УДК 519.865.5
DOI: 10.17223/19988605/39/2

В.В. Домбровский, Т.Ю. Объедко, М.В. Самородова

ПРОГНОЗИРУЮЩЕЕ УПРАВЛЕНИЕ С ЗАМКНУТОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ДИСКРЕТНЫМИ СИСТЕМАМИ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОРРЕЛИРОВАННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассматривается задача управления дискретными динамическими системами со случайными коррелированными параметрами, относительно которых известны только первые и вторые моменты распределения. Определена стратегия управления с прогнозирующей моделью с замкнутой обратной связью на конечном и бесконечном горизонтах управления. Получены достаточные условия устойчивости стратегии управления на бесконечном горизонте.

Ключевые слова: управление с прогнозирующей моделью; замкнутая обратная связь; коррелированные параметры.

Системам со случайными параметрами уделяется значительное внимание в современной научной литературе. Это связано с тем, что такие системы нашли широкое практическое применение при управлении сложными реальными объектами.

Проблема синтеза регуляторов для подобных систем при различных предположениях о характере изменения случайных параметров рассматривалась в работах [1–9]. В работе [1] получены уравнения синтеза регуляторов с замкнутой обратной связью для систем со случайными независимыми параметрами и мультипликативными шумами. В [4, 5] рассматривается задача управления линейными системами со скачкообразными параметрами, меняющимися в соответствии с эволюцией дискретной марковской цепи.

В работах [6–9] используется методология управления с прогнозирующей моделью (управление со скользящим горизонтом) [10]. Задача синтеза стратегий управления с прогнозированием с замкнутой обратной связью для систем со случайными независимыми параметрами решена в работе [6]. В работе [7] получены уравнения синтеза оптимальных стратегий управления с прогнозирующей моделью с разомкнутой обратной связью для систем со случайными независимыми параметрами и мультипликативными шумами. Дискретные системы со случайными зависимыми параметрами рассматриваются в [8, 9]. В этих работах синтезированы алгоритмы прогнозирующего управления с разомкнутой обратной связью с учетом ограничений на управления. При этом в [8] предполагается, что динамика вектора параметров описывается разностным стохастическим уравнением авторегрессии, в работе [9] предполагается, что известны только первые и вторые моменты распределения параметров.

В настоящей работе получены уравнения синтеза оптимальных стратегий управления с замкнутой обратной связью для систем со случайными коррелированными параметрами, относительно которых предполагаются известными только первые и вторые моменты распределения. Даны достаточные условия устойчивости стратегии управления на бесконечном горизонте.

1. Постановка задачи

Рассмотрим дискретную линейную систему, заданную на вероятностном пространстве $(\mathbf{\Omega}, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$:

$$x(k+1) = Ax(k) + B[\eta(k+1), k+1]u(k), \tag{1}$$

где $x(k)$ – n_x-мерный вектор состояния, $u(k)$ – n_u-мерный вектор управления, $\eta(k)$ – последовательность q-мерных случайных векторов, наблюдаемых до момента времени k включительно. A, $B[\eta(k),k]$ – матрицы соответствующих размерностей, причем $B[\eta(k),k]$ зависит от $\eta(k)$ линейно.

Пусть на $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ выделен поток σ-алгебр $\mathbb{F}=(\mathfrak{F}_k)_{k\geq 1}$, где каждая из σ-алгебр $\mathfrak{F}_k$ порождается последовательностями $\{\eta(s)$: $s=0,1,2,\ldots,k\}$ и интерпретируется как доступная информация до момента времени k включительно.

Будем полагать, что для процесса $\eta(k)$ известны условные моменты относительно $\mathfrak{F}_k$:

$$E\{\eta(k+i)/\mathfrak{F}_k\} = \overline{\eta}(k+i), \tag{2}$$

$$E\left\{\eta(k+i)\eta^{\mathrm{T}}(k+j)\big/\mathfrak{F}_k\right\} = \Theta_{ij}(k), (k=0,1,2,...), (i,j=1,2,...). \tag{3}$$

Для управления системой (1) синтезируем стратегии с прогнозирующей моделью по следующему правилу. На каждом шаге k минимизируем квадратичный критерий со скользящим горизонтом управления

$$\begin{aligned} J(k+m/k) = \sum_{i=1}^{m} E\left\{x^{\mathrm{T}}(k+i)R_1(k,i)x(k+i)\big/ x(k),\mathfrak{F}_k\right\} + \\ +\sum_{i=0}^{m-1} E\left\{u^{\mathrm{T}}(k+i/k)R(k,i)u(k+i/k)\big/ x(k),\mathfrak{F}_k\right\} \end{aligned} \tag{4}$$

на траекториях системы (1) по последовательности прогнозирующих управлений $u(k/k),\ldots,u(k+m-1/k)$, зависящих от состояния системы в момент времени k; $R_1(k,i) > 0$, $R(k,i) > 0$ – весовые матрицы соответствующих размерностей; m – горизонт прогноза; k – текущий момент времени. В качестве управления в момент времени k берем $u(k) = u(k/k)$. Тем самым получаем управление $u(k)$ как функцию состояний $x(k)$, т.е. управление с обратной связью. Чтобы получить управление $u(k+1)$ на следующем шаге, процедура повторяется для следующего момента $k+1$ и т.д.

2. Синтез стратегий управления с прогнозированием

Теорема 1. Оптимальная стратегия прогнозирующего управления с замкнутой обратной связью системой (1), минимизирующая критерий (4), при фиксированном горизонте прогнозирования m, на каждом шаге k определяется уравнением

$$u^{\mathrm{opt}}(k) = -K(m)x(k) = -\left[L_{22}(m-1)+R(k,0)\right]^{-1} L_{12}(m-1)x(k), \tag{5}$$

где

$$L_{12}(l) = A^{\mathrm{T}}S(l)E\{B[\eta(k+m-l),k+m-l]/\mathfrak{F}_{k+m-l+1}\}, \tag{6}$$

$$L_{22}(l) = E\left\{B^{\mathrm{T}}[\eta(k+m-l),k+m-l]S(l)B[\eta(k+m-l),k+m-l]/\mathfrak{F}_{k+m-l+1}\right\}, \tag{7}$$

$S(l)$ – матрица, определяемая из решения рекуррентного уравнения вида

$$S(l) = R_1(k,m-l) + A^{\mathrm{T}}S(l-1)A - L_{12}(l-1)\left[L_{22}(l-1)+R(k,m-l)\right]^{-1}\left(L_{12}(l-1)\right)^{\mathrm{T}} \tag{8}$$

с начальным условием $S(0) = R_1(k,m)$.

При этом оптимальное значение критерия (4) определяется выражением

$$J^{\mathrm{opt}}(k+m/k) = x^{\mathrm{T}}(k)\left[S(m)-R_1(k,m)\right]x(k). \tag{9}$$

Доказательство. Используем метод динамического программирования Беллмана. В момент времени $k+m-1$ критерий (4) имеет вид

$$\begin{aligned} J(k+m/k+m-1) = E\{x^{\mathrm{T}}(k+m)R_1(k,m)x(k+m) + \\ +u^{\mathrm{T}}(k+m-1/k)R(k,m-1)u(k+m-1/k)\big/ x(k+m-1),\mathfrak{F}_{k+m-1}\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Выражая $x(k+m)$ через $x(k+m-1)$ с использованием уравнения системы (1) и подставляя в (10), будем иметь

$$J(k+m/k+m-1) = x^{\mathrm{T}}(k+m-1)A^{\mathrm{T}}R_1(k,m)Ax(k+m-1) +$$
$$+2x^{\mathrm{T}}(k+m-1)A^{\mathrm{T}}R_1(k,m)E\{B[\eta(k+m),k+m]/\mathfrak{F}_{k+m-1}\}u(k+m-1/k) +$$

$$+u^{\mathrm{T}}(k+m-1/k)\{E\{B^{\mathrm{T}}[\eta(k+m),k+m]R_1(k,m)B[\eta(k+m),k+m]/\mathfrak{F}_{k+m-1}\}+R(k,m-1)\}u(k+m-1/k)=$$
$$=x^{\mathrm{T}}(k+m-1)A^{\mathrm{T}}S(0)Ax(k+m-1)+2x^{\mathrm{T}}(k+m-1)L_{12}(0)u(k+m-1/k)+$$
$$+u^{T}(k+m-1/k)\{L_{22}(0)+R(k,m-1)\}u(k+m-1/k), \quad (11)$$

где $S(0) = R_1(k,m)$; $L_{12}(0)$, $L_{22}(0)$ определяются уравнениями (6)–(7).

Оптимизируя (11) по $u(k+m-1/k)$, получаем оптимальное управление на $k+m-1$ шаге:

$$u^{\mathrm{opt}}(k+m-1/k)=-[L_{22}(0)+R(k,m-1)]^{-1}L_{11}(0)x(k+m-1). \quad (12)$$

Подставляя (12) в (11), получим оптимальное значение критерия (4) на $k+m-1$ шаге:

$$J^{opt}(k+m/k+m-1)=x^{\mathrm{T}}(k+m-1)[A^{\mathrm{T}}R_1(k,m)A-A^{\mathrm{T}}R_1(k,m)M\{B[\eta(k+m),k+m]/\mathfrak{F}_{k+m-1}\}\times$$
$$\times\{E\{B^{\mathrm{T}}[\eta(k+m),k+m]R_1(k,m)B[\eta(k+m),k+m]/\mathfrak{F}_{k+m-1}\}+R(k,m-1)\}^{-1}\times$$
$$\times E\{B^{\mathrm{T}}[\eta(k+m),k+m]/\mathfrak{F}_{k+m-1}\}R_1(k,m)A]x(k+m-1)= \quad (13)$$
$$=x^{\mathrm{T}}(k+m-1)[A^{\mathrm{T}}S(0)A-L_{12}(0)[L_{22}(0)+R(k,m-1)]^{-1}\left(L_{12}(0)\right)^{\mathrm{T}}]x(k+m-1)=$$
$$=x^{\mathrm{T}}(k+m-1)[S(1)-R_1(k,m-1)]x(k+m-1),$$

где $S(1)$ определяется уравнением (8).

Повторяя процедуру на следующем шаге, имеем

$$J(k+m/k+m-2)=E\{x^{\mathrm{T}}(k+m-1)R_1(k,m-1)x(k+m-1)+$$
$$+u^{\mathrm{T}}(k+m-2/k)R(k,m-2)u(k+m-2/k)+J^{\mathrm{opt}}(k+m/k+m-1)\big/x(k+m-2),\mathfrak{F}_{k+m-2}\}= \quad (14)$$
$$=E\{x^{\mathrm{T}}(k+m-1)S(1)x(k+m-1)+u^{\mathrm{T}}(k+m-2/k)R(k,m-2)u(k+m-2/k)/x(k+m-2),\mathfrak{F}_{k+m-2}\}=$$
$$=x^{\mathrm{T}}(k+m-2)A^{\mathrm{T}}S(1)Ax(k+m-2)+2x^{\mathrm{T}}(k+m-2)L_{12}(1)u(k+m-2/k)+$$
$$+u^{\mathrm{T}}(k+m-2/k)\{L_{22}(1)+R(k,m-2)\}u(k+m-2/k),$$

$L_{12}(1)$, $L_{22}(1)$ определяются уравнениями (6)–(7).

Оптимизируя (14) по $u(k+m-2/k)$, получаем оптимальное управление на $k+m-2$ шаге:

$$u^{\mathrm{opt}}(k+m-1/k)=-[L_{22}(1)+R(k,m-2)]^{-1}L_{12}(1)x(k+m-2). \quad (15)$$

Подставляя (15) в (14), имеем оптимальное значение критерия (4) на $k+m-2$ шаге:

$$J^{\mathrm{opt}}(k+m/k+m-1)=x^{\mathrm{T}}(k+m-2)[A^{\mathrm{T}}S(1)A-A^{\mathrm{T}}S(1)E\{B[\eta(k+m-1),k+m-1]/\mathfrak{F}_{k+m-2}\}\times$$
$$\times\{E\{B^{\mathrm{T}}[\eta(k+m-1),k+m-1]S(1)B[\eta(k+m-1),k+m-1]/\mathfrak{F}_{k+m-2}\}+R(k,m-2)\}^{-1}\times$$
$$\times E\{B^{\mathrm{T}}[\eta(k+m-1),k+m-1]/\mathfrak{F}_{k+m-2}\}S^{\mathrm{T}}(1)A]x(k+m-2)= \quad (16)$$
$$=x^{\mathrm{T}}(k+m-2)[A^{\mathrm{T}}S(1)A-L_{12}(1)[L_{22}(1)+R(k,m-2)]^{-1}\left(L_{12}(1)\right)^{\mathrm{T}}]x(k+m-2)=$$
$$=x^{\mathrm{T}}(k+m-2)[S(2)-R_1(k,m-2)]x(k+m-2),$$

где $S(2)$ определяется уравнением (8).

На шаге k получаем

$$J(k+m/k)=E\{x^{\mathrm{T}}(k+1)S(m-1)x(k+1)+u^{\mathrm{T}}(k/k)R(k,0)u(k/k)\big/x(k),\mathfrak{F}_k\}=$$
$$=x^{T}(k)A^{\mathrm{T}}S(m-1)Ax(k)+u^{\mathrm{T}}(k/k)L_{11}(m-1)u(k/k)+2x^{\mathrm{T}}(k)L_{12}(m-1)u(k/k). \quad (17)$$

Нетрудно показать, что при этом оптимальное управление $u(k/k)$ имеет вид (5), оптимальное значение критерия (4) определяется уравнением (9).

3. Управление на бесконечном горизонте

Рассмотрим квадратичный критерий на бесконечном горизонте управления

$$J(k+m/k)=\sum_{i=1}^{m}E\{x^{\mathrm T}(k+i)R_1x(k+i)\big/ x(k),\mathfrak{F}_k\}+$$
$$+\sum_{i=0}^{m-1}E\{u^{\mathrm T}(k+i/k)Ru(k+i/k)\big/ x(k),\mathfrak{F}_k\},m\to\infty. \tag{18}$$

Предположим, что матрица $B[\eta(k),k]$, первые и вторые условные моменты процесса $\eta(k)$ не зависят от времени, т.е.

$$B\left[\eta(k),k\right]=B[\eta(k)],$$
$$E\left\{\eta(k+i)/\mathfrak{F}_k\right\}=\overline{\eta}(i),$$
$$E\left\{\eta(k+i)\eta^{\mathrm T}(k+j)\big/\mathfrak{F}_k\right\}=\Theta_{ij}$$

для всех k,i,j. Данные предположения означают стационарность процесса $\eta(k)$.

Теорема 2. Пусть существует положительно определенное решение S^{∞} уравнения

$$S^{\infty}=R_1+A^{\mathrm T}S^{\infty}A-L_{12}^{\infty}\left[L_{22}^{\infty}+R\right]^{-1}\left(L_{12}^{\infty}\right)^{\mathrm T}, \tag{19}$$

где

$$L_{12}^{\infty}=A^{\mathrm T}S^{\infty}E\left\{B[\eta(k+m-l),k+m-l]/\mathfrak{F}_{k+m-l+1}\right\},$$
$$L_{22}^{\infty}=E\left\{B^{\mathrm T}[\eta(k+m-l),k+m-l]S^{\infty}B[\eta(k+m-l),k+m-l]/\mathfrak{F}_{k+m-l+1}\right\}. \tag{20}$$

Тогда оптимальный закон управления с замкнутой обратной связью, минимизирующий критерий (18) на бесконечном горизонте управления, является стабилизирующим и имеет вид

$$u^{\mathrm{opt}}(k)=-K^{\infty}x(k)=-\left[L_{22}^{\infty}+R\right]^{-1}L_{12}^{\infty}x(k). \tag{21}$$

Доказательство. Предположим, что существует положительно определенное решение S^{∞} уравнения (19). Положим $R_1=S^{\infty}$. Критерий (18) в момент времени $k=0$ имеет вид

$$J(m/0)=\sum_{i=1}^{m-1}E\{x^{\mathrm T}(i)R_1x(i)+x^{\mathrm T}(m)S^{\infty}x(m)\big/ x(0),\mathfrak{F}_0\}+\sum_{i=0}^{m-1}E\{u^{\mathrm T}(i/0)Ru(i/0)\big/ x(0),\mathfrak{F}_0\}. \tag{22}$$

Так как S^{∞} определяется из решения уравнения (19), то согласно теореме 1 оптимальное значение критерия (22) при любом m (в том числе при $m=\infty$) определяется выражением

$$J^{\mathrm{opt}}(\infty/0)=x^{\mathrm T}(0)\left[S^{\infty}-R_1\right]x(0).$$

Поскольку матрица $S^{\infty}-R_1$ неотрицательно определенная и имеет ограниченные элементы, то очевидно, что значение критерия $J^{\mathrm{opt}}(\infty/0)$ – конечная величина.

Таким образом, последовательности $E\{x^{\mathrm T}(k)R_1x(k)/x(0),\mathfrak{F}_0\}$, $E\{u^{\mathrm T}(k)Ru(k)/x(0),\mathfrak{F}_0\}$ при оптимальном управлении являются бесконечными последовательностями с конечными суммами, откуда следует, что

$$\lim_{k\to\infty}E\ \{x^{\mathrm T}(k)R_1x(k)/x(0),\mathfrak{F}_0\}=0,$$
$$\lim_{k\to\infty}E\ \{u^{\mathrm T}(k)Ru(k)/x(0),\mathfrak{F}_0\}=0.$$

Так как R_1, $R>0$, то $x(k),u(k)\to0$ при $k\to\infty$ в средне-квадратическом смысле, что доказывает стабилизируемость закона управления.

Для доказательства (21) получим оптимальный закон управления при $R_1=S_{\infty}$. Используя Теорему 1, нетрудно показать, что оптимальный закон управления с замкнутой обратной связью для любого m (в том числе для $m=\infty$) имеет вид

$$u^{\mathrm{opt}}(k)=-K^{\infty}x(k)=-\left[L_{22}^{\infty}+R\right]^{-1}L_{12}^{\infty}x(k). \tag{23}$$

Тогда можно утверждать, что для случая $m=\infty$ закон управления (23) оптимален для любой положительно определенной матрицы R_1, так как

$$\lim_{m\to\infty}E\{x^{\mathrm T}(k+m)R_1x(k+m)/x(0),\mathfrak{F}_0\}=0.$$

Заключение

Получены уравнения синтеза стратегий прогнозирующего управления с замкнутой обратной связью для стохастических систем со случайными зависимыми параметрами, относительно которых предполагаются известными только условные первые и вторые моменты распределений. Получены достаточные условия устойчивости оптимального закона управления на бесконечном горизонте.

Отметим, что предложенный подход без принципиальных затруднений может быть обобщен на следующие случаи:

– когда матрица A в уравнении (1) зависит от времени;

– когда уравнение (1) содержит аддитивные шумы с характеристиками, зависящими от вектора параметров η;

– когда матрица A в уравнении (1) зависит от последовательности независимых случайных параметров, не коррелированных с вектором параметров η.

ЛИТЕРАТУРА

1. Домбровский В.В. Ляшенко Е.А. Линейно-квадратичное управление дискретными системами со случайными параметрами и мультипликативными шумами с применением к оптимизации инвестиционного портфеля // А и Т. 2003. № 10. С. 50 – 65.
2. Fisher S., Bhattacharya R. Linear quadratic regulation of systems with stochastic parameter uncertainties // Automatica. 2009. No. 45. P. 2831–2841.
3. Ghaoui E.L. State-feedback control of systems with multiplicative noise via linear matrix inequalities // Syst. Control Letters. 1995. V. 24. P. 223–228.
4. Dragan V., Morozan T. The Linear Quadratic Optimization Problems for a Class of Linear Stochastic Systems With Multiplicative White Noise and Markovian Jumping // IEEE Transactions on Automatic Control. 2004. V. 49, No 5. P. 665–675.
5. Домбровский В.В., Объедко Т.Ю. Управление с прогнозированием системами с марковскими скачками при ограничениях и применение к оптимизации инвестиционного портфеля // Автоматика и телемеханика. 2011. № 5. С. 96–112.
6. Lee J.H., Cooly B.L. Optimal feedback control strategies for state-space systems with stochastic parameters // IEEE Transactions on Automatic Control. 1998. V. 43, No. 10. P. 1469–1475.
7. Домбровский В.В., Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А. Управление с прогнозированием системами со случайными параметрами и мультипликативными шумами и применение к оптимизации инвестиционного портфеля // А и Т. 2005. № 4. С. 84–97.
8. Домбровский В.В., Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А. Управление с прогнозированием системами со случайными зависимыми параметрами при ограничениях и применение к оптимизации инвестиционного портфеля // А и Т. 2006. № 12. С. 71–85.
9. Dombrovskii V., Obedko T. Model predictive control for constrained systems with serially correlated stochastic parameters and portfolio optimization // Automatica. 2015. V. 54. P. 325–331.
10. Mayne D.Q. Model predictive control: Recent developments and future promise // Automatica. 2014. V. 50. P. 2967–2986.

Домбровский Владимир Валентинович, д-р техн. наук, профессор. E-mail: dombrovs@ef.tsu.ru
Объедко Татьяна Юрьевна, канд. физ.-мат. наук. E-mail: tatyana.obedko@mail.ru
Самородова Мария Владимировна. E-mail: samorodova21@gmail.com
Национальный исследовательский Томский государственный университет

Поступила в редакцию 22 декабря 2016 г.

Dombrovskii Vladimir V., Obedko Tatiana Y., Samorodova Mariya V. (National Research Tomsk State University, Russian Federation).

The closed-loop optimal feedback model predictive control policy for systems with stochastic correlated parameters.

Keywords: model predictive control; closed-loop feedback control; correlated parameters.

DOI: 10.17223/19988605/39/2

We consider the following discrete-time with stochastic parameters system on the probabilistic space $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$:

$$x(k+1) = Ax(k) + B[\eta(k+1), k+1]u(k), \tag{1}$$

where $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ is the vector of state, $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$ is the vector of control inputs; $\eta(k) \in \mathbb{R}^q$ is assumed to be stochastic time series. The matrices $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B\left[\eta\left(k\right), k\right] \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ are the system matrix and the input matrix, respectively. All the elements of $B[\eta(k),k]$ are assumed to be linear functions of $\eta(k)$.

Let $\mathbb{F} = (\mathfrak{F}_k)_{k\geq 1}$ be the complete filtration with σ-field $\mathfrak{F}_k$ generated by the $\{\eta(s): s=0,1,2,\ldots,k\}$ that models the flow of information to time k. We allow the time series $\eta(k)$ is serially correlated. Let assume that we know the first- and the second-order conditional moments for the stochastic vector $\eta(k)$ about $\mathfrak{F}_k$:

$$E\left\{\eta(k+i)/\mathfrak{F}_k\right\}=\bar{\eta}(k+i),$$

$$E\left\{\eta(k+i)\eta^T(k+j)\Big/\mathfrak{F}_k\right\}=\Theta_{ij}(k),(k=0,1,2,...),(i,j=1,2,...,l).$$

We define the following cost function with receding horizon, which is to be minimized at every time k

$$J(k+m/k)=E\left\{\sum_{i=1}^{m}x^{\mathrm{T}}(k+i)R_1(k,i)x(k+i)+u^{\mathrm{T}}(k+i-1/k)R(k,i)u(k+i-1/k)\Big/x(k),\mathfrak{F}_k\right\}, \quad (2)$$

on trajectories of system (1) over the sequence of predictive control inputs $u(k/k),\ldots,u(k+m-1/k)$ dependent on information up to time k, where $R_1(k,i)\geq 0$, $R(k,i)>0$ are given symmetric weight matrices of corresponding dimensions; m is the prediction horizon.

The closed-loop optimal feedback law minimizing criterion (2) was derived via dynamic programming. Conditions that guarantee the stability of the infinite horizon formulation are given.

REFERENCES

1. Dombrovskii, V.V. & Lyashenko E.A. (2003) A linear quadratic control for discrete systems with random parameters and multiplicative noise and its application to investment portfolio optimization. *Automation and remote control.* 64(10). pp. 1558–1570. DOI: 10.1023/A:1026057305653
2. Fisher, S. & Bhattacharya, R. (2009) Linear quadratic regulation of systems with stochastic parameter uncertainties. *Automatica.* 45. pp. 2831–2841. DOI: 10.1016/j.automatica.2009.10.001
3. Ghaoui, E.L. (1995) State-feedback control of systems with multiplicative noise via linear matrix inequalities. *Syst. Control Letters.* 24. pp. 223–228.
4. Dragan, V. & Morozan, T. (2004) The Linear Quadratic Optimization Problems for a Class of Linear Stochastic Systems with Multiplicative White Noise and Markovian Jumping. *IEEE Transactions on Automatic Control.* 49(5). pp. 665–675. DOI: 10.1109/TAC.2004.837750
5. Dombrovskii, V.V. & Obedko, T.Yu. (2011) Predictive control of systems with Markovian jumps under constraints and its application to the investment portfolio optimization. *Automation and Remote Control.* 72(5), pp. 989–1003. DOI: 10.1134/S0005117911050079
6. Lee, J.H. & Cooly, B.L. (1998) Optimal feedback control strategies for state-space systems with stochastic parameters. *IEEE Transactions on Automatic Control.* 43(10). pp. 1469–1475. DOI: 10.1109/9.720511
7. Dombrovskii, V.V., Dombrovskii, D.V. & Lyashenko E.A. (2005) Predictive control of random-parameter systems with multiplicative noise. Application to investment portfolio optimization. *Automation and remote control.* 66(4). pp. 583–595. DOI: 10.1007/s10513-005-0102-5
8. Dombrovskii, V.V., Dombrovskii, D.V. & Lyashenko, E.A. (2006) Model predictive control of systems with random dependent parameters under constraints and its application to the investment portfolio optimization. *Automation and remote control.* 67(12). pp. 1927–1939. DOI: 10.1134/S000511790612006X
9. Dombrovskii, V. & Obedko, T. (2015) Model predictive control for constrained systems with serially correlated stochastic parameters and portfolio optimization. *Automatica.* 54. pp. 325–331. DOI: 10.1016/j.automatica.2015.02.021
10. Mayne, D.Q. (2014) Model predictive control: Recent developments and future promise. *Automatica.* 50. pp. 2967–2986. DOI: 10.1016/j.automatica.2014.10.128