УДК 515.12
DOI 10.17223/19988621/46/5

Е.С. Сухачева, Т.Е. Хмылева

О МОДИФИКАЦИЯХ ПРЯМОЙ ЗОРГЕНФРЕЯ

Рассматривается топологическое пространство S_A, которое является модификацией прямой Зоргенфрея S и определяется следующим образом: если точка $x \in A \subset \mathbf{R}$, то базой окрестностей точки x является семейство полуинтервалов $\{[x, x+\varepsilon), \varepsilon > 0\}$; если $x \in \mathbf{R} \setminus A$, то базой окрестностей точки x является семейство полуинтервалов $\{(x-\varepsilon, x], \varepsilon > 0\}$. Получен критерий гомеоморфности пространств S_A и $S_{\mathbf{Q}}$.

Ключевые слова: *Прямая Зоргенфрея, гомеоморфизм, бэровское пространство, пространство второй категории.*

В работе используются следующие обозначения: $\mathbf{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbf{R}$ – пространство вещественных чисел, наделенное стандартной евклидовой топологией; символом S обозначается прямая Зоргенфрея (или «стрелка»), представляющая собой множество вещественных чисел, топология в котором порождена базой $\{(a,b] : a,b \in \mathbf{R}, a < b\}$. Если множество $A \subset \mathbf{R}$, то символом S_A обозначим топологическое пространство, в котором база окрестностей точки x определяется следующим образом:

$$\{[x, x+\varepsilon), \varepsilon > 0\}, \text{ если } x \in A \subset \mathbf{R};$$

$$\{(x-\varepsilon, x], \varepsilon > 0\}, \text{ если } x \in \mathbf{R} \setminus A.$$

В частности если $A = \varnothing$, то $S_A = S$. Для любого подмножества вещественных чисел $X \subset \mathbf{R}$ через $\overline{X}$ обозначается замыкание множества X в пространстве $\mathbf{R}$.

Известно [1, 2], что пространства S и $S_{\mathbf{Q}}$ не гомеоморфны, а пространства S гомеоморфно пространству S_A, если множество $A \subset \mathbf{R}$ замкнуто или множество $\overline{A}$ счетно. В данной работе рассматривается следующий вопрос: для каких подмножеств $A \subset \mathbf{R}$ пространства S_A и $S_{\mathbf{Q}}$ гомеоморфны. Подобные проблемы рассматривались в работе V.A. Chatyrko, Y. Hattori [3], где база окрестностей точки $x \in A \subset S_A$ заменялась на базу окрестностей в евклидовой топологии.

Теорема 1. Пусть $A \subset \mathbf{R}$ счетное множество. Пространство S_A гомеоморфно пространству $S_{\mathbf{Q}}$ тогда и только тогда, когда подмножество $A \subset S_A$ всюду плотно в S.

Доказательство. ($\Leftarrow$) Известно [4, 4.3H], что существует гомеоморфизм $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такой, что $\varphi(A) = \mathbf{Q}$ и условие $a_i < a_j$ равносильно $\varphi(a_i) < \varphi(a_j)$ для любых a_i и a_j из множества A, т.е. отображение $\varphi|_A$ является монотонно возрастающим. Поскольку подмножество A всюду плотно на прямой, то

$\varphi : \mathbf{R} \xrightarrow{на} \mathbf{R}$ является монотонно возрастающей функцией. Следовательно, отображение $\varphi : S_A \to S_{\mathbf{Q}}$ – гомеоморфизм.

($\Rightarrow$) Покажем, что если подмножество A не всюду плотно на прямой S, то пространство S_A не гомеоморфно пространству $S_{\mathbf{Q}}$. Пусть $\overline{A} \neq S$. Предположим, что существует гомеоморфизм $\varphi : S_A \to S_{\mathbf{Q}}$. Рассмотрим интервал $(a,b) \subset S_A \setminus \overline{A}$ и положим $J = (a,b) \setminus \varphi^{-1}(\mathbf{Q})$. По лемме 4.4 [5] $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, где множества F_n замкнуты в J и такие, что $\varphi|_{F_n}$ – возрастающая функция для каждого $n \in \mathbf{N}$. Поскольку интервал (a,b) гомеоморфен S и, значит, является бэровским пространством, а множество J – всюду плотное и типа G_δ в интервале (a,b), то J – бэровское пространство [6, S276]. Это означает, что для некоторого $n \in \mathbf{N}$ множество F_n содержит внутреннюю точку, т.е. существует интервал (c,d), такой, что $J \cap (c,d) \subset F_n$. Так как множество $\varphi^{-1}(\mathbf{Q})$ всюду плотно в S_A, то существует точка $q_0 \in \mathbf{Q}$, такая, что $\varphi^{-1}(q_0) \in (c,d)$. Рассмотрим последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset J \cap (c,d)$, сходящуюся к точке $\varphi^{-1}(q_0)$ в пространстве S_A. Не нарушая общности, можно считать, что последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ является возрастающей. Так как $\varphi|_{J \cap (c,d)}$ – возрастающее отображение, то $\{\varphi(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ является возрастающей последовательностью. В силу непрерывности отображения φ эта последовательность сходится к точке q_0 возрастая, что невозможно, так как монотонно возрастающие последовательности в $S_{\mathbf{Q}}$ могут сходиться только к точкам из множества $S_{\mathbf{Q}} \setminus \mathbf{Q}$. □

Пусть подмножество $A \subset S$ счетно и не всюду плотно в S, но существует интервал I, такой, что $A \cap I$ – всюду плотное подмножество в I. Тогда по теореме 1 пространство S_A не гомеоморфно пространству $S_{\mathbf{Q}}$. Но в этом случае пространство S_A не гомеоморфно и пространству S (доказательство аналогично доказательству негомеоморфности пространств S и $S_{\mathbf{Q}}$ [1]).

Теорема 2. Пусть A и его дополнение $S \setminus A$ – несчетные, всюду плотные подмножества в S, а подмножество $D \subset S$ – счетно. Тогда пространства S_A и S_D не гомеоморфны.

Доказательство. Предположим, что существует гомеоморфизм $\varphi : S_A \to S_D$. Поскольку подмножество $S_A \setminus \varphi^{-1}(D)$ всюду плотное и типа G_δ в S_A, то оно является бэровским пространством [6, S276]. Тогда одно из пространств $\widetilde{A} = A \setminus \varphi^{-1}(D)$ или $\widetilde{B} = (S \setminus A) \setminus \varphi^{-1}(D)$ является пространством второй категории. Для определенности, пусть $\widetilde{A}$ – пространство второй категории. Заметим, что $\varphi(\widetilde{A}) \subset S \setminus D \subset S$. Тогда по лемме 4.4 [5] множество $\widetilde{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, где F_n замкнуты в $\widetilde{A}$ и отображение $\varphi|_{F_n}$ является возрастающим для каждого $n \in \mathbf{N}$. Так как пространство $\widetilde{A}$ второй категории, то существует $n \in \mathbf{N}$, такое, что множество F_n содержит внутреннюю точку, т.е. существует интервал (a,b), такой, что $(a,b) \cap \widetilde{A} \subset F_n$. Рассмотрим последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset (a,b) \cap \widetilde{A}$, сходящуюся к точке $x_0 \in (a,b) \cap \widetilde{A}$ в пространстве S_A. Не нарушая общности, можно считать, что последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ является убывающей. Так как $\varphi|_{\widetilde{A} \cap (a,b)}$ – возрастающее отображение, то $\{\varphi(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ является убывающей последовательностью. В силу непрерывности отображения φ эта последовательность сходится к точке $\varphi(x_0)$ справа, что невозможно, так как монотонно убывающие последовательности в S_D могут сходиться только к точкам из множества D. □

Следствие 3. Пусть A и $S \setminus A$ – несчетные, всюду плотные подмножества в S. Тогда S_A не гомеоморфно $S_{\mathbf{Q}}$.

Следствие 4. Пространство S_A гомеоморфно пространству $S_{\mathbf{Q}}$ тогда и только тогда, когда подмножество $A \subset S_A$ счетно и всюду плотно в S.

Проблема 5. Получить необходимые и достаточные условия для подмножеств A и B из $\mathbf{R}$, при которых пространства S_A и S_B гомеоморфны.

Заметим, что гомеоморфизм множеств A и B не влечет гомеоморфизм пространств S_A и S_B. Например, пространства $S_{\mathbf{Q}}$ и $S_{\mathbf{Q} \cap (0,1)}$ не гомеоморфны, хотя множества $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{Q} \cap (0,1)$ являются гомеоморфными. С другой стороны, пространства $S_{(0,1)}$ и $S_{[0,1]}$ гомеоморфны [2].

В работе [5] дан критерий гомеоморфности подмножеств S всему пространству S. В частности доказано, что если $X \subset S$ замкнутое, плотное в себе подмножество, то X гомеоморфно S. Очевидно, что подобное утверждение для пространства $S_{\mathbf{Q}}$ неверно, поскольку существуют замкнутые и плотные в себе подмножества $X \subset S_{\mathbf{Q}}$, такие, что $X \subset S_{\mathbf{Q}} \setminus \mathbf{Q}$ и, значит, X гомеоморфно S [2]. Нетрудно видеть, что необходимым условием гомеоморфности подмножества X и $S_{\mathbf{Q}}$ является условие $\overline{X \cap \mathbf{Q}} = X$. Следующий пример показывает, что это условие не является достаточным.

Пример 6. Пусть C – ограниченное, совершенное, нигде не плотное подмножество на прямой $\mathbf{R}$, $B = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ – правые концы смежных интервалов множества C и $C \cap \mathbf{Q} = B$. Тогда подмножество $C \subset S_{\mathbf{Q}}$ не гомеоморфно $S_{\mathbf{Q}}$.

Действительно, предположим, что существует гомеоморфизм $\varphi : S_{\mathbf{Q}} \to C$. Рассмотрим множество $J = S_{\mathbf{Q}} \setminus \left(\mathbf{Q} \cup \varphi^{-1}(B)\right) \subset S$. Поскольку $\varphi(J) \subset C \setminus B \subset S$, то по лемме 4.4. [5] $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, где множества F_n замкнуты в J и такие, что $\varphi|_{F_n}$ – возрастающая функция для каждого $n \in \mathbf{N}$. Так как $S_{\mathbf{Q}}$ – бэровское пространство, а J – всюду плотное подмножество типа G_δ в $S_{\mathbf{Q}}$, то пространство J – бэровское [6]. Это означает, что для некоторого $n \in \mathbf{N}$ множество F_n содержит внутреннюю точку, т.е. существует интервал (a,b), такой, что $J \cap (a,b) \subset F_n$. Рассмотрим точку $r_0 \in (a,b) \cap \mathbf{Q}$ и возрастающую последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset J \cap (a,b)$, сходящуюся к точке r_0 в пространстве $\mathbf{R}$. Это означает, что в пространстве $S_{\mathbf{Q}}$ последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ не имеет предельных точек. Так как $\varphi|_{F_n}$ – монотонно возрастающее отображение, то последовательность $\{\varphi(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ является возрастающей и ограниченной сверху числом $\varphi(r_0)$. Следовательно, последовательность $\{\varphi(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к некоторой точке $y_0 \le \varphi(r_0)$ в евклидовой топологии прямой $\mathbf{R}$. Нетрудно видеть, что $y_0 \in C \setminus B$ и, значит, последовательность $\{\varphi(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к точке y_0 в топологии пространства $S_{\mathbf{Q}}$. Полученное противоречие доказывает, что не существует гомеоморфизма между C и $S_{\mathbf{Q}}$. □

Проблема 7. Получить необходимое и достаточное условия при котором подмножество $X \subset S_{\mathbf{Q}}$ гомеоморфно $S_{\mathbf{Q}}$.

Статья поступила 10.02.2017 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хмылева Т.Е.* О гомеоморфизме прямой Зоргефрея и ее модификации S_Q //Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 1(39). С. 53–56.
2. *Сухачева Е.С.*, *Хмылева Т.Е.* О некоторых линейно упорядоченных топологических пространствах, гомеоморфных прямой Зоргенфрея // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 5(31). С. 63–68.
3. *Chatyrko V.A.*, *Hattori Y.* A poset of topologies on the set of real numbers // Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae. 2013. V. 54. No. 2. P. 189–196.
4. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986. С. 751.
5. *Burke D.K.*, *Moore J.T.* Subspaces of the Sorgenfrey line // Topology and its Applications. 1998. V. 90. No. 1–3. P. 57–68.
6. *Tkachuk V.V.* A Cp-theory problems book. Topological and functions space. New York: Springer, 2011.

Sukhacheva E.S., Khmyleva T.E. (2017) ON MODIFICATION OF THE SORGENFREY LINE. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 46. pp. 36–40

DOI 10.17223/19988621/46/5

In this paper, we consider a topological space S_A that is a modification of the Sorgenfrey line S and is defined as follows: if a point $x \in A \subset \mathbf{R}$, then the base of neighborhoods of the point is $\{[x, x+\varepsilon), \forall \varepsilon > 0\}$; if a point $x \in \mathbf{R} \setminus A$, then the base of neighborhoods of the point is $\{(x-\varepsilon, x], \forall \varepsilon > 0\}$. The following criterion for a homeomorphism of the spaces S_A and $S_{\mathbf{Q}}$ has been obtained: the spaces S_A and $S_{\mathbf{Q}}$ are homeomorphic if and only if a subset $A \subset S_A$ is countable and dense in S.

Keywords: Sorgenfrey line, homeomorphism, Baire space, the space of the second category.

SUKHACHEVA Elena Sergevna (Tomsk State University, Russian Federation)
E-mail: sirius9113@mail.ru

KHMYLEVA Tatiana Evgenievna (Candidate of Physics and Mathematics,
Tomsk State University, Russian Federation)
E-mail: TEX2150@yandex.ru

REFERENCES

1. Khmyleva T.E. (2016) O gomeomorfizme pryamoy Zorgenfreya i ee modifikatsii S_Q [On the homeomorphism of the Sorgenfrey line and its modifications S_Q]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 1(39). pp. 53–56. DOI 10.17223/19988621/39/6.
2. Sukhacheva E.S., Khmyleva T.E. (2014) O nekotorykh lineyno uporyadochennykh topologicheskikh prostranstvakh, gomeomorfnykh pryamoy Zorgenfreya [On some linearly ordered topological spaces homeomorphic to the Sorgenfrey line]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 5(31). pp. 63–68.
3. Chatyrko V.A., Hattori Y. (2013) A poset of topologies on the set of real numbers. *Comment. Math. Univ. Carolin.* 54(2). pp. 189–196.
4. Engel'king R. (1977) *General Topology*. Warsaw: PWN.
5. *Burke D.K.*, *Moore J.T.* (1998) Subspaces of the Sorgenfrey line. *Topology and its Applications*. 90(1). pp. 57–68.
6. *Tkachuk V.V.* (2011) *A Cp-Theory Problems Book. Topological and Functions Space*. New York: Springer Verlag.