ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2017 Управление, вычислительная техника и информатика № 39

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 517.977.56
DOI: 10.17223/19988605/39/1

А.И. Агамалиева, К.Б. Мансимов

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ, ОПИСЫВАЕМОЙ СИСТЕМОЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается граничная задача оптимального управления для системы интегро-дифференциальных уравнений. Получены необходимые условия оптимальности.
Ключевые слова: необходимое условие оптимальности; интегро-дифференциальное уравнение, принцип максимума Понтрягина; линеаризованное условие максимума.

В работах [1–3 и др.] изучен ряд задач оптимального управления динамикой популяции, описываемых определенным классом интегро-дифференциальных уравнений. Установлены необходимые условия оптимальности в форме вариационного принципа максимума, а также линеаризованного условия максимума при предположении, что управляющая функция входит в правую часть уравнения состояния.

В предлагаемой работе изучается аналогичная задача при предположении, что вектор управляющих воздействий входит в начальное условие уравнения. Получен ряд необходимых условий оптимальности.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о минимуме терминального типа функционала

$$S(v) = \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, z(t_1, x))dx \tag{1}$$

при ограничениях

$$z_t = f(t,x,z,y), \ (t,x) \in D = [t_0,t_1] \times [x_0,x_1], \tag{2}$$

$$y(t,x) = \int_{x_0}^{x_1} g(t,x,s,z(t,s))ds, x \in [x_0,x_1], \ z(t_0,x) = \int_{x_0}^{x} F(x,s,z(t_0,s),v(s))ds. \tag{3}$$

Здесь $f(t,x,z,y), g(t,x,s,z)$ – заданные n- и m-мерные вектор-функции, непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными по векторам состояния, $F(x,z,v)$ – заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по z, t_0, t_1, x_0, x_1 $(t_0 < t_1; \ x_0 < x_1)$ – заданы; $\varphi(x,z)$ – заданная скалярная функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с $\dfrac{\partial \varphi(x,z)}{\partial z}$, а $v = v(x)$ – кусочно-непрерывный (с конечным числом точек разрыва первого рода) вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множества $V \subset R^r$, т.е.

$$v(x) \in V \subset R^r, \quad x \in [x_0, x_1]. \tag{4}$$

Такие управляющие функции назовем допустимыми.

Предполагается, что каждому допустимому управлению $v(x)$ соответствует единственное решение $(z(t_0,x),z(t,x),y(t,x))$ (в классическом смысле) задачи (2)–(3).

Допустимое управление $v(x)$, доставляющее минимум функционалу (1) при ограничениях (2)–(4), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(z(t_0,x),z(t,x),y(t,x))$ – оптимальным процессом.

2. Формула приращения функционала качества

Предположим, что $(v(x),z(t_0,x),z(t,x),y(t,x))$ есть фиксированный допустимый процесс. Через $\left(\overline{v}(x)=v(x)+\Delta v(x),\overline{z}(t_0,x)=z(t_0,x)+\Delta z(t_0,x),\ \overline{z}(t,x)=z(t,x)+\Delta z(t,x),\ \overline{y}(t,x)=y(t,x)+\Delta y(t,x)\right)$ обозначим произвольный допустимый процесс и запишем приращение

$$\Delta J(v)=J(\overline{v})-J(v)=\int_{x_0}^{x_1}\left(\varphi(x,\overline{z}(t_1,x))-\varphi(x,z(t_1,x))\right)dx \tag{5}$$

функционала качества (1).

При этом ясно, что приращение $(\Delta z(t_0,x),\Delta z(t,x),\Delta y(t,x))$ состояния $(z(t_0,x),z(t,x),y(t,x))$ будет решением системы

$$\Delta z_t(t,x)=f(t,x,\overline{z}(t,x),\overline{y}(t,x))-f(t,x,z(t,x),y(t,x)), \tag{6}$$

$$\Delta z(t_0,x)=\int_{x_0}^{x}[F(x,s,\overline{z}(t_0,s),\overline{v}(s))-F(x,s,z(t_0,s),v(s))]ds, \tag{7}$$

$$\Delta y(t,x)=\int_{x_0}^{x_1}[g(t,x,s,\overline{z}(t,s))-g(x,s,z(t,s),v(s))]ds. \tag{8}$$

Пусть $p(t,x),\psi(x),q(t,x)$ – пока неизвестные n-мерные вектор-функции.

Из (6)–(8) следует, что

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x}p'(t,x)\Delta z_t(t,x)dxdt=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x}p'(t,x)[f(t,x,\overline{z}(t,x),\overline{y}(t,x))-f(t,x,z(t,x),y(t,x))]dxdt\,, \tag{9}$$

$$\int_{x_0}^{x}\psi'(x)\Delta z(t_0,x)dx=\int_{x_0}^{x}\psi'(x)\left[\int_{x_0}^{x}F(x,s,\overline{z}(t_0,s),\overline{v}(s))-F(x,s,z(t_0,s),v(s))]ds\right]dx\,, \tag{10}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x}q'(t,x)\Delta y(t,x)dx=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x}q'(t,x)\left\{\int_{x_0}^{x_1}\left[g(t,x,s,\overline{z}(t,s))-g(t,x,s,z(t,s))\right]ds\right\}dx\,dt\,. \tag{11}$$

Ясно, что

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}p'(t,x)\Delta z_t(t,x)dxdt&=\int_{x_0}^{x_1}[p'(t_1,x)\Delta z(t_1,x)-p'(t_0,x)\Delta z(t_0,x)]dx-\\&-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}p_t'(t,x)\Delta z_t(t,x)dxdt.\end{aligned} \tag{12}$$

Далее введем функцию Гамильтона–Понтрягина

$$H(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))=p'(t,x)f(t,x,z(t,x)y(t,x))+\int_{x_0}^{x_1}q'(t,s)g(t,s,x,z(t,x))ds.$$

С учетом (9)–(12) формула приращения (5) записывается в виде

$$\Delta J(v)=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial\varphi'(x,z(t_1,x))}{\partial z}\Delta z(t_1,x)dx+\int_{x_0}^{x_1}o_1(\|\Delta z(t_1,x)\|)dx+\int_{x_0}^{x_1}p'(t_1,x)\Delta z(t_1,x)\,dx-$$

$$-\int_{x_0}^{x_1}p'(t_0,x)\Delta z(t_0,x)dx-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}p'_t(t,x)\Delta z(t,x)\,dxdt+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}q'(t,x)\Delta y(t,x)\,dxdt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}[H(t,x,\bar z(t,x),\bar y(t,x),p(t,x),q(t,x))-H(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))]dxdt+ \tag{13}$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\psi'(x)\Delta z(t_0,x)dx-\int_{x_0}^{x_1}[\int_{x}^{x_1}\psi'(s)[F(s,x,\bar z(t_0,x),\bar v(x))-F(s,x,z(t_0,x),v(x))]ds]dx.$$

Положим

$$M(x,z(t_0,x),\psi(x),v(x))=\int_{x}^{x_1}\psi'(s)F(s,x,z(t_0,x),v(x))ds.$$

Используя формулу Тейлора из (13), будем иметь

$$\Delta J(v)=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial\varphi'(x,z(t_1,x))}{\partial z}\Delta z(t_1,x)\,dx+\int_{x_0}^{x_1}p'(t_1,x)\Delta z(t_1,x)-\int_{x_0}^{x_1}p'(t_0,x)\Delta z(t_0,x)dx-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}p'_t(t,x)\Delta z(t,x)dxdt+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}q'(t,x)\Delta y(t,x)dxdt-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}H'_z(t,x,z(t,x),y(t,x)p(t,x),q(t,x)\times$$

$$\times\Delta z(t,x)dxdt-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}H'_y(t,x,z(t,x),y(t,x)p(t,x),q(t,x)\Delta y(t,x)dxdt+$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\psi'(x)\Delta z(t_0,x)dx-\int_{x_0}^{x_1}[M(x,z(t_0,x),\bar v(x),\psi(x))-M(x,z(t_0,x),v(x),\psi(x))]dx- \tag{14}$$

$$-\int_{x_0}^{x}M'_z(x,z^0(t_0,x),v(x),\psi(x))\Delta z(t,x)dx+\int_{x_0}^{x_1}o_1(\|\Delta z(t_1,x)\|)dx-\int_{x_0}^{x_1}o_3(\|\Delta z(t_0,x)\|)dx-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x}^{x_1}o_2(\|\Delta z(t,x)\|)dx+\|\Delta y(t,x)\|)dxdt.$$

Если предполагать, что $p(t,x),q(t,x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют соотношениям

$$p_t(t,x)=-H_z(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)),$$
$$p(t_1,x)=-\varphi_z(x,z(t_1,x)),$$
$$q(t,x)=-H_y(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)),$$
$$\psi(x)=M_z(x,z(t_0,x),v(x),\psi(x))+p(t_0,x),$$

то формула приращения (14) примет вид

$$\Delta J(v) = -\int_{x_0}^{x_1}\Big[M(x,z(t_0,x)\bar{v}(x),\psi(x)) - M(x,z(t_0,x),v(x),\psi(x))\Big]dx +$$
$$+\int_{x_0}^{x_1} o_1(\|\Delta z(t_1,x)\|)dx - \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} o_2(\|\Delta z(t,x)\| + \|\Delta y(t,x)\|)dxdt - \int_{x_0}^{x_1} o_3(\|\Delta z(t_0,x)\|)dx. \tag{15}$$

3. Оценка остаточного члена

Перейдем к оценке нормы приращения $(\Delta z(t_0,x), \Delta z(t,x), \Delta y(t,x))$ состояния $(z(t_0,x), z(t,x), y(t,x))$, отвечающего приращению $\Delta v(x)$, управления $v(x)$. Из (6)–(8) получаем, что

$$\|\Delta z(t,x)\| \le Z_1\int_{t_0}^{t}\big[\|\Delta z(\tau,x)\| + \|\Delta y(\tau,x)\|\big]d\tau + \|\Delta z(t_0,x)\|, \tag{16}$$

$$\|\Delta y(t,x)\| \le Z_2\int_{x_0}^{x_1}\Delta z(t,s)ds, \tag{17}$$

$$\|\Delta z(t_0,x)\| \le Z_3\int_{x_0}^{x}[\|\Delta z(t_0,s)\| + \|\Delta v(s)\|]ds. \tag{18}$$

Здесь $Z_i = \mathrm{const} > 0,\ i = \overline{1,3},$ – некоторые постоянные.

Применяя к неравенству (18) лемму Гронуолла–Беллмана (см. например, [4, 5]), получим

$$\|\Delta z(t_0,x)\| \le Z_4\int_{x_0}^{x_1}\|\Delta v(s)\|ds, \tag{19}$$

где $Z_4 = \mathrm{const} > 0$ – некоторое постоянное.

Далее из (16), применяя лемму Гронуолла–Беллмана, будем иметь

$$\|\Delta z(t,x)\| \le Z_5\left[\int_{t_0}^{t}\|\Delta y(\tau,x)\|d\tau + \|\Delta z(t_0,x)\|\right], \tag{20}$$

где $Z_5 = \mathrm{const} > 0$.

В (20), учитывая неравенство (17), приходим к оценке

$$\|\Delta z(t,x)\| \le Z_6\left[\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1}\|\Delta z(\tau,x)\|dxd\tau + \|\Delta z(t_0,x)\|\right],\ Z_6 = \mathrm{const} > 0.$$

Отсюда

$$\max_{x_0\le x\le x_1}\|\Delta z(t,x)\| \le Z_6\left[\int_{t_0}^{t}(x_1 - x_0)\max_{x_0\le x\le x_1}\|\Delta z(\tau,x)\|d\tau + \|\Delta z(t_0,x)\|\right]. \tag{21}$$

Применяя лемму из [6] к последнему неравенству (21), будем иметь

$$\max_{x_0\le x\le x_1}\|\Delta z(t,x)\| \le Z_7\int_{x_0}^{x_1}\|\Delta v(s)\|ds,\ Z_7 = \mathrm{const} > 0. \tag{22}$$

Используя полученные оценки (17), (19), (22), удается оценить остаток формулы приращения на специальной вариации управления.

4. Необходимые условия оптимальности

Считая $v(x)$ оптимальным управлением его специальное приращение определим по формуле

$$\Delta v_{\varepsilon}(x)=\begin{cases}0, x \,\overline{\in}\, [\xi,\xi+\varepsilon),\\ v-v(x), x\in[\xi,\xi+\varepsilon),\end{cases} \tag{23}$$

где $\xi\in(x_0,x_1)$ – произвольная точка непрерывности управления $v(x)$, $v\in V$ – произвольный вектор, $\varepsilon>0$ – произвольное число, такое что $\xi+\varepsilon<x_1$.

Учитывая (23) и установленные оценки из (15), будем иметь

$$S(v+\Delta v_{\varepsilon})-S(u)=-\varepsilon[M(\xi,z(t_0,\xi),v,\psi(\xi))-M(\xi,z(t_0,\xi),v,u(\xi),\psi(\xi))]+o(\varepsilon).$$

Из последнего разложения следует теорема.

Теорема 1. При сделанных предположенных для оптимальности допустимого управления $v(x)$ в задаче (1)–(4) необходимо, чтобы неравенство

$$M(\xi,z(t_0,\xi),v,\psi(\xi))-M(\xi,z(t_0,\xi),v(\xi),\psi(\xi))\le 0 \tag{24}$$

выполнялось для всех $\xi\in[x_0,x_1)$ и $v\in V$.

Неравенство (24) является аналогом условия максимума Понтрягина в рассматриваемой задаче.

Из него можно, при дополнительных предположениях, получить линеаризованное условие максимума и аналог управления Эйлера. Приведем их.

Теорема 2. Пусть множество V выпуклое, а $F(x,z,v)$ непрерывно дифференцируема также по v. Тогда для оптимальности допустимого управления $v(x)$ необходимо, чтобы соотношение

$$\max_{w\in V} M'_v(\xi,z(t_0,\xi),v(\xi),\psi(\xi))w=M'_v(\xi,z(t_0,\xi),v(\xi),\psi(\xi))\cdot v(x) \tag{25}$$

выполнялось для всех $\xi\in[x_0,x_1)$.

Соотношение (25) есть аналог линеаризованного условия максимума.

Теорема 3. Если множество V открытое, а $F(x,z,u)$ непрерывно-дифференцируема по v, то вдоль оптимального процесса $(v(x),z(t_0,x),z(t,x),y(t,x))$ соотношение

$$M_v(\xi,z(t_0,\xi),v(\xi),\psi(\xi))=0 \tag{26}$$

выполняется для всех $\xi\in[x_0,x_1)$.

Соотношение (26) есть аналог уравнения Эйлера.

В заключении приведем аналог условия Лежандра–Клебша.

Следуя, например, работам [7, 8], каждое допустимое управление, удовлетворяющее уравнению Эйлера, назовем классической экстремалью.

Теорема 4. Пусть множество V открытое, а $F(x,z,v)$ дважды непрерывно дифференцируема по v. Тогда для оптимальности классической экстремали $v(x)$ в задаче (1)–(4) необходимо, чтобы неравенство

$$w'\frac{\partial^2 M'(\xi,z(t,\xi),v(\xi),\psi(\xi))}{\partial v^2}w\le 0,$$

выполнялось для всех $w\in R^r$ и $\xi\in[x_0,x_1)$.

Заключение

В работе рассматривается одна задача оптимального управления, описываемая системой интегро-дифференциальных уравнений. Управляющая функция входит в граничное условие. Установлен ряд необходимых условий оптимальности первого порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Букина А.В., Букин Ю.С. Исследование модели динамики популяции методами теории оптимального управления // Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. 2010. № 3. С. 59−66.
2. Букина А.В. Идентификация модели видообразования методами теории оптимального управления // Журнал СФУ. Сер. Математика и физика. 2008. № 3. С. 231−235.
3. Букина А.В. К исследованию задачи оптимального управления интегро-дифференциальной моделью симпатрического видообразования // Математическое моделирование и информационные технологии : материалы VIII школы-семинара молодых ученых. Иркутск, 2006. С. 34–37.
4. Новоженов М.М., Сумин В.И. Методы оптимального управления системами математической физики. Горький : Изд-во ГГУ, 1986. 87 с.
5. Плотников В.И., Сумин В.И. Проблема устойчивости нелинейных систем Гурса–Дарбу // Дифференциальные уравнения. 1972. № 5. С. 845−856.
6. Хотеев Л.А. Задача оптимального управления для интегро-дифференциальных уравнений типа Барбашина // Проблемы управления и оптимизации. Минск : ИМ АН БССР, 1976. С. 74−87.
7. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М. : Наука, 1973. 256 с.
8. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимальности управления системами Гурса-Дарбу. Баку : ЭЛМ, 2013. 363 с.

Агамалыева Айгюн Исфаган кызы. E-mail: agamaliyeva88@gmail.com
Мансимов Камил Байрамали оглы, д-р физ.-мат. наук, профессор. E-mail: mansimovbkamil@gmail.com
Бакинский государственный университет

Поступила в редакцию 2 июля 2016 г.

Aqamaliyeva Aygun Isfagan (Baku State University, Azerbaijan)
Mansimov Kamil Bayramali (Baku State University, Institute of Control Systems of Azerbaijan National Academy of Sciences, Azerbaijan).

About one control problem described by system of inteqro-diferential equations.

Keywords: Dynamics population; necessary optimality conditions; inteqro-differential equation; Pontryagins maximum principle; linearized maximum principle.

DOI: 10.17223/19988605/39/1

Consider the problem of minimizing the functional of terminal type

$$S(v)=\int_{x_0}^{x_1}\varphi(x,z(t_1,x))dx\,, \tag{1}$$

with constraints

$$z_t=f(t,x,z,y),\ (t,x)\in D=[t_0,t_1]\times[x_0,x_1]\,, \tag{2}$$

$$\begin{gathered} y(t,x)=\int_{x_0}^{x_1}g(t,x,s,z(t,s))ds, x\in[x_0,x_1], \\ z(t_0,x)=\int_{x_0}^{x}F(x,s,z(t_0,s),v(s))ds. \end{gathered} \tag{3}$$

Here $f(t,x,z,y), g(t,x,s,z)$ is the given n- and m-dimensional vector functions respectively, continuous with respect to all the variables together with partial derivatives of the vectors of state, $F(x,z,v)$ is the given n-dimensional vector-function continuous with respect to all the variables together with partial derivatives z, t_0, t_1, x_0, x_1 $(t_0<t_1;\, x_0<x_1)$ are given, $\varphi(x,z)$ is a scalar function continuous with respect to all the variables together with the $\dfrac{\partial\varphi(x,z)}{\partial z}$, $v=v(x)$ is piecewise continuous (with a finite number of points of discontinuity of the first kind) vector control actions with values from a specified non-empty and bounded set that is, $v(x)\in V\subset R^r$, $x\in[x_0,x_1]$.

Our goal is to derive a necessary optimality condition in the problem under consideration.

REFERENCES

1. Bukina, A.V. & Bukin, Yu.S. (2010) Investigation of population dynamics model by the methods of optimal control theory. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Matematika − The Bulletin of Irkutsk State University. Mathematics*. 3. pp. 59−66. (In Russian).

2. Bukina, A.V. (2008) Identification of a Speciation Model by Methods of Optimal Control Theory. *Zhurnal SFU. Ser. Ma-tematika i fizika − SibFU Journal. Mathematics and Physics*. 3. pp. 231−235. (In Russian).
3. Bukina, A.V. (2006) [To the study of the problem of optimal control of the integro-differential model of sympatric speciation]. *Matematicheskoe modelirovanie i informatsionnye tekhnologii* [Mathematical Modeling and Information Technologies]. Proc. of the Eighth Seminar of Young Scientists. Irkutsk. pp. 34–37. (In Russian).
4. Novozhenov, M.M. & Sumin, V.I. (1986) *Metody optimal'nogo upravleniya sistemami matematicheskoy fiziki* [Methods of optimal control of mathematical physics systems]. Gorky: Gorky State University.
5. Plotnikov, V.I. & Sumin, V.I. (1972) Problema ustoychivosti nelineynykh sistem Gursa–Darbu [The problem of stability of nonlinear Goursat-Darboux systems]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*. 5. pp. 845−856.
6. Khoteev, L.A. (1976) Zadacha optimal'nogo upravleniya dlya integro-differentsial'nykh uravneniy tipa Barbashina [The optimal control problem for Barbashin type integro-differential equations]. In: Kirillova, F.M. (ed.) *Problemy upravleniya i optimizatsii* [Problems of control and optimisation]. Minsk: Belorussian SSR Academy of Sciences. pp. 74−87.
7. Gabasov, R. & Kirillova, F.M. (1973) *Osobye optimal'nye upravleniya* [Special optimal control]. Moscow: Nauka.
8. Mansimov, K.B. & Mardanov, M.Dzh. (2013) *Kachestvennaya teoriya optimal'nosti upravleniya sistemami Gursa-Darbu* [Qualitative theory of optimal control of the Goursat-Darboux systems]. Baku: ELM.