УДК 517.968.73
DOI 10.17223/19988621/46/4

С.К. Зарипов

ПОСТРОЕНИЕ АНАЛОГА ТЕОРЕМЫ ФРЕДГОЛЬМА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МОДЕЛЬНЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ В ЯДРЕ

Для одного модельного интегродифференциального уравнения первого порядка с сингулярной точкой в ядре, в зависимости от корней характеристического уравнения, найдены интегральные представления многообразия решений через произвольные постоянные. Найдены случаи, когда данное интегродифференциальное уравнение имеет единственное решение. Построены аналоги теоремы Фредгольма для этого интегродифференциального уравнения. Использованный метод можно применять для изучения модельных и немодельных интегродифференциальных уравнений высшего порядка.

Ключевые слова: *модельное интегродифференциальное уравнение, граничные сингулярные точки, интегральные представления, интегральные уравнения, характеристическое уравнение.*

Теория интегродифференциальных уравнений с регулярными коэффициентами и с сингулярными коэффициентами является одним из важных разделов теории интегральных и дифференциальных уравнений, которая находит широкое и многообразное применение в физике и технике. На истории возникновения и применения теории интегродифференциальных уравнений наши классики и современники подробно останавливались в своих работах, например в [1–6] и в приведённой там литературе.

За последние годы теория интегродифференциальных уравнений в основном развивается в двух направлениях. Первое направление связано с изучением интегродифференциальных уравнений, появляющихся в конкретных физических или механических задачах [1, 4, 6, 7]. Второе направление связано с построением общей теории для неисследованных классов интегродифференциальных уравнений. Ко второму направлению также относится изучение различных абстрактных интегродифференциальных уравнений в банаховых пространствах [8, 9]. Также в последние годы активно развивается решение прямых и обратных задач или задач с малыми параметрами для интегродифференциальных уравнений [10–12]. Одной из малоизученных задач в теории интегродифференциальных уравнений является изучение интегродифференциальных уравнений с сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами. Некоторые результаты в этом направлении получены для сингулярно возмущённых систем интегродифференциальных уравнений [13–16]. Но заметим, что сингулярность в зависимости от изучаемой задачи бывает разной природы, и поэтому подход отдельных авторов в изучении сингулярных задач бывает разнообразным.

В классических сингулярных интегродифференциальных уравнениях интегралы в основном понимаются в смысле главного значения по Коши, и поэтому для решения таких уравнений применяются методы теории аналитических функций.

В отличие от этого ниже мы будем рассматривать сингулярное интегродифференциальное уравнение, в котором интегралы понимаются в обычном смысле Римана. То есть будем рассматривать вопрос об изучении интегродифференциального уравнения вида

$$y'(x)+\frac{A}{x-a}y(x)+\int_a^x\left[\frac{B}{(t-a)^{\alpha}}y'(t)+\frac{C}{(t-a)^{\alpha+1}}y(t)\right]dt=f(x), \qquad (1)$$

для случая $\alpha=1$, где A, B, C – заданные постоянные числа, $f(x)$ – заданная функция, $y(x)$ – искомая функция.

Определение 1. *Уравнение* (*1*) *будем называть модельным интегродифференциальным уравнением первого порядка с сингулярным коэффициентом, когда* $\alpha=1$ *; со сверхсингулярным коэффициентом, когда* $\alpha>1$ *и со слабосингулярным коэффициентом, когда* $\alpha<1$.

Как видно, в (1) коэффициенты при $y'(t)$ и $y(t)$ под интегралом в случае $\alpha\geq 1$ являются не фредгольмовыми и уравнение (1) в таком виде до настоящего времени никем не изучено. Нефредгольмовость ядра уравнения (1), как будет показано ниже, влечёт за собой новые и интересные свойства решения этого уравнения.

Постановка задач и их решение

Пусть $\Gamma=\{x: a<x<b\}$ – множество точек на вещественной оси. На Γ рассмотрим модельное интегродифференциальное уравнение (1) в сингулярном случае $(\alpha=1)$, т.е. рассмотрим уравнение вида

$$y'(x)+\frac{A}{x-a}y(x)+\int_a^x\left[\frac{B}{t-a}y'(t)+\frac{C}{(t-a)^{2}}y(t)\right]dt=f(x), \qquad (2)$$

где A, B, C – заданные постоянные числа, $f(x)$ – заданная функция, $y(x)$ – искомая функция.

Следуя работам [17 – 20], прежде всего, через $C_a^1[a,b]$ обозначим класс таких функций, которые имеют производные первого порядка и в точке $x=a$ обращаются в нуль с асимптотическим поведением:

$$y(x)=o\left[(x-a)^{\gamma_1}\right],\ \gamma_1>1,$$

а первые производные от этих функций в точке $x=a$ обращаются в нуль с асимптотическим поведением:

$$y(x)=o\left[(x-a)^{\gamma_2}\right],\ \gamma_2>\varepsilon,$$

и решения однородного уравнения (2) будем искать в этом классе.

Таким образом, для нахождения общего решения однородного уравнения (2) частные решения этого уравнения будем искать в виде $y(x)=(x-a)^{\lambda}$, где λ – постоянное число. Подставляя эту функцию в левую часть уравнения (2), для определения λ получим следующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^2-(1-A-B)\lambda+C-A=0. \qquad (3)$$

В зависимости от корней характеристического уравнения (3) решение уравнения (2) получим в следующем виде:

I. 1. Пусть $D=(1-A-B)^2-4(C-A)>0$, $\lambda_{1,2}=\dfrac{1-A-B\pm\sqrt{D}}{2}$ и корни характеристического уравнения (3) удовлетворяют неравенству $1<\lambda_1<\lambda_2$, тогда частные решения однородного уравнения (2) имеют вид

$$y_1(x)=(x-a)^{\lambda_1},\ y_1(x)=(x-a)^{\lambda_2},$$

а его общее решение согласно общей теории даётся при помощи формулы

$$y(x)=(x-a)^{\lambda_1}c_1+(x-a)^{\lambda_2}c_2,$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные числа. Далее, используя метод вариации произвольных постоянных, решение неоднородного уравнения (2) легко находим в таком виде:

$$\begin{gathered} y(x)=(x-a)^{\lambda_1}c_1+(x-a)^{\lambda_2}c_2- \\ -\frac{1}{\sqrt{D}}\int_a^x\left[(\lambda_1-1)\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\lambda_1}-(\lambda_2-1)\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\lambda_2}\right]f(t)dt\equiv \\ \equiv E_1^+[c_1,c_2,f(x)]. \end{gathered} \tag{4}$$

Для сходимости интегралов в правой части (4) потребуем, чтобы функция $f(x)$ в точке $x=a$ обращалась в нуль с асимптотическим поведением:

$$f(x)=o\left[(x-a)^{\delta_1}\right],\ \delta_1>\lambda_2-1. \tag{5}$$

Заметим, что если выполняется неравенство $1<\lambda_1<\lambda_2$, тогда полученное решение (4) принадлежит классу $C_a^1[a,b]$.

Подставляя выражения (4) в уравнение (2), легко находим, что оно действительно удовлетворяет этому уравнению.

Теперь пусть $\lambda_1\le 1<\lambda_2$. В этом случае частное решение $y_1(x)=(x-a)^{\lambda_1}$ не принадлежит классу $C_a^1[a,b]$, и поэтому оно не удовлетворяет однородному уравнению (2). Поэтому взяв в решение вида (4) $c_1=0$, общее решение уравнения (2) получим в виде

$$\begin{gathered} y(x)=(x-a)^{\lambda_2}c_2-\frac{1}{\sqrt{D}}\int_a^x\left[(\lambda_1-1)\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\lambda_1}-(\lambda_2-1)\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\lambda_2}\right]f(t)dt\equiv \\ \equiv E_1^+[0,c_2,f(x)]. \end{gathered} \tag{6}$$

В этом случае для сходимости интегралов в правой части (6) функция $f(x)$ также должна обращаться в нуль с асимптотическим поведением (5).

Если $\lambda_1<\lambda_2\le 1$, тогда для того, чтобы решение уравнения (2) принадлежало классу $C_a^1[a,b]$, из всевозможных значений произвольных постоянных c_1 и c_2 возьмём только $c_1=0$, $c_2=0$, т.е. в этом случае однородное уравнение (1) имеет только нулевое решение, а неоднородное уравнение для каждой функции

$f(x)\in C[a,b]$ и $f(a)=0$ имеет единственное решение, которое даётся при помощи формулы

$$y(x)=-\frac{1}{\sqrt{D}}\int_a^x\left[(\lambda_1-1)\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\lambda_1}-(\lambda_2-1)\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\lambda_2}\right]f(t)dt\equiv E_1^+[0,0,f(x)]. \quad (7)$$

Таким образом, когда корни характеристического уравнения (3) являются вещественными и разными, решение уравнения (2) запишется при помощи формулы

$$y(x)=\begin{cases}(x-a)^{\lambda_1}c_1+(x-a)^{\lambda_2}c_2-\frac{1}{\sqrt{D}}\int_a^x\left[(\lambda_1-1)\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\lambda_1}-(\lambda_2-1)\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\lambda_2}\right]\times\\ \qquad\times f(t)dt\equiv E_1^+[c_1,c_2,f(x)],\ \text{когда } 1<\lambda_1<\lambda_2,\\ (x-a)^{\lambda_2}c_2-\frac{1}{\sqrt{D}}\int_a^x\left[(\lambda_1-1)\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\lambda_1}-(\lambda_2-1)\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\lambda_2}\right]f(t)dt\equiv\\ \qquad\equiv E_1^+[0,c_2,f(x)],\ \text{когда } \lambda_1<1<\lambda_2,\\ -\frac{1}{\sqrt{D}}\int_a^x\left[(\lambda_1-1)\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\lambda_1}-(\lambda_2-1)\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\lambda_2}\right]f(t)dt\equiv\\ \qquad\equiv E_1^+[0,0,f(x)],\ \text{когда } \lambda_1<\lambda_2<1.\end{cases} \quad (8)$$

Таким образом, доказано:

Теорема 1. *Пусть в интегродифференциальном уравнении* (*2*) *коэффициенты* A, B *и* C *такие, что корни* характеристического *уравнения* (*3*) *являются вещественными и разными. Функция* $f(x)\in C[a,b]$ *и в случае, когда* $1<\lambda_1<\lambda_2$ *и* $\lambda_1<1<\lambda_2$ $f(a)=0$ *с асимптотическим поведением* (*5*).

Тогда неоднородное уравнение (*2*) *в классе функций* $y(x)\in C_a^1[a,b]$, *обращающихся в нуль в точке* $x=a$, *всегда разрешимо и его общее решение даётся при помощи формулы* (*8*), *где* c_1, c_2 *– произвольные постоянные числа.*

На основе вышеприведённые результаты для интегродифференциального уравнения (2) можно построить аналог альтернативе Фредгольма в таком виде:

Аналог теоремы об альтернативе Фредгольма для интегродифференциального уравнения (1) в случае, когда корни характеристического уравнения (3) являются вещественными и разными: *Если корни характеристического уравнения* (*3*) *удовлетворяют условию* $\lambda_1<\lambda_2\le 1$, *то однородное уравнение* (*2*) *имеет только тривиальное решение, а неоднородное уравнение* (*2*) *для каждой функции* $f(x)\in C[a,b]$ *и* $f(a)=0$ *имеет решение, и притом единственное, которое даётся по формуле* (*7*). *Если корни характеристического уравнения* (*3*) *удовлетворяют условию* $\lambda_1\le 1<\lambda_2$, *то однородное уравнение* (*2*) *имеет нетривиальное решение и его общее решение содержит одну произвольную постоянную, а неоднородное уравнение* (*2*) *разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть удовлетворяет условию* (*5*). *В этом случае неоднородное уравнение* (*2*) *имеет бесконечное число решений и его общее решение тоже содержит одну произвольную постоянную и даётся при помощи формулы* (*6*). *Если корни характеристического уравнения* (*3*) *удовлетворяют условию* $1<\lambda_1<\lambda_2$, *то однород-*

ное уравнение (2) имеет два линейно независимых решения и его общее решение содержит две произвольных постоянных, а неоднородное уравнение (2) разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть удовлетворяет условию (5). В этом случае также неоднородное уравнение (2) имеет бесконечное число решений и его общее решение зависит от двух произвольных постоянных и даётся по формуле (4).

II. Пусть $D=0$ и $\lambda=\dfrac{1-A-B}{2}>1$, тогда частные решения однородного уравнения (2) имеют вид

$$y_1(x)=(x-a)^{\lambda},\ y_1(x)=(x-a)^{\lambda}\ln(x-a),$$

а его общее решение имеет вид

$$y(x)=(x-a)^{\lambda}c_3+(x-a)^{\lambda}\ln(x-a)c_4.$$

Решение неоднородного уравнения (2) легко находится в таком виде:

$$\begin{gathered}y(x)=(x-a)^{\lambda}c_3+(x-a)^{\lambda}\ln(x-a)c_4+\\+\int_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\lambda}\left[(\lambda-1)\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)+1\right]f(t)dt\equiv E_2^{+}\left[c_3,\,c_4,\,f(x)\right].\end{gathered}\tag{9}$$

где c_3, c_4 – произвольные постоянные числа.

Заметим, что в этом случае, если поведение функция $f(x)$ в точке $x=a$ определяется из асимптотической формулы

$$f(x)=o\left[(x-a)^{\delta_2}\right],\ \delta_2>\lambda-1,\ \text{когда}\ x\to a,\tag{10}$$

тогда интегралы в правой части (8) будут сходящимися.

Если $\lambda<1$, тогда для того, чтобы решение вида (9) принадлежало классу $C_a^1[a,b]$, произвольные постоянные c_3 и c_4 должны равняться нулю, т.е. $c_3=0$, $c_4=0$. В этом случае решение уравнения (2) имеет вид

$$y(x)=\int_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\lambda}\left[(\lambda-1)\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)+1\right]f(t)dt\equiv E_2^{+}\left[0,\,0,\,f(x)\right].\tag{11}$$

Заметим, что в этом случае неоднородное уравнение (2) для каждой функции $f(x)\in C[a,b]$ и $f(a)=0$ имеет единственное решение.

Таким образом, в случае, когда корни характеристического уравнения (3) являются вещественными и равными, решение уравнения (2) даётся при помощи формулы

$$y(x)=\begin{cases}(x-a)^{\lambda}c_3+(x-a)^{\lambda}\ln(x-a)c_4+\displaystyle\int_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\lambda}\left[(\lambda-1)\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)+1\right]\times\\ \qquad\times f(t)\,dt\equiv E_2^{+}\left[c_3,\,c_4,\,f(x)\right],\ \text{когда}\ \lambda>1,\\ \displaystyle\int_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\lambda}\left[(\lambda-1)\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)+1\right]f(t)dt\equiv E_2^{+}\left[0,\,0,\,f(x)\right],\ \text{когда}\ \lambda<1.\end{cases}\tag{12}$$

То есть имеет место следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть в интегродифференциальном уравнении* (*2*) *коэффициенты* A, B *и* C *такие, что корни* характеристического *уравнения* (*3*) *являются вещественными и равными. Функция* $f(x) \in C[a,b]$ *и в случае, когда* $\lambda > 1$, $f(a) = 0$ *с асимптотическим поведением* (*10*).

Тогда неоднородное уравнение (*2*) *в классе функций* $y(x) \in C_a^1[a,b]$ *всегда разрешимо и его общее решение даётся при помощи формулы* (*12*), *где* c_3, c_4 – *произвольные постоянные числа.*

В этом случае аналог об альтернативе Фредгольма можно построить в таком виде:

Аналог теоремы об альтернативе Фредгольма для интегродифференциального уравнения (2) в случае, когда корни характеристического уравнения (3) являются вещественными и равными: *Если корни характеристического уравнения* (*3*) *удовлетворяют условию* $\lambda < 1$, *то однородное уравнение* (*2*) *имеет только тривиальное решение, а неоднородное уравнение* (*2*) *для каждой функции* $f(x) \in C[a,b]$ *и* $f(a) = 0$ *имеет решение и притом единственное, которое даётся по формуле* (*11*). *Если корни характеристического уравнения* (*3*) *удовлетворяют условию* $\lambda > 1$, *то однородное уравнение* (*2*) *имеет два линейно независимых решения и его общее решение содержит две произвольных постоянных, а неоднородное уравнение* (*2*) *разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть удовлетворяет условию* (*10*). *В этом случае неоднородное уравнение* (*2*) *имеет бесконечное число решений и его общее решение зависит от двух произвольных постоянных и даётся по формуле* (*9*).

III. Если $D < 0$, $\lambda_{1,2} = \dfrac{1-A-B}{2} \pm \dfrac{\sqrt{4(C-A)-(1-A-B)^2}}{2} i = \alpha \pm \beta i$

и
$$\alpha = \frac{1-A-B}{2} > 1,$$

тогда общее решение однородного уравнения (2) даётся по формуле

$$y(x) = (x-a)^{\alpha} \cos[\beta \ln(x-a)] c_5 + (x-a)^{\alpha} \sin[\beta \ln(x-a)] c_6.$$

Используя метод, подобный методу вариации произвольных постоянных, решение неоднородного уравнения (2) легко находим в таком виде:

$$\begin{gathered} y(x) = (x-a)^{\alpha} \cos[\beta \ln(x-a)] c_5 + (x-a)^{\alpha} \sin[\beta \ln(x-a)] c_6 + \\ + \frac{1}{\beta} \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\alpha} \left[(\alpha-1) \sin\left[\beta \ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right] + \right. \\ \left. + \beta \cos\left[\beta \ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\right] f(t)\, dt \equiv E_3^{-}[c_5, c_6, f(x)]. \end{gathered} \tag{13}$$

Для сходимости интегралов в правой части равенства (12) требуем, чтобы функция $f(x)$ в точке $x \to a$ обращалась в нуль с асимптотическим поведением

$$f(x) = o\left[(x-a)^{\delta_3}\right], \ \delta_3 > \alpha - 1, \text{ когда } x \to a. \tag{14}$$

Пусть в интегральном представлении (12) $\alpha < 1$, тогда если решение уравнения (2) из класса $C_a^1[a,b]$ при $\alpha < 1$ существует, то оно имеет вид

$$y(x)=\frac{1}{\beta}\int_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\alpha}\left[(\alpha-1)\sin\left[\beta\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]+\beta\cos\left[\beta\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\right]f(t)\,dt\equiv$$
$$\equiv E_3^-\left[0,\,0,\,f(x)\right],\tag{15}$$

т.е. в этом случае для того, чтобы решение вида (12) принадлежало классу $C_a^1[a,b]$, произвольные постоянные c_5, c_6 должны равняться нулю.

В этом случае от функции $f(x)$ никаких условий, кроме его непрерывности, т.е. $f(x)\in C[a,b]$ и $f(a)=0$, не требуется.

Таким образом, в случае, когда корни характеристического уравнения (3) являются комплексно-сопряженными, решение уравнения (2) даётся при помощи формулы

$$y(x)=\begin{cases}(x-a)^{\alpha}\cos[\beta\ln(x-a)]c_5+(x-a)^{\alpha}\sin[\beta\ln(x-a)]c_6+\\ +\dfrac{1}{\beta}\displaystyle\int_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\alpha}\left[(\alpha-1)\sin\left[\beta\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]+\beta\cos\left[\beta\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\right]f(t)\,dt\equiv\\ \qquad\equiv E_3^-\left[c_5,\,c_6,\,f(x)\right],\ \text{когда}\ \alpha>1,\\ \dfrac{1}{\beta}\displaystyle\int_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\alpha}\left[(\alpha-1)\sin\left[\beta\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]+\beta\cos\left[\beta\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\right]f(t)\,dt\equiv\\ \qquad\equiv E_3^-\left[0,\,0,\,f(x)\right],\ \text{когда}\ \alpha<1.\end{cases}\tag{16}$$

Таким образом, имеет место следующая теорема:

Теорема 3. *Пусть в интегродифференциальном уравнении* (*2*) *коэффициенты* A,B *и* C *такие*, *что корни* характеристического *уравнения* (*3*) *являются комплексно-сопряженными. Функция* $f(x)\in C[a,b]$ *и в случае*, *когда* $\alpha>1$, $f(a)=0$ *с асимптотическим поведением* (*14*).

Тогда неоднородное уравнение (*2*) *в классе функций* $y(x)\in C_a^1[a,b]$ *всегда разрешимо и его общее решение даётся при помощи формулы* (*16*), *где* c_5, c_6 *– произвольные постоянные числа.*

Теперь можно сформулировать следующий аналог об альтернативе Фредгольма для *интегродифф*еренциального уравнения (2):

Аналог теоремы об альтернативе Фредгольма для интегродифференциального уравнения (2) в случае, когда корни характеристического уравнения (3) являются комплексно-сопряжёнными: *Если корни характеристического уравнения* (*3*) *являются комплексно-сопряжёнными и* $\alpha<1$, *то однородное уравнение* (*2*) *имеет только тривиальное решение*, *а неоднородное уравнение* (*2*) *для каждой функции* $f(x)\in C[a,b]$ *и* $f(a)=0$ *имеет решение и притом единственное и даётся по формуле* (*15*). *Если корни характеристического уравнения* (*3*) *такие*, *что выполняется условие* $\alpha>1$, *то однородное уравнение* (*2*) *имеет два линейно независимых решения и его общее решение содержит две произвольных постоянных*, *а неоднородное уравнение* (*2*) *разрешимо тогда и только тогда*, *когда его правая часть удовлетворяет условию* (*14*). *В этом случае*, *неоднородное уравнение* (*2*) *имеет бесконечное число решений и его общее решение зависит от двух произвольных постоянных и даётся при помощи формулы* (*13*).

ПРИМЕРЫ

Приведём примеры:

Пример 1. Найдём решение уравнения

$$y'(x)-\frac{2}{x-a}y(x)+\int_a^x\left[-\frac{6}{t-a}y'(t)+\frac{18}{(t-a)^2}y(t)\right]dt=(x-a)^5 . \qquad (17)$$

Решение. Составим характеристическое уравнение: $\lambda^2-9\lambda+20=0$.

Его корни будут $\lambda_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{9\pm1}{2}$, $\lambda_1=4$, $\lambda_2=5$. Видно что $1<\lambda_1<\lambda_2$. Отсюда общее решение однородного уравнения (17) имеет вид

$$y(x)=(x-a)^4c_1+(x-a)^5c_2,$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные числа. Далее, так как правая часть уравнения (17) удовлетворяет условию (5), то решение неоднородного уравнения (17) даётся в виде

$$y(x)=(x-a)^4c_1+(x-a)^5c_2-\int_a^x\left[3\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^4-4\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^5\right](t-a)^5dt,$$

или

$$y(x)=(x-a)^4c_1+(x-a)^5c_2+\frac{5}{2}(x-a)^6.$$

Легко можно проверить, что найденное решение удовлетворяет уравнению (17).

Пример 2. Найдем решение уравнения

$$y'(x)+\frac{1}{x-a}y(x)+\int_a^x\left[\frac{4}{t-a}y'(t)+\frac{5}{(t-a)^2}y(t)\right]dt=x-a . \qquad (18)$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^2+4\lambda+4=0 .$$

Его корни будут $\lambda=\lambda_1=\lambda_2=-2$. Видно что $\lambda<1$. Отсюда, согласно теореме 2, однородное уравнение (18) имеет только нулевое решение, а неоднородное уравнение имеет единственное решение, которое даётся при помощи формулы

$$y(x)=\int_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{-2}\left[-3\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)+1\right](t-a)dt ,$$

или после вычисления интеграла $y(x)=\frac{(x-a)^2}{16}$. Легко проверяется, что найденное решение удовлетворяет уравнению (18).

Пример 3. Найдем решение уравнения

$$y'(x)+\frac{1}{x-a}y(x)+\int_a^x\left[-\frac{4}{t-a}y'(t)+\frac{6}{(t-a)^2}y(t)\right]dt=(x-a)^3 . \qquad (19)$$

Решение. Составим характеристическое уравнение: $\lambda^2-4\lambda+5=0$.

Его корни будут $\lambda_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{-4}}{2}=2\pm i$, где $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2})=2>1$. Отсюда, согласно теореме 3, общее решение однородного уравнения (19) имеет вид

$$y_{oo}(x)=(x-a)^2\cos[\ln(x-a)]c_5+(x-a)^2\sin[\ln(x-a)]c_6,$$

где c_5, c_6 – произвольные постоянные числа. Правая часть уравнения (19) удовлетворяет условию (14), и поэтому частное решение неоднородного уравнения даётся по формуле

$$y_{\text{ч.н}}(x)=\int_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^2\left[\sin\left[\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]+\cos\left[\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\right](t-a)^3\,dt,$$

или после вычисления интеграла $y_{\text{ч.н}}(x)=\frac{3}{5}(x-a)^4$. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения (19) даётся по формуле

$$y(x)=(x-a)^2\cos[\ln(x-a)]c_5+(x-a)^2\sin[\ln(x-a)]c_6+\frac{3}{5}(x-a)^4.$$

В этом случае тоже легко проверяется, что найденное решение удовлетворяет уравнению (19).

Заключение

В заключение приведём некоторые отличительные свойства уравнения (2) от раньше рассмотренных уравнений Вольтерра:

1) Хотя коэффициенты при $y'(t)$ и $y(t)$ в уравнении (2) являются не фредгольмовыми, решение этого уравнении в классе функций, обращающихся в нуль в точке $x=a$, найдено в явном виде.

2) Выяснено что решение уравнения (2) содержит либо две произвольных постоянных, либо одну произвольную постоянную.

3) Выделяется случай, когда уравнение (2) имеет единственное решение.

4) Для уравнения (2) построен аналог об альтернативе Фредгольма.

5) Существование произвольных постоянных в общем решении уравнения (2) даёт возможность ставить и решать начальные или краевые задачи для этого уравнения. Но нужно заметить, что в отличие от обычных задач в нашем случае эти задачи ставятся с разными весами.

6) Методику решения модельного уравнения (2) можно применять для исследования немодельных интегродифференциальных уравнений с сингулярными и сверхсингулярными ядрами, а также для исследования уравнений более высокого порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вольтерра В.* Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 304 с.
2. *Некрасов А.И.* Об одном классе линейных интегродифференциальных уравнений. М.-Л.: ГТТИ, 1934. С. 1–17.
3. *Вейнберг М.М.* Интегродифференциальные уравнения // Итоги науки. Сер. Мат. анал. Теор. вероятн. Регул. 1964. С. 5–37.
4. *Векуа И.Н.* Об интегродифференциальном уравнении Прандтля // Прикл. матем. и мех. 1945. Т. 9. № 2. С. 143–150.
5. *Магнарадзе Л.Г.* Об одной системе линейных сингулярных интегродифференциальных уравнений и о линейной граничной задаче Римана // Сообщ. АН Груз. ССР. 1943. Т. 5. № 1. С. 3–9.
6. *Магнарадзе Л.Г.* Об одном новом интегральном уравнении теории крыла самолёта // Сообщ. АН Груз. ССР. 1942. Т. 3. № 6. С. 503–508.

7. *Бьянка К., Феррара М., Гуеррини Л.* Асимптотический предел интегродифференциального уравнения, моделирующего сложные системы // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2014. Т. 78. № 6. С. 49–64.
8. *Фалалеев М.В.* Сингулярные интегродифференциальные уравнения специального вида в банаховых пространствах и их приложения // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. 2013. Т.6. № 4. С. 128–137.
9. *Фалалеев М.В.* Вырожденные интегродифференциальные уравнения типа свертки в банаховых пространствах // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. 2016. Т. 17. С. 77–85.
10. *Дурдиев Д.К.* Глобальная разрешимость одной обратной задачи для интегродифференциального уравнения электродинамики // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44. № 7. С. 867–873.
11. *Сафаров Ж.Ш.* Оценки устойчивости решений некоторых обратных задач для интегродифференциальных уравнений // Вестник Удмуртского университета. Серия: Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. № 3. С. 75–82. DOI: 10.20537/vm140307.
12. *Юлдашев Т.К.* Обратная задача для одного нелинейного интегродифференциального уравнения третьего порядка // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. 2013. № 9/1. С. 58–66.
13. *Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф.* Метод нормальных форм в сингулярно возмущенных системах интегродифференциальных уравнений Фредгольма с быстро изменяющимися ядрами // Матем. сб. 2013. Т. 204. № 7. С. 47–70. DOI: 10.4213/sm8139.
14. *Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф.* Задача с обратным временем для сингулярно возмущенного интегродифференциального уравнения с диагональным вырождением ядра высокого порядка // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2016. Т. 80. № 2. С. 3–15.
15. *Талиев А.А.* Затягивание потери устойчивости для сингулярно возмущенных уравнений с непрерывными правыми частями // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 4(30). С. 36–42.
16. *Турсунов Д.А., Эркебаев У.З.* Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для кольца с особенностью на границе // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 1(39). С. 42–52.
17. *Раджабов Н.* Интегральные уравнения типов Вольтера с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверхсингулярными ядрами и их приложения. Душанбе: Деваштич, 2007. 221 с.
18. *Раджабов Н., Раджабова Л.Н., Репин О.А.* Об одном классе двумерных сопряженных интегральных уравнений вольтеровского типа // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 9. С. 1320–1330.
19. *Зарипов С.К.* Об одном классе модельного интегродифференциального уравнения первого порядка с одной сингулярной точкой в ядре // Вестник Таджикского национального университета. 2015. № 1/3(164). С. 27–32.
20. *Зарипов С.К.* Об одном классе модельных интегродифференциальных уравнений первого порядка со сверх сингулярной точкой в ядре // Вестник Таджикского национального университета. 2015. № 1/6(191). С. 6–12.

Статья поступила 08.12.2016 г.

Zaripov S.K. (2017) CONSTRUCTION OF AN ANALOG OF THE FREDHOLM THEOREM FOR A CLASS OF MODEL FIRST ORDER INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A SINGULAR POINT IN THE KERNEL. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 46. pp. 24–35

DOI 10.17223/19988621/46/4

In this work, integral representations of the manifold of solutions in terms of two arbitrary constants have been found for a model first order integro-differential equation with a singular point in the kernel. Although the kernel of this equation is not of the Fredholm type, the solution of this equation in the class of functions vanishing at $x = a$ has been found in an explicit form. It has been shown that the solution of the equation contains either two arbitrary constants or one arbitrary constant. Moreover, the case where the integro-differential equation has a unique solution has been revealed.

For the integro-differential equation, analogs of the Fredholm theorem have been constructed.

The existence of arbitrary constants in the general solution gives us chance to investigate some initial or boundary value problems for this equation. However, it is necessary to note that, in contrast to usual problems, these problems in our case are posed with different weights.

Correctness of the obtained results is verified with the help of detailed solutions of examples.

The method can be used for solving higher order model and non-model integro-differential equations with singular and supersingular kernels.

Keywords: model integro-differential equation, boundary singular points, manifold of solutions, integral representation, integral equation, characteristic equation.

ZARIPOV Sarvar Kakgramonovich (Candidate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer of Department of the Mathematical Analysis and Function Theory, Tajik National University, Republic of Tajikistan). E-mail: sarvar8383@list.ru

REFERENCES

1. Volterra V. (1930) *Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations*. Blackie & Son.
2. Nekrasov A.I. (1934) *Ob odnom klasse lineynykh integro-differentsial'nykh uravneniy* [On a class of linear integro-differential equations]. Moscow; Leningrad: GTTI.
3. Veynberg M.M. (1964) Integro-differentsial'nye uravneniya [Integro-differential equations]. *Itogi nauki. Ser. Mat. anal. Teor. veroyatn. Regulir*. pp. 5–37.
4. Vekua I.N. (1945) Ob integro-differentsial'nom uravnenii Prandtlya [On the Prandtl integro-differential equation]. *Prikl. matem. i mekh*. 9(2). pp.143–150.
5. Magnaradze L.G. (1943) Ob odnoy sisteme lineynykh singulyarnykh integro-differentsial'nykh uravneniy i o lineynoy granichnoy zadache Rimana [On a system of linear singular integro-differential equations and on a Riman linear boundary value problem]. *Soobsh. AN Gruz SSR*. 5(1). pp. 3–9.
6. Magnaradze L.G. (1942) Ob odnom novom integral'nom uravnenii teorii kryla samoleta [On a new integral equation of the airplane wing theory]. *Soobsh. AN Gruz SSR*. 3(6). pp. 503–508.
7. Bianca C., Ferrara M., Guerrini L. (2014) The asymptotic limit of an integro-differential equation modelling complex systems. *Izvestiya*: *Mathematics*. 78(6). pp. 1105–1119.
8. Falaleev M.V. (2013) Singulyarnye integro-differentsial'nye uravneniya spetsial'nogo vida v banakhovykh prostranstvakh i ikh prilozheniya [Singular integro-differential equations of a special type in Banach spaces and their applications]. *Izv. Irkutskogo gos. un-ta. Ser. Matematika*. 6(4). pp. 128–137.
9. Falaleev M.V. (2016) Vyrozhdennye integro-differentsial'nye uravneniya tipa svertki v banakhovykh prostranstvakh [Degenerate integro-differential convolution type equations in Banach spaces]. *Izv. Irkutskogo gos. un-ta. Ser. Matematika*. 17. pp. 77–85.
10. Durdiev D.K. (2008) Global solvability of an inverse problem for an integro-differential equation of electrodynamics. *Differential Equations*. 44(7). pp. 893–899.
11. Safarov Zh.Sh. (2014) Otsenki ustoychivosti resheniy nekotorykh obratnykh zadach dlya integro-differentsial'nykh uravneniy [Estimates of stability of some inverse problems solutions for integro-differential equations]. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*. 3. pp. 75–82. DOI: 10.20537/vm140307.
12. Yuldashev T.K. (2013) Obratnaya zadacha dlya odnogo nelineynogo integro-differentsial'nogo uravneniya tret'ego poryadka [Inverse problem for a nonlinear integro-differential equation of the third order]. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Estestvenno-Nauchnaya Seriya*. 9/1. pp. 58–66.

13. Bobodzhanov A.A., Safonov V.F. (2013) The method of normal forms for singularly perturbed systems of Fredholm integro-differential equations with rapidly varying kernels. *Matem. Sb.* 204(7). pp. 979–1002. DOI:10.1070/SM2013v204n07ABEH004327.
14. Bobodzhanov A.A., Safonov V.F. (2016) A problem with inverse time for a singularly perturbed integro-differential equation with diagonal degeneration of the kernel of high order. *Izv. RAN. Ser. Mat*. 80(2). pp. 285 – 298. DOI: 10.1070/IM8335.
15. Taliev A.A. (2014) Zatyagivanie poteri ustoychivosti dlya singulyarno vozmushchennykh uravneniy s nepreryvnymi pravymi chastyami [Stability loss protraction for singularly perturbed equations with continuous right-hand sides]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(30). pp. 36–42.
16. Tursunov D.A., Erkebaev U.Z. (2016) Asimptoticheskoe razlozhenie resheniya zadachi Dirikhle dlya kol'tsa s osobennost'yu na granitse [Asymptotic expansion of the solution of the Dirichlet problem for a ring with a singularity on the boundary]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(39). pp. 42–52.
17. Rajabov N. (2011) Volterra type integral equations with boundary and interior fixed singularity and super-singularity kernels and their applications. Germany: Lap Lambert.
18. Radjabov N., Radjabova L.N., Repin O.A. (2011) On a class of two-dimensional adjoint integral equations of Volterra type. *Differential Equations*. 47(9). pp. 1333–1343. DOI: 10.1134/S0012266111090102.
19. Zaripov S.K. (2015) Ob odnom klasse model'nogo integro-differentsial'nogo uravneniya pervogo poryadka s odnoy singulyarnoy tochkoy v yadre [On a class of the first order model integro-differential equation with a singular point in the kernel]. *Vestnik Tadzhikskogo natsionalnogo universiteta*. 1/3(164). pp. 27–32.
20. Zaripov S.K. (2015) Ob odnom klasse model'nykh integro-differentsial'nykh uravneniy pervogo poryadka so sverkh singulyarnoy tochkoy v yadre [On a class of the first order model integro-differential equation with a super-singular point in the kernel]. *Vestnik Tadzhikskogo natsionalnogo universiteta*. 1/6(191). pp. 6–12.