим в области Δ задачу Гурса для уравнения (7) с условиями (9) – (11). При изучении этой задачи будем пользоваться представлением решения задачи Коши – Гурса для уравнения (7).

Пусть $k = a$. В этом случае, полагая в формуле (23) $\eta = b$ и учитывая условие (10), получаем интегральное уравнение

$$\int_a^x (x-t)^{-\beta} (b-t)^{-\beta} \bar{J}_{-\beta} \left[\lambda \sqrt{(b-t)(x-t)} \right] [k_3 v(t) + 2 \cos \beta \pi \cdot \Phi_a(t)] dt + \int_x^b (b-t)^{-\beta} (t-x)^{-\beta} \bar{I}_{-\beta} \left[\lambda \sqrt{(b-t)(t-x)} \right] \Phi_a(t) dt = \varphi_b(x) . \tag{25}$$

Разрешая интегральное уравнение (25), имеем

$$k_3 v(x) + 2 \cos \beta \pi \cdot \Phi_a(x) = \frac{(b-x)^\beta}{\Gamma(1-\beta)} A_{abx}^{1,\lambda} \left[D_{ax}^{1-\beta} \varphi_b(x) \right] - (b-x)^\beta A_{abx}^{1,\lambda} \left[D_{ax}^{1-\beta} D_{xb}^{\beta-1} \left\{ B_{bbx}^{1,\lambda} [(b-x)^{-\beta} \Phi_a(x)] \right\} \right] . \tag{26}$$

Подставляя (26) в формулу (23), получаем интегральное представление обобщенного решения $u_{2a}(\xi, \eta) \in R_{2a}^\lambda$ задачи Гурса для уравнения (7) с условиями (9) – (11) в виде

$$u_{2a}(\xi, \eta) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_a^\xi (\xi-t)^{-\beta} (\eta-t)^{-\beta} \bar{J}_{-\beta} \left[\lambda \sqrt{(\eta-t)(\xi-t)} \right] (b-t)^\beta A_{abt}^{1,\lambda} \left\{ D_{at}^{1-\beta} [\varphi_b(t)] \right\} dt -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_a^\xi (\xi-t)^{-\beta} (\eta-t)^{-\beta} \bar{J}_{-\beta} \left[\lambda \sqrt{(\eta-t)(\xi-t)} \right] (b-t)^\beta A_{abt}^{1,\lambda} \left\{ D_{at}^{1-\beta} \left[D_{tb}^{\beta-1} \left\{ B_{bbt}^{1,\lambda} [(b-t)^{-\beta} \Phi_a(t)] \right\} \right] \right\} dt + \\
& + \int_\xi^\eta (\eta-t)^{-\beta} (t-\xi)^{-\beta} \bar{I}_{-\beta} \left[\lambda \sqrt{(\eta-t)(t-\xi)} \right] \Phi_a(t) dt. \quad (27)
\end{aligned}$$

Аналогично находится обобщенное решение этой же задачи, принадлежащее к R_{2b}^λ :

$$\begin{aligned}
u_{2b}(\xi, \eta) = & \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_\eta^b (t-\xi)^{-\beta} (t-\eta)^{-\beta} \bar{J}_{-\beta} \left[\lambda \sqrt{(t-\eta)(t-\xi)} \right] (t-a)^\beta A_{bat}^{1,\lambda} \left\{ D_{tb}^{1-\beta} [\varphi_a(t)] \right\} dt - \\
& - \int_\eta^b (t-\xi)^{-\beta} (t-\eta)^{-\beta} \bar{J}_{-\beta} \left[\lambda \sqrt{(t-\eta)(t-\xi)} \right] (t-a)^\beta A_{bat}^{1,\lambda} \left\{ D_{tb}^{\beta-1} \left[D_{aa}^{1-\beta} \left\{ B_{aat}^{1,\lambda} [(t-a)^{-\beta} \Phi_b(t)] \right\} \right] \right\} dt + \\
& + \int_\xi^\eta (\eta-t)^{-\beta} (t-\xi)^{-\beta} \bar{I}_{-\beta} \left[\lambda \sqrt{(\eta-t)(t-\xi)} \right] \Phi_b(t) dt. \quad (28)
\end{aligned}$$

Замечание 5. Из формул (27) и (28) нетрудно заметить, что при исследовании задачи Гурса для уравнений гиперболического типа второго рода, в отличие от уравнений первого рода, нарушается равноправие характеристик. Это обстоятельство связано с необходимостью введения представления (18).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Салахитдинов М.С., Эргашев Т.Г.* Интегральное представление обобщенного решения задачи Коши в классе R_{2k}^λ для одного уравнения гиперболического типа второго рода // *Узбекский математический журнал.* 1995. № 1. С. 67–75.
2. *Кароль И.Л.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанного эллипτικο-гиперболического типа // *Доклады АН СССР.* 1953. Т. 88. № 2. С. 197–200.
3. *Евдокимов Ф.Ф.* Задача Коши для уравнения $u_{xx} - (-y)^m u_{yy} - \lambda^2 u = 0$ // *Дифференциальные уравнения. Труды пединститутов РСФСР.* 1978. Вып. 12. С. 45–50.
4. *Салахитдинов М.С., Уринов А.К.* Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. Ташкент: Фан, 1997. 168 с.
5. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986. 800 с.
6. *Смирнов М.М.* Уравнения смешанного типа. М.: Высшая школа, 1985. 304 с.
7. *Хе Кан Чер.* О некоторых решениях однородной задачи Дарбу для одного вырождающегося гиперболического уравнения // *Дифференциальные уравнения.* 1988. Т. 24. № 9. С. 1641–1643.

Статья поступила 26.01.2017 г.

Ehrgashev T.G. (2017) GENERALIZED SOLUTIONS OF THE DEGENERATE HYPERBOLIC EQUATION OF THE SECOND KIND WITH A SPECTRAL PARAMETER. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 46. pp. 41–49

DOI 10.17223/19988621/46/6

In this paper, the Cauchy, Cauchy–Goursat, and Goursat problems for a degenerate second kind hyperbolic equation with a spectral parameter are studied. For these equations, depending on the degree of degeneracy, limit values of the sought solutions and its derivative on degeneration lines can have singularities. To provide the required smoothness of the solution outside the

characteristic line of degeneration, it is necessary to require enhanced data smoothness. In order to ease this requirement, a definition of a class of generalized solutions is introduced and properties of this class are studied. In addition, on the basis of the well-known formula of the classical solution of the Cauchy problem for the above equation, a generalized solution of the Cauchy problem in the introduced class is obtained in an explicit form which is easy to use for further research. Properties of these solutions are studied. Some operators with Bessel functions in the nucleus are introduced and their basic properties are studied. The proved important identities of these operators and the above representation of the generalized solution of the Cauchy problem allow one to find an explicit representation of the generalized solutions of the Cauchy–Goursat and Goursat problems in the characteristic triangle. In addition, an example showing the importance of introducing such class is presented: if the solution does not belong to the newly introduced class, then the uniqueness of the solution of the Cauchy–Goursat problem can be broken. The resulting explicit integral representation of the generalized solution of the Cauchy–Goursat problem plays an important role in the study of problems for equations of the mixed type: it makes it easy to derive the basic functional relationship between the traces of the sought solution and of its derivative on the line of degeneration from the hyperbolic part of the mixed domain.

Keywords: degenerate hyperbolic equation of the second kind, the spectral parameter, generalized solution, the operator with the Bessel functions in the nucleus.

EHRGASHEV Tuhtasin Gulamzhanovich (Tashkent Institute of Irrigation and Melioration (TIIM), Tashkent, Uzbekistan)
E-mail: ertuhtasin@mail.ru

REFERENCES

1. Salakhitdinov M.S., Ehrgashev T.G. (1995) Integral'noe predstavlenie obobshchennogo resheniya zadachi Koshi v klasse R_{2k}^λ dlya odnogo uravneniya giperbolicheskogo tipa vtorogo roda [Integral representation of a generalized solution of the Cauchy problem in the class R_{2k}^λ for a hyperbolic equation of the second kind]. *Uzbekskij matematicheskij zhurnal – Uzbek Mathematical Journal*. 1. pp. 67–75.
2. Karol I.L. (1953) Ob odnoj kraevoy zadache dlya uravneniya smeshannogo ehlliptiko-giperbolicheskogo tipa [A boundary value problem for an equation of mixed elliptic-hyperbolic type]. *Doklady AN SSSR – Reports of the Academy of Sciences of the USSR*. 88(2). pp.197–200.
3. Evdokimov F.F. (1978) Zadacha Koshi dlya uravneniya $u_{xx} - (-y)^m u_{yy} - \lambda^2 u = 0$ [The Cauchy problem for the equation $u_{xx} - (-y)^m u_{yy} - \lambda^2 u = 0$]. *Differentsial'nye uravneniya. Trudy pedinstitutov RSFSR – Differential Equations. Proceedings of pedagogical institutes of the Russian Federation*. 12. pp. 45–50.
4. Salakhitdinov M.S., Urinov A.K. (1997) *Kraevye zadachi dlya uravnenij smeshannogo tipa so spektral'nyim parametrom* [Boundary value problems for equations of the mixed type with a spectral parameter]. Tashkent: Fan.
5. Prudnikov A.P., Brychkov Y.A., Marichev O.I. (1986) *Integraly i ryady. Dopolnitel'nye glavy* [Integrals and series. Additional chapters]. Moscow: Nauka.
6. Smirnov M.M. (1985) *Uravneniya smeshannogo tipa* [Equations of the mixed type]. Moscow: Vysshaya shkola.
7. Ho K'ang Cher. (1988) O nekotoryh resheniyah odnorodnoj zadachi Darbu dlya odnogo vyrozhdayushchegosya giperbolicheskogo uravneniya [Some solutions of the homogeneous Darboux problem for a degenerate hyperbolic equation]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*. 24(9). pp.1641–1643.

МЕХАНИКА

УДК 537.85
DOI 10.17223/19988621/46/7

С.И. Володченков, С.В. Сияев

ИМПУЛЬСНЫЙ НАГРЕВ СРЕДЫ АНСАМБЛЯМИ ПОЛЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПРОВОДНИКОВ, ИНДУКЦИОННО НАГРЕВАЕМЫХ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ СОЛЕНоиДА

Представлены результаты математического моделирования процесса нагрева теплопроводной среды ансамблями тонкостенных полых цилиндрических проводников, которые, в свою очередь, нагреваются вихревыми токами в переменном магнитном поле соленоида. При постановке задачи использованы точные аналитические решения задач сопряженного теплообмена проводников со средой и генерации токов в проводниках при электрическом разряде конденсаторной батареи через соленоид. Анализируется влияние различных параметров проводников, их количества и расположения в соленоиде на эффективность и время нагрева примыкающих к ним слоев среды применительно к задаче многоочагового зажигания метательных зарядов.

Ключевые слова: *переменное магнитное поле, соленоид, тонкостенные цилиндрические проводники, индукционный нагрев, теплопроводная среда, сопряженный теплообмен, аналитические решения, параметрический анализ.*

В [1] описывается плазмозамещающая технология зажигания пороховых метательных зарядов, основанная на замене плазмы высокотемпературными двухфазными продуктами сгорания дополнительного заряда из высокоэнергетического топлива, например, [2]. Эффективное и быстрое зажигание таких топлив осуществляется потоками мелкодисперсных раскаленных металлических частиц [3], которые генерировались электрическим разрядом через расположенные в топливе проводники, гальванически соединенные с источником электрической энергии [4]. В отличие от [4] в данной работе рассматривается бесконтактная индукционная схема генерации, в которой нагрев и последующая капельная деструкция короткозамкнутых фольговых проводников происходят в переменном магнитном поле соленоида. Возможности такого дистанционного способа быстрого нагрева и капельной деструкции тонкостенных цилиндрических проводников подтверждены экспериментально на модельной индукционной установке [5]. Эта схема снимает проблему надежных электрических контактов с токоподводящими электродами и связанные с ней ограничения на размеры, количество и положение проводников, что, в свою очередь, позволяет осуществлять многоочаговый нагрев и зажигание топлива в необходимых частях заряда.

Схема устройства. Постановка задачи

Индукционный нагрев проводников осуществляется переменным магнитным полем, которое генерируется при электрическом разряде конденсаторной батареи через соленоид (см. рис. 1).

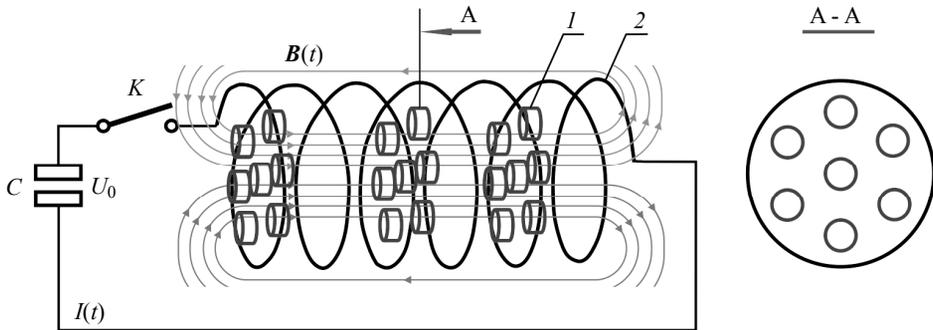


Рис. 1. Общая схема устройства индукционного нагрева ансамблей короткозамкнутых проводников: 1 – ансамбли полых цилиндрических проводников, 2 – соленоид, \mathbf{B} – вектор магнитной индукции магнитного поля соленоида, K – ключ-коммутатор, I – ток в цепи соленоида, U_0 – начальное электрическое напряжение на конденсаторной батарее емкостью C

Fig. 1. General scheme of a device for induction heating of assemblies of short-circuited conductors: 1, assemblies of hollow cylindrical conductors; 2, solenoid; \mathbf{B} , vector of the magnetic field induction of the solenoid; K , switch key; I , current in the solenoid circuit; and U_0 , the initial voltage of the capacitor bank with capacity C

Эффективный режим нагрева проводников достигается при необходимом потосцеплении между проводниками и соленоидом. Совокупности индуктивно связанных между собой проводников образуют ансамбли. Электрическая схема устройства индукционного нагрева ансамблей проводников показана на рис. 2.

Схема состоит из электрических цепей соленоида и короткозамкнутых тонкостенных проводников, каждый из которых индуктивно связан с соленоидом и соседними проводниками ансамбля. Проводники образуют K ансамблей A_k , каждый из которых состоит из N проводников. Используются следующие обозначения: L_0 , R_0 – индуктивность и сопротивление конденсаторной батареи, ключа и соединительных кабелей, L_s и R_s – индуктивность и сопротивление соленоида, $L_{k,n}$, $R_{k,n}$ и $i_{k,n}$ – соответственно индуктивность, сопротивление и ток n -го проводника в k -м ансамбле, $M_{k,n}$ – взаимные индуктивности n -го проводника в k -м ансамбле с соленоидом и $M_{k,m,n}$ – взаимные индуктивности n -го и m -го проводников в k -м ансамбле. Предполагается, что проводники из разных ансамблей между собой индуктивно не связаны. Наклонной стрелкой отмечены параметры, изменяемые в процессе разряда конденсаторной батареи.

В дальнейшем рассматриваются тонкостенные полые цилиндрические проводники, толщина стенки которых $r_1 - r_0$ много меньше его внутреннего радиуса r_0 . Проводники расположены соосно с соленоидом, каждый из ансамблей состоит из семи одинаковых проводников, причем расстояния между центрами соседних проводников одинаковы (см. рис. 3). Такое расположение проводников в соленоиде обеспечивает их эффективный индукционный нагрев.

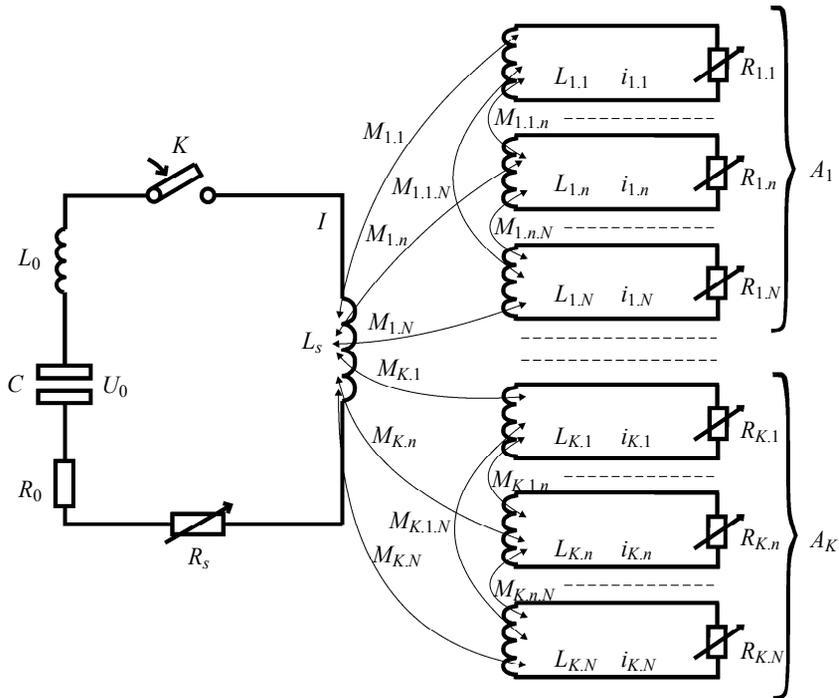


Рис. 2. Электрическая схема устройства индукционного нагрева ансамблей проводников
Fig. 2. Electrical circuit of the device for induction heating of the assemblies of conductors

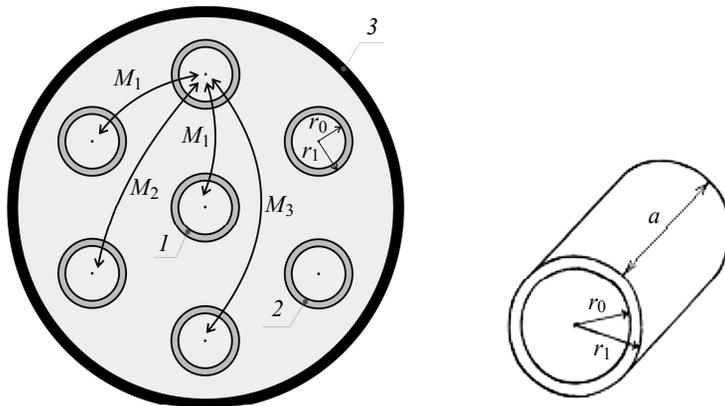


Рис. 3. Компонка ансамбля проводников в поперечном сечении соленоида: 1 – центральный проводник; 2 – периферийные проводники; 3 – катушка-соленоид; M_1 – взаимная индуктивность двух соседних проводников; M_2 , M_3 – взаимная индуктивность двух периферийных проводников, между которыми находится один и два периферийных проводника соответственно; a – длина проводников

Fig. 3. Arrangement of the assembly of conductors in a cross section of solenoid: 1, central conductor; 2, peripheral conductors; 3, coil-solenoid; M_1 , mutual inductance of two adjacent conductors; M_2 and M_3 , mutual inductance of two peripheral conductors with one or two peripheral conductors in-between, respectively; a is the length of the conductors

При постановке задачи использованы следующие предположения: токи и температуры соленоида и проводников однородны по сечениям; значения теплоёмкостей c материалов проводников и соленоида постоянны при температурах от комнатной до плавления; удельные сопротивления материалов проводника и соленоида η являются линейными функциями их температуры [6]; диффузия магнитного поля в проводники пренебрежимо слабо влияет на их нагрев [7]; теплообмен соленоида с топливом пренебрежимо мал; теплообмен между проводниками и прилегающими к ним слоями топлива осуществляется по закону Ньютона с постоянным коэффициентом теплообмена H ; коэффициент теплопроводности топлива λ также постоянен. При сделанных допущениях электротехнические и тепловые параметры цепи соленоида и ансамблей проводников описываются следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= f(I, U, R, i_{k,n}, R_{k,n}), \quad I(0) = 0; \\ \dot{U} &= -IC^{-1}, \quad U(0) = U_0; \\ \dot{i}_{k,1} &= \Delta^{-1} [(6M_1M_{k,2} - L_3M_{k,1})f(I, U, R, i_{k,n}, R_{k,n}) + 6M_1R_{k,2}i_{k,2} - L_3R_{k,1}i_{k,1}], \quad i_{k,1}(0) = 0; \\ \dot{i}_{k,2} &= \frac{1}{\Delta} [(M_1M_{k,1} - L_1M_{k,2})f(I, U, R, i_{k,n}, R_{k,n}) + M_1R_{k,1}i_{k,1} - L_1R_{k,2}i_{k,2}], \quad i_{k,2}(0) = 0; \\ \dot{R} &= b_0(R - R_0)I^2, \quad R(0) = R_0 + R_s(0); \\ \dot{R}_{k,1} &= b[b_2i_{k,1}^2R_{k,1} - b_{12}(T_{k,1} - T_{c,k,1}^*)], \quad R_{k,1}(0) = R_{00}; \\ \dot{R}_{k,2} &= b[b_2i_{k,2}^2R_{k,2} - b_{12}(T_{k,2} - T_{c,k,2}^*)], \quad R_{k,2}(0) = R_{00}; \\ \dot{T} &= b_1(R - R_0)I^2, \quad T(0) = T_0; \\ \dot{T}_{k,1} &= b_2i_{k,1}^2R_{k,1} - b_{12}(T_{k,1} - T_{c,k,1}^*), \quad T_{k,1}(0) = T_0, \quad T_{c,k,1}^*(0) = T_0; \\ \dot{T}_{k,2} &= b_2i_{k,2}^2R_{k,2} - b_{12}(T_{k,2} - T_{c,k,2}^*), \quad T_{k,2}(0) = T_0, \quad T_{c,k,2}^*(0) = T_0; \\ & f(I, U, R, i_{k,n}, R_{k,n}) = \\ &= \frac{\Delta(U - RI) + \sum_{k=1}^K [R_{k,1}i_{k,1}(L_3M_{k,1} - 6M_1M_{k,2}) + 6R_{k,2}i_{k,2}(L_1M_{k,2} - M_1M_{k,1})]}{\Delta L + \sum_{k=1}^K (12M_1M_{k,1}M_{k,2} - 6L_1M_{k,2}^2 - L_3M_{k,1}^2)}, \\ & k = \overline{1; K}, \quad n = 1, 2. \end{aligned} \quad (1)$$

В (1) точка сверху обозначает производную по времени t , индексы $k, 1, k, 2$ указывают на принадлежность к центральному и периферийным проводникам k -го ансамбля соответственно (см. рис. 3), T_0 – начальная температура соленоида, проводников и топлива, U – текущее значение электрического напряжения на конденсаторной батарее, $R_s(0)$, R_{00} – начальные значения сопротивлений соленоида и каждого проводника соответственно, $T_{c,k,1}^*$, $T_{c,k,2}^*$ – текущие значения температу-

ры топлива на границе с соответствующим проводником. Входящие в (1) постоянные коэффициенты описываются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} L &= L_0 + L_s; L_3 + 2(M_1 + M_2) + M_3; \Delta = L_1 L_3 - 6M_1^2; \\ b_0 &= \eta_1 \beta_1 (a_1 h_1)^{-2} (\rho_1 c_1)^{-1}; b_1 = (m_1 c_1)^{-1}; b_2 = (mc)^{-1}; b = R_{00} \beta b_2; \\ R_s(0) &= \pi D W \eta_1 (a_1 h_1)^{-1}; m = \pi (r_1^2 - r_0^2) a \rho; \\ b_{12} &= 2H [c \rho (r_1 - r_0)]^{-1}; R_{00} = \pi (r_1 + r_0) \eta [a (r_1 - r_0)]^{-1}. \end{aligned}$$

Использованы следующие обозначения: m – масса проводника; ρ – плотность материала проводника; c – его удельная теплоемкость; β – температурный коэффициент для его удельного сопротивления η ; $\rho_1, c_1, \beta_1, \eta_1$ – соответствующие параметры материала соленоида; W, D, m_1, a_1, h_1 – число витков соленоида, его средний диаметр, масса, а также ширина и высота поперечного сечения его витков. Все коэффициенты, описывающие индуктивности и индуктивные связи проводников между собой в ансамбле и соленоидом, рассчитываются с помощью аналитических соотношений из [8].

Уравнение теплопроводности, описывающее распределение температуры в топливе, выбирается в плоском одномерном виде, поскольку толщины прогретых слоев топлива много меньше внутреннего радиуса проводников r_0 . В рассматриваемой постановке тепловая задача для топлива сводится к решению 2K одномерных нестационарных уравнений теплопроводности для полупространства (см. рис. 4):

$$\frac{\partial T_{c.k.n}}{\partial t} = \chi_c \frac{\partial^2 T_{c.k.n}}{\partial x^2}, \quad k = \overline{1; K}, \quad n = 1, 2;$$

$$x \geq h = 0.5(r_1 - r_0), \quad T_{c.k.n}(t = 0, x \geq h) = T_0, \quad (2)$$

где $\chi_c = \lambda_c / \rho_c c_c$ – температуропроводность топлива, λ_c, ρ_c, c_c – его теплопроводность, плотность и удельная теплоемкость соответственно, $h = 0.5(r_1 - r_0)$ – половина толщины проводника, x – локальная координата, направленная по нормали к поверхности проводника от среднего сечения его стенки.

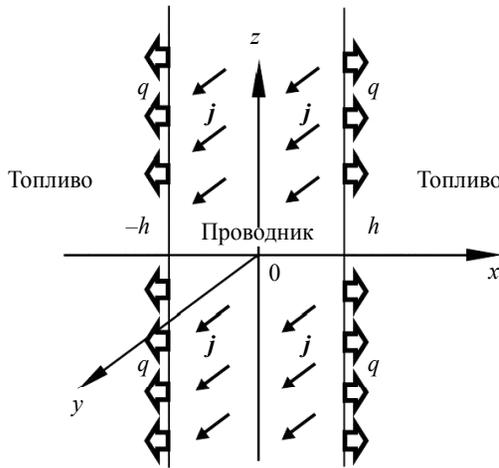


Рис. 4. Схема задачи сопряженного теплообмена проводника и топлива
Fig. 4. Diagram of the problem of conjugate heat transfer between conductor and fuel

Граничные условия у стенок проводников при теплообмене по закону Ньютона имеют вид

$$\frac{\partial T_{c.k.n}(t, x = h)}{\partial x} = \frac{q}{\lambda_c}, \quad q = H \cdot [T_{c.k.n}(t, x = h) - T_{k.n}(t)], \quad (3)$$

где q – поток тепла через единичную поверхность ($k.n$)-го проводника.

Таким образом, расчет температуры в слоях топлива, примыкающих к внутренним и внешним поверхностям ансамблей проводников, сводится к совместному решению $2(5K+1)$ уравнений (1), (2) с $2K$ граничными условиями (3).

Алгоритм решения

При расчетах используется точное аналитическое решение следующей вспомогательной сопряженной тепловой задачи в приближении идеальной теплопроводности проводника:

$$c_p \frac{dT}{dt} = A(t) - \frac{H}{h} [T - T_c(t, x = h)], \quad A(t) = \eta \frac{i^2(t)}{(2ah)^2}, \quad \frac{\partial T_c}{\partial t} = \chi_c \frac{\partial^2 T_c}{\partial x^2}, \quad x \geq h; \quad (4)$$

$$\frac{\partial T_c(t, x = h)}{\partial x} = \frac{H}{\lambda_c} [T - T_c(t, x = h)], \quad T(t = 0) = T_c(t = 0, x \geq h) = T_0.$$

Тепловая функция $A(t)$ в (4) описывает динамику индукционного нагрева проводника в устройстве, электрическая схема которого приведена на рис. 5. Индексы « $k.n$ », указывающие на принадлежность данного проводника к k -му ансамблю и положению в нем, опущены.

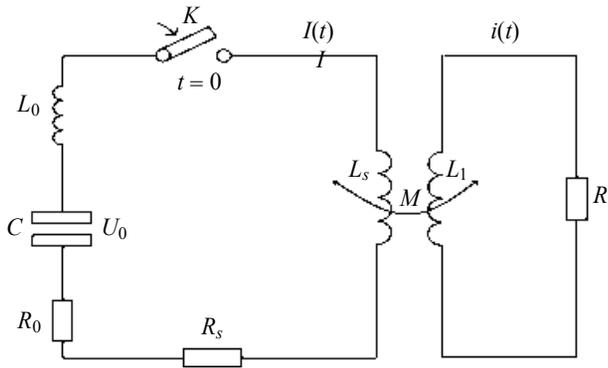


Рис. 5. Электрическая схема модельного индукционного устройства для определения тепловой функции точного решения

Fig. 5. Electrical circuit of the model inductive device for determining the thermal function of the exact solution

Аналитическое решение сопряженной тепловой задачи (4) получено для тепловой функции $A(t)$ следующего вида:

$$A(t) = A_0 \left\{ e^{-\frac{R}{L}t} \left[1 + \cos(\omega t) \right] - 2e^{-\frac{R_1}{L_1}t} \right\}, \quad A_0 = \frac{(U_0 M)^2}{2L^2 R_1 V}, \quad \omega = \sqrt{\frac{4L}{C} - \left(\frac{R}{L}\right)^2}. \quad (5)$$

Здесь $V = \pi \cdot a \cdot (r_1^2 - r_0^2)$ – объем цилиндрического проводника, $L = L_0 + L_s$, $R = R_0 + R_s$, L_1 – индуктивность проводника, R_1 – его сопротивление. Выражение (5) получено из точного решения электротехнической задачи (см. рис. 5) с учетом неравенства $R_1 L_1^{-1} \gg R L^{-1}$, характерного для рассматриваемой индукционной схемы нагрева проводника. Решение краевой задачи (4), (5) построено с помощью интегрального преобразования Лапласа аналогично [9]. Из найденного решения в (1) подставляется выражение для температуры топлива на границе с соответствующим проводником:

$$T_{c.k.n}^* = T_c(t, x = h) = T_0 + A_0 \operatorname{Ne}[G(t, \delta = \delta_0) - 2G(t, \delta = \delta_{k.n}) + G_1(t)],$$

$$\operatorname{Ne} = H \sqrt{t_* (\lambda_c \rho_c c_c)^{-1}}, \quad \delta_0 = R L^{-1}, \quad \delta_{k.n} = R_{k.n} L_{k.n}^{-1}, \quad \gamma = 0.5 \operatorname{Ne} + i\nu, \quad \bar{\gamma} = 0.5 \operatorname{Ne} - i\nu,$$

$$\nu = \sqrt{H t_* (h c p)^{-1} - (0.5 \operatorname{Ne})^2}, \quad F(z) = e^{z^2} \operatorname{erfc}(z), \quad \beta = (\delta_0 + i\omega) t_*, \quad (6)$$

$$G(t, \delta) = -\operatorname{Im} \left[\frac{F(i\sqrt{\delta t})}{\sqrt{\delta t_*} (\gamma - i\sqrt{\delta t_*}) (\bar{\gamma} - i\sqrt{\delta t_*})} + \frac{F(\gamma\sqrt{t t_*^{-1}})}{(\gamma^2 + \delta t_*) \nu} \right],$$

$$G_1(t) = \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\beta}} \left[\frac{F(-i\sqrt{\beta t t_*^{-1}})}{(\gamma + i\sqrt{\beta}) (\bar{\gamma} + i\sqrt{\beta})} - \frac{F(i\sqrt{\beta t t_*^{-1}})}{(\gamma - i\sqrt{\beta}) (\bar{\gamma} - i\sqrt{\beta})} \right] - \frac{(\gamma^2 + \delta_0 t_*) F(\gamma\sqrt{t t_*^{-1}})}{[(\gamma^2 + \delta_0 t_*)^2 + (\omega t_*)^2] \nu} \right\},$$

где t_* – характерная длительность процесса нагрева проводника, i – мнимая единица. Из решения системы уравнений (1) определяются температуры проводников, после чего с помощью (6) рассчитываются тепловые потоки $q_{k.n}$ от проводников в топливо $q_{k.n} = H[T_{k.n}(t) - T_{c.k.n}(t, x=h)]$. Распределение температуры в топливе $T_{c.k.n}(t, x)$ определяется из общего квадратурного решения тепловой задачи для полупространства при заданном на границе тепловом потоке [10]:

$$T_{c.k.n}(t, x) = T_0 + \frac{1}{\sqrt{\pi \lambda_c \rho_c c_c}} \int_0^t q_{k.n}(t - \tau) \frac{e^{-\frac{(x-h)^2}{4\lambda_c \tau}}}{\sqrt{\tau}} d\tau, \quad x \geq h.$$

Амплитуда A_0 тепловой функции $A(t)$ из точного решения (5) корректируется поправочным множителем $\alpha_{k.n}$ с помощью интегрального соотношения, определяющего количество тепловой энергии, выделившейся за время t в проводнике при решении (1), (6) и при использовании тепловой функции $A(t)$ из (5):

$$A_{0.1} = \alpha_{k.n} A_0, \quad \alpha_{k.n} = \int_0^{t_*} R_{k.n}(\tau) \dot{q}_{k.n}^2(\tau) d\tau \left[V \int_0^{t_*} A_{k.n}(\tau) d\tau \right]^{-1}, \quad (7)$$

где $V = \pi(r_1^2 - r_0^2)a$ – объем проводника. Расчеты показывают, что после первой коррекции A_0 при повторном решении (1), (6) вторая коррекция $A_{0.2}$ практически совпадает с $A_{0.1}$, так что достаточно одной итерации при решении сопряженной тепловой задачи (1), (2), (6), (7).

Результаты расчетов

Расчёты проведены для устройства со следующими параметрами:

соленоид: $W = 12$, $s_1 = a_1 \times h_1 = 4.6 \times 2 \text{ мм}^2$ – поперечное сечение шины, которой намотан соленоид, $D = 45 \text{ мм}$, длина $l = 60 \text{ мм}$, материал – медь, $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$;

внешняя электрическая цепь: $C = 0.238$ мФ, $R_0 = 3$ мОм, $L_0 = 2$ мкГн, $U_0 = 8.3, 9$ кВ;

полые цилиндрические проводники: $a = 5$ мм, $r_0 = 5$ мм, $r_1 = 5.2$ мм, материал – магний, алюминий, количество проводников в ансамбле – $N = 7$ (см. рис. 3), расстояние между центрами соседних проводников в ансамбле – 12 мм, количество ансамблей проводников – $K = 1; 5$, при $K = 1$ проводники ансамбля сосредоточены в среднем поперечном сечении соленоида, при $K = 5$ расстояние между соседними ансамблями проводников – 7.5 мм, причем средний ансамбль также расположен в среднем сечении соленоида;

топливо: $\rho_c = 1.65$ г·см⁻³, $\lambda_c = 30$ Вт·м⁻¹·град⁻¹, $c_c = 1.5$ кДж·кг⁻¹·град⁻¹, $H = 30$ кВт·м⁻²·град⁻¹.

На рис. 6 построены расчетные осциллограммы токов в соленоиде и центральном проводнике, расположенном в среднем сечении соленоида, для вариантов с одним ансамблем проводников (рис. 6, а) и пятью ансамблями (рис. 6, б). В соленоиде и проводниках реализуются затухающие переменные токи с частотой 4 кГц. Ток в соленоиде $I(t)$ почти на порядок больше индукционного тока в проводнике $i(t)$.

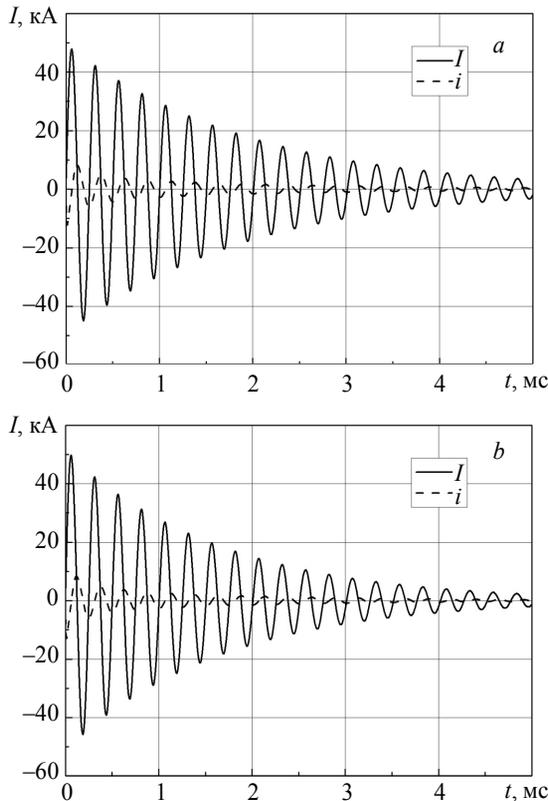


Рис. 6. Токи в цепи соленоида $I(t)$ и в центральном проводнике среднего ансамбля $i(t)$: а – $K=1$, $U_0=8.3$ кВ, б – $K=5$, $U_0=9$ кВ

Fig. 6. Currents in a circuit of solenoid $I(t)$ and in the central conductor of the middle assembly $i(t)$: (a) $K = 1$, $U_0 = 8.3$ kV and (b) $K = 5$, $U_0 = 9$ kV

Практически совпадающий по токам вариант с пятью ансамблями проводников достигается за счет увеличения начального напряжения на конденсаторной батарее с 8.3 кВ при $K = 1$ до 9 кВ. При этом запасаемая на конденсаторной батарее энергия увеличивается на 17.6 %.

На рис. 7 приведены результаты расчетов сопряженной тепловой задачи для проводников из магния и алюминия при одинаковых условиях их индукционного нагрева.

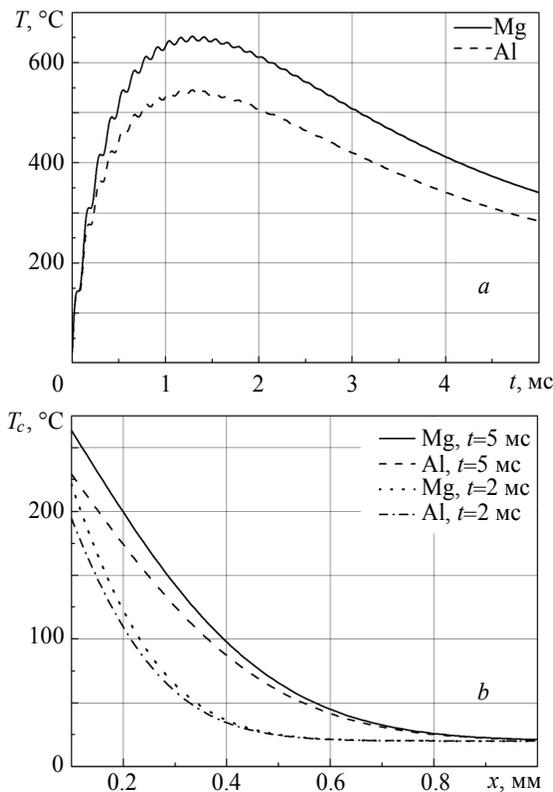


Рис. 7. Результаты нагрева топлива проводниками из магния и алюминия: *a* – температуры центральных проводников, *b* – профили температуры в топливе. $K = 1$, $U_0 = 8.3$ кВ

Fig. 7. Results of fuel heating by magnesium and aluminum conductors; (*a*) temperatures of the central conductors and (*b*) temperature profiles in the fuel. $K = 1$, $U_0 = 8.3$ kV

Проводники из магния нагреваются более эффективно, что позволяет интенсивней и на сравнительно большую глубину прогревать примыкающие к ним слои топлива. Температуры обоих проводников в процессе их индукционного нагрева не достигают температуры плавления, т.е. нагрев топлива осуществляется проводниками в твердом агрегатном состоянии. При повышении начального напряжения на конденсаторной батарее проводники могут быть расплавлены с последующей их капельной деструкцией [7]. При этом нагрев топлива интенсифициру-

ется за счет более высокой температуры капель металла и за счет значительного увеличения поверхности диспергированного проводника.

На рис. 8 показаны графики двух приведенных тепловых функций для центрального проводника $B(t) = (\rho c)^{-1}A(t)$, имеющих размерность температуры. Здесь $B_{TR}(t)$ – зависимость, полученная из решения (1), (2) при скорректированном значении амплитуды $A_{0,1}$ в (7), а $B_T(t)$ – точное решение модельной задачи с учетом расчетных зависимостей $R(t)$ и $R_1(t)$ при $A_0 = A_{0,1}$. Практически полное совпадение приведенных результатов иллюстрирует эффективность разработанного алгоритма решения задачи. На рис. 9 приведены графики индукционного нагрева центрального и периферийных проводников в среднем из пяти ансамблей. Центральный проводник нагревается более интенсивно, но его текущая температура не более чем на 10–15 градусов превышает температуру периферийных проводников.

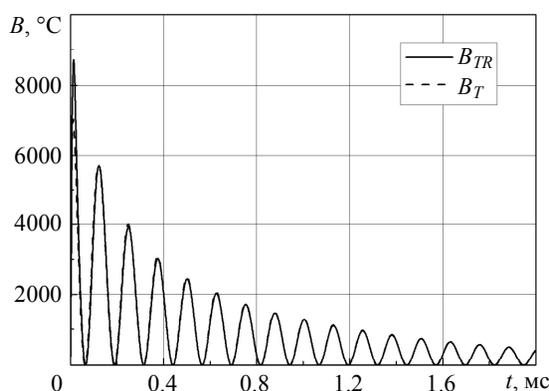


Рис. 8. Приведенные тепловые функции нагрева центрального проводника $B_{TR}(t)$ и $B_T(t)$ $K = 1$, $U_0 = 8.3$ кВ
Fig. 8. Reduced thermal functions of heating of central conductor $B_{TR}(t)$ and $B_T(t)$, $K = 1$, $U_0 = 8.3$ kV

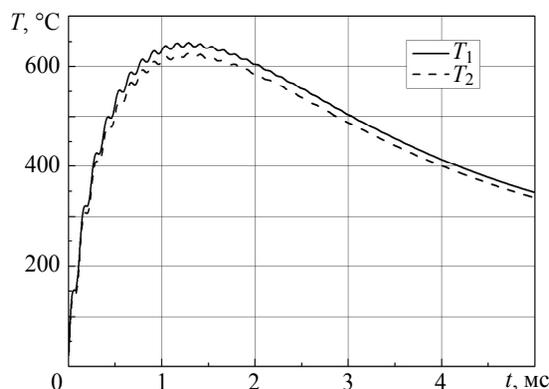


Рис. 9. Индукционный нагрев центрального и периферийных проводников в среднем ансамбле $K = 5$, $U_0 = 9$ кВ
Fig. 9. Induction heating of the central and peripheral conductors in the middle assembly, $K = 5$, $U_0 = 9$ kV

Влияние положения ансамблей проводников в соленоиде на динамику нагрева примыкающих к ним слоев топлива показано на рис. 10. Температура топлива слабо зависит от положения проводника внутри соленоида.

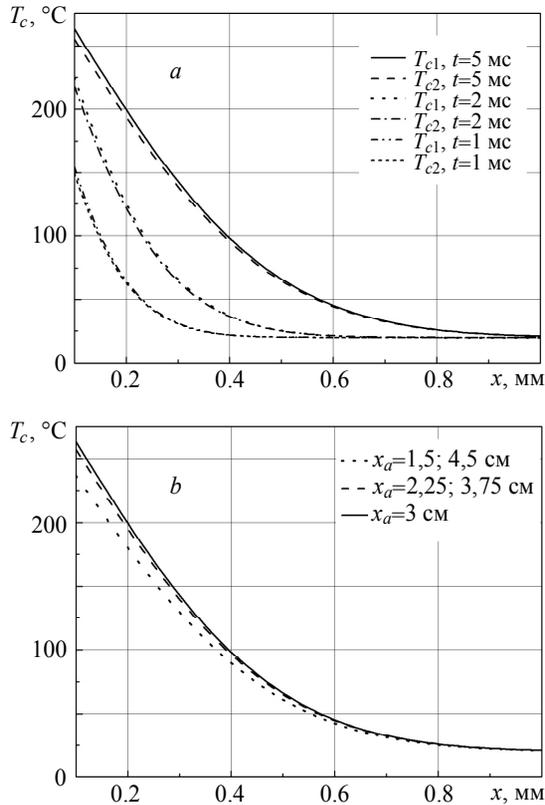


Рис. 10. Профили температуры в слоях топлива, примыкающих к проводникам: *a* – около центрального T_{c1} и периферийных T_{c2} проводников среднего ансамбля в различные моменты времени, *b* – около центральных проводников 1–3 ансамблей при $t=5$ мс; $K=5$, $U_0=9$ кВ

Fig. 10. Temperature profiles in the fuel layers adjacent to conductors: (*a*) near the central T_{c1} and peripheral T_{c2} conductors of the middle assembly at different time instants and (*b*) near the central conductors of assemblies 1–3 at $t=5$ ms; $K=5$, $U_0=9$ kV

Для крайних первого и пятого ансамблей расстояние от края соленоида составляет 15 мм, т.е. одну треть его среднего диаметра. Из представленных расчетов следует, что в течение 5 мс после начала разряда конденсаторной батареи прилегающие к проводникам слои топлива нагреваются до температур, характерных для их зажигания, причем такой нагрев осуществляется проводниками в твердом агрегатном состоянии, т.е. до начала их капельной деструкции.

Эффективность (КПД) электромеханического преобразования энергии в устройстве характеризует отношение выделившейся на проводниках тепловой энергии к начальной энергии конденсаторной батареи:

$$\text{КПД} = \frac{2}{CU_0^2} \sum_{k=1}^K \int_0^{t_k} [R_{k,1}(\tau) i_{k,1}^2(\tau) + 6R_{k,2}(\tau) i_{k,2}^2(\tau)] d\tau.$$

Так, при нагреве в течение 5 мс одного ансамбля алюминиевых проводников $\text{КПД}(U_0=8.3 \text{ кВ}) = 3.5 \%$, для одного ансамбля проводников из магния – $\text{КПД}(U_0=8.3 \text{ кВ}) = 4.3 \%$. При нагреве пятью ансамблями проводников КПД резко увеличивается: для алюминиевых проводников – $\text{КПД}(U_0=9 \text{ кВ}) = 15.4 \%$, а для проводников из магния – $\text{КПД}(U_0=9 \text{ кВ}) = 18.4 \%$. Таким образом, эффективность процесса индукционного нагрева проводников в соленоиде значительно возрастает с увеличением их количества. С другой стороны, увеличение количества нагреваемых проводников повышает скорость нагрева окружающего их топлива и позволяет необходимым образом распределять тепловое воздействие на необходимые участки метательного заряда.

Выводы

Представлена и исследована методами математического моделирования индукционная схема устройства многоочагового бесконтактного нагрева топлив с помощью ансамблей тонкостенных полых цилиндрических проводников из магния, алюминия или других металлов с высокой удельной электропроводностью и относительно низкой температурой плавления. Показано, что такие устройства могут обеспечивать быстрый нагрев топлива до температур начала его иницирования в любых необходимых частях заряда. Параметром управления скоростью процесса нагрева является величина начального напряжения на конденсаторной батарее. Такие устройства актуальны для высокоэнергетических смесевых топлив с ультрадисперсными порошками металлов и низкой скоростью послыонного горения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sinyayev S.V., Kramar M.A., Kulpin V.I., Surkov V.G. Plasma-replacement technology of ETC-ignition of powder charges in high-velocity launchers // IEEE Transactions on Magnetics. 2007. V. 43. No.1. P. 318–321.
2. Фоменко В.В., Трофимов Н.И. Нестационарное горение перхлората аммония в вязкой углеводородной среде при давлениях до 5 кбар // Материалы IX Всесоюзного симпозиума по горению и взрыву «Горение конденсированных систем». Суздаль, 19–24 ноября 1989 г. Черноголовка: Изд-во отделения Ин-та химической физики АН СССР, 1989. С. 56–59.
3. Zharovzev V.V., Sinyayev S.V., Fomenko V.V. Account of Interior Ballistic Parameters of the Launch by Slurry/Liquid Propellant with ETC-Ignition // IEEE Transactions on Magnetics. 2001. V. 37. No. 1. P. 216–218.
4. Буркин В.В., Сияев С.В., Христенко Ю.Ф. Устройство для зажигания топлив // Патент РФ № 2166181. 27.04.2001. Бюлл. № 12.
5. Сияев С.В., Анисимов А.Г., Матросов А.Д., Володченков С.И. Индукционный нагрев и капельная деструкция тонкостенных цилиндрических проводников в переменном аксиальном магнитном поле // Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике. Тезисы докладов Международной конференции. Новосибирск: Изд-во ИГиЛ СО РАН, 2015. С. 157.

6. Столович Н.Н., Милицкая Н.С. Температурные зависимости теплофизических свойств некоторых металлов. Минск: Наука и техника, 1975. 160 с.
7. Володченко С.И., Селюнина Н.В., Синяев С.В. Сравнительный анализ результатов расчета индукционного нагрева полых цилиндрических проводников в электротехнической и магнитодиффузионной постановках задачи. Труды Томского государственного университета. Т. 296. Серия физико-математическая. Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2015. С. 52–56.
8. Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А. Расчет индуктивностей: Справочная книга. Л.: Энергоатомиздат, 1986. 488 с.
9. Вишнякова И.С., Синяев С.В. Аналитическое решение сопряженной тепловой задачи для топлива и фольгового проводника с униполярным импульсом тока // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: Сборник материалов научной конференции. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2011. С. 453, 454.
10. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.

Статья поступила 21.11.2016 г.

Volodchenkov S.I., Sinyaev S.V. (2017) PULSE HEATING OF A MEDIUM BY ASSEMBLIES OF HOLLOW CYLINDRICAL CONDUCTORS INDUCTIVELY HEATED IN THE MAGNETIC FIELD OF A SOLENOID. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 46. pp. 50–63

DOI 10.17223/19988621/46/7

Results of mathematical modelling of induction heating of a heat-conducting medium by assemblies of hollow thin-walled cylindrical conductors heated by Foucault currents in an alternating magnetic field are presented. The magnetic field is generated during the discharge of a capacitor bank through a solenoid with coaxial conductors inside the wall thickness of which is much less than the internal radius. The sets of inductively coupled conductors form the assemblies. The process was modeled using the exact analytical solutions of the problems of conjugate heat transfer between conductors and medium and the generation of electrical currents in conductors during capacitor bank discharge through the solenoid. The solutions were obtained on the assumptions of uniform cross-sectional current and temperature distribution in the solenoid and conductors; constant heat capacities of solenoid, conductors, and medium; and linear temperature dependence of the resistivity of solenoid and conductors. The heat transfer between conductors and adjacent fuel layers occurs according to Newton's law.

The mathematical model is reduced to several coupled conjugate heat transfer problems solved simultaneously with the Joule heating problem of conductors. The efficiency of electrothermal conversion of the energy in the device, the characteristic parameters of the solenoid and conductors, and the heating time of adjacent reactive medium layers to ignition temperature were estimated by parametric analysis.

Keywords: alternating magnetic field, solenoid, thin-walled cylindrical conductors, induction heating, heat-conducting medium, conjugate heat transfer, analytical solutions, parametric analysis

SINYAEV Sergey Vital'evich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: ssv@niipmm.tsu.ru

VOLODCHENKOV Sergey Igorevich (Russian Federal Nuclear Center, Sarov, Russian Federation)
E-mail: serg_vol666@mail.ru

REFERENCES

1. Sinyaev S.V., Kramar M.A., Kulpin V.I., Surkov V.G. (2007) Plasma-replacement technology of ETC-ignition of powder charges in high-velocity launchers. *IEEE Transactions on Magnetics*. 43(1). pp. 318–321. DOI: 10.1109/TMAG.2006.887439.
2. Fomenko V.V., Trofimov N.I. (1989) Nestatsionarnoe gorenie perklorata ammoniya v vyazkoy uglevodorodnoy srede pri davleniyakh do 5 kbar [Unsteady combustion of ammonium perchlorate in a viscid hydrocarbon medium under the pressure of up to 5 kbar]. *Proc. of IX all-USSR symposium on combustion and explosion "Condensed systems combustion". Suzdal, 19–24 November 1989*. Chernogolovka: Inst. of chemical physics of USSR Academy of Sciences. pp. 56–59.
3. Zharovzev V.V., Sinyaev S.V., Fomenko V.V. (2001) Account of interior ballistic parameters of the launch by slurry/liquid propellant with ETC-ignition. *IEEE Transactions on Magnetics*. 37(1). pp. 216–218. DOI: 10.1109/20.911824.
4. Burkin V.V., Sinyav S.V., Khristenko Yu.F. Ustroystvo dlya zazhiganiya topliv [Device for propellant ignition]. *RF patent 2166181. 27.04.2001. Bulletin 12*.
5. Sinyaev S.V., Anisimov A.G., Matrosov A.D., Volodchenkov S.I. (2015) Induksionnyy nagrev i kapel'naya destruktziya tonkostennykh tsilindricheskikh provodnikov v peremennom aksial'nom magnitnom pole [Induction heating and drop destruction of thin-walled cylindrical conductors in an alternating axial magnetic field]. *Lavrent'evskie chteniya po matematike, mekhanike i fizike – Lavrent'ev Readings on Mathematics, Mechanics, and Physics*. Novosibirsk: Izd-vo IGI L SO RAN. p. 157.
6. Stolovich N.N., Minitskaya N.S. (1975) *Temperaturnye zavisimosti teplofizicheskikh svoystv nekotorykh metallov* [Temperature dependences of thermal properties of some metals]. Minsk: Nauka i tekhnika.
7. Volodchenkov S.I., Selyunina N.V., Sinyaev S.V. (2015) Sravnitel'nyy analiz rezul'tatov rascheta induksionnogo nagreva polykh tsilindricheskikh provodnikov v elektrotekhnicheskoy i magnitodiffuzionnoy postanovkakh zadachi [Comparative analysis of computational results of induction heating of the hollow cylindrical conductors in electrotechnical and magnetodiffusive problem statements]. *Actual Problems of Modern Mechanics of Continua and Celestial Mechanics. Proc. of Tomsk State University*. Tomsk: TSU Publ. pp. 52–56.
8. Kalantarov P.L., Tseitlin L.A. (1986) *Raschet induktivnostey: Spravochnaya kniga* [Inductance calculation: Reference book]. Leningrad: Energoatomizdat.
9. Vishnyakova I.S., Sinyaev S.V. (2011) Analiticheskoe reshenie sopryazhennoy teplovoiy zadachi dlya topliva i fol'govogo provodnika s unipolyarnym impul'som toka [Analytical solution of a conjugate thermal problem for the propellant and foil conductor with unipolar current pulse]. *Fundamental and Applied Problems of Modern Mechanics: Conf. proceedings*. Tomsk: TSU Publ. pp. 453–454.
10. Carslaw H.S., Jaeger J.C. (1959) *Conduction of Heat in Solids*. Oxford: Clarendon Press.

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/46/8

Д.Ю. Гаврилов

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ БРУСА ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ, ВЫПОЛНЕННОГО ИЗ МАТЕРИАЛА ПОРИСТОЙ СТРУКТУРЫ ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ

Статья посвящена задаче рационального распределения пористости по высоте сечения нагруженного элемента конструкции при чистом изгибе. Решение такой задачи позволит обеспечить необходимую несущую способность при снижении материалоемкости конструкции. Целью исследования является разработка методики решения задачи чистого изгиба бруса прямоугольного поперечного сечения, выполненного из материала пористой структуры с учетом технических ограничений производства, и получение численного решения задачи.

Ключевые слова: пористость, чистый изгиб, брус.

Рассмотрим чистый изгиб бруса, выполненного из материала (стали) пористой структуры с переменной по высоте сечения пористостью p . Ограничимся случаем упругого деформирования, полагая, что максимальные напряжения в брусе σ_{\max} не превышают предела текучести материала σ_T . Известно, что упругая характеристика материала (модуль Юнга E) является функцией пористости материала. Экспериментальные данные, описанные в [1, 2], представлены для пористого железа, изготовленного из порошка марки ПЖМ. Полученные двусторонним прессованием в пресс-формах брикеты спекали при температуре 1470 К в среде водорода в течение 2 ч. После механической обработки образцы подвергали отжигу для снятия наклепа в поверхностном слое и восстановления окислов, образовавшихся в материале от окончания спекания до завершения шлифования. Отжиг производили при температуре 1170 К в среде водорода в течение 1 ч.

На основе представленных выше экспериментальных данных зависимости $E(p)$ и $\sigma_T(p)$ могут быть представлены полиномами:

$$E = a_1 + a_2 p + a_3 p^2; \quad (1)$$

$$\sigma_T = c_1 + c_2 p + c_3 p^2. \quad (2)$$

Сглаживая заданную функцию методом наименьших квадратов (МНК), коэффициенты a_i, c_i найдем с помощью минимизации отклонения сглаживающей функции от заданных точек в некотором среднеинтегральном смысле.

Конечным результатом МНК будут являться значения соответствия σ_T, E пористости в границах от 0 до 0.4. Максимальное значение пористости выбрано из соображения технологических возможностей по изготовлению конструкций.

На рис. 1 представлены графики функций соответственно (1) и (2) при значениях коэффициентов, приведенных в таблице.

Значения коэффициентов аппроксимирующего полинома, МПа

a_1	209285,7143	c_1	196,0368975
a_2	-535000	c_2	-645,964465
a_3	321428,5714	c_3	627,5555095

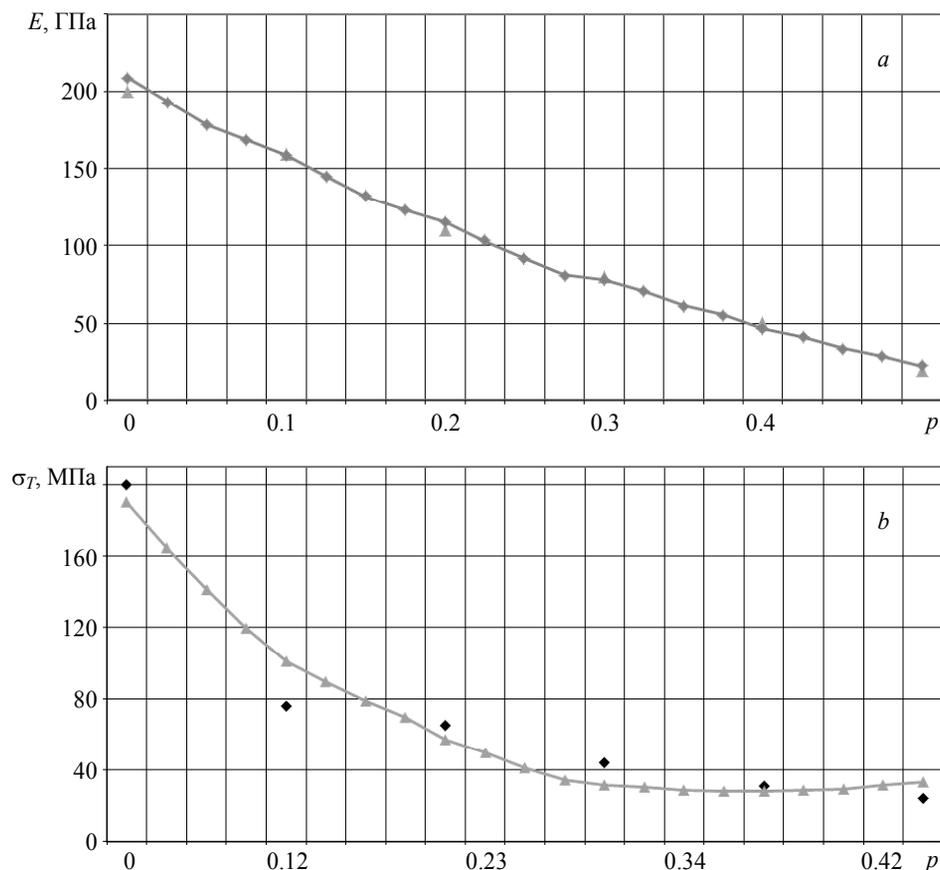


Рис. 1а. Графики зависимости модуля Юнга (а) и нормальных напряжений (b) от пористости
Fig. 1a. Diagrams of Young's modulus (a) and normal stresses (b) as a function of porosity

Положим теперь, что пористость p меняется по высоте сечения y :

$$p = p(y), \quad 0 \leq y \leq h/2,$$

где y – координата высоты полусечения бруса, h – высота полусечения бруса.

Тогда $E = E(y)$, т.е. модуль Юнга есть функция координаты высоты (y) поперечного сечения бруса.

Задача изгиба, таким образом, сводится к задаче изгиба бруса, выполненного из неоднородного материала с переменной по высоте сечения упругой характеристикой $E = E(y)$ и переменным пределом текучести $\sigma_T = \sigma_T(y)$.

Обозначим изгибающий момент на брусе через M . При чистом изгибе бруса соблюдается гипотеза плоских сечений, т.е. сечения после деформаций остаются плоскими и нормальными к оси бруса, а геометрические размеры неизменными.

Соответственно закону Гука при растяжении-сжатии для изогнутого бруса определим закон изменения напряжений по высоте сечения:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (3)$$

где $\varepsilon = \varepsilon_{\max}$ – максимальная деформация изогнутого бруса.

Величина изгибающего момента в сечении определится по формуле

$$M = 2 \int_0^{h/2} \sigma b y dy, \quad (4)$$

где b – ширина поперечного сечения бруса

Цель исследования – подобрать такой закон распределения модуля Юнга E и, следовательно, пористости p по высоте сечения бруса, чтобы получить максимально возможный изгибающий момент при ограничениях на напряжение $\sigma \leq \sigma_T$ и на пористость $p_{\min} \leq p \leq p_{\max}$, задаваемую техническими возможностями производства.

Данная постановка является сложной задачей линейного программирования, для решения которой используем приближенный подход. Суть приближенного решения заключается в следующем.

Разбиваем полусечение бруса по высоте сечения на n элементов: y_j , $j = 1, 2, \dots, n$, где y_j – расстояние от горизонтальной оси сечения до соответствующего слоя с шагом, $\delta = \frac{h}{2n}$ (рис. 2). В пределах каждого слоя получаем все характеристики постоянными, меняющимися от слоя к слою.

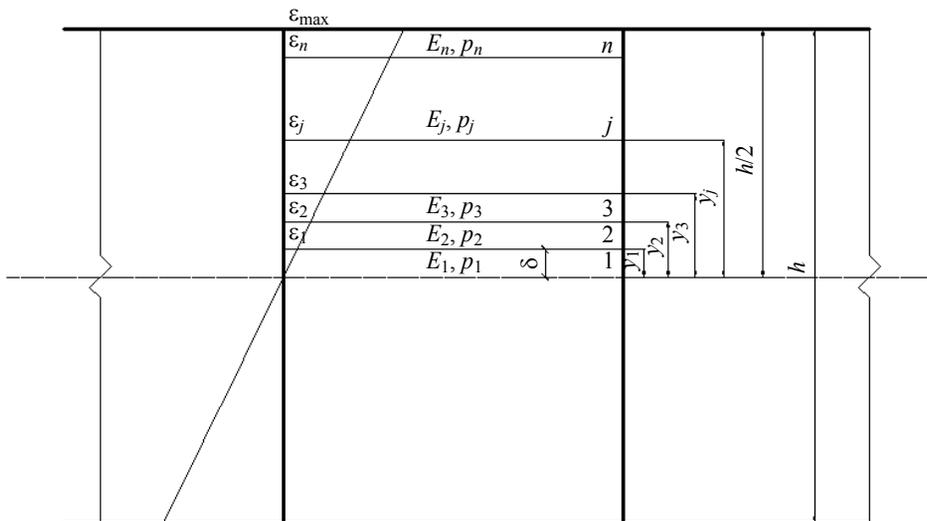


Рис. 2. Схема разбиения сечения бруса по высоте
Fig. 2. Partitioning scheme of a beam cross section along the height

Соответственно получим

$$y_1 = \delta, \quad y_j = y_{j-1} + \delta, \quad j = 2, 3, \dots, n.$$

Максимальные напряжения в слоях будут равны

$$\sigma_j = E_j \varepsilon_j \leq \sigma_{Tj}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Модуль Юнга $E = E(y_j)$ зависит от расстояния от оси сечения до слоя y_j , при этом имеем ограничение по напряжению:

$$\sigma \leq \sigma_T(y_j). \quad (6)$$

Поскольку имеем $E(p)$, $\sigma_T(p)$ в виде зависимостей (1), (2), то из условия (6) получаем

$$\varepsilon_j \{a_1 + a_2 p_j + a_3 p_j^2\} \leq c_1 + c_2 p_j + c_3 p_j^2,$$

где значения коэффициентов a и c приведены в таблице, p_j – пористость в j -м слое.

Соответственно получаем условие для определения p_j на высоте y_j .

$$p_j^2 + p_j \frac{a_2 - \varepsilon_j c_2}{a_3 \varepsilon_j - c_3} + \frac{a_1 \varepsilon_j - c_1}{a_3 \varepsilon_j - c_3} \leq 0. \quad (7)$$

Обращаем неравенство (7) в равенство и решаем его как обыкновенное квадратное уравнение, находя положительный корень. Найденное значение пористости следует согласовать с условием $p_{\min} \leq p_j \leq p_{\max}$. В случае выхода искомого значения p_j за указанные пределы принимаем граничное значение пористости.

Найдя пористость p_j , находим E_j .

Величина изгибающего момента определится по формуле

$$M \approx 2 \sum_{j=1}^n \sigma_j b \delta y_j = 2 \sum_{j=1}^n E_j \varepsilon_j b \delta y_j. \quad (8)$$

В качестве примера примем $h = 20$ см, $n = 20$, $\varepsilon_{\max} = 0.000952381$, $b = 10$ см. Получим значение пористости для каждого элементарного слоя и представим в виде эпюры на рис. 3. Эпюра распределения нормальных напряжений изображена на рис. 4.

Суммарный изгибающий момент, воспринимаемый брусом с распределенной по высоте сечения пористостью, будет равен 3.01 кНм. Стоит отметить, что увеличение числа слоев разбиения бруса будет приводить к уточнению значения вычисленного изгибающего момента.

Для оценки роли пористости при изгибе бруса сравним значение воспринимаемого изгибающего момента в случае изменяющейся по высоте сечения пористости с моментом в случае постоянной (средней) пористости при тех же нагрузках.

Расчетные формулы для момента будут следующие:

Для средней пористости:

$$E_{\text{ср}} = a_1 + a_2 p_{\text{ср}} + a_3 p_{\text{ср}}^2, \quad \sigma_j = E_{\text{ср}} \varepsilon_j,$$

$$M^{(1)} \approx 2 E_{\text{ср}} \sum_{j=1}^n \varepsilon_j b \delta y_j, \quad (9)$$

где $E_{\text{ср}}$ – значение модуля Юнга, соответствующее средней пористости $p_{\text{ср}} = 0.33$.
Для переменной пористости

$$E_{\text{ср}} = E(p_j),$$

$$M^{(2)} \approx 2 \sum_{j=1}^n E_j \varepsilon_j b \delta y_j. \quad (10)$$

В случае если равномерно распределить среднюю пористость $p_{\text{ср}} = 0.33$ по всему поперечному сечению, получим момент равный 1.844 МНм. Эпюра нормальных напряжений в этом случае отражена на рис. 5.

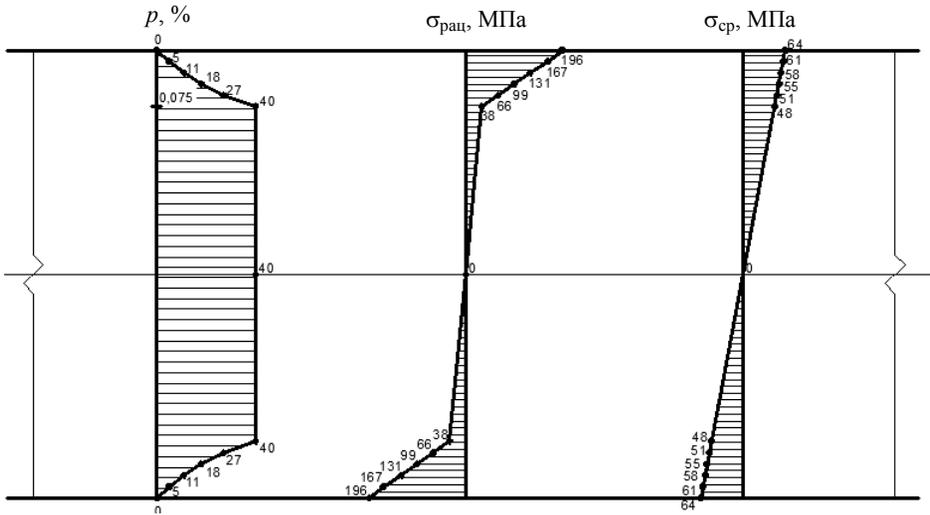


Рис. 3. Эпюра значений рационально подобранной пористости
Fig. 3. Plot of values of rationally chosen porosity

Рис. 4. Эпюра значений нормальных напряжений при рационально подобранной пористости
Fig. 4. Plot of values of normal stresses at rationally chosen porosity

Рис. 5. Эпюра значений нормальных напряжений при средней по сечению пористости
Fig. 5. Plot of the values of normal stresses at average porosity in cross section

Анализируя результат, видим, что момент при изменяемой по высоте сечения пористости выше, чем момент при средней пористости на 63 %.

Таким образом, аналитически подтверждено, что при варьировании пористости по высоте сечения можно повысить несущую способность бруса при его изгибе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Капиталян Ю.А. Характеристики упругих материалов при высоких температурах. Киев: Наукова думка, 1970. 112 с.
2. Белов С.В. Пористые металлы в машиностроении. М.: Машиностроение, 1981. 247 с.

Статья получена 11.07.2016 г.

Gavrilov D.Yu. (2017) THE STRESS STATE OF A RECTANGULAR CROSS SECTION BEAM MADE OF A MATERIAL WITH POROUS STRUCTURE AT PURE BENDING. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 46. pp. 64–69

DOI 10.17223/19988621/46/8

The article is devoted to the problem of rational distribution of porosity along the height of the cross section of a loaded structural element at pure bending. We consider pure bending of the beam which is made of a material (steel) with a porous structure of variable porosity along the height of cross section. The research is limited to the case of an elastic deformation under the assumption that the maximum stress in the beam does not exceed the yield stress of the material. It is known that Young's modulus is a function of material porosity.

The porosity is assumed to be variable along the height of the cross section. Therefore, Young's modulus is also a function of the height coordinate of the beam cross section.

The problem of bending is reduced to the problem of bending of a beam which is made of a heterogeneous material with a variable elastic characteristic along the height of cross section and variable yield stress.

According to Hooke's law, at the tension-compression state of bent beam, the law of stress variation along the height of cross section is determined, which makes it possible to calculate the value of the bending moment.

The aim of the study is to select the distribution law of both Young's modulus and, hence, porosity along the height of beam cross section in order to obtain the greatest possible bending moment under restrictions on the stress and porosity.

A numerical solution of the problem corroborates that the bending moment is 63% higher at rationally chosen porosity than that at average porosity. The results of calculations indicate an optimization of the porosity distribution over the cross section.

Keywords: porosity, pure bending, beam.

GAVRILOV Danila Yur'evich (Saratov State Technical University named after Yuri Gagarin, Saratov, Russian Federation)

E-mail: gavrilovdy@rambler.ru

REFERENCES

1. Kashtalyan Yu.A. (1981) *Kharakteristiki uprugikh materialov pri vysokikh temperaturakh* [Characteristics of elastic materials at high temperatures]. Kiev: Naukova dumka.
2. Belov S.V. (1981) *Poristye metally v mashinostroenii* [Porous metals in mechanical engineering]. Moscow: Mashinostroenie.

УДК 66.011, 533.59
DOI 10.17223/19988621/46/9

А.А. Картавых, С.М. Губанов, А.Ю. Крайнов

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ НЕКОНДЕНСИРУЕМЫХ ГАЗОВ НА ПРОЦЕСС ДЕСУБЛИМАЦИИ ФТОРИСТОГО ВОДОРОДА¹

Представлены результаты экспериментальных измерений относительной величины проскока HF через осадительные емкости. Экспериментальные работы проводились путём имитации технологического процесса при температуре 136 К с использованием охлажденного воздуха для термостатирования емкости. Установлено, что величина проскока HF через осадительную емкость составляет менее 1 %.

Ключевые слова: десублимация, фтористый водород, неконденсируемые газы, экспериментальные измерения.

В производстве по разделению гексафторида урана принята трехступенчатая схема фракционной разгонки газовой смеси. Основными компонентами смеси, подлежащими фракционной разгонке, являются гексафторид урана (ГФУ), фтористый водород (HF) и неконденсируемые газы. Процесс фракционной разгонки организован при давлениях и температурах, исключающих образование жидкой фазы у веществ.

HF является основной примесью, подлежащей удалению из состава газовой смеси. Для десублимации HF применяются специальные ёмкости – осадители (ОС). ОС охлаждаются жидким азотом с температурой 77 К.

При обращении с жидким азотом помимо неудобств, связанных с большой долей ручного труда (операции по заливке жидкого азота в сосуды Дьюара производится вручную), присутствуют вредные и опасные производственные факторы: низкая температура, способность N₂ к вытеснению кислорода, возможность повышения давления в ограниченном объёме и другие. Применение жидкого азота в качестве холодоносителя экономически затратно, а необходимость хранить запас жидкого азота влечёт дополнительные эксплуатационные расходы.

Рассмотрению возможности исключения применения жидкого азота в технологии фракционной разгонки газовой смеси посвящена настоящая статья.

В публикациях [1–5] рассматривались перспективы использования холодного воздуха в качестве холодоносителя при необходимости организовывать технологический процесс при низких температурах. При этом возникает вопрос о величине температурного уровня ведения процесса десублимации HF, удовлетворяющего технологическим требованиям.

В [1] на основе разработанной математической модели представлены результаты расчетов процесса десублимации HF в ОС при температурах 77 К (охлаждение жидким азотом) и 113 К (охлаждение воздухом). Из расчетов установлено, что концентрация HF вследствие вымораживания быстро уменьшается до величины, соответствующей давлению насыщенного пара HF при температуре стенок ОС. Остаточная концентрация паров HF при охлаждении воздухом с температу-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 16-48-700732 п_а.

рой 113 К составляет $1.04 \cdot 10^{-6}$ кмоль/м³, при охлаждении жидким азотом с температурой 77 К – $1.5 \cdot 10^{-10}$ кмоль/м³ [1]. Расчеты [1, 2] показывают, что температура HF по ходу движения во внутреннем пространстве ОС в случае охлаждения жидким азотом и холодным воздухом достигает температуры стенки в первой трети ОС.

В [4] приводятся оценки величин проскоков HF и отмечается, что применение жидкого азота в качестве хладагента обеспечивает степень очистки газовой смеси от HF в пределах 70–90 %. В [4] также упоминается, что при охлаждении холодным воздухом с температурой 103 К величина проскока HF будет составлять 30–40 % общего расхода газовой смеси.

С целью определения величин проскоков HF в существующих ОС проведены экспериментальные работы осаждения HF из газовой смеси при температуре 136 К. Экспериментальные работы проводились на экспериментальной установке [3, 6] с конструкционными изменениями.

Установка (рис. 1) состоит из перевернутого вверх дном ОС (2), помещённого в специально разработанный отсек охлаждения (4), покрытый слоем низкотемпературной теплоизоляции ArmaFlex. Отсек охлаждения имеет два патрубка: нижний для подачи охлажденного воздуха от воздушной холодильной машины (ВХМ) и верхний для отбора отепленного воздуха из отсека в ВХМ. Для организации равномерного течения холодного воздуха вдоль стенки отсека охлаждения изготовлена напайка из стальной ленты в виде серпантина. ОС (2) имеет два патрубка. К напускному патрубку посредством коллектора подсоединяется емкость $V = 6$ л с безводным фтористым водородом (1) и напускное устройство (3). К отсосному патрубку посредством коллектора подключены приборы измерения давления: мановакуумметр (5); оптический манометр ОМ-6-50 (6); оптический манометр ОМ-7-1 (7); вакуумметр Televac MP4A (8). К отсосному патрубку подключена система откачки, соединенная металлическим трубопроводом и включающая ОС (9), помещенный в отсек охлаждения (14); узел защиты вакуумного насоса, состоящий из колонки с химическим поглотителем известковым (ХПИ) (10); вакуумный насос ВН-1 (11).

Методика проведения опытных работ заключалась в имитации технологического процесса десублимации HF. В напускной патрубке экспериментальной установки через коллектор подавалась газовая смесь HF и воздуха (в соотношении 90 % HF и 10 % воздуха) с расходом, близким к величине существующего технологического процесса. Расход HF поддерживался с помощью критической шайбы (12), а расход воздуха с помощью напускного устройства (3), отрегулированного на расход воздуха $G = 0.1$ кг/сут. Для проведения опытов использовали безводный фтористый водород марки «А», удовлетворяющий требованиям ГОСТ 14022-88, что соответствует содержанию основного вещества 99.9 мас.% и осушенный воздух, с точкой росы –70 °С. Установка была откакумирована до давления не более 90 мкм. рт. ст. и проверена на плотность. Путем трёхкратного напуска и откачки безводного HF в установку была проведена пассивация внутренних поверхностей установки. Перед проведением работ проведено взвешивание ОС (9) и емкости с HF (1) на весах Metler-Toledo (погрешность 0.5 г). Предварительно ОС (9) был охлажден жидким азотом до температуры 77 К, ОС (2) охлажден воздухом, генерируемым ВХМ до температуры 136 К, ВН-1 включен в работу. Температура стенки ОС определялась как средняя температура между подачей и отбором воздуха ВХМ.

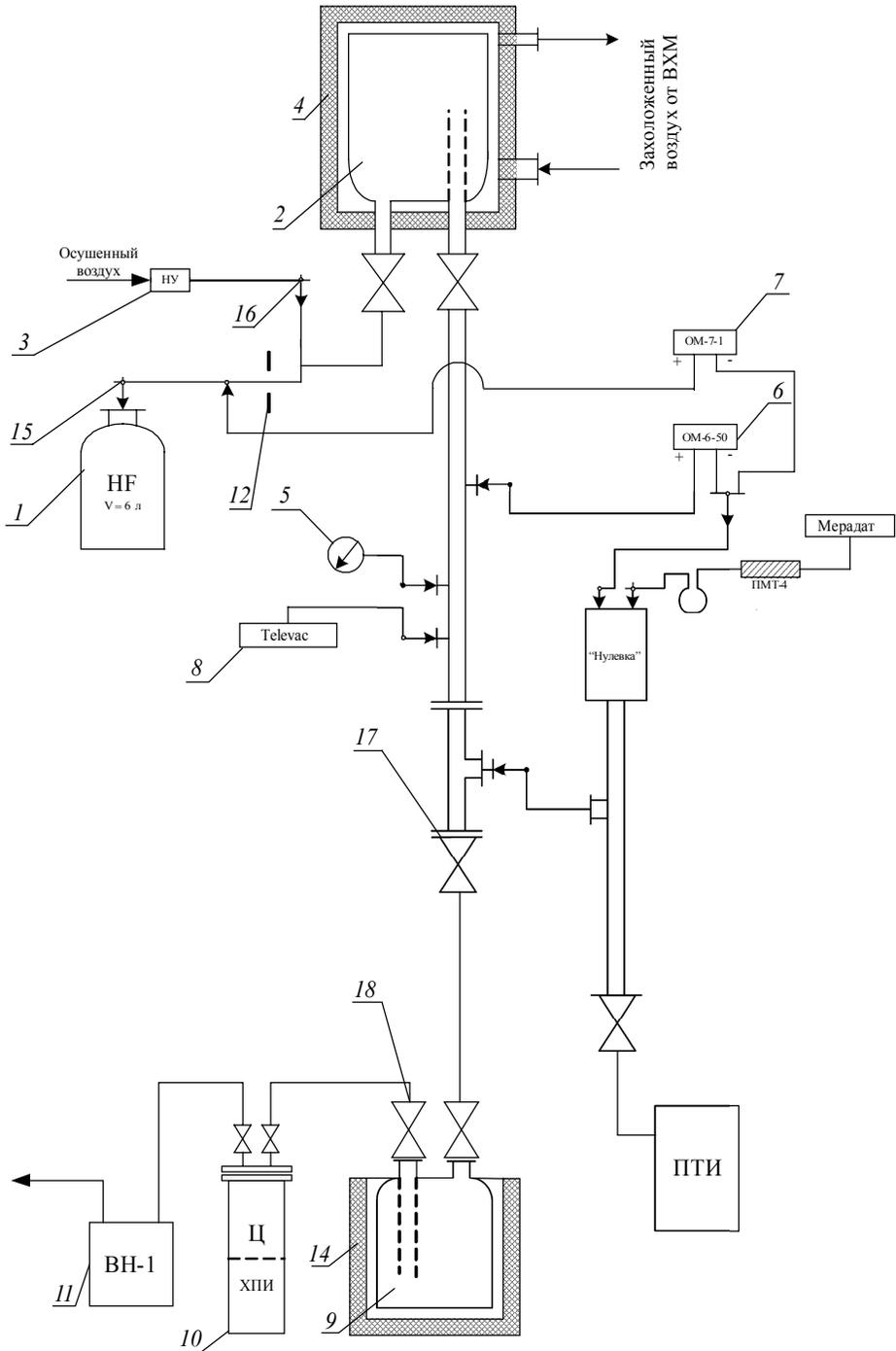


Рис. 1. Принципиальная схема экспериментальной установки
 Fig 1. Basic scheme of the experimental setup

После окончания подготовительных работ открывались вентили подачи воздуха (16) и HF (15), давление в напускном коллекторе до шайбы (12) поддерживалось равным 30 мм рт.ст., в откачном коллекторе давление соответствует технологическому процессу, и составляет 1 мм рт.ст. Напуск газовой смеси продолжался не менее 8 ч, во время которых периодически подливался жидкий азот в отсек охлаждения (14).

После подачи газовой смеси, закрывались вентили подачи воздуха (16) и HF (15), установка откачивалась в ОС (9). Подача холодного воздуха в отсек охлаждения прекращалась. ОС (9) отсоединялась для отогрева. Далее ОС (9) и ёмкость с HF (1) взвешивались. Определялись количество HF в (1) и количество проскока HF в ОС (9).

Проверка количества десублимированного HF в ОС (2) производилась следующим образом: после отогрева ОС (2) выполнялась переконденсация HF во вновь установленный ОС (9). ОС (9) предварительно взвешивался и охлаждался жидким азотом в отсеке охлаждения (14). Коммуникации откачной системы до вентиля (17) откачивались ВН-1 (11) до давления не более 1 мм рт.ст., после чего закрывался вентиль (18) на вновь установленном ОС (9) и открывался вентиль (17) для переконденсации HF из ОС (2). После переконденсации ОС (9) изымался из отсека охлаждения (14) и взвешивался. Затем подводился расчет массового баланса количества десублимированного HF. Результаты расчета представлены в таблице.

Результаты подведения материального баланса десублимированного HF

Показатели	Номер опытной работы		
	1	2	3
Время напуска HF в установку, мин	485	480	480
Массовая скорость подачи HF в установку, г/мин	0.873	0.793	0.830
Количество напущенного HF, г	423.57	380.43	398.60
Изменение веса ОС (9) после переконденсации, г	+420.00	+378.87	+396.23
Изменение веса ОС (9) после переконденсации HF из ОС (2) после окончания напуска HF, г	-0.10	+1.30	+0.87
Материальный баланс HF, г / % от количества напущенного HF	3.67 / 0.87 %	0.26 / 0.07 %	1.50 / 0.38 %

Из таблицы видно, что наличие неконденсируемых газов не оказывает влияния на процесс десублимации HF при охлаждении ОС воздухом с температурой 136 К. Величина не соответствия количества испарённого HF из емкости и десублимируемого HF в ОС (проскок HF через осадительную емкость) составляет менее 1 %. Очевидно что при охлаждении ОС жидким азотом при температуре 77 К, проскок HF будет еще меньше. Для существующего технологического процесса проскок HF в размере 1 % допустим, так как газовая смесь проходит дальнейшую очистку на химвсасывающих установках.

Сравнение затрат указывает на необходимость отказа от потребления жидкого азота. Так, разделительным производством в 2015 г. для ведения технологического процесса фракционной разгонки затраты на приобретение жидкого азота составили около 37 млн руб. (1 450 818 л жидкого азота за 2015 г.). В случае применения холодного воздуха годовые эксплуатационные затраты составят не более 13 млн руб.

Таким образом, проведенная экспериментальная работа на демонстрационном стенде с имитацией процесса фракционной разгонки газовой смеси является доказательством возможности реализации процесса десублимации HF с использовани-

ем холодного воздуха. Такой способ является менее затратным для ведения процесса десублимации HF из-за значительного снижения эксплуатационных затрат. Выполненные опытные работы создают предпосылки для применения более перспективного способа охлаждения ОС.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васенин И.М., Губанов С.М., Дурновцев М.И., Крайнов А.Ю., Чуканов М.В. Физико-математическое моделирование десублимации фтористого водорода из газовой смеси на стенке конденсатора // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 5(31). С. 76–82.
2. Дурновцев М.И., Крайнов А.Ю., Губанов С.М. Расчет десублимации фтористого водорода из газовой смеси на стенках двух последовательно расположенных емкостей // Физико-технические проблемы в науке, промышленности и медицине: сборник тезисов докладов VII Международной научно-практической конференции. Томск, 2015. 96 с.
3. Дурновцев М.И., Крайнов А.Ю., Губанов С.М., Чуканов М.В. Измерение давления насыщенных паров фтористого водорода в области низких температур // Изв. вузов. Физика. 2015. Т. 58. № 2/2. С. 10–13.
4. Громов О.Б. Анализ технологических схем защиты вакуумных насосов коллекторов КИУ на разделительных заводах ТК ОАО «ТВЭЛ» и последствия отказа от применения жидкого азота в качестве хладагента // Громовские чтения 2014: Материалы Всероссийской научно-практической конференции, приуроченной к 105-летию со дня рождения Б.В. Громова. 2014. С.28-29.
5. Губанов С.М., Дурновцев М.И., Картавых А.А., Чуканов М.В., Крайнов А.Ю., Шрагер Э.Р. Оценка возможности применения воздушного охлаждения для замещения использования жидкого азота в производстве по разделению изотопов урана // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики (ФППСМ-2016): Сборник трудов IX Всероссийской научной конференции, г. Томск, 21–25 сентября 2016 года. Томск: Томский государственный университет, 2016. С. 389–391.
6. Дурновцев М.И., Губанов С.М., Картавых А.А., Крайнов А.Ю. Стенд для измерения давления насыщенных паров при низких температурах // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики (ФППСМ-2016): Сборник трудов IX Всероссийской научной конференции, г. Томск, 21–25 сентября 2016 года. Томск: Томский государственный университет, 2016. С. 392.

Статья поступила 31.01.2017 г.

Kartavykh A.A., Gubanov S.M., Krainov A.Yu.(2017) ESTIMATION OF THE EFFECT OF NON-CONDENSABLE GASES ON THE PROCESS OF HYDROGEN FLUORIDE DESUBLIMATION *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 46. pp. 70–75

DOI 10.17223/19988621/46/9

In industrial separation processes, a three-stage scheme of the fractional distillation of the gas mixture is applied. The basic components of the mixture for fractional distillation are as follows: uranium hexafluoride (HF), hydrogen fluoride (HF), and non-condensable gases. HF is the main impurity to be removed from the gas mixture. To desublimite HF, special settling tanks are used. As a coolant medium, liquid nitrogen is taken for cooling the settling tanks down to the temperature of 77 K. Taking cold air as a cooler allows one to reduce expenses and eliminate the harmful and dangerous factors of the production. The residual concentration of HF vapors is higher when cooling with air rather than with liquid nitrogen. An experimental work was performed by simulating the technological process at the temperature of 136 K for determining the value of HF slips in available settling tanks. This work was conducted on a modernized experimental facility. The experiments predetermine an application of a new method of cooling the settling tanks.

Keywords: desublimation, hydrogen fluoride, non-condensable gases, experimental measurements.

KARTAVYKH Andrey Aleksandrovich (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: AAKartavykh@yandex.ru

GUBANOV Sergey Mikhailovich (Candidate of Physics and Mathematics, "SIBIRIANGROUP OF CHEMICAL ENTERPRISES", Tomsk, Russian Federation).
E-mail: SMGubanov@yandex.ru

KRAINOV Aleksey Yurevich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

REFERENCES

1. Vasenin I.M., Gubanov S.M., Durnovtsev M.I., Krainov A.Yu., Chukanov M.V. (2014) Fiziko-matematicheskoe modelirovanie desublimatsii fluoristogo vodoroda iz gazovoy smesi na stenki kondensatora [Physical and mathematical modeling of hydrogen fluoride desublimation from a gas mixture onto walls of the condenser]. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(31). pp. 76–82.
2. Durnovtsev M.I., Krainov A.Yu., Gubanov S.M. (2015) Raschet desublimatsii fluoristogo vodoroda iz gazovoy smesi na stenkakh dvukh posledovatel'no raspolozhennykh emkostey [Calculation of hydrogen fluoride desublimation from a gas mixture onto the walls of two consistently located capacities]. *Fiziko-tehnicheskie problemy v nauke, promyshlennosti i meditsine: sbornik tezisov dokladov VII Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii – Physical and technical problems in science, industry, and medicine: collection of the theses of reports on VII International scientific and practical conference*. Tomsk. p. 96.
3. Durnovtsev M.I., Krainov A.Yu., Gubanov S.M., Chukanov M.V. (2015) Izmerenie davleniya насыщенных паров фтористого водорода в области низких температур [Measuring the pressure of saturated vapors of a hydrogen fluoride at low temperatures]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika*. 58(2/2). pp. 10–13.
4. Gromov O.B. (2014) Analiz tekhnologicheskikh skhem zashchity vakuumnykh nasosov kollektorov KIU na razdelitel'nykh zavodakh TK OAO «TVEL» i posledstviya otkaza ot primeneniya zhidkogo azota v kachestve khladagenta [The analysis of technological schemes of vacuum pump protection in collectors CEI at separation factories FCOR TVEL and the consequences of refusal from application of liquid nitrogen as a coolant]. *Gromovskie chteniya: Materialy vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii, priurochennoy k 105-letiyu so dnya rozhdeniya B.V. Gromova – Gromov's readings: Proceedings of all-Russian scientific and practical conference dedicated to the 105th anniversary of B.V. Gromov*. pp. 28–29.
5. Gubanov S.M., Durnovtsev M.I., Kartavykh A.A., Chukanov M.V., Krainov A.Yu., Shrager E.R. (2016) Otsenka vozmozhnosti primeneniya vozdušnogo okhlazhdeniya dlya zameshcheniya ispol'zovaniya zhidkogo azota v proizvodstve po razdeleniyu izotopov urana [Assessment of the possibility of application the air cooling instead of liquid nitrogen in production on the separation of uranium isotopes] *Fundamental'nye i prikladnye problemy sovremennoy mekhaniki: Sbornik trudov IX vserossiyskoy nauchnoy konferentsii – Fundamental and applied problems of the modern mechanics: Proceeding of IX all-Russian scientific conference*. Tomsk: Tomsk State University. pp. 389–391.
6. Durnovtsev M.I., Gubanov S.M., Kartavykh A.A., Krainov A.Yu. (2016) Stend dlya izmereniya davleniya насыщенных паров при низких температурах [The stand for measurements of saturated vapor pressure at low temperatures]. *Fundamental'nye i prikladnye problemy sovremennoy mekhaniki: Sbornik trudov IX vserossiyskoy nauchnoy konferentsii – Fundamental and applied problems of modern mechanics: Proceedings of IX all-Russian scientific conference*. Tomsk: Tomsk State University. p. 392.

УДК 66.011/063.8

DOI 10.17223/19988621/46/10

М.Г. Хмелева, В.Х. Даммер, А.Б. Тохметова, Л.Л. Миньков**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВИХРЕОБРАЗОВАНИЯ
В ЖИДКОМ МЕТАЛЛЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДИСКОВОГО ЗАВИХРИТЕЛЯ**

Проведено численное исследование течения жидкого металла в тигле под действием вращающегося завихрителя специальной формы. Показано влияние скорости вращения завихрителя на картину течения. Определены зависимости турбулентной диффузии, размеров турбулентных вихрей и критерия мощности смесителя от скорости вращения завихрителя. Исследовано влияние взаимодействия границы раздела металл – воздух с элементами завихрителя на картину течения жидкого металла в тигле.

Ключевые слова: *течение расплавленного металла, турбулентное течение, дисковый завихритель, коэффициент диффузии.*

Известно, что измельчение структуры литого металла ведет к повышению его физико-механических свойств. Для измельчения структуры сплавов их подвергают модифицированию путем введения перед заливкой в литейную форму специальных добавок – микрочастиц, которые становятся дополнительными центрами кристаллизации, или изменяют поверхностное натяжение расплава на границе с зародышем кристаллизации. Для обеспечения равномерного распределения добавок по сплаву применяют специальные устройства-смесители, которые создают турбулентное поле течения внутри жидкого металла и тем самым интенсифицируют диффузионные процессы, способствующие равномерному распределению микрочастиц.

Для организации процесса перемешивания в химической технологии нашли широкое применение смесительные устройства, состоящие из емкости, в которую помещают перемешиваемые компоненты (жидкости, сыпучие материалы и т.д.), и мешалки-завихрителя, являющиеся рабочим органом смесительного устройства [1–4]. По своему устройству и числу оборотов мешалки-завихрители разделяют на тихоходные: до 100 об/мин (лопастные, якорные, рамные, ленточные, шнековые) и быстроходные: свыше 100 об/мин (пропеллерные, турбинные, дисковые, специальные лопастные) [2, 4]. Тихоходные завихрители создают, как правило, окружной поток жидкости, а быстроходные, в зависимости от количества и места расположения лопастей, дисков, пропеллеров, могут создавать радиальный поток, осевой поток или радиально – осевой поток жидкости.

Выбор того или иного типа смесителя зависит от свойств смешиваемых жидкостей, их объема и времени перемешивания. Решение задачи гидродинамики процесса перемешивания позволяет судить о картине течения в смесительном устройстве и предсказать степень однородности получаемой смеси, а также определить параметры турбулентности, которые оказывают влияние на процесс перемешивания жидкости и микрочастиц. Авторами [5] проведено численное исследование влияния известных k – ϵ -моделей турбулентности на прогнозируемые значения параметров потока в смешивающем устройстве и на основе сравнений с экспериментальными данными показано, что эти модели способны адекватно пред-

сказывать параметры турбулентного потока. Исследование влияния несимметрично расположенной мешалки в смешивающем устройстве на гидродинамику процесса перемешивания было выполнено в работе [6] с помощью численного моделирования с привлечением реализованной k - ε -модели турбулентности. Авторам [7, 8] удалось получить хорошее соответствие между результатами численного моделирования с привлечением k - ε -модели турбулентности и экспериментальными данными при определении формы поверхности свободного вихря и при определении содержания газа в смесительном устройстве [8].

В данной работе рассматривается гидродинамика процесса перемешивания жидкого (расплавленного) металла в тигле под действием завихрителя, выполненного в виде трех перфорированных дисков с размещенными на них штифтами [9], рис. 1, а также исследуется влияние скорости вращения завихрителя на картину течения в тигле и основные параметры смесительного устройства.

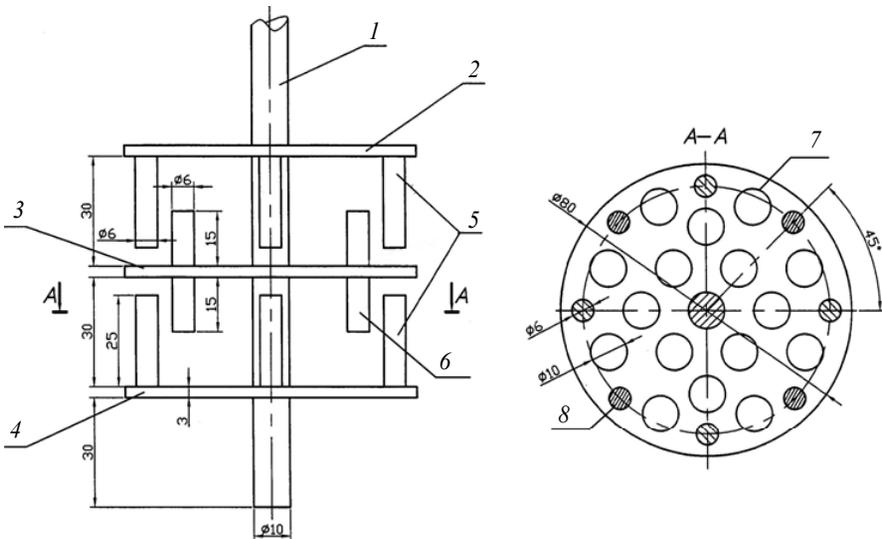


Рис. 1. Форма завихрителя: 1 – ось; 2–4 – перфорированные диски; 5, 6 – штифты; 7 – отверстия; 8 – штифты центрального диска

Fig. 1. Agitator construction: 1, axis; 2-4, perforated disks; 5, 6, pins; 7, openings; 8, pins of the central disk

Математическая модель и метод решения

Основные допущения, используемые при описании процесса перемешивания, следующие: жидкость несжимаемая; процесс перемешивания нестационарный, изотермический, турбулентный; течение осесимметричное и закрученное. Для описания положения границы жидкий металл – воздух используется модель VOF, для описания турбулентного течения привлекается классическая k - ε -модель. Определяющая система уравнений, записанная во вращающейся со скоростью завихрителя системе координат, описывает:

- изменение объемной доли воздуха

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + \nabla (\alpha_2 V_r) = 0; \quad (1)$$

- изменение объемной доли жидкого металла

$$\alpha_1 = 1 - \alpha_2 ; \quad (2)$$

- изменение количества движения смеси

$$\frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{V}_r \mathbf{V}) + \rho \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} = -\nabla p + \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}}_{\text{eff}} + \mathbf{F}_{\text{п.н}} + \mathbf{F}_g ; \quad (3)$$

- изменение турбулентной кинетической энергии

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \nabla(\rho k \mathbf{V}_r) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_{\text{turb}}}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + G_k - \rho \varepsilon ; \quad (4)$$

- изменение скорости диссипации турбулентной кинетической энергии

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \nabla(\rho \varepsilon \mathbf{V}_r) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_{\text{turb}}}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} G_k - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} , \quad (5)$$

где $\rho = \rho_1 \alpha_1 + \rho_2 \alpha_2$ – плотность смеси; ρ_1 – плотность жидкого металла; ρ_2 – плотность воздуха; $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость вращения завихрителя; $\mathbf{V}_r = \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ – скорость смеси в системе координат, связанной с завихрителем; \mathbf{r} – расстояние от оси вращения до рассматриваемой точки; $\mathbf{F}_{\text{п.н}} = 2\sigma\kappa \frac{\rho}{\rho_1 + \rho_2} \nabla \alpha_1$ – сила поверхностного натяжения; $\kappa = \nabla(\mathbf{n}/|\mathbf{n}|)$ – кривизна поверхности раздела фаз; $\mathbf{n} = \nabla \alpha_1$ – нормаль к поверхности раздела фаз; σ – коэффициент поверхностного натяжения; $\mathbf{F}_g = (-\rho g, 0)$ – сила тяжести; $\bar{\bar{\tau}}_{\text{eff}} = \bar{\bar{\tau}} + \bar{\bar{\tau}}_{\text{turb}}$ – эффективный тензор напряжений;

$\bar{\bar{\tau}}_{\text{turb}} = \mu_{\text{turb}} (\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T) - \frac{2}{3} \rho k \mathbf{U}$ – тензор турбулентных напряжений; $\bar{\bar{\tau}} = \mu (\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T)$ – тензор вязких напряжений; $\mu = \mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \alpha_2$ – динамическая вязкость смеси; $\mu_{\text{turb}} = \rho C_\mu k^2 / \varepsilon$ – турбулентной вязкость; $G_k = 2\mu_{\text{turb}} \mathbf{S} : \mathbf{S}$ – производство турбулентной кинетической энергии вследствие сдвигового течения (действие градиентов скорости); $\mathbf{S} = \frac{1}{2} (\nabla \vec{V} + \nabla \vec{V}^T)$ – тензор деформаций.

Параметры в уравнениях (3), (4) следующие: $C_{1\varepsilon} = 1.44$; $C_{2\varepsilon} = 1.92$; $C_\mu = 0.09$; $\sigma_k = 1.0$; $\sigma_\varepsilon = 1.3$.

На твердых поверхностях тигля и завихрителя задаются условия прилипания, на открытой границе тигля – «мягкие» граничные условия.

Для решения системы уравнений (1), (3) – (5) используется метод конечных объемов, причем уравнение (1) решается по явной схеме с использованием метода геометрической реконструкции [10] для определения потоков на гранях ячеек, находящихся вблизи поверхности раздела фаз. Уравнения (3) – (5) решаются по неявной схеме, в которой для аппроксимации конвективных членов уравнений используется противопоточная разностная схема второго порядка аппроксимации. Для нахождения поля давления используется алгоритм PRESTO. Согласование поля давления и поля скоростей осуществляется по методу SIMPLE [11]. Значения параметров турбулентности на твердых поверхностях определялись в соответствии с моделью EWT (Enhanced Wall Treatment). Решение поставленной задачи осуществлялось с помощью пакета программ Ansys-Fluent [12].

Расчеты проводились при следующих значениях параметров: плотности жидкого металла и воздуха $\rho_1 = 2700 \text{ кг/м}^3$, $\rho_2 = 1.2 \text{ кг/м}^3$, динамическая вязкость жидкого металла и воздуха $\mu_1 = 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}$, $\mu_2 = 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ Па}\cdot\text{с}$, поверхностное натяжение жидкого металла $\sigma = 0.9 \text{ Н/м}$, скорость вращения завихрителя $n = 100\text{--}3000 \text{ об/мин}$. В начальный момент времени высота уровня жидкого металла составляла половину высоты тигля. Высота тигля – 0.3 м, диаметр – 0.2 м.

Обсуждение результатов

Для определения основных безразмерных критериев, от которых будет зависеть решение системы уравнений (1) – (5), введем масштаб длины d – внешний диаметр завихрителя, масштаб времени ω^{-1} , где ω – угловая скорость вращения завихрителя, масштаб плотности ρ_1 – плотность жидкого металла. Тогда, согласно теории размерностей, масштаб давления выразится как $\rho_1(\omega d)^2$, масштаб скорости – ωd . Запись уравнения (2) в безразмерном виде показывает, что безразмерными критериями рассматриваемой задачи являются: $\text{Fr} = \omega^2 d/g$ – число Фруда, $\text{We} = \rho_1 \omega^2 d^3 / \sigma$ – число Вебера, $\text{Re} = \rho_1 \omega d^2 / \mu_1$ число Рейнольдса. Безразмерной энергетической характеристикой завихрителя служит модифицированное число Эйлера, $\text{Eu} = P / (\rho_1 \omega^3 d^5)$ представляющей отношение мощности завихрителя P к мощности вращающейся жидкости [1, 2]. К группе вышеперечисленных безразмерных критериев относится геометрический параметр – отношения характерных размеров завихрителя и тигля, d/D .

При изменении скорости вращения завихрителя от 100 об/мин до 3000 об/мин число Re изменяется в диапазоне $1.8 \cdot 10^5 - 5.4 \cdot 10^6$, число We – в диапазоне $1.7 \cdot 10^2 - 1.5 \cdot 10^5$, число Fr – в диапазоне 0.9–805. Указанные значения параметров говорят о том, что инерционные силы намного превосходят силы вязкой диссипации и силы поверхностного натяжения, а также больше силы тяжести. Поэтому течение жидкого металла в тигле является существенно турбулентным. Влияние силы поверхностного натяжения и силы тяжести может играть существенную роль в областях, где течение заторможено – вблизи стенок тигля.

Для исследования сходимости численного решения была проведена серия расчетов по определению момента сил, действующего на завихритель со стороны жидкого металла, с использованием четырех разностных сеток, размер ячеек которых уменьшался в два раза от 2 до 0.25 мм. Скорость вращения завихрителя задавалась равной 1500 об/мин. Система уравнений (1) – (5) решалась до тех пор, пока численное решение не сходилось к стационарному. Значения момента сил M в зависимости от размеров ячеек h и количества ячеек N разностной сетки приведены в таблице. За «точное» значение момента сил принималось значение, полученное на разностной сетке с размером ячеек 0.25 мм. Из таблицы следует, что имеет место сходимость численного решения, поскольку относительная погрешность в определении момента сил уменьшается при увеличении числа ячеек. Дальнейшие расчеты проводились на разностной сетке, число ячеек которой равно 119216, а размер ячеек 0.5 мм.

Параметры	Размер ячеек h , мм			
	2	1	0.5	0.25
N ячеек	8001	29804	119216	476864
M , Н·м	0.2016	0.2151	0.2211	0.2226
$(\Delta M/M) \cdot 100\%$	10.44	3.52	0.69	

С ростом скорости вращения завихрителя глубина воронки за счет центробежных сил, отбрасывающих жидкий металл на периферию, увеличивается, рис. 2. При скорости вращения 500 об/мин поверхность жидкого металла достигает верхнего перфорированного диска, при скорости 1000 об/мин – среднего диска. При скорости вращения 1500 об/мин и выше поверхность жидкого металла достигает нижнего перфорированного диска, и площадь поверхности соприкосновения жидкого металла с элементами завихрителя уменьшается. Те штифты, которые соприкасаются как с жидким металлом, так и с воздухом, способствуют проникновению воздуха в жидкий металл, создавая предпосылки для кавитации.

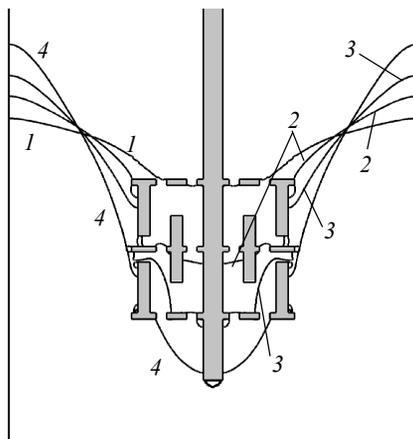


Рис. 2. Положение уровня жидкого металла
(1 – $n = 500$; 2 – 1000; 3 – 1500; 4 – $n = 3000$ об/мин)

Fig. 2. Level position of a liquid metal
($n = (1) 500, (2) 1000, (3) 1500, \text{ and } (4) 3000$ rpm)

Для скоростей вращения завихрителя от 100 до 1500 об/мин течение жидкого металла в тигле выходит на установившийся режим. При этом минимальное значение момента сил и его максимальное значение для заданной скорости вращения завихрителя слабо отличаются друг от друга, рис. 3. При скоростях вращения свыше 1500 об/мин течение становится существенно нестационарным и момент сил изменяется в пределах от минимального значения (обозначено крестиками) до своего максимального значения (обозначено треугольниками). Следует отметить, что учет силы поверхностного натяжения практически не оказал существенного влияния на значение момента сил завихрителя (кружочки).

На рис. 4 показаны характерные картины течения жидкого металла при различных скоростях вращения завихрителя. При скорости вращения 500 об/мин жидкий металл полностью покрывает завихритель и в окрестности штифтов завихрителя образуются шесть мелких вихрей, а вблизи боковой стенки – один крупный (рис. 4, *a*). При увеличении скорости вращения до 1000 об/мин жидкость наполовину закрывает завихритель и количество вихрей в окрестности штифтов сокращается до четырех, а в окрестности боковой стенки вихрь распадается на два (рис. 4, *b*). Дальнейшее увеличение скорости вращения ведет к тому, что поверхность соприкосновения жидкого металла с завихрителем уменьшается, и внутри области формируются два относительно крупных вихря (рис. 4, *c-f*).

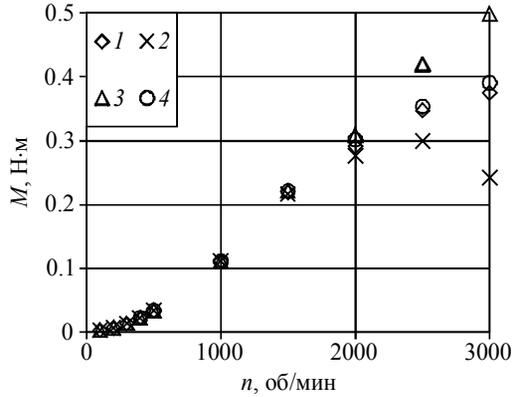


Рис. 3. Зависимость момента сил от числа оборотов завихрителя (1 – без учета сил поверхностного натяжения; 2 – нижняя граница; 3 – верхняя граница; 4 – с учетом сил поверхностного натяжения)

Fig. 3. The force moment as a function of the agitator revolution number (1, excluding the surface tension forces; 2, bottom boundary; 3, top boundary; 4, taking into account the surface tension forces)

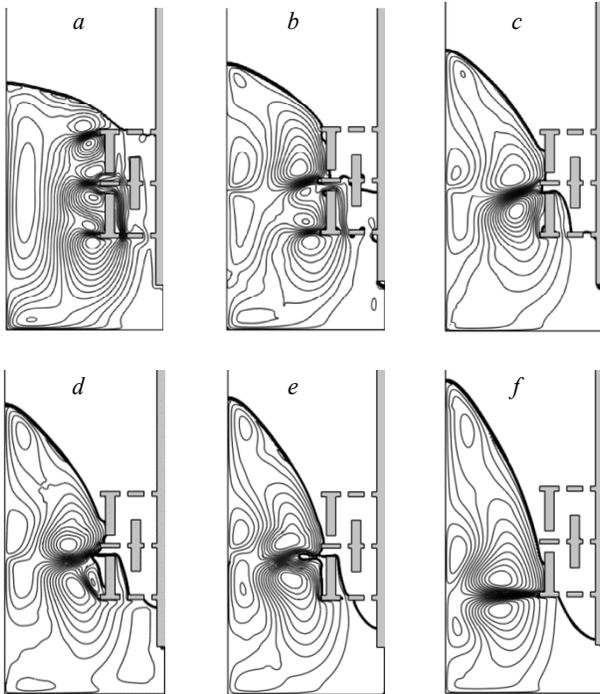


Рис. 4. Линии тока в жидком металле (a – $n = 500$; b – 1000 ; c – 1500 ; d – 2000 ; e – 2500 ; f – 3000 об/мин)

Fig. 4. Stream lines of a liquid metal, $n = (a) 500$; (b) 1000 ; (c) 1500 ; (d) 2000 ; (e) 2500 ; and (f) 3000 rpm

Оценка размеров вихрей, вызванных турбулентными пульсациями, показывает, что их значение, изменяющееся от колмогоровского масштаба $(\nu^3/\varepsilon)^{0.25}$ до $k^{1.5}/\varepsilon$ [13], не превосходит 1 см и убывает с ростом скорости вращения завихрителя до 2000 об/мин, рис. 5. Размер крупных турбулентных вихрей остается неизменным при увеличении скорости вращения завихрителя от 2000 до 3000 об/мин и лежит в пределах от 5 до 6 мм.

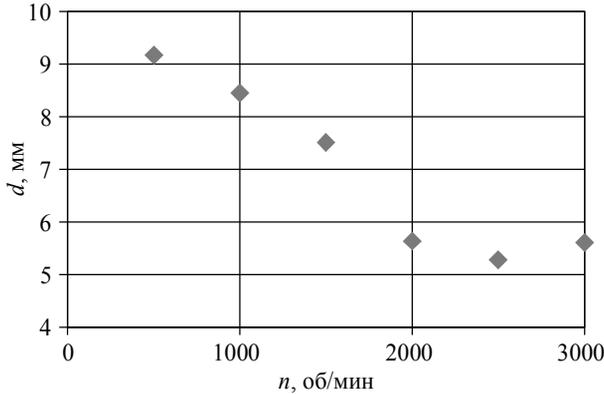


Рис. 5. Зависимость размера турбулентных вихрей от числа оборотов завихрителя

Fig. 5. Size of turbulent eddies as a function of revolution number of the agitator

Проведенные расчеты показывают, что увеличение скорости вращения завихрителя приводит к росту момента сил M , действующего на него со стороны жидкого металла, и росту турбулентной диффузии жидкого металла D_t . После достижения скорости вращения 1500 об/мин темпы роста турбулентной диффузии снижаются, что связано с уменьшением поверхности соприкосновения завихрителя и жидкого металла, рис. 6. Увеличение скорости вращения завихрителя ведет к падению работы внешних сил по отношению к кинетической энергии вращающегося жидкого металла (рис. 7), описываемое следующей зависимостью критерия мощности от числа Рейнольдса $Eu = 1.183 \exp(-4.298 \cdot 10^{-7} Re)$.

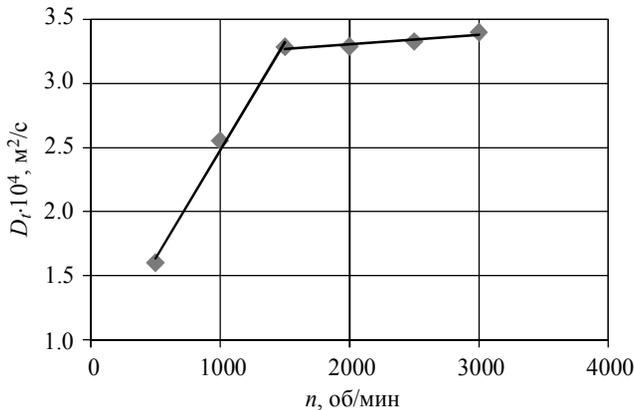


Рис. 6. Зависимость турбулентной диффузии от числа оборотов завихрителя

Fig. 6. Turbulent diffusion as a function of revolution number of agitator

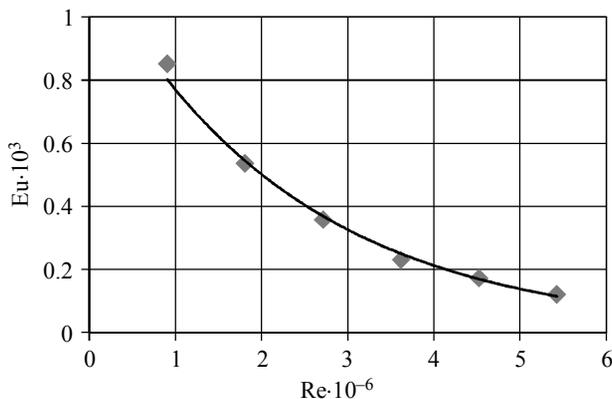


Рис. 7. Зависимость критерия мощности от числа Рейнольдса

Fig. 7. Power number vs Reynolds number

Заключение

Показано, что увеличение скорости вращения завихрителя ведет к интенсивному росту турбулентной диффузии в жидком металле до тех пор, пока поверхность раздела металл – воздух не начнет взаимодействовать с нижним перфорированным диском завихрителя.

Критерий мощности экспоненциально убывает с ростом числа Рейнольдса (скорости вращения завихрителя).

Условия, при которых элементы завихрителя погружены полностью в жидкий металл, более благоприятны для формирования мелких вихрей, чем условия, при которых поверхность раздела жидкий металл – воздух взаимодействует с элементами завихрителя.

Следует ожидать, что самые крупные вихри, сопоставимые по величине с размерами завихрителя, способны неравномерно перемешивать жидкий металл и внедренные в него микрочастицы, тогда как мелкие вихри, хотя и энергетически более слабые, могут обеспечить равномерное перемешивание, создавая участки равномерности в несколько десятков микрон.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кафаров В.В. Основы массопередачи. М.: Высшая школа, 1962. 655 с.
2. Стренк Ф. Перемешивание и аппараты с мешалками. Л.: Химия, 1975. 384 с.
3. Брагинский Л.Н., Бегачев В.И., Барабаи В.Н. Перемешивание в жидких средах: Физические основы и инженерные методы расчета. Л.: Химия, 1984. 336 с.
4. Chhabra R.P., Richardson J.F. Non-Newtonian Flow and Applied Rheology. Engineering Applications. Oxford: Elsevier, 2008. 518 p.
5. Войтович Р., Липин А.А., Талага Я. О возможности использования различных моделей турбулентности для расчета гидродинамических и энергетических характеристик аппаратов с турбинными мешалками // Теоретические основы химической технологии. 2014. Т.48. № 4. С. 386–402.
6. Войтович Р., Липин А.А., Липин А.Г. Математическое моделирование гидродинамики смесителя с эксцентрически расположенной мешалкой // Изв. вузов. Химия и химическая технология. 2015. Т. 58. № 11. С. 83–86.
7. Torre J.P., Fletcher D.F., Lasuye T. and Xuereb C. An experimental and computational study of the vortex shape in a partially baffled agitated vessel // Chemical Engineering Science. 2007. V. 62. P. 1915–1926.

8. *Hristov H.V., Boden S., Hampel U., Kryk H., Hessel G., Schmitt W.* A study on the two-phase flow in a stirred tank reactor agitated by a gas-inducing turbine // *Chemical engineering research and design*. 2008. V.86. P. 75–81.
9. Заявка на патент № 2016130836 РФ. Устройство для смешения жидкостей и порошков с жидкостью / Ворожцов А.Б., Архипов В.А., Шрагер Э.Р., Даммер В.Х., Ворожцов С.А., Хмелева М.Г. Заявлено 26.07.2016.
10. *Youngs D.L.* Time-dependent multi material flow with large fluid distortion // Morton K.W., Baines M.J. (eds.). *Numerical Modeling for Fluid Dynamics*. New York: Academic Press, 1982. P. 273–285.
11. *Патанкар С.В.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
12. *ANSYS FLUENT Tutorial Guide: Release 14.0*. 2011. ANSYS Inc.
13. *Гарбарук А.В., Стрелец М.Х., Шур М.Л.* Моделирование турбулентности в расчетах сложных течений: учебное пособие. СПб: Изд-во Политехнич. ун-та, 2012. 88 с.

Статья поступила 06.02.2017 г.

Khmeleva M.G., Dammer V.Kh., Tokhmetova A.B., Min'kov L.L. (2017) NUMERICAL INVESTIGATION OF THE VORTEX FORMATION IN A LIQUID METAL UNDER THE ACTION OF DISK AGITATOR. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 46. pp. 76–85

DOI 10.17223/19988621/46/10

A numerical study of the molten metal flow in a crucible under the action of a rotating agitator of a special shape has been performed. The turbulent flow field is described using the $k-\epsilon$ turbulence model. The position of the air–liquid metal interface was determined by the VOF method. The set of governing equations written in the frame of reference associated with the rotating agitator was solved using the ANSYS Fluent software. The convergence of the numerical solution with a mesh refinement has been demonstrated. The patterns of the molten metal flow in the crucible for different agitator speeds of rotation have been obtained. The dependences of turbulent diffusion, size of turbulent eddies, and power criterion on the speed of rotation of the agitator have been defined. The effect of interaction between the metal–air interface and elements of the agitator on the flow pattern of molten metal in the crucible has been investigated. It is shown that the conditions under which elements of the agitator are completely immersed in the liquid metal are more favorable for the formation of small vortices than the conditions under which the liquid metal–air interface interacts with agitator elements.

Keywords: molten metal flow, turbulence flow, disk agitator, diffusion coefficient.

KHMELEVA Marina Grigorievna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: khmelmg@gmail.com

DAMMER Vladislav Khristianovich (Candidate of Technical Sciences, Scientific Industrial Centre “Polyus”, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: dammer.tomsk@yandex.ru

ТОХМЕТОВА Aigerim Bauyrzhanovna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: aiko050294@mail.ru

MIN'KOV Leonid Leonidovich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: lminkov@ftf.tsu.ru

REFERENCES

1. Kafarov V.V. (1962) *Osnovy massoperedachi* [Fundamentals of mass transfer]. Moscow: Vysshaya shkola.
2. Stręk F. (1975) *Peremeshivanie i apparaty s meshalkami* [Mixing and apparatuses with agitators]. Leningrad: Khimiya.
3. Braginskiy L.N., Begachev V.I., Barabash V.N. (1984) *Peremeshivanie v zhidkikh sredakh: Fizicheskie osnovy i inzhenernye metody rascheta* [Mixing in liquid media: Physical fundamentals and engineering methods of calculation]. Leningrad: Khimiya.
4. Chhabra R.P., Richardson J.F. (2008) *Non-Newtonian flow and applied rheology. Engineering applications*. Oxford: Elsevier.
5. Wójtowicz R., Lipin, A.A., Talaga, J. (2014) On the possibility of using of different turbulence models for modeling flow hydrodynamics and power consumption in mixing vessels with turbine impellers. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 48(4). pp. 360–375. DOI: 10.1134/S0040579514020146.
6. Wójtowicz R., Lipin A.A., Lipin A.G. (2015) Numerical simulation of hydrodynamics of mixer with eccentrically positioned impeller. *Chemistry and Chemical Technology*. 58(11). pp. 83–86.
7. Torrè J.P., Fletcher D.F., Lasuye T., and Xuereb C. (2007) An experimental and computational study of the vortex shape in a partially baffled agitated vessel. *Chemical Engineering Science*. 62. pp. 1915–1926. DOI:10.1016/j.ces.2006.12.020.
8. Hristov H.V., Boden S., Hampel U., Kryk H., Hessel G., Schmitt W. (2008) A study on the two-phase flow in a stirred tank reactor agitated by a gas-inducing turbine. *Chemical Engineering Research and Design*. 86. pp. 75–81. DOI: 10.1016/j.cherd.2007.10.008.
9. Vorozhtsov A.B., Arkhipov V.A., Shragar E.R., Dammer V.Ch., Vorozhtsov S.A., Khmeleva M.G. *Ustroystvo dlya smeshivaniya zhidkostey i poroshkov s zhidkost'yu* [Device for mixing liquids and powders with liquid]. RF Patent 2016130836.
10. Youngs D.L. (1982) Time-dependent multi material flow with large fluid distortion, in: Morton K.W., Baines M.J. (eds.). *Numerical Methods in Fluid Dynamics*. New York: Academic Press. pp. 273–285.
11. Patankar S. (1980) *Numerical heat transfer and fluid flow*. Washington: Hemisphere Publ. Corp.
12. ANSYS FLUENT Tutorial Guide: Release 14.0. 2011. ANSYS Inc.
13. Garbaruk A.B., Strelets M.Kh., Shur M.L. (2012) *Modelirovanie turbulentnosti v raschiotakh slozhnykh techeniy: uchebnoe posobie* [Modeling of turbulence in calculations of complex flows: tutorial]. St. Petersburg: Izd-vo Politehnicheskogo Universiteta.

УДК 532.546
DOI 10.17223/19988621/46/11

В.Ш. Шагапов, А.С. Чиглинцева, С.В. Белова

ЗАДАЧА ОБ ОБРАЗОВАНИИ ГАЗОГИДРАТА В ЗАМКНУТОМ ОБЪЕМЕ, НАСЫЩЕННОМ ГАЗОМ И СНЕГОМ¹

Рассмотрена задача об образовании газогидрата в замкнутом объеме, в исходном состоянии, насыщенном снегом и газом. Для кинетики гидратообразования принята диффузионная схема, которая предполагает диффузию газа через гидратный слой, образующийся между фазами газа и льда (или воды), к границе контакта лед (или вода) – гидрат. Показано, что образование гидрата может происходить как при отрицательной, так и при положительной температурах, а также на точке плавления льда. Получены условия, определяющие начальное состояние системы «газ + снег», при которых происходит полный переход снега в гидратное состояние.

Ключевые слова: *образование гидрата, замкнутый объем, гидратонасыщенность, снегонасыщенность, ледяные частицы, приведенный коэффициент диффузии газа, система «газ+снег».*

Согласно геологическим исследованиям, известно, что запасы метана в виде природных гидратов сосредоточены как в зонах вечной мерзлоты, так и на больших глубинах Мирового океана [1–5] и имеют довольно большие объемы, по оценкам специалистов, порядка $2 \cdot 10^{16} \text{ м}^3$ [1, 2]. В связи с этим возникает проблема как освоения таких источников энергии, так и хранения больших объемов газа в гидратном состоянии. Согласно лабораторным экспериментам, известен эффект самоконсервации, позволяющий хранить газ при отрицательных температурах и небольших значениях давлений порядка нескольких атмосфер [4].

Существование гидратов газа в породах криолитозоны подтверждают экспериментальные исследования по образованию гидратов в поровом пространстве во влажных породах, насыщенных метаном, как при отрицательной, так и при положительной температурах [5].

Известно, что интенсивность роста гидратной пленки при контакте газа и льда, а также газа и воды в условиях стабильности гидрата зависит от качества и состава воды, льда и газа, а также наличия различных солей, примесных частиц и капиллярных добавок [2, 7]. В работах [8] была рассмотрена кинетика гидратообразования предполагающая диффузию газа через гидратную оболочку, возникающую между газом и льдом. Авторами [9] была построена модель процесса образования гидрата углекислого газа при температуре 263 К, давлении 6 МПа из ледяных шариков порядка 100 мкм. Было получено время полного перехода углекислого газа в состав гидрата, которое составило порядка 1 года.

Согласно экспериментальным данным, установлено, что гидратообразование метана и диоксида углерода из ледяного порошка при отрицательных температурах происходит в две стадии: формирование гидратных пятен и их рост на по-

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 15-11-20022).

верхности ледяных сферических частиц с последующим увеличением гидратного слоя, определяющегося диффузией газа сквозь гидратную оболочку к ледяному ядру [9–11].

Согласно имеющимся экспериментальным данным, на поверхности газовых пузырьков, всплывающих с больших глубин (порядка 500 – 2000 м) в условиях стабильности гидрата может образовываться гидратная корка [12–14].

В работах [6, 9, 15–17] экспериментально установлено и теоретически доказано, что основным механизмом образования гидрата при отрицательной температуре является диффузия газа через образующийся гидратный слой к границе контакта лед – гидрат. Следует отметить, что большинство из рассмотренных моделей имеют достаточно много эмпирических параметров, отвечающих за кинетику образования гидрата, значения которых весьма скудно представлены в литературе.

В связи с этим возникает интерес к исследованиям, касающимся описания и установления механизмов процесса гидратообразования.

Целью данной работы является математическое моделирование процесса образования газогидрата в замкнутом объеме, в исходном состоянии насыщенном снегом и газом.

Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим замкнутый объем, в исходном состоянии насыщенный снегом $S_i = S_{i0}$ и газом $S_g = S_{g0}$, при температуре T_0 , которая находится ниже точки плавления льда $T < 0$ °С, и давлении p_0 . Кроме того, начальная температура T_0 ниже температуры $T_s(p_0)$ фазового равновесия системы «газ+снег+гидрат» для исходного значения давления p_0 .

Запишем следующие уравнения сохранения масс для газа, гидрата, снега (или воды):

$$\frac{dM_g}{dt} = -J_g, \quad \frac{dM_h}{dt} = J_h, \quad \frac{dM_j}{dt} = -J_j, \quad j = i, w, \quad (1)$$

$$M_j = \rho_j^0 S_j, \quad j = g, h, i, w. \quad (2)$$

Здесь ρ_j^0, S_j ($j = g, h, i, w$) – соответственно истинные плотности и относительная объемная насыщенность фаз (индекс $j = g, h, i, w$ соответствует параметрам, относящимся соответственно к газу, гидрату, снегу и воде), J_g, J_j ($j = i, w$) – интенсивности потребления, газа и снега (или воды), которые идут на образование гидрата с интенсивностью J_h в единице объема среды.

Поскольку газогидрат является клатратным соединением с массовым содержанием газа G , то для J_g, J_h и J_j ($j = i, w$) должны выполняться следующие соотношения [18–20]:

$$J_g = GJ_h, \quad J_j = (1 - G)J_h, \quad j = i, w. \quad (3)$$

Полагая, что температуры для составляющих фаз совпадают, и используя выражения (1) и (3), уравнение притока тепла будет иметь вид

$$\frac{d}{dt}(\rho c T) = \frac{J_g}{G} l_h, \quad (4)$$

$$\rho c = \rho_g^0 S_g c_g + \rho_h^0 S_h c_h + \rho_j^0 S_j c_j, \quad (j = i, w).$$

Здесь c_j ($j = g, h, i, w$) и ρc – соответственно удельная теплоемкость фаз и удельная объемная теплоемкость системы «газ + гидрат + снег» (или «газ + гидрат + вода»), l_h – удельная теплота образования гидрата из снега (или воды), отнесенная на единицу его массы.

Снег, гидрат и воду будем считать несжимаемыми, а газ – калорически совершенным:

$$\rho_i^0, \rho_h^0, \rho_w^0 = \text{const}, \quad p = \rho_g^0 R_g T. \quad (5)$$

Этап образования гидрата при отрицательной температуре ($T < 0$ °С)

С учетом соотношения (3) из второго и третьего уравнений (1) следует интеграл

$$S_i \rho_i^0 + (1-G) S_h \rho_h^0 = \text{const}. \quad (6)$$

Если для исходного состояния ($t \leq 0$) принять $S_h = 0$ и $S_i = S_{i0}$, то из (6) имеем

$$\rho_i^0 (S_{i0} - S_i) = (1-G) S_h \rho_h^0. \quad (7)$$

На основе кинематического условия

$$S_i + S_h + S_g = 1 \quad (8)$$

из выражения (7) можем получить

$$S_h = \frac{1 - S_{i0} - S_g}{1 - \frac{\rho_h^0 (1-G)}{\rho_i^0}}, \quad S_i = S_{i0} - \frac{\rho_h^0}{\rho_i^0} (1-G) S_h.$$

Таким образом текущие величины гидратонасыщенности S_h и снегонасыщенности S_i однозначно определяются текущим значением газонасыщенности S_g .

На данном этапе образование гидрата происходит до тех пор, пока температура в замкнутом объеме не достигнет равновесной температуры гидратообразования $T_s(p)$ для соответствующего текущего давления или пока снег полностью не перейдет в состав гидрата. Если эти условия не выполняются, то будет достигаться в замкнутом объеме точка плавления льда (0 °С).

**Этап образования гидрата
на точке плавления льда ($T = 0 \text{ }^\circ\text{C}$)**

Запишем условия, которые одновременно определяют конечное (на первом этапе) и начальное (на втором этапе) состояния системы «газ + снег + гидрат»:

$$T = 0 \text{ }^\circ\text{C}, S_i = S_{(ie)}, S_g = S_{(ge)}, S_h = S_{(he)}. \quad (9)$$

Поскольку данный этап только проходит в адиабатическом режиме и все тепло, выделяемое при гидратообразовании идет на плавление льда, то уравнение баланса тепла будет иметь вид

$$\frac{dM_i}{dt} = -\frac{l_h}{l_i} \frac{dM_h}{dt}, \quad (10)$$

где l_i – удельная теплота плавления льда, отнесенная на единицу его массы.

При переходе через точку плавления льда ($T = 0 \text{ }^\circ\text{C}$), снег частично превращается в воду и частично переходит в гидратное состояние. Тогда соответствующие условия баланса массы можно записать в виде

$$\frac{dM_i}{dt} = -\frac{dM_w}{dt} - (1-G) \frac{dM_h}{dt}. \quad (11)$$

Из уравнений (10) и (11) с учетом (2) следуют интегралы

$$\rho_i^0 S_i l_i + \rho_h^0 S_h l_h = \text{const}; \quad (12)$$

$$\rho_i^0 S_i + (1-G) \rho_h^0 S_h + \rho_w^0 S_w = \text{const}. \quad (13)$$

Поскольку на данном этапе присутствуют фазы воды, снега, гидрата и газа, кинематическое соотношение, аналогично (8), запишется как

$$S_g + S_h + S_i + S_w = 1. \quad (14)$$

Принимая во внимание условия (9) с учетом (14) из (12) и (13), получим выражения для текущих значений гидратонасыщенности, снегонасыщенности и водонасыщенности в зависимости от текущей газонасыщенности:

$$S_h = \frac{\rho_w^0 (1 - S_g - S_{(ie)}) - \rho_h^0 \left((1-G) + (\rho_w^0 - \rho_i^0) \frac{l_h}{\rho_i^0 l_i} \right) S_{(he)}}{\left(\rho_w^0 - \rho_h^0 (1-G) - (\rho_w^0 - \rho_i^0) \frac{\rho_h^0 l_h}{\rho_i^0 l_i} \right)},$$

$$S_i = S_{(ie)} - \frac{\rho_h^0 l_h}{\rho_i^0 l_i} (S_h - S_{(he)}),$$

$$S_w = \frac{\rho_i^0}{\rho_w^0} (S_{(ie)} - S_i) - (1-G) \frac{\rho_h^0}{\rho_w^0} (S_h - S_{(he)}).$$

На данном этапе процесс образования гидрата завершается, если равновесная температура $T_s(p)$ для текущего значения давления достигает точки плавления льда (0°C), иначе дальнейшее образование гидрата будет происходить в области положительной температуры ($T > 0^\circ\text{C}$).

Этап образования гидрата при положительной температуре ($T > 0^\circ\text{C}$)

Начальными условиями для данного этапа будут условия характеризующие конечное состояние системы «газ+снег+вода+гидрат», которые можно записать в виде

$$T = 0^\circ\text{C}, S_i = 0, S_w = S_{(wd)}, S_g = S_{(gd)}, S_h = S_{(hd)}. \quad (15)$$

Из второго и третьего уравнений (1) следует интеграл

$$S_w \rho_w^0 + (1-G) S_h \rho_h^0 = \text{const}. \quad (16)$$

С учетом кинематического соотношения

$$S_w + S_g + S_h = 1$$

и начальных условий (15) из (16) следует выражение для текущих значений гидратонасыщенности и водонасыщенности, в зависимости от текущего значения газонасыщенности

$$S_h = \frac{(1 - S_g - S_{(wd)}) - (1-G) \frac{\rho_h^0}{\rho_w^0} S_{(hd)}}{\left(1 - \frac{\rho_h^0 (1-G)}{\rho_w^0}\right)},$$

$$S_w = S_{(wd)} - (1-G) \frac{\rho_h^0}{\rho_w^0} (S_h - S_{(hd)}).$$

Завершением процесса образования гидрата будет достижение одного из двух условий: либо вода полностью перейдет в гидратное состояние, либо температура системы «газ + вода + гидрат» достигнет равновесного значения $T_s(p)$ для текущего давления в замкнутом объеме.

В качестве зависимости равновесной температуры $T_s(p)$ гидратообразования от текущего значения давления примем выражение [18]

$$T_s(p) = T_{(s0)} + T_* \ln \left(\frac{p}{p_{(s0)}} \right), \quad (17)$$

где $T_{(s0)}$, $p_{(s0)}$ – соответственно равновесные значения температуры и давления системы «газ + снег + гидрат», T_* – эмпирический параметр, зависящий как от вида газогидрата, так и от рассматриваемых диапазонов температур и давлений.

Диффузионная кинетика гидратообразования

Примем некоторую предельную схему, согласно которой снег представляет собой сферические кристаллики льда с начальным радиусом a_{i0} . Будем полагать, что интенсивность гидратообразования лимитируется диффузией газа через твердую гидратную корку, образующуюся между фазами газа и льда (или воды), к границе контакта лед (или вода) – гидрат.

Рассмотрим одиночную гидратную частицу с внешним постоянным радиусом гидратного слоя a и внутренним радиусом a_h , меняющимся за счет процесса гидратообразования.

Если насыщенности фаз (снега и воды) для одной частицы принять S'_j , тогда начальная снегонасыщенность S_{i0} и текущая снегонасыщенность (или водонасыщенность) S_j могут быть связаны следующим образом:

$$S_j = S'_j S_{i0}, \quad j = i, w, \quad (18)$$

где

$$S'_j = \frac{a_h^3}{a^3}. \quad (19)$$

Подставляя (19) в (18), получим выражение для текущего значения внутреннего радиуса гидратного слоя a_h от текущего значения снегонасыщенности (или водонасыщенности)

$$a_h = a_{i0} \sqrt[3]{S_j / S_{i0}}, \quad j = i, w.$$

В случае, когда образование гидрата проходит через точку плавления льда, полагаем, что образуется водное ядро с радиусом a_w в центре гидратной частицы. Тогда текущие значения для снегонасыщенности и водонасыщенности для одной частицы могут быть соответственно записаны

$$S'_i = \frac{a_h^3 - a_w^3}{a^3}; \quad (20)$$

$$S'_w = \frac{a_w^3}{a^3}. \quad (21)$$

Подставляя (21) в (20) и используя выражение (18), получим выражение для внутреннего радиуса гидратного слоя гидратной частицы через текущие значения снегонасыщенности и водонасыщенности

$$a_h = a_{i0} \sqrt[3]{(S_i + S_w) / S_{i0}}.$$

Поскольку скорость образования гидрата лимитируется диффузией газа через образовавшийся гидратный слой (с внешним радиусом a и внутренним радиусом a_h) между газом и снегом (или водой), то такой газ со средней плотностью ρ'_g в гидрате будем называть диффундирующим газом. Запишем уравнение диффузии [16, 21]

$$\frac{\partial \rho_g'}{\partial t} = \frac{D_g}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \rho_g'}{\partial r} \right) \quad (a_h < r < a). \quad (23)$$

Далее будем использовать квазистационарное решение уравнения (23), полагая, что $\partial \rho_g' / \partial t = 0$ при следующих граничных условиях:

$$\rho_g' = \rho_{g(s)}, \quad r = a; \quad \rho_g' = 0, \quad r = a_h. \quad (24)$$

Такое решение имеет вид

$$\rho_g' = \frac{\rho_{g(s)}(r - a_h)}{r \left(1 - \frac{a_h}{a} \right)}. \quad (25)$$

Здесь $\rho_{g(s)}$ – концентрация насыщения подвижного газа в составе гидрата.

Запишем выражение для потока массы газа к поверхности контакта между льдом (или водой) и гидратом, отнесенного на единицу площади ледяного (или водного) сферического шарика

$$j_g = -D_g \left(\frac{\partial \rho_g'}{\partial r} \right)_{a_h}.$$

Подставляя сюда решение (25), получим выражение для интенсивности потребления газа, идущего на образование гидрата, отнесенное на единицу площади ледяной частицы (или водного ядра):

$$j_g = \frac{D_g \rho_{g(s)}}{a_h \left(1 - \frac{a_h}{a} \right)}. \quad (26)$$

Число ледяных сфер с радиусом a_{i0} в единице объема запишем в виде

$$n = \frac{3S_{i0}}{4\pi a_{i0}^3}. \quad (27)$$

Тогда удельная площадь поверхности контакта между фазами льда (или воды) и гидрата представим как

$$S = 4\pi a_h^2 n. \quad (28)$$

Учитывая (26) – (28) и полагая неизменным внешний радиус гидратной частицы, получим выражение для интенсивности расхода газа, отнесенной на единицу объема:

$$J_g = \frac{3S_{i0} D_g \rho_{g(s)}}{a_0^2 \left(\frac{a_0}{a_h} - 1 \right)}. \quad (29)$$

Здесь $\rho_{g(s)}$ и D_g являются неизвестными эмпирическими параметрами. Поэтому

введем один эмпирический параметр, приведенный коэффициент диффузии для газа, отвечающий за кинетику образования гидрата в виде

$$D = \frac{D_g \rho_{g(s)}^0}{\rho_g} . \tag{30}$$

Тогда выражение (29) с учетом (30) примет вид

$$J_g = \frac{3S_{i0} D \rho_g^0}{a_0^2 \left(\frac{a_0}{a_h} - 1 \right)} .$$

Принятая в работе схема гидратообразования позволяет описать процесс перехода снега (или воды) в гидратное состояние введением только одного параметра – приведенного коэффициента диффузии D . Такая кинетика в плане описания качественной и количественной картины процесса образования гидратной частицы из газа и снега (или воды) неплохо согласуется с опытными данными и теоретическими расчетами по описанным моделям в работах [9–11].

Однако, как было отмечено выше, согласно лабораторным исследованиям, образование гидрата зависит от многих факторов, связанных как с качеством и состоянием гидратообразующих компонент, так и с термобарическими условиями. В связи с этим, коэффициент диффузии газа через гидратный слой, который отвечает за кинетику гидратообразования, может принимать различные значения, которые вообще говоря, неизвестны и требуют определения. Поэтому, чтобы полученная система уравнений была не зависима от приведенного коэффициента диффузии, введем следующий безразмерный параметр:

$$\tau = t/t_0 , \quad (t_0 = a_0^2/D) .$$

Результаты численных расчетов

Для теплофизических параметров, газа, льда, воды и гидрата были приняты следующие значения:

$$G = 0.12 , \quad R_g = 520 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К}) , \quad \rho_h^0 = 910 \text{ кг}/\text{м}^3 , \quad \rho_i^0 = 900 \text{ кг}/\text{м}^3 ,$$

$$\rho_w^0 = 1000 \text{ кг}/\text{м}^3 , \quad c_w = 4200 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К}) , \quad c_g = 1800 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К}) ,$$

$$c_h = 2050 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К}) , \quad l_i = 3.3 \cdot 10^5 \text{ Дж}/\text{кг} .$$

Для равновесной температуры и соответствующего давления, а также эмпирического параметра, входящих в формулу (17), и для удельной теплоты образования гидрата были приняты следующие значения:

а) при $T < 0 \text{ }^\circ\text{C}$: $T_{(s0)} = 263 \text{ К}$, $p_{(s0)} = 1.86 \text{ МПа}$, $T_* = 31 \text{ К}$, $l_h = 1.5 \cdot 10^5 \text{ Дж}/\text{кг}$;

б) при $T > 0 \text{ }^\circ\text{C}$: $T_{(s0)} = 273 \text{ К}$, $p_{(s0)} = 2.56 \text{ МПа}$, $T_* = 10 \text{ К}$, $l_h = 5 \cdot 10^5 \text{ Дж}/\text{кг}$ [1–3].

Для температуры, давления и радиуса сферических ледяных частиц, характеризующих начальное состояние системы «газ + снег», принимались соответственно следующие значения: $T_0 = 243 \text{ К}$, $p_0 = 10 \text{ МПа}$, $a_0 = 10^{-5} \text{ м}$. Равновесная температура для соответствующего начального значения давления согласно формуле (17) на графиках обозначена штриховой линией.

На рис. 1 представлены зависимости температуры и давления, насыщенностей газа, льда, гидрата от безразмерного времени τ для начальной снегонасыщенности $S_{i0} = 0.6$. Из графиков видно, что процесс образования гидрата из снега и газа завершается в области отрицательных температур при достижении в замкнутом объеме равновесной температуры гидратообразования $T_s(p)$. При этом конечное состояние системы «газ+снег» представлено фазами снега, газа и гидрата.

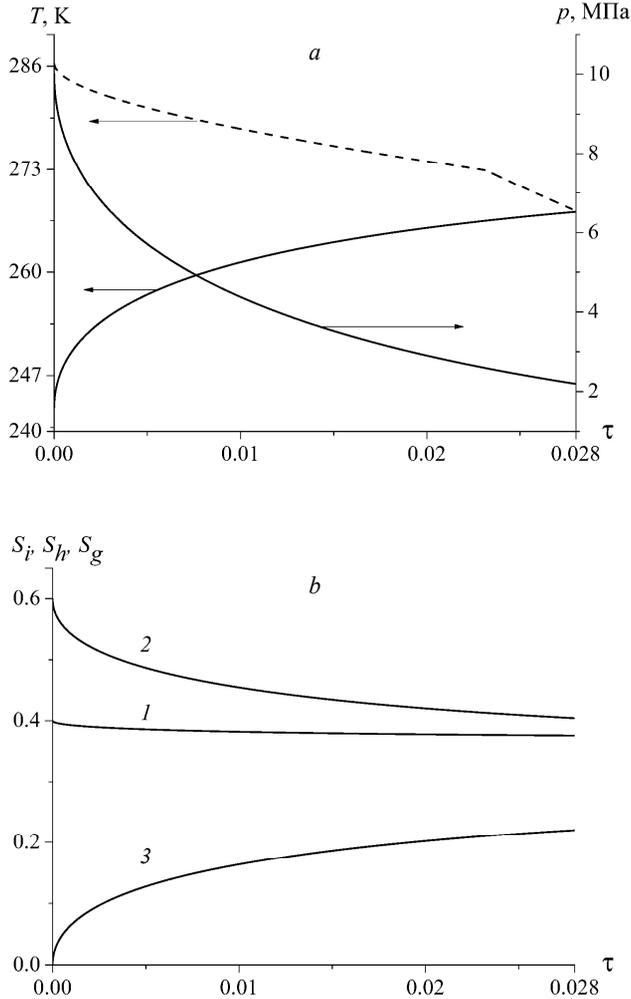


Рис. 1. Зависимость температуры и давления (а), насыщенности (b): 1 – газа, 2 – льда и 3 – гидрата в замкнутом объеме от безразмерного времени τ

Fig. 1. Dependence of the (a) temperature, pressure, and (b) saturation: 1, gas; 2, ice; and 3, hydrate in a closed volume on dimensionless time τ

На рис. 2 иллюстрируется процесс полного перехода снега в гидратное состояние, где для начальных параметров давления, температуры и снегонасыщенности были приняты соответственно следующие значения: $p_0 = 50$ МПа, $T_0 = 243$ К и $S_{i0} = 0.6$.

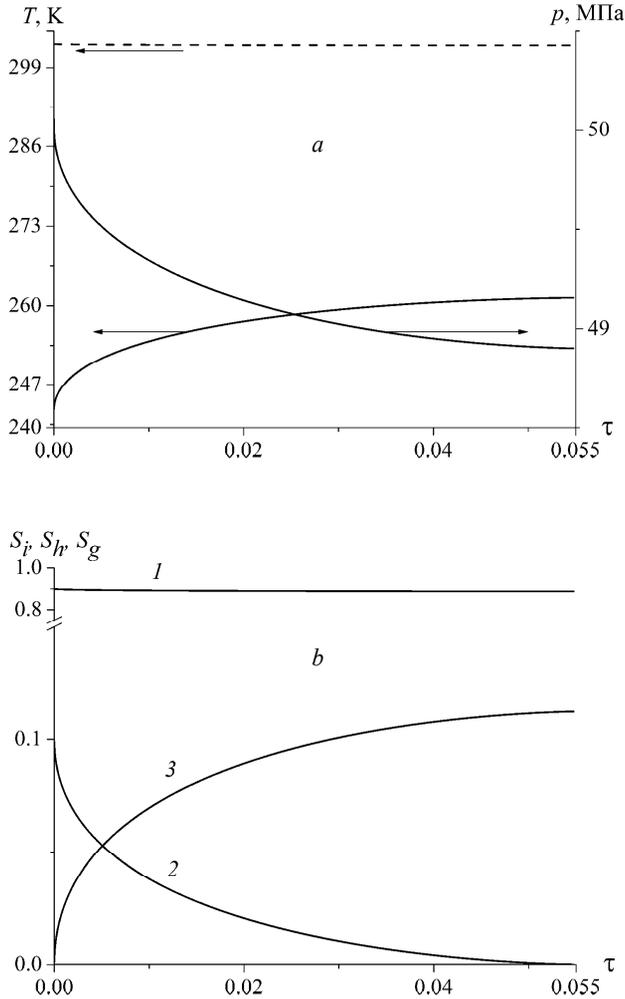


Рис. 2. Зависимость температуры и давления (а), насыщенности (b): 1 – газа, 2 – льда и 3 – гидрата в замкнутом объеме от безразмерного времени τ

Fig. 2. Dependence of the (a) temperature, pressure, and (b) saturation: 1, gas; 2, ice; and 3, hydrate in a closed volume on dimensionless time τ

На рис. 3 и 4 представлены аналогичные зависимости, что и на рис. 1, для случаев, когда начальные снегонасыщенности соответственно равны $S_{i0} = 0.4$ и $S_{i0} = 0.2$. При указанных выше начальных параметрах системы «газ+снег», из рис. 3 видно, что образование гидрата проходит через два этапа и завершается при достижении равновесной температуры $T_s(p)$ точки плавления льда (0°C), при этом в конечном состоянии одновременно присутствуют фазы газа, льда, воды и гидрата.

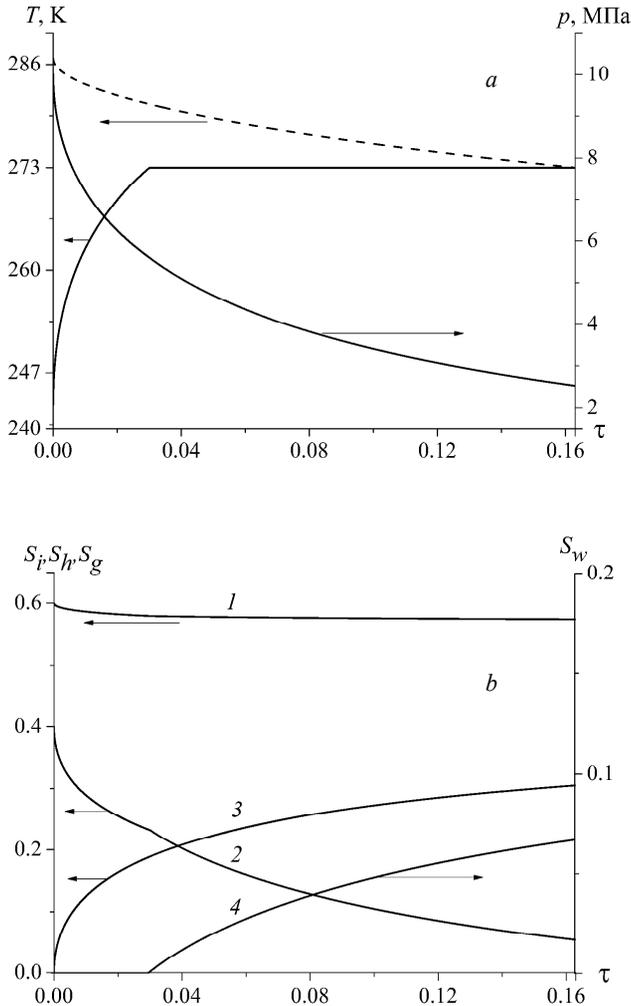


Рис. 3. Зависимость температуры и давления (а), насыщенности (b): 1 – газа, 2 – льда, 3 – гидрата и 4 – воды в замкнутом объеме от безразмерного времени τ

Fig. 3. Dependence of the (a) temperature, pressure, and (b) saturation: 1, gas; 2, ice; 3, hydrate; and 4, water in a closed volume on dimensionless time τ

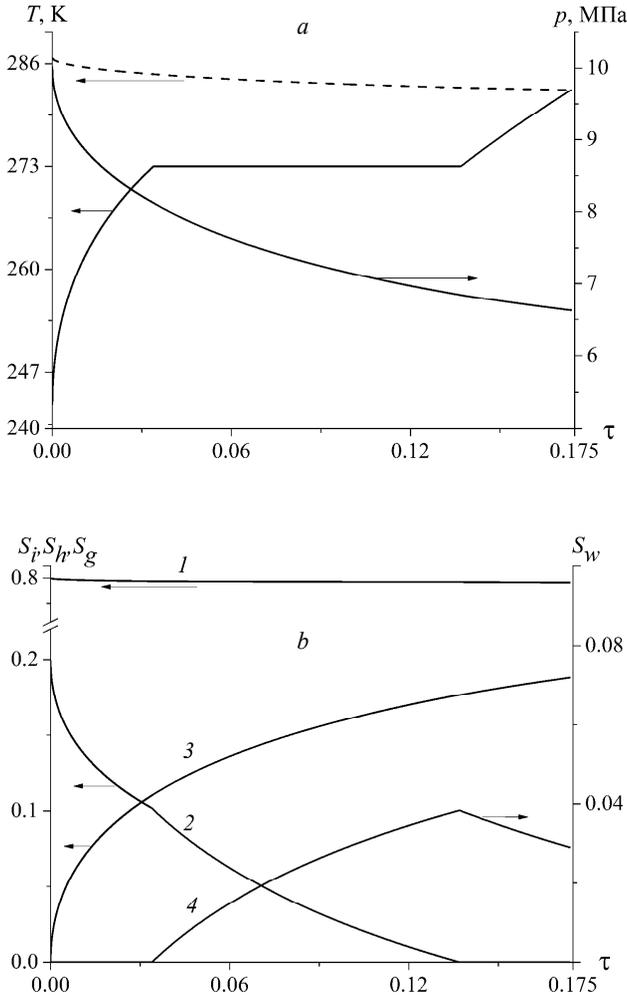


Рис. 4. Зависимость температуры и давления (а), насыщенностей (b): 1 – газа, 2 – льда, 3 – гидрата и 4 – воды в замкнутом объеме от безразмерного времени τ
Fig. 4. Dependence of the (a) temperature, pressure, and (b) saturation: 1, gas; 2, ice; 3, hydrate; and 4, water in a closed volume on dimensionless time τ

Из рис. 4 видно, что процесс гидратообразования проходит в три этапа и завершается при достижении температуры равновесного значения в положительной области, причем в конечном состоянии присутствуют фазы газа, воды и гидрата.

Установлено, что образование гидрата может проходить в три этапа и завершаться в области положительных температур при начальной снегонасыщенности $S_{i0} = 0.2$ и давлении $p_0 = 50$ МПа. При этом происходит полный переход снега в гидратное состояние, что проиллюстрировано на рис. 5.

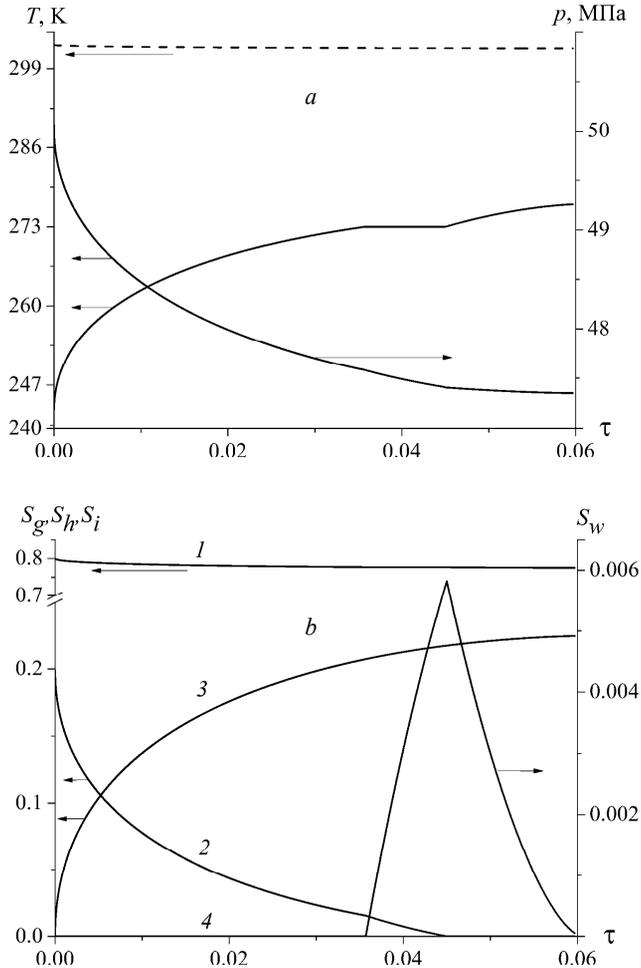


Рис. 5. Зависимость температуры и давления (а), насыщенностей (b): 1 – газа, 2 – льда, 3 – гидрата и 4 – воды в замкнутом объеме от безразмерного времени τ

Fig. 5. Dependence of the (a) temperature, pressure, and (b) saturation: 1, gas; 2, ice; 3, hydrate; and 4, water in a closed volume on dimensionless time τ

Заключение

В работе изучен процесс гидратообразования в замкнутом объеме, в исходном состоянии насыщенном снегом и газом. Получены распределения температуры, давления и насыщенностей фаз, зависящие от безразмерного параметра. Получены условия, определяющие исходное состояние системы «газ + снег», при которых происходит полный переход снега в гидратное состояние.

ЛИТЕРАТУРА

1. Макогон Ю.Ф. Гидраты природных газов. М.: Недра, 1974. 208 с.
2. Истомин В.А., Якушев В.С. Газовые гидраты в природных условиях. М.: Недра, 1992. 236 с.
3. Sloan E.D., Koh C.A. Clathrate hydrates of natural gases. 3rd ed. CRC Press, Taylor & Francis group, 2008. 119 p.
4. Истомин В.А., Нестеров А.Н., Чувилин Е.М., Квон В.Г., Решетников А.М. Разложение гидратов различных газов при температурах ниже 273 К // Газохимия. 2008. № 3. С. 30–44.
5. Чувилин Е.М., Козлова Е.В. Исследования формирования мерзлых гидратосодержащих пород // Криосфера Земли. 2005. Т. IX. № 1. С. 73–80.
6. Liu W., Chen Y., Zhu Y., Song Y., Li Y., Li Q., Wang L. Effects of Different Mining Methods on the Strength Behavior of Gas Hydrate-Bearing Sediments // The 6th International Conference on Applied Energy – ICAE2014 Energy Procedia 61 (2014). P. 547–551.
7. Нестеров А.Н. Кинетика и механизмы гидратообразования газов в присутствии поверхностно-активных веществ: дис. ... докт. хим. наук. Тюмень, 2006.
8. Бык С.Ш., Макогон Ю.Ф., Фомина В.И. Газовые гидраты. М.: Химия, 1980. 296 с.
9. Staykova D.K., Kuhs W.F., Salamatin A.N., Hansen T. Formation of Porous Gas Hydrate from Ice Powders: Diffraction Experiments and Maltistage Model // J. Phys. Chem. B. 2003. V. 107. No. 37. P. 10299–10311.
10. Кухс В.Ф., Саламатин А.Н. Образование газовых гидратов в ледяных порошках: кинетика, стадии роста, эффекты полидисперсности // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов. Казань, 20–24 августа 2015 г. – С. 2222–2224.
11. Kuhs W.F., Staykova D.K., Salamatin A.N. Formation of Methane Hydrate from Polydisperse Ice Powders // J. Phys. Chem. B. 2006. V. 110. No. 26. P. 13283–13295.
12. McGinnis D.F., Greinert J., Artemov Y., Beaubien S. Fate of rising methane bubbles in stratified waters: How much methane reaches the atmosphere? // J. Geophysical Research. 2006. V. 111. P. 382 – 386.
13. Rehder G., Brewer P.W., Peltzer E.T., Friederich G. Enhanced lifetime of methane bubble streams within the deep ocean // Geophysical Research Letters. 2002. V.29. No. 15. P. 21–24.
14. Шагапов В.Ш., Чиглицева А.С., Русинов А.А. О механизмах роста гидратной оболочки на поверхности всплывающих газовых пузырьков // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 3(35). С. 73–86.
15. Xiaoping Wang, Arthur J. Schultz, and Yuval Halpern. Kinetics of Methane Hydrate Formation from Polycrystalline Deuterated Ice // J. Phys. Chem. A. 2002. V. 106. No. 32. P. 7304–7309.
16. Власов В.А. Диффузионно-феноменологическая теория образования газового гидрата из ледяного порошка // Теоретические основы химической технологии. 2012. Т. 46. № 6. С. 612–619.
17. Liu W., Li Q., Song Y., Zhang L., Yang M., Wang L., Chen Y. Diffusion theory of formation of gas hydrate from ice powder without melting // Energy Procedia. 2014. V. 61. P. 513–522.
18. Хасанов М.К. Исследование режимов образования газогидратов в пористой среде, частично насыщенной льдом // Теплофизика и аэромеханика. 2015. Т. 22. № 2. С. 255–266.
19. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред: в 2 ч. М.: Наука, 1987. 360 с.
20. Шагапов В.Ш., Тазетдинов Б.И., Нурисламов О.Р. К теории образования и разложения газогидратных частиц в процессе их всплытия в воде // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 6 (26). С. 106–113.
21. Рафикова Г.Р. Образование газогидрата в замкнутом объеме, заполненном водонасыщенной пористой средой // Вестник Кемеровского государственного университета. 2015. Вып. 2(62). Т. 2. С. 122–127.

Shagapov V.Sh., Chiglintseva A.S., Belova S.V. (2017) THE PROBLEM OF GAS HYDRATE FORMATION IN A CLOSED VOLUME SATURATED WITH GAS AND SNOW. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 46. pp. 86–101

DOI 10.17223/19988621/46/11

The problem of gas hydrate formation in a closed volume initially saturated with snow and gas is considered. The scheme accepted for the kinetics of hydrate formation supposes that the gas diffuses through the hydrate layer between the gas and ice (or water) phases to the ice (or water)–hydrate interface. This scheme also allows one to describe the process of hydrate formation by introducing only one parameter, namely, the reduced diffusion coefficient which can take different values depending on the quality and state of the ice, as well as "purity" of the hydrate-forming gas. In this connection, the obtained solutions demonstrate that the distributions of main parameters depend on the dimensionless time and do not depend on the reduced diffusion coefficient. It is shown that at the various stages of the ice state (at negative or positive temperatures and melting point of ice), the hydrate formation can occur depending on the initial snow saturation.

Keywords: hydrate formation, closed volume, hydrate saturation, snow saturation, icy particles, reduced coefficient of gas diffusion, «gas+snow» system.

SHAGAPOV Vladislav Shaykhulagzamovich (Academician of Academy of Sciences of RB, Doctor of Physics and Mathematics, Birsky branch "Bashkir State University", Birsk, Russian Federation; Researcher Institute of Mechanics and Engineering, Kazan, Russian Federation; Researcher Institute of Mechanics, Kazan, Russian Federation).
E-mail: Shagapov@rambler.ru

CHIGLINTSEVA Angelina Sergeevna (Candidate of Physics and Mathematics, Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Science Center, Russian Academy of Sciences, Kazan, Russian Federation; Bashkir State University, Birsk, Russian Federation)
E-mail: changelina@rambler.ru

BELOVA Svetlana Vladimirovna (Bashkir State University, Birsk, Russian Federation)
svetlanav.86@mail.ru

REFERENCES

1. Makogon Yu.F. (1974) *Gidraty prirodnykh gazov* [Hydrates of natural gases]. Moscow: Nedra.
2. Istomin V.A., Yakushev V.S. (1992) *Gazovye gidraty v prirodnykh usloviyakh* [Gas hydrates in the natural environment]. Moscow: Nedra.
3. Sloan E.D., Koh C.A. (2008) *Clathrate hydrates of natural gases*. 3rd ed. CRC Press, Taylor & Francis group.
4. Istomin V.A., Nesterov A.N., Chuvilin E.M., Kvon V.G., Reshetnikov A.M. (2008) Razlozhenie gidratov razlichnykh gazov pri temperaturakh nizhe 273 K [Decomposition of hydrates of different gases at temperatures below 273 K]. *Gazokhimiya*. 3. pp. 30–44.
5. Chuvilin E.M., Kozlova E.V. (2005) Issledovaniya formirovaniya merzlykh gidratosoderzhashchikh porod [Research of formation of frozen gas hydrate-saturated sediment]. *Kriosfera Zemli – Earth Cryosphere*. 1. pp. 73–80.
6. Liu W., Chen Y., Zhu Y., Song Y., Li Y., Li Q., Wang L. (2014) Effects of different mining methods on the strength behavior of gas hydrate-bearing sediments. *The 6th International Conference on Applied Energy. ICAE 2014 Energy Procedia*. 61. pp. 547–551. DOI: 10.1016/j.egypro.2014.11.1167.
7. Nesterov A.N. (2006) *Kinetika i mekhanizmy gidratoobrazovaniya gazov v prisutstvii poverkhnostno-aktivnykh veshchestv* [Kinetics and mechanisms of gas hydrate formation in the presence of surface-active substances]. Chem. Doct. Diss. Tyumen'.

8. Byk S.Sh., Makogon Yu.F., Fomina V.I. (1980) *Gazovye gidraty* [Gas hydrates]. Moscow: Khimiya.
9. Staykova D.K., Kuhs W.F., Salamatin A.N., Hansen T. (2003) Formation of porous gas hydrate from ice powders: diffraction experiments and maltistage model. *J. Phys. Chem. B.* 107(37). pp. 10299–10311. DOI: 10.1021/jp027787v.
10. Kuhs W.F., Salamatin A.N. (2015) Obrazovanie gazovykh gidratov v ledyanykh poroshkakh: kinetika, stadii rosta, efekty polidispersnosti [Formation of gas hydrates in the ice powders: kinetics, growth stages, and polydispersity effects]. *XI Vserossiyskiy s'ezd po fundamental'nykh problemam teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki: sbornik trudov. Kazan' – XI all-Russian Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics: Proceedings. Kazan.* pp. 2222 – 2224.
11. Kuhs W.F., Staykova D.K., Salamatin A.N. (2006) Formation of methane hydrate from polydisperse ice powders. *J. Phys. Chem. B.* 110(26). pp. 13283–13295. DOI: 10.1021/jp061060f.
12. MgGinnis D.F., Greinert J., Artemov Y., Beaubien S.E., Wuest A. (2006) Fate of rising methane bubbles in stratified waters: How much methane reaches the atmosphere? *Journal of Geophysical Research.* 111(C9). pp. 382–397. DOI: 10.1029/2005JC003183.
13. Rehder G, Brewer P.W., Peltzer E.T., Friederich G. (2002) Enhanced lifetime of methane bubble streams within the deep ocean. *Geophysical Research Letters.* 29(15). pp. 21-1 – 21-4. DOI: 10.1029/2001GL013966.
14. Shagapov V.Sh., Chiglintseva A.S., Rusinov A.A. (2015) O mekhanizmax rosta gidratnoy obolochki na poverkhnosti vsplyvayushchikh gazovykh puzyr'kov [On mechanisms of the hydrate shell growth on the surface of supernatant gas bubbles]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 3(35). pp. 73–86. DOI: 10.17223/19988621/35/10.
15. Wang X., Schultz A.J., Halpern Y. (2002) Kinetics of methane hydrate formation from polycrystalline deuterated ice. *J. Phys. Chem. A,* 106(32). pp. 7304–7309. DOI: 10.1021/jp025550t.
16. Vlasov V.A. (2012) Phenomenological diffusion theory of formation of gas hydrate from ice powder. *Theor. Found. Chem. Eng.* 46(6). pp. 576–582. DOI: 10.1134/S0040579512060243.
17. Liu W., Li Q., Song Y., Zhang L., Yang M., Wang L., Chen Y.. (2014) Diffusion theory of formation of gas hydrate from ice powder without melting. *Energy Procedia.* 61. pp. 513–522. DOI: 10.1016/j.egypro.2014.11.1161
18. Khasanov M.K. (2015) Investigation of regimes of gas hydrate formation in a porous medium, partially saturated with ice. *Thermophysics and Aeromechanics.* 22(2). pp. 245–255. DOI: 10.1134/S0869864315020109.
19. Nigmatullin R.I. (1987) *Dinamika mnogofaznykh sred* [Dynamics of multiphase media]. Moscow: Nauka.
20. Shagapov V.Sh., Tazetdinov B.I., Nurislamov O.R. (2013) K teorii obrazovaniya i razlozheniya gazogidratnykh chastits v protsesse ikh vsplytiya v vode [A contribution to the theory of gas hydrate particle formation and decomposition in the process of their ascent in water]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 6(26). pp. 106–113.
21. Rafikova G.R. (2015) Obrazovanie gazogidrata v zamknutom ob'eme, zapolnennom vodonasyshchennoy poristoy sredoy [Gas hydrate formation in a closed volume filled with porous water-saturated medium]. *Vestnik Kemerovskogo gosudarstvennogo universiteta – Bulletin of Kemerovo State University.* V. 2. No. 2 (62). pp. 122–127.

МЕМУАРЫ, ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ, ПЕРСОНАЛИИ

УДК 378.4 : 51(571.16)

DOI 10.17223/19988621/46/12

В.Н. Берцун, Е.С. Косова

О ПЕРВОМ ЦЕНТРЕ ВЫСШЕГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В СИБИРИ

Приводятся основные этапы создания с 1917 года на физико-математическом факультете Томского университета системы подготовки специалистов с высшим математическим образованием для сибирского региона. Значительный вклад в создание этой системы внесли: Ф.Э. Молин, Н.Н. Горячев, В.Л. Некрасов, Л.А. Вишневецкий, Н.П. Романов, Ф.М. Нетер, Н.Н. Яненко, П.П. Куфарев и др. В начале прошлого века в Томске стал осуществляться выпуск специалистов по математике, механике, астрономии и прикладной математике.

Ключевые слова: *первый сибирский университет, математическое образование, компьютерные науки.*

С конца XIX века Томск постепенно становится крупным научно-образовательным центром Сибири [1].

Истоки высшего математического образования в Сибири неразрывно связаны с открытием Томского университета (ТГУ, 1888 г.) и Томского технологического института (ТТИ, 1900 г.), на открытии которого 22 октября 1900 г. была прочитана лекция по аналитической геометрии выпускником Казанского университета В.Л. Некрасовым. На должность заведующего кафедрой математики ТТИ в 1901 г. был приглашен Ф.Э. Молин. Он был первым профессором математики в Сибири, который принес в студенческий Томск красоту и строгость этой науки [2, 3]. Его научные работы по математике получили мировое признание еще в конце XIX века. Активная научная работа В. Л. Некрасова позволила ему в 1907 г. издать в Томске первую на русском языке книгу по теории множеств [4], а в 1908 г. защитить в МГУ магистерскую диссертацию на степень магистра чистой математики. По инициативе профессоров Томских вузов в 1910 г. в городе были открыты Сибирские высшие женские курсы, где в 1911 г. появилось и первое в Сибири математическое отделение

Профессиональное высшее математическое образование в Сибири началось с постановления Временного правительства об открытии 1 июля 1917 г. в Томском университете физико-математического факультета (ФМФ). Это был один из четырех факультетов, перечисленных в Общем Уставе Императорских Российских университетов еще в 1884 г. На факультете открыли четыре кафедры (чистой математики, теоретической и практической механики, астрономии и геодезии, органической химии) и два отделения (физико-математическое и естественнонаучное). ТГУ стал первым вузом Сибири, открывшим подготовку математиков,

механиков-теоретиков и астрономов на основе фундаментального математического образования. Занятия на ФМФ начались 2 октября 1917 г. Первую лекцию по истории математики («Начала математики в России и первые профессора математики») на ФМФ прочитал профессор В.Л. Некрасов, в которой он определил математику как науку о красоте. Таким образом, в 2017 г. исполняется 100 лет с момента возникновения первого центра высшего математического образования в Сибири. На первый курс физико-математического отделения в 1917 г. было принято 100 студентов на четырехлетнее обучение. Из них в 1921 г. диплом получили только четверо, а остальным закончить университет помешала Гражданская война. На открывшемся факультете стали преподавать известные ученые [5–7]: Ф.Э. Молин, К.Д. Покровский (1919–1920 г.), Н.И. Порфирьев (1918–1920 гг.), И.М. Виноградов (1920 г.), Г.А. Шайн (1920 г.), Н.Н. Семенов (1919–1920 гг.), Н.Н. Горячев, В.Л. Некрасов, В.А. Малеев, Л.А. Вишневский и др. В этот период существенное влияние на создание основы стройной системы подготовки математиков и проведение научных исследований в области теоретической математики, оказал профессор Ф.Э. Молин. Выпускник ФМФ МГУ (1905 г.) профессор Н.Н. Горячев стал инициатором появления в Томске исследований по вычислительной математике. Отметим, что впервые в мире лекции о приближенных вычислениях прочел академик А.Н. Крылов в 1906 г., а в 1920 г. Н.Н. Горячев первым в Сибири начал читать на ФМФ ТГУ спецкурс «Методы приближенных вычислений». В 1923 г. в ТГУ появилась и астрономическая обсерватория, основателем и первым руководителем которой также был профессор Н.Н. Горячев. Об уровне подготовки математиков 20-х годов на ФМФ, можно судить по вопросам, сформулированным в экзаменационных билетах по математике. Ниже приведен один из таких билетов в 1926/27 уч. году [8].

Билетъ II

1. Формула Фурье для выражения функции въ видъ кратнаго интеграла.
2. Интеграція системъ обыкновенныхъ уравненій; сведеніе к интегрированію одного обыкновеннаго уравненія.
3. Два случая, когда уравненіе Эйлера – Лагранжа интегрируется непосредственно.
4. Кратчайшее расстояніе между двумя точками.
5. Вероятность сложныхъ событій при многократномъ повтореніи опыта.
6. Формула Эйлера для перехода отъ суммы къ интегралу и обратно.

В сентябре 1931 г. заведующими физико-математических специальностей были назначены [9]:

- Прикладная математика (уклон № 1) – проф. В.А. Малеев,
- Прикладная математика (уклон № 2) – проф. Л.А. Вишневский,
- Исследование материалов – проф. В.Д. Кузнецов,
- Электро-магнитные колебания – доц. В.Н. Кессених,
- Астрономия и геодезия – проф. Н.Н. Горячев.

По инициативе профессора Вишневского в 1930 г. при университете создается вычислительное бюро, в котором были начаты работы по расчету траектории полета снарядов и составлению баллистических таблиц, а уже в 1931 г. на математическом отделении состоялся первый в Сибири выпуск по специальности при-

кладная математика (математический уклон № 2). Для этой специальности были поставлены следующие задачи: «подготовка научно-педагогических кадров для высшей школы, а также специалистов высокой квалификации для всякого рода вычислительных работ и математических разработок конкретных вопросов техники и естествознания» [10]. В 1931 г. по такой специальности ФМФ (физико-механический факультет в 1930/31 году), например, окончили [5]: П.П. Куфарев, М.С. Горохов и др. В свидетельствах об окончании четырехлетнего обучения по этой специальности содержалось 42 теоретических курса.

В 1933 г. ТГУ перешел на факультетскую систему управления из 4 факультетов, а отделения были упразднены. В учебные планы на всех факультетах была введена педагогическая практика. За ФМФ были закреплены специальности: математика, теория упругости, астрономия, геодезия и гравиметрия, теоретическая физика, экспериментальная и теоретическая физика.

В тридцатые годы Томск по-прежнему оставался единственным местом за Уралом, в вузах которого работали известные высококвалифицированные математики, механики и астрономы. Их активная научно-исследовательская деятельность способствовала тому, что 13 мая 1932 г. по решению Совнаркома РСФСР в ТГУ был открыт Научно-исследовательский институт математики и механики (НИИММ), директором которого стал Л. А. Вишневский. Создание НИИММ дало новый импульс активизации научных исследований в области математики и механики, укреплению связей томских математиков и механиков с научными коллективами не только в СССР, но и за рубежом.

В конце 1934 г. в Томский университет были приглашены эмигрировавшие из Германии математики – профессора Ф.М. Нётер и С.Б. Бергман, что привело к появлению на ФМФ и в НИИММ новых перспективных тем научных исследований в области математики и ее приложений [11, 12]. Институт с 1935 г. начал издавать «Известия НИИММ» – первый в Сибири научный журнал по математике и механике, ответственным редактором которого был Ф.Э. Молин. Журнал стал публиковать оригинальные работы отечественных и зарубежных математиков и механиков. Например, в его выпусках есть статьи А.Н. Колмогорова, С.Н. Бернштейна, Дж. Неймана и А. Эйнштейна. В 1936 г. Ф.М. Нётер без защиты была присвоена степень доктора физико-математических наук. Его сыновья Герман и Готфрид учились в ТГУ, но после ареста отца они уехали из Томска в 1938 г. [13, 14]. На фото 1 представлен фрагмент зачетной карты № 3125 студента ФМФ Готфрида Нётер с оценками за третий курс [14].

III-й КУРС 1936/37 уч. года		Оценки успеваемости
Наименование предметов		
1. Теоретич. механ.	100%	отл. 3-1-37
2. Физич. анализ	24%	отл. 1-1-37
3. Упр. частн. прикл.	54% 27%	отл. 3-1-37
4. Теория групп	отлично	отл. 3-1-37
5. Физич. механика	отлично	отл. 3-1-37
6. Вариац. исчисление	отлично	отл. 3-1-37
7. Аналит. геометрия	отлично	отл. 3-1-37
8. Математическая физика	отлично	отл. 3-1-37

Фото 1. Фрагмент зачетной карты Готфрида Нётер

Математики Томска активно пропагандировали математические знания и среди молодежи Томска как средство поиска одаренных школьников для поступления на ФМФ. С этой же целью еще 1935 г., впервые в Сибири на ФМФ ТГУ (А.С. Кованько, И.И. Чистяков, Б.А. Фукс) была проведена математическая олимпиада для школьников, упоминание о которой содержится в университетской газете «За качество кадров» [15]. Идея проведения таких олимпиад принадлежит математику Б. Н. Делоне, а первая такая олимпиада в СССР была проведена в Ленинградском университете в 1934 г.

В 30-е годы содержание учебных планов на ФМФ менялось достаточно часто. Например, весной 1935 г. по учебному плану у математиков предусматривались следующие зачеты [16]:

- I курс (анализ I, аналитическая геометрия, политэкономия),
- II курс (анализ II, теоретическая механика, общие дифференциальные уравнения),
- III курс (уравнения в частных производных, аналитические функции, теоретическая механика),
- IV курс (уравнения математической физики, теория вероятности),
- V курс (топология).

Экзамены у математиков на I курсе (1934/35 уч. год): общая астрономия, физика I, номография, черчение; анализ I, ч. 1; аналитическая геометрия на плоскости, физ. лаборатория, аналитическая геометрия в пространстве, анализ I, ч. 2; высшая алгебра.

Экзамены у математиков на II курсе: физика II, дифференциальная геометрия, анализ II, ч. 1; физ. лаборатория, анализ II, ч. 2; обыкновенные дифференциальные уравнения, теоретическая механика, ряды Фурье, векторный анализ, диамат и истмат.

Экзамены у математиков на III курсе : теоретическая механика, приближенный анализ, уравнения с частными производными, теория чисел, теоретическая механика, вариационное исчисление, анализ функций, ленинизм.

К концу 30-х годов на основе специальности прикладная математика (уклон № 2) в ТГУ возникло спецотделение (СО), в котором на I и II курсах были общие с ФМФ учебные планы.

Значительное влияние на научную тематику кафедры теоретической механики ФМФ и НИИММ оказали исследования выпускника аспирантуры Ленинградского университета А.А. Гриба, распределенного на работу на ФМФ ТГУ в 1938 г. и защитившего в Томске кандидатскую диссертацию в 1940 г. на актуальную тему «Гидродинамическая теория взрывной волны» [17, 18].

В 1938 г. в университетах были введены единый студенческий билет и единая зачетная книжка, пятилетний срок обучения и обязательные государственные экзамены по профилирующим дисциплинам [19]. В учебных планах предусматривалось одинаковое число лекционных и практических занятий. Например, весной 1940 года математики ФМФ сдавали госэкзамены по следующим дисциплинам [20–22]:

1. Основы марксизма-ленинизма.
2. Интегрирование дифференциальных уравнений.
3. Экспериментальная физика.
4. Высшая геометрия.
5. Курсы по выбору (теория чисел, интегральные уравнения, теория функций комплексного переменного, конформные отображения, высшая алгебра II, спецкурс по геометрии).

В феврале 1940 г. в ТГУ состоялась первая в Сибири научная студенческая конференция, в которой приняли участие и студенты других вузов Томска. Док-

лад студента III курса ФМФ Гаврилова Ф.Ф. на этой конференции был отмечен первой премией [23].

После начала **Великой Отечественной войны**, несмотря на тяжелые условия, на факультете продолжалась интенсивная научная работа и подготовка специалистов по профилю факультета, но срок обучения был временно сокращен до трех лет. В период войны **с ФМФ в армию было призвано 18 преподавателей и аспирантов, а также 136 выпускников и студентов** [24]. В послевоенные годы на ФМФ постепенно стал возрастать прием студентов, увеличивалось количество преподавателей, были введены защиты выпускных дипломных работ. В 1947/48 уч. году в штатном расписании факультета уже числилось: 5 профессоров, 14 доцентов, 4 ст. преподавателя и 14 ассистентов. На факультете в сентябре обучалось 227 студентов. Структура учебного графика этого года:

- осенний семестр (включая сессию) с 1.09.47 г. по 23.01.48 г.;
- зимние каникулы с 23.01.48 г. по 5.02.48 г.;
- весенний семестр (включая сессию) с 7.02.48 г. по 30.06.48 г.

Стремление послевоенных студентов к знаниям характеризует статистика, например 1947/48 уч. года. Успеваемость: осенний семестр – 93 %, весенний семестр – 99 %. Посещаемость занятий в учебном году составила – 95 % [25].

В период с 1917 по 1948 г. деканами ФМФ были [5–7]:

1. Пospelов Александр Петрович (сент. 1917 – окт. 1918 г., и.о.: ноябрь 1921 – апр. 1922 г.);
2. Рузский Михаил Дмитриевич (окт. 1918 – февр. 1919 г.);
3. Некрасов Владимир Леонидович (январь 1919 – дек. 1921 г.);
4. Руденко Сергей Иванович (дек. 1920 – июнь 1921 г.);
5. Малеев Всеволод Александрович (и.о.: с 1 июня по 1 окт. 1921 г.);
6. Сапожников Василий Васильевич (апр. 1922 – июль 1923 г.);
7. Кузнецов Владимир Дмитриевич (авг. 1924 – май 1926 г., сент. 1930 – февр. 1931, май 1933 – дек. 1936 г.);
8. Ревердатто Виктор Владимирович (авг. 1926 – май 1929 г.);
9. Усанович Михаил Ильич (и.о.: июль – сент. 1930 г.)
10. Большанина Мария Александровна (дек. 1936 – дек. 1937 г.);
11. Кессених Владимир Николаевич (февр. 1931 – июнь 1931, дек. 1937 – апр. 1939 г.);
12. Кудрявцева Вера Михайловна (апр. 1939 – сент. 1943 г.);
13. Прилежаева Наталья Александровна (сент. 1943 – дек. 1948 г.).

В первой половине XX века большинство математических кафедр сибирских вузов комплектовалось математиками-выпускниками ФМФ ТГУ, они внесли значительный вклад в постановку математического образования в вузах и школах Сибири и Дальнего Востока. В 1948 г., учитывая все возрастающую потребность Сибири и Дальнего Востока в специалистах по математике, механике и астрономии, в год шестидесятилетия ФМФ решением МВО СССР в ТГУ на основе ФМФ было образовано два факультета: физический (ФФ) и механико-математический (ММФ) [26]. На ММФ были переведены кафедры: астрономии и геодезии, теоретической механики, математического анализа, алгебры и теории чисел, общей математики, геометрии. На первый курс нового факультета было принято 50 студентов. В ноябре 1948 г. в Томске состоялась Третья студенческая конференция, на математической секции которой были впервые представлены доклады студентов ММФ. В этом же году на ММФ был создан первый Совет по защите кандидатских диссертаций по алгебре и математическому анализу. В состав Совета входили

ли: декан ММФ, доц. А.М. Лейкин, доц. Е.Н. Аравийская, доц. Г.А. Бюлер, доц. З.И. Клементьев, д.ф.-м.н. П.П. Куфарев, доц. А.А. Сивков, доц. Е.Д. Томилов, д.ф.-м.н. С.А. Чунихин, доц. Н.Г. Туганов.

Концентрация на ММФ подготовки математиков, механиков и астрономов была связана с необходимостью обновления промышленного производства, активизацией в СССР научных исследований в области прикладной и вычислительной математики, ядерной энергетики, механики сплошной среды, ракетостроения, космонавтики и космической навигации. Это было время появления ЭВМ первого поколения. Поэтому в сентябре 1957 г. на ММФ была открыта первая за Уралом кафедра прикладной и вычислительной математики [27]. С этого момента на факультете стали готовить специалистов по прикладной и вычислительной математике, использующих компьютер как инструмент познания. Уже в 1959 г. на ММФ состоялся первый в Сибири выпуск 23 математиков-вычислителей. Создание в 1957 г. Сибирского отделения Академии наук СССР в Новосибирске было важным событием для развития научных исследований в Сибири, в том числе по математике и механике. На работу в СО АН СССР факультет стал направлять часть своих лучших выпускников и преподавателей. Большую поддержку в подготовке математиков и механиков на ММФ в то время оказал выпускник ФМФ 1942 г. – академик АН СССР Николай Николаевич Яненко.

Первая в Сибири научная конференция по теоретическим и прикладным вопросам математики и механики была проведена на ММФ ТГУ в феврале 1960 года [28]. Через 50 лет с начала подготовки математиков в Сибири на ММФ училось более 700 студентов и 35 аспирантов. Обучение осуществляли 67 преподавателей (6 профессоров, 24 доцента и 37 ассистентов). В 1967 г. факультет окончило 108 студентов (56 математиков, 21 математик-вычислитель, 20 механиков, 11 астрономо-геодезистов), а на первый курс было принято 225 студентов.

С начала 1960-х годов математиками ММФ был выполнен значительный цикл работ по статистической обработке результатов наблюдений в связи с исследованиями по Тунгусскому метеориту. С 1965 г. в ТГУ появился свой Вычислительный центр, где была установлена трехадресная машина М-20, появилось первое за Уралом учебное пособие сотрудника ММФ Тынкевича М.А. «Программирование на М-20», по которому учились программированию в кодах студенты всех вузов города Томска.

В 1968 г. в ТГУ был создан Научно-исследовательский институт прикладной математики и механики ТГУ (НИИПММ), где в последующие годы стало работать значительное количество выпускников ММФ. Выпускники ММФ направлялись также на работу в города Сибирского региона и Томской области. После закрытия кафедры астрономии и геодезии в 1977 г., на ММФ была создана кафедра физической механики, на которой под руководством профессора Гришина А.М. активно ведутся научные исследования по математическому моделированию сопряженных задач механики реагирующих сред, тепловой защиты гиперзвуковых аппаратов, по моделированию лесных пожаров и способов борьбы с ними.

Впервые в Томске чтение спецкурса для студентов по параллельным вычислительным технологиям было начато на ММФ ТГУ еще 1987 г., а в 2002 г. на кафедре вычислительной математики и компьютерного моделирования была открыта специализация «Параллельные компьютерные технологии». Подготовка специалистов и научно-исследовательской работе в этой области способствовало и появлению в ТГУ суперкомпьютера «СКИФ Cyberia» с пиковой производительностью 120 Тфлопс.

За период с 2001 г. по 2015 г. на факультете было проведено 8 конференций по параллельным и высокопроизводительным вычислениям.

Деканы ММФ (1948–2017):

- 1) Лейкин Абрам Михайлович (с 1948 г.);
- 2) Аравийская Евстолия Николаевна (с 1950 г.);
- 3) Куфарев Павел Парфеньевич (с 1952 г.);
- 4) Назаров Георгий Иванович (с 1955 г.);
- 5) Александров Игорь Александрович (с 1965 г.);
- 6) Малаховская Роза Михайловна (с 1968 г.);
- 7) Томилов Владимир Евгеньевич (с 1971 г.);
- 8) Гришин Анатолий Михайлович (с 1977 г.);
- 9) Кан Владимир Иванович (с 1981 г.);
- 10) Штанько Владимир Александрович (с 1984 г.);
- 11) Щербаков Николай Романович (с 1999 г.);
- 12) Берцун Владимир Николаевич (с 2004 г.);
- 13) Старченко Александр Васильевич (с 2014 г.).

В составе механико-математического факультета 8 кафедр, на формирование которых существенное влияние оказали идеи и технологии высшего математического образования, заложенные его основателями в Сибири на ФМФ ТГУ.

Заведующие кафедрами ММФ:

• *кафедра астрономии и геодезии (открыта в 1918 г., закрыта в 1977 г.):* Константин Дормидонтович Покровский (и.о. 1919–1920 гг.), Николай Никанорович Горячев (с 1923 г.), Анатолий Александрович Сивков (с 1940 г.), Константин Львович Баев (с 1941 г.), Абрам Михайлович Лейкин (с 1945 г.), Ремир Гаврилович Лазарев (с 1968 г.), Татьяна Валентиновна Бордовицина (с 1974 г.).

• *кафедра теоретической механики (открыта в 1931 г., переименована в кафедру теоретической и небесной механики в 1977 г., переименована в кафедру теоретической механики в 2004 г.):* Григорий Сергеевич Бландов (с 1931 г.), Александр Константинович Минятов (с 1934 г.), Фриц Максимилианович Нётер (1936–1937 гг.), Павел Парфеньевич Куфарев (с 1937 г.), Евгений Дмитриевич Томилов (с 1940 г.), Георгий Иванович Назаров (с 1961 г.), Владимир Евгеньевич Томилов (с 1967 г.), Владимир Александрович Штанько (с 1979 г.), Алексей Михайлович Бубенчиков (с 2000 г.);

• *кафедра алгебры и теории чисел (открыта в 1937 г., переименована в кафедру алгебры в 1974 г.):* Николай Павлович Романов (с 1937 по 1944 г.), Сергей Антонович Чунихин (с 1946 по 1953 г.), Владислав Степанович Малаховский (с 1964 по 1968 г.), Исаак Хаимович Беккер (с 1968 по 1981 г., с 1989 по 1997 г.), Семен Константинович Росошек (с 1982 по 1987 г.), Петр Андреевич Крылов (с 1998 г.);

• *кафедра математического анализа (открыта в 1938 г.):* Евстолия Николаевна Аравийская (с 1938 г.), Павел Парфеньевич Куфарев (с 1940 г.), Игорь Александрович Александров (с 1964 г.), Герман Гаврилович Пестов (с 1969 г.), Вильгельм Генрихович Фаст (с 1974 г.), Сергей Анатольевич Копанев (с 1975 г.), Герман Гаврилович Пестов (с 1976 г.), Сергей Анатольевич Копанев (с 1981 г.), Игорь Александрович Александров (с 1982 г.), Сергей Анатольевич Копанев (с 2013 г.), .), Лидия Сергеевна Копанева (с 2015 г.);

• *кафедра чистой математики (открыта в 1917 г.):* Всеволод Александрович Малеев (1923–1932 гг.); на кафедре работали: Н.И. Порфирьев (1920 г.), Ф.Э. Молин (1917–1932 гг.), В.Л. Некрасов (1917–1921 гг.) и др.

• **кафедра общей математики (открыта в 1932 г.):** Всеволод Александрович Малеев (1932–1934 гг.), Борис Абрамович Фукс (1935 г.), Александр Сергеевич Кованько (с 1.09.1935 г. по 1936 г.), Евстолия Николаевна Аравийская (с 1937 по 1961 г.), Михаил Романович Куваев (с 1961 по 1964 г., с 1965 по 1975 г., с 1983 по 1992 г.), Евгений Тихонович Ивлев (с 1964 по 1965 г.), Владимир Иванович Кан (с 1975 по 1983 г., с 1992 по 1994 г.), Сергей Васильевич Панько (с 1999 по 2011 г.), Елена Николаевна Путятина (с 1994 по 1998 г., с 2012 г.);

• **кафедра геометрии (открыта в 1942 г.):** Петр Константинович Рашевский (с 1942 по 1943 г.), Николай Георгиевич Туганов (с 1945 г.), Роман Николаевич Щербаков (с 1957 г.), Надежда Максимовна Онищук (с 1975 г.), Вадим Васильевич Слухаев (с 1982 г.), Николай Романович Щербаков (с 1996 г.);

• **кафедра прикладной и вычислительной математики (открыта в 1957 г., переименована в кафедру вычислительной математики и компьютерного моделирования в 1999 г.):** Георгий Александрович Бюлер (с 1957 г.), Юрий Семенович Завьялов (с 1961 г.), Роза Михайловна Малаховская (с 1962 г.), Геннадий Алексеевич Медведев (с 1.03.1970 г.), Алексей Иннокентьевич Абеляшев (с 1.09.1970 г.), Владимир Александрович Штанько (с 1971 г.), Роза Михайловна Малаховская (с 1976 г.), Владимир Николаевич Берцун (с 1981 г.), Александр Васильевич Старченко (с 2001 г.);

• **кафедра теории функций (открыта в 1962 г.):** Георгий Дмитриевич Суворов (с 1962 г.), Павел Парфеньевич Куфарев (с 1965 г.), Захар Иванович Клементьев (с 1968 г.), Сергей Дмитриевич Суворов (с 1973 г.), Николай Николаевич Круликовский (с 1979 г.), Сергей Порфирьевич Гулько (с 1984 г.).

• **кафедра физической и вычислительной механики (открыта в 1977 г.):** Анатолий Михайлович Гришин (с 1977 г.), Лобода Егор Леонидович (с 2015 г.);

Продолжая и развивая тематику научных исследований математиков ФМФ, на ММФ ведутся перспективные научные исследования по анализу, алгебре, геометрии и топологии, параллельным вычислениям и вычислительной механике.

Летом 2013 г. ТГУ получил статус ведущего университета России (ВИУ), что способствовало активизации научных исследований и внедрению современных технологий в образовании на всех факультетах ТГУ. За 69 лет своего существования ММФ подготовил около 5 тысяч специалистов по математике и компьютерным наукам, астрономии и механике. Несколько сот из них являются докторами, профессорами или кандидатами наук. Выпускники факультета успешно работают в вузах и школах, научно-исследовательских институтах, коммерческих предприятиях и учреждениях не только во многих регионах России, но и за ее пределами.

В XXI веке безграмотным считается уже не тот, кто не умеет читать и писать, а тот, кто не умеет учиться, доучиваться и переучиваться [29]. Время заставляет совершенствовать структуру университетского образования, а ключевыми факторами развития государства становится быстрое получение существенной информации и новые технологии. Достижение этих целей предполагает наличие высококачественного образования и эффективной фундаментальной науки, одной из частей которой была и остается «царица наук» – математика [30]. Поэтому потребность в специалистах высокой квалификации, которых готовит ММФ, будет постоянно возрастать, а история факультета, начавшаяся 100 лет назад, продолжится сегодня новым поколением его студентов, выпускников и преподавателей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Томский университет: 135 лет в истории России, 1878–2013 / сост.: С.Ф. Фоминых и др.; под ред. С.Ф. Фоминых, Е.М. Игнатенко. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2013. 282 с.
2. Круликовский Н.Н. Из истории развития математики в Томске. Томск: Изд-во Том. гос. ун-та, 2006. 174 с.
3. Томский университет, 1880–1980: Очерк истории и деятельности / В.С. Синяев, Е.С. Кирсанова, М.Е. Плотникова и др.; отв. ред. М.Е. Плотникова. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1980. 432 с.
4. Некрасов В.Л. Строение и мера линейных точечных областей: Глава вторая, третья, четвертая. Литература // Известия Томского Технологического Института [Известия ТТИ]. 1907. Т. 6. № 3. [Электронный ресурс]. URL: <http://earchive.tpu.ru/handle/11683/7372> (дата обращения 20.03.2017).
5. Профессора Томского университета: Биографический словарь / С.Ф. Фоминых, С.А. Некрылов, Л.Л. Берцун, А.В. Литвинов. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1998. Т. 2. 544 с.
6. Профессора Томского университета: Биографический словарь (1945–1980) / С.Ф. Фоминых, С.А. Некрылов, Л.Л. Берцун, А.В. Литвинов, К.В. Петров, К.В. Зленко. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2003. Т. 3. 532 с.
7. Профессора Томского университета: Биографический словарь (1980–2003) / С.Ф. Фоминых, С.А. Некрылов, Л.Л. Берцун, А.В. Литвинов, К.В. Петров, К.В. Зленко. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2003. Т. 4. Ч. 1. 534 с.
8. Государственный архив Томской области. Ф. Р-815. Оп. 1. Д. 3.
9. ГАТО. Ф. Р-815. Оп. 12. Д. 1737. Л. 92.
10. ГАТО. Ф. Р-815. Оп. 12. Д. 1764. Л. 11.
11. Бергман С.Б. О программе научной работы по теории аналитических функций Института математики и механики Томского государственного университета им. В.В. Куйбышева // УМН. 1936. Вып. 1. С. 278–283. [Электронный ресурс]. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jmid=rm&paperid=5958&option_lang=rus (дата обращения 15.03.2017).
12. Романов Н.П. Теория чисел и функциональный анализ: сборник трудов / под общ. ред. В.Н. Чубарикова. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2013. 478 с.
13. ГАТО. Ф. Р-815. Оп. 15. Д. 1734.
14. ГАТО. Ф. Р-815. Оп. 17. Д. 3125.
15. За качество кадров. Томск: Типография изд.-ва «Красное Знамя», 1935. № 8 (34).
16. ГАТО. Ф. Р-815. Оп. 12. Д. 1837. Л. 44–50.
17. Гриб А.А. Установившееся движение грунтовых вод при наличии дренажной трубы, свободной поверхности и водонепроницаемого слоя в виде угла // Известия НИИ математики и механики при Томском государственном университете. 1938. Т. 2. Вып. 2. С. 192–219.
18. Гриб А.А. Гидродинамическая теория взрывной волны: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Томск, 1940. 96 с.
19. Аврус А.И. История российских университетов. Очерки. М.: МОНФ, 2001. 85с.
20. ГАТО. Ф. Р-815. Оп. 17. Д.171. Л. 241.
21. ГАТО. Ф. Р-815. Оп. 17. Д.173. Л. 1–17.
22. Труды П.П. Куфарова: к 100-летию со дня рождения / под ред. И.А. Александрова. Томск: Изд-во НТЛ, 2009. 371 с.
23. ГАТО. Ф. Р-815. Оп. 17. Д.171. Л. 222.
24. Подвиг их бессмертен: судьбы студентов, аспирантов и сотрудников Томского государственного университета в годы Великой Отечественной войны / сост.: Фоминых С.Ф., Некрылов С.А., Делич И.Б. и др.; под ред. С.Ф. Фоминых. – Томск: ТГУ, 2010. 368 с.
25. ГАТО. Ф. Р-815. Оп. 1. Д. 918. Л. 16.
26. ГАТО. Ф. Р-815. Оп. 1. Д. 985. Л. 1–5

27. Берцун В.Н. Из истории развития вычислительной математики в Томском университете // Четвертая Сибирская школа-семинар по параллельным и высокопроизводительным вычислениям, г. Томск, 9–11 октября 2007 г. Томск, 2008. С. 3–19.
28. Доклады научной конференции по теоретическим и прикладным вопросам математики и механики. Томск: Изд.-во Том. ун-та, 1960, 128 с.
29. Тоффлер Элвин. Третья волна. М.: АСТ, 2004. 345 с.
30. Виссера Й. Х. На пути к университету третьего поколения: управление университетом в переходный период. Челтнем (Великобритания): Эдвард Элгар, 2009. 272 с.

Статья поступила 14.02.2017 г.

Bertsun V.N., Kosova E.S. (2017) ABOUT THE FIRST CENTER OF HIGHER MATHEMATICAL EDUCATION IN SIBERIA. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 46. pp. 102–112

DOI 10.17223/19988621/46/12

The paper is dedicated to the main stages of developing a training system specialists with higher mathematical education for the Siberian region at the Physics and Mathematics faculty of the Tomsk University from the year 1917 are given. A significant contribution to the developing of this system was made by F.E. Molin, N.N. Goryachev, V.L. Nekrasov, L.A. Vishnevsky, N. P. Romanov, F.M. Neter, N.N. Yanenko, P.P. Koufarev et al. Since the beginning of the last century, Tomsk has been preparing specialists in mathematics, mechanics, astronomy and applied mathematics.

Keywords: the first Siberian university, mathematical education, computer science.

BERTSUN Vladimir Nikolaevich (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Computational Mathematics and Computer Modelling of the Mechanics and Mathematics Faculty of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: bvn@math.tsu.ru

KOSOVA Ekaterina Sergeevna (Chief librarian of the Tomsk State University Research Library, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: kosovaes@lib.tsu.ru

REFERENCES

1. *Tomskij universitet: 135 let v istorii Rossii, 1878–2013*. Tomsk: TSU Publ., 2013. 282 p.
2. Krulikovskij N.N. (2006) *Iz istorii razvitija matematiki v Tomske*. Tomsk: TSU Publ. 174 p.
3. *Tomskij universitet, 1880–1980*. Tomsk: TSU Publ, 1980. 432 p.
4. Nekrasov V.L. (1907) Stroenie i mera linejnyh tochechnyh oblastej. *Izvestija Tomskogo Tehnologicheskogo Instituta*. 6(3). URL: <http://earchive.tpu.ru/handle/11683/7372>.
5. P.F. Fominyh et al. (1998) *Professora Tomskogo universiteta: Biograficheskij slovar'*. Tomsk: TSU Publ. V. 2. 544 p.
6. P.F. Fominyh et al. (2003) *Professora Tomskogo universiteta: Biograficheskij slovar'* (1945–1980). Tomsk: TSU Publ. V. 3. 532 p.
7. P.F. Fominyh et al. (2003) *Professora Tomskogo universiteta: Biograficheskij slovar'* (1980–2003). Tomsk: TSU Publ. V. 4. Ch. 1. 534 p.
8. GATO. F. R-815. Op. 1. D. 3.
9. GATO. F. R-815. Op. 12. D. 1737. L. 92.
10. GATO. F. R-815. Op. 12. D. 1764. L. 11.
11. Bergman P.B. (1936) O programme nauchnoj raboty po teorii analiticheskikh funkcij Instituta matematiki i mehaniki Tomskogo gosudarstvennogo universiteta im. V.V. Kujbysheva. *UMN*. 1. pp. 278–283. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=&rm&paperid=5958&option_lang=rus

12. Romanov N.P. (2013) *Teorija chisel i funkcional'nyj analiz: sbornik trudov*. Tomsk: TSU Publ. 478 p.
13. GATO. F. R-815. Op. 15. D. 1734.
14. GATO. F. R-815. Op. 17. D. 3125.
15. *Za kachestvo kadrov*. Tomsk: Krasnoe Znamja. 1935. 8(34).
16. GATO. F. R-815. Op. 12. D. 1837. L. 44–50.
17. Grib A.A. Ustanovivsheesja dvizhenie gruntovyh vod pri nalichii drenazhnoj trubny, svobodnoj poverhnosti i vodonepronicaemogo sloja v vide ugla. *Izvestija NII matematiki i mehaniki pri Tomskom gosudarstvennom universitete*. 1938. 2(2). pp.192–219.
18. Grib A.A. (1940) *Gidrodinamicheskaja teorija vzryvnoj volny*. Fiz-math. cand. diss. Tomsk. 96 p.
19. Avrus A.I. (2001) *Istorija rossijskih universitetov. Oчерki*. Moscow: MPSF. 85 p.
20. GATO. F. R-815. Op. 17. D.171. L. 241.
21. GATO. F. R-815. Op. 17. D.173. L. 1–17.
22. *Trudy P.P. Kufareva: k 100-letiju so dnja rozhdenija*. Tomsk: NTL Publ. 2009. 371 p.
23. GATO. F. R-815. Op. 17. D.171. L. 222.
24. Fominyh P.F. et al. (2010) *Podvig ih bessmerten: sud'by studentov, aspirantov i sotrudnikov Tomskogo gosudarstvennogo universiteta v gody Velikoj Otechestvennoj vojny*. Tomsk: TSU Publ. 368 p.
25. GATO. F. R-815. Op. 1. D. 918. L. 16.
26. GATO. F. R-815. Op. 1. D. 985. L. 1–5
27. Bercun (2008) V.N. Iz istorii razvitiya vychislitel'noj matematiki v Tomskom universitete. *Fourth Siberian Workshop on Parallel and High Performance Computing*. Tomsk: TSU Publ. P. 3–19.
28. *Doklady nauchnoj konferencii po teoreticheskim i prikladnym voprosam matematiki i mehaniki*. Tomsk: TSU Publ. 1960. 128 p.
29. Alvin Toffler (1989) *The third wave*. Bantam Books.
30. Wissema J.G. (2009) *Towards the Third Generation University: Managing the University in Transition*. Edward Elgar Publishing.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БЕЛОВА Светлана Владимировна – преподаватель колледжа, Бирский филиал ФГБОУ «Башкирский государственный университет» (г. Бирск). E-mail: svetlanav.86@mail.ru

БЕРЦУН Владимир Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и компьютерного моделирования механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: bvn@math.tsu.ru

БУХТЯК Михаил Степанович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры геометрии механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: bukhtyakm@mail.ru

ВОЛОДЧЕНКОВ Сергей Игоревич – научный сотрудник РФЯЦ-ВНИИЭФ, г. Саров. E-mail: serg_vol666@mail.ru

ГАВРИЛОВ Данила Юрьевич – аспирант, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А. E-mail: gavrilovdy@rambler.ru

ГАЛАНОВА Наталия Юрьевна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры общей математики механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: galanova@math.tsu.ru

ГУБАНОВ Сергей Михайлович – кандидат физико-математических наук, начальник УЭМО ЗРИ. E-mail: SMGubanov@yandex.ru

ДАММЕР Владислав Христианович – кандидат технических наук, ведущий инженер АО «НПЦ «Полус». E-mail: dammer.tomsk@yandex.ru

ЗАРИПОВ Сарвар Кахрамонович – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математического анализа и теории функций, Таджикский национальный университет, Республика Таджикиста. E-mail: sarvar8383@list.ru

КАРТАВЫХ Андрей Александрович – аспирант физико-технического факультета Томского государственного университета, инженер-механик ЗРИ. E-mail: AAKartavyh@yandex.ru.

КОСОВА Екатерина Сергеевна – главный библиотекарь Научной библиотеки Томского государственного университета. E-mail: kosovaes@lib.tsu.ru

КРАЙНОВ Алексей Юрьевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

МИНЬКОВ Леонид Леонидович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: lminkov@ftf.tsu.ru

СИНЯЕВ Сергей Витальевич – старший научный сотрудник, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отд. 70 НИИ прикладной математики и механики Томского государственного университета. E-mail: ssv@niipmm.tsu.ru

СУХАЧЕВА Елена Сергеевна – аспирантка механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: sirius9113@mail.ru

ТОХМЕТОВА Айгерим Бауыржановна – студентка физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: aiko050294@mail.ru

ХМЕЛЕВА Марина Григорьевна – аспирантка физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: khmelmg@gmail.com

ХМЫЛЕВА Татьяна Евгеньевна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры общей математики механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: TEX2150@yandex.ru

ЭРГАШЕВ Тухтасин Гуламжанович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Ташкентского института ирригации и мелиорации, г. Ташкент, Узбекистан. E-mail: ertuhtasin@mail.ru

ЧИГЛИНЦЕВА Ангелина Сергеевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей и прикладной математики, Бирский филиал ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет». E-mail: changelina@rambler.ru

ШАГАПОВ Владислав Шайхулагзамович – академик Академии наук РБ, профессор, доктор физико-математических наук, профессор каф. высшей и прикладной математики, Бирский филиал ФГБОУ «Башкирский государственный университет» (г. Бирск), главный научный сотрудник ФГБУН Института механики и машиностроения Казанского научного центра РАН. E-mail: shagapov@rambler.ru

Peter V. DANCHEV – Professor, Mathematical Department, Plovdiv State University, Bulgaria. E-mail: pvdanchev@yahoo.com

Оригинал-макет подготовлен

ООО «Издательство научно-технической литературы»
634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*
Верстка *Д.В. Фортеса*

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001.

Подписано к печати 17.04.2017. Выпуск в свет 28.04.2017.

Формат 70 × 100^{1/16}. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 9.19. Уч.-изд. л. 10.29. Тираж 250 экз. Заказ № 12. Цена свободная.

Отпечатано на оборудовании

Издательского Дома Томского государственного университета,
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. Заказ № 2488.
<http://publish.tsu.ru> E-mail: rio.tsu@mail.ru