ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2017 Управление, вычислительная техника и информатика № 39

УДК 519.2
DOI: 10.17223/19988605/39/4

К.И. Лившиц, А.А. Назаров

ПРОСТАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ВЕРОЯТНОСТИ РАЗОРЕНИЯ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ ДЛЯ МОДЕЛИ КРАМЕРА–ЛУНДБЕРГА СО СТОХАСТИЧЕСКИМИ ПРЕМИЯМИ

Предлагается и исследуется оценка вероятности разорения страховой компании для модели Крамера–Лундберга со стохастическими премиями. Проводится сравнение предлагаемой оценки как с точными выражениями, так и с известной ранее асимптотической оценкой вероятности разорения.

Ключевые слова: вероятность разорения; модель Крамера–Лундберга со стохастическими премиями; аппроксимация вероятности разорения.

Стандартной задачей актуарной математики является задача вычисления вероятности разорения страховой компании, т.е. вероятности ситуации, когда страховая компания не может исполнять свои финансовые обязательства ввиду отсутствия денежных средств при различных предположениях о потоках, поступающих в компанию страховых премий и страховых выплат, производимых страховой компанией [1–3]. Сложность состоит, как правило, в нахождении явных решений соответствующих интегро-дифференциальных уравнений, определяющих вероятность разорения. Поэтому представляет интерес нахождение оценок для вероятности разорения, для построения которых не нужно решать соответствующие уравнения. В настоящей работе предлагается и исследуется оценка вероятности разорения страховой компании для модели Крамера–Лундберга со стохастическими премиями [4, 5].

1. Модель Крамера–Лундберга со стохастическими премиями

Модель Крамера–Лундберга со стохастическими премиями строится при следующих предположениях: предполагается, что поток страховых премий, поступающих в компанию, является пуассоновским с интенсивностью λ, премии – независимые, одинаково распределенные случайные величины с плотностью распределения $\Phi(x)$ и моментами $a_k = M\left\{x^k\right\}$ [Там же]. Страховые выплаты также образуют пуассоновский поток с интенсивностью μ, выплаты – независимые, одинаково распределенные случайные величины с плотностью распределения $\Psi(x)$ и моментами $b_k = M\left\{x^k\right\}$. Предполагается также, что с начала деятельности страховой компании прошло достаточно длительное время, так что поток страховых выплат не зависит от потока страховых премий.

Пусть в момент времени t капитал компании равен $S(t)$. При сделанных выше предположениях

$$S(t) = S(0) + \sum_{i=1}^{m(t)} x_i - \sum_{j=1}^{n(t)} y_j \ , \tag{1}$$

где $S(0)$ – начальный капитал, $m(t)$ – число поступивших страховых премий до момента времени t, $n(t)$ – число страховых выплат, x_i – величина i-й страховой премии, y_j – величина j-й страховой выплаты. Определим $T = \min\{t : S(t) < 0\}$ и $T = \infty$, если $S(t) > 0\ \forall t$. Случайная величина T – момент разорения. Тогда вероятность предельного разорения страховой компании, при условии, что ее капитал в начальный момент равен S,

$$P(S) = \Pr\left\{T < \infty\right\}. \tag{2}$$

Можно показать [4, 5], что вероятность разорения $P(S)$ (2) определяется уравнением

$$(\lambda+\mu)P(S)=\lambda\int_0^{\infty}P(S+x)\Phi(x)dx+\mu\int_0^S P(S-x)\Psi(x)dx+\mu\int_S^{\infty}\Psi(x)dx \tag{3}$$

с граничным условием $P(+\infty)=0$. Для существования отличного от $P(S)=1$ решения уравнения необходимо выполнение условия

$$\lambda a_1=(1+\theta)\mu b_1, \tag{4}$$

где $\theta>0$ – нагрузка страховой премии. Точное решение уравнения (3) удается найти лишь в нескольких частных случаях, например при экспоненциальных или гиперэкспоненциальных распределениях страховых премий и выплат [4, 6].

Известны следующие оценки вероятности разорения $P(S)$. Оценка вероятности разорения сверху [4, 5]. Обозначим

$$L_\Phi(\omega)=\int_0^{\infty}e^{-\omega S}\Phi(S)dS,\quad L_\Psi(\omega)=\int_0^{\infty}e^{-\omega S}\Psi(S)dS.$$

Тогда если уравнение

$$\lambda L_\Phi(k)+\mu L_\Psi(k)=\lambda+\mu$$

имеет положительный корень k, то

$$P(S)\le e^{-kS}. \tag{5}$$

Во-вторых, при θ много меньше 1 [7]:

$$P(S)\approx\frac{\mu\exp(-\dfrac{2\mu b_1}{\lambda a_2+\mu b_2}\theta S)}{\lambda+\mu-\lambda\int_0^{\infty}e^{-\frac{2\mu b_1}{\lambda a_2+\mu b_2}\theta x}\Phi(x)dx}. \tag{6}$$

Точность оценки (6) тем выше, чем меньше значение параметра θ.

2. Простая оценка вероятности разорения

Следуя [8], назовем «простой» оценкой вероятности разорения такую ее аппроксимацию, для построения которой используются только моменты a_k и b_k распределений страховых премий и страховых выплат и не требуется строить оценку решения уравнения (3). Для классической модели Крамера–Лундберга известна оценка вероятности разорения De Vylder [8, 9], которая основана на идее замены истинного процесса риска с произвольным распределением страховых выплат на процесс риска, в котором страховые выплаты имеют экспоненциальное распределение, а параметры аппроксимирующего процесса подобраны так, чтобы три первых момента у истинного и аппроксимирующего процессов риска совпадали. За оценку вероятности разорения при этом принимается вероятность разорения, соответствующая аппроксимирующему процессу. Воспользуемся этой идеей.

Пусть страховые премии и страховые выплаты имеют экспоненциальные распределения

$$\Phi(S)=\frac{1}{a}e^{-\frac{S}{a}},\qquad \Psi(S)=\frac{1}{b}e^{-\frac{S}{b}}. \tag{7}$$

Тогда вероятность разорения [4]

$$P(S)=\frac{\mu(a+b)}{(\lambda+\mu)a}e^{-\frac{\lambda a-\mu b}{(\lambda+\mu)ab}S}. \tag{8}$$

Или, учитывая (4),

$$P(S)=\frac{\mu(a+b)}{(\lambda+\mu)a}e^{-\frac{\mu}{(\lambda+\mu)a}\theta S}.$$

Обозначим

$$m_k(t) = M\left\{S(t)^k\right\}, k = \overline{1,4}. \tag{9}$$

Считая для простоты, что $S(0) = 0$, несложно показать, что для процесса $S(t)$ (2) имеют место соотношения

$$m_1(t) = (\lambda a_1 - \mu b_1)t, \tag{10}$$

$$m_2(t) = (\lambda a_2 + \mu b_2)t + (\lambda a_1 - \mu b_1)^2 t^2, \tag{11}$$

$$m_3(t) = (\lambda a_3 - \mu b_3)t + 3(\lambda a_2 + \mu b_2)(\lambda a_1 - \mu b_1)t^2 + (\lambda a_1 - \mu b_1)^3 t^3, \tag{12}$$

$$m_4(t) = (\lambda a_4 + \mu b_4)t + (2(\lambda a_1 - \mu b_1)(\lambda a_3 - \mu b_3) + 3(\lambda a_2 + \mu b_2)^2 + \frac{3}{2}(\lambda a_3 - \mu b_3)(\lambda a_1 - \mu b_1))t^2 + \\ + 3(\lambda a_2 + \mu b_2)(\lambda a_1 - \mu b_1)^2 t^3 + (\lambda a_1 - \mu b_1)^4 t^4. \tag{13}$$

При экспоненциальных распределениях страховых премий и страховых выплат (7) имеем, очевидно,

$$a_k = k!a^k, \quad b_k = k!b^k.$$

Если интенсивности потоков страховых премий и страховых выплат в аппроксимирующем процессе риска равны λ_0 и μ_0 соответственно, то для совпадения моментов $m_k(t)$ двух процессов достаточно выполнения условий

$$d_1 = \lambda a_1 - \mu b_1 = \lambda_0 a - \mu_0 b, \tag{14}$$

$$d_2 = \frac{1}{2}(\lambda a_2 + \mu b_2) = \lambda_0 a^2 + \mu_0 b^2, \tag{15}$$

$$d_3 = \frac{1}{6}(\lambda a_3 - \mu b_3) = \lambda_0 a^3 - \mu_0 b^3, \tag{16}$$

$$d_4 = \frac{1}{24}(\lambda a_4 + \mu b_4) = \lambda_0 a^4 + \mu_0 b^4. \tag{17}$$

В результате получаем систему уравнений (14)–(17) на определение неизвестных параметров аппроксимирующего процесса a, b, λ_0, μ_0. Из уравнений (14), (15)

$$\lambda_0 = \frac{d_1 b + d_2}{a(a+b)}, \quad \mu_0 = \frac{d_2 - d_1 a}{b(a+b)}. \tag{18}$$

Подставляя (18) в уравнения (16) и (17), получим

$$d_1 ab + d_2(a-b) = d_3, \tag{19}$$

$$[d_1(a-b) + d_2]ab + d_2(a-b)^2 = d_4. \tag{20}$$

Обозначим

$$v = a - b, \quad u = ab. \tag{21}$$

Из уравнений (19) и (20) получим

$$v = \frac{d_1 d_4 - d_2 d_3}{d_1 d_3 - d_2^2}, \quad u = \frac{d_3^2 - d_2 d_4}{d_1 d_3 - d_2^2}. \tag{22}$$

Наконец, соотношения (21) дают

$$a = \frac{v + \sqrt{v^2 + 4u}}{2}, \quad b = \frac{-v + \sqrt{v^2 + 4u}}{2}. \tag{23}$$

Оценка вероятности разорения будет иметь вид

$$P(S) = \frac{\mu_0(a+b)}{(\lambda_0 + \mu_0)a} e^{-\frac{\lambda_0 a - \mu_0 b}{(\lambda_0 + \mu_0)ab}S}, \tag{24}$$

где параметры a, b, λ_0, μ_0 вычисляются по формулам (18), (23).

Так как параметры a и b должны быть положительны, то очевидно, что для применимости построенной оценки должны выполняться условия

$$\frac{d_1 d_4 - d_2 d_3}{d_1 d_3 - d_2^2} < 0, \quad \frac{d_3^2 - d_2 d_4}{d_1 d_3 - d_2^2} > 0. \tag{25}$$

3. Примеры

Пример 1. *Распределения Эрланга страховых премий и страховых выплат.* Пусть страховые премии и страховые выплаты имеют распределения Эрланга

$$\Phi(S) = \frac{S}{\alpha^2} e^{-\frac{S}{\alpha}}, \quad \Psi(S) = \frac{S}{\beta^2} e^{-\frac{S}{\beta}}. \tag{26}$$

Решение уравнения (3) будем искать в виде

$$P(S) = A_1 e^{-\gamma_1 S} + A_2 e^{-\gamma_2 S}. \tag{27}$$

Подставляя выражение (27) в уравнение (3), получим, что для этого должны выполняться условия

$$\frac{A_1}{\beta\gamma_1 - 1} + \frac{A_2}{\beta\gamma_2 - 1} = -1, \tag{28}$$

$$\frac{A_1}{(\beta\gamma_1 - 1)^2} + \frac{A_2}{(\beta\gamma_2 - 1)^2} = 1, \tag{29}$$

$$\frac{\lambda}{(\alpha\gamma_i + 1)^2} + \frac{\mu}{(\beta\gamma_i - 1)^2} = \lambda + \mu, \quad i = 1, 2. \tag{30}$$

Таким образом, величины γ_i должны быть положительными корнями уравнения

$$f(z) = \frac{\lambda}{(\alpha z + 1)^2} + \frac{\mu}{(\beta z - 1)^2} - \lambda - \mu = 0. \tag{31}$$

Функция $f(z)$ обладает следующими свойствами: $f(0) = 0, f'(0) = -(\lambda a - \mu b) < 0,$ $f(-\frac{1}{\alpha}) = \infty$, $f(\frac{1}{\beta}) = \infty, f(\pm\infty) = -(\lambda + \mu)$, откуда следует, что уравнение $f(z) = 0$ имеет два положительных корня: $\gamma_1 \in (0, \frac{1}{\beta})$ и $\gamma_2 \in (\frac{1}{\beta}, \infty)$. Решая систему уравнений (28), (29), получаем, что вероятность разорения в нашем случае имеет вид

$$P(S) = \frac{\gamma_2 (1 - \beta\gamma_1)^2}{\gamma_2 - \gamma_1} e^{-\gamma_1 S} - \frac{\gamma_1 (1 - \beta\gamma_2)^2}{\gamma_2 - \gamma_1} e^{-\gamma_2 S}. \tag{32}$$

На рис. 1 приведены зависимость вероятности разорения $P(S)$ от начального капитала, вычисленная по формуле (32), и ее оценки, построенные по формулам (6) и (24) соответственно. Параметры $\alpha = 0,5, \beta = 5, \mu = 1, \lambda = (1 + \theta)\frac{\beta}{\alpha}$. Параметр $\theta = 0,05; 0,1; 0,5; 1$.

Пример 2. *Постоянные страховые премии и страховые выплаты.* Пусть страховые премии и страховые выплаты постоянны:

$$\Phi(S) = \delta(S - a), \quad \Psi(S) = \delta(S - b).$$

Точное решение уравнения (3) получить в этом случае не удается. В таблице приведены оценка вероятности разорения, полученная в результате имитационного моделирования, и оценки вероятности разорения, построенные по формулам (6) и (24). Параметры $a = 1, b = 10, \mu = 1, \lambda = (1 + \theta)\frac{b}{a}$. Параметр $\theta = 0,05; 0,1; 1$. Объем выборки при моделировании – 50 000. Отметим, что оценка вероятности разорения, полученная путем имитационного моделирования, всегда является заниженной из-за конечности времени моделирования процесса $S(t)$ (1). Как видно из приведенных данных, при всех значениях θ оценка (24) оказывается лучше, чем оценка (6). Выигрыш растет с увеличением нагрузки страховой премии.

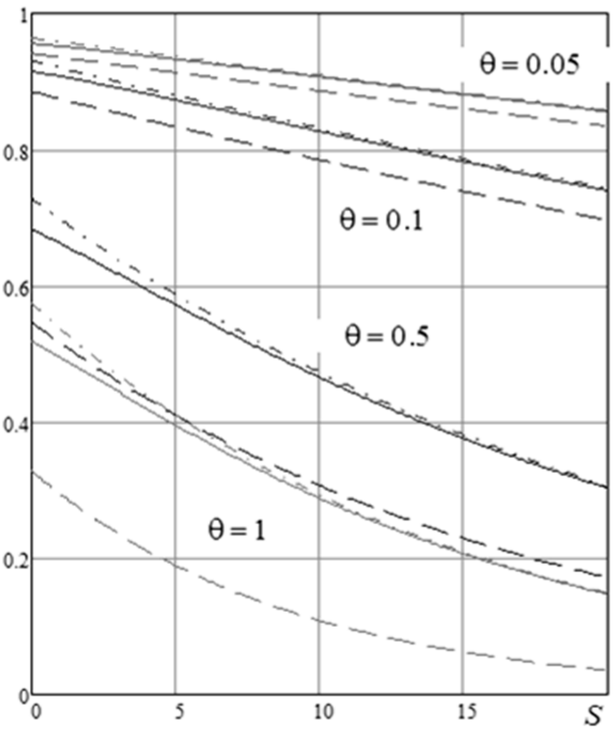

Рис. 1. Зависимость вероятности разорения от начального капитала (сплошные линии) и ее оценки, полученные по формуле (6) (штриховые линии) и формуле (24) (штрихпунктирные линии) при распределениях Эрланга страховых премий и выплат

Оценки зависимости вероятности разорения от начального капитала при постоянных страховых премиях и страховых выплатах

S	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Результат модел. **θ = 0,05**	0,952	0,948	0,942	0,934	0,93	0,925	0,917	0,907	0,9	0,893	0,884
Оценка (24)	0,939	0,931	0,922	0,914	0,906	0,898	0,891	0,883	0,875	0,867	0,86
Оценка (6)	0,914	0,905	0,897	0,889	0,881	0,873	0,865	0,858	0,85	0,842	0,835
Результат модел. **θ = 0,1**	0,91	0,899	0,891	0,88	0,871	0,858	0,846	0,834	0,817	0,799	0,781
Оценка (24)	0,886	0,871	0,856	0,842	0,828	0,814	0,8	0,786	0,773	0,76	0,747
Оценка (6)	0,836	0,821	0,806	0,792	0,778	0,764	0,75	0,737	0,724	0,711	0,698
Результат модел. **θ = 1**	0,699	0,648	0,619	0,598	0,569	0,543	0,512	0,478	0,439	0,404	0,367
Оценка (24)	0,631	0,589	0,549	0,512	0,477	0,445	0,415	0,387	0,361	0,336	0,314
Оценка (6)	0,445	0,408	0,374	0,343	0,314	0,288	0,264	0,242	0,222	0,203	0,186

Пример 3. *Гиперэкспоненциальное распределение страховых премий и выплат.* Пусть страховые премии и страховые выплаты имеют гиперэкспоненциальные распределения

$$\Phi(S)=\sum_{k=1}^{m}A_k\alpha_k e^{-\alpha_k S},\qquad \Psi(S)=\sum_{k=1}^{n}B_k\beta_k e^{-\beta_k S}. \tag{33}$$

Тогда вероятность разорения $P(S)$ имеет вид [6]:

$$P(S)=\sum_{j=1}^{n}P_j e^{-\gamma_j S}, \tag{34}$$

где γ_i – положительные корни уравнения

$$f(z)=\lambda\sum_{k=1}^{m}\frac{A_k\alpha_k}{\alpha_k+z}+\mu\sum_{k=1}^{n}\frac{B_k\beta_k}{\beta_k-z}-\lambda-\mu=0, \qquad (35)$$

а P_j – решение системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\beta_k-\gamma_j}P_j=\frac{1}{\beta_k}. \qquad (36)$$

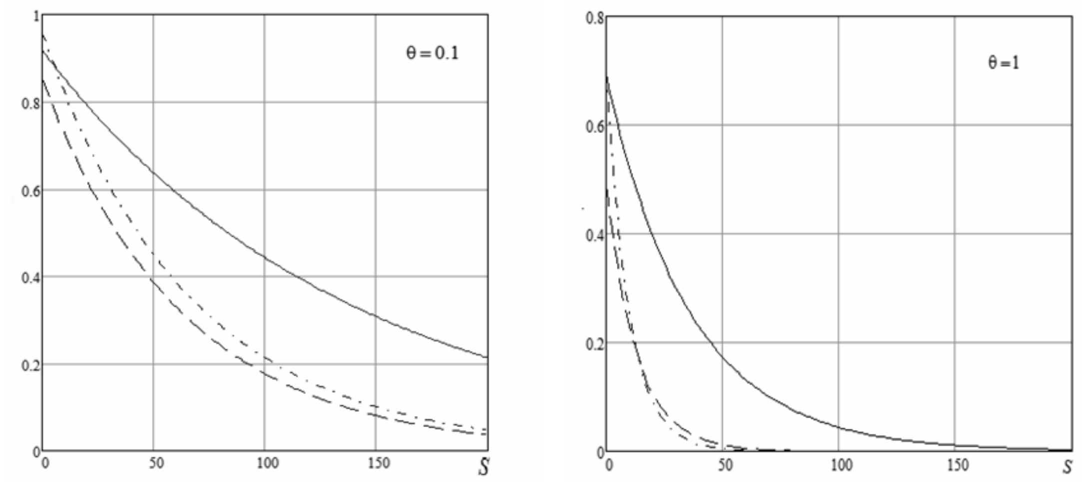

Рис. 2. Зависимость вероятности разорения от начального капитала (сплошные линии) и ее оценки, полученные по формуле (6) (штриховые линии) и формуле (24) (штрихпунктирные линии) при гиперэкспоненциальных распределениях страховых премий и выплат

На рис. 2 приведены вероятность разорения, вычисленная по формулам (34)–(35) при $m=n=2$, и ее оценки, полученные по формулам (6) и (24) при $\theta=0{,}1$ и $\theta=1$. Параметры $a=1, b=10, \mu=1, \lambda=(1+\theta)\dfrac{b}{a}$. Как видно из рис. 2, в этом случае обе оценки являются плохими, но и в этом примере оценка (24) ведет себя «чуть лучше», чем оценка (6). Формально использовать оценку (24) в рассматриваемой ситуации нельзя, так как параметры аппроксимирующего процесса, вычисленные по формулам (23) и (18), отрицательны. Например, при $\theta=0{,}1$ $a=-0{,}405, \lambda 0=-16{,}762$. Однако комбинации величин, непосредственно входящие в оценку (24), положительны.

Заключение

В работе получены расчетные формулы, позволяющие вычислить оценку вероятности разорения страховой компании при произвольных распределениях страховых выплат и страховых премий для модели Крамера–Лундберга со стохастическими премиями. Как следует из рассмотренных примеров, во всех рассмотренных случаях точность предлагаемой оценки лучше, чем точность известной ранее оценки вероятности разорения. В принципе тот же подход может быть использован для вычисления вероятностей разорения и для более сложных моделей, например, для случая, когда и моменты поступления страховых премий образуют ММР поток [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Panjer H.Y., Wilmot G.E. Insurance Risk Models. Society of Actuaries, 1992. 442 p.
2. Бауэрс Н., Гербер Х., Джонс Д., Несбит С., Хикман Д. Актуарная Математика. М. : Янус–К, 2001. 656 с.
3. Глухова Е.В., Змеев О.А., Лившиц К.И. Математические модели страхования. Томск : Изд-во Том. ун-та, 2004. 180 с.

4. Livshits K.I. Probability of Ruin of an Insurance Company for the Poisson Model // Russian Physics Journal. 1999. V. 42, No. 4. P. 394–399.
5. Бойков А.В. Модель Крамера–Лундберга со стохастическими премиями // Теория вероятностей и ее применение. 2002. Т. 47, вып. 3. С. 549–553.
6. Лившиц К.И., Сухотина Л.Ю. Вероятность разорения страховой компании при гиперэкспоненциальных распределениях страховых премий и страховых выплат для различных моделей страхования // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. № 2 (35). С. 37–45.
7. Лившиц К.И., Бублик Я.С. Вероятность разорения страховой компании при дважды стохастических потоках страховых премий и страховых выплат // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 4 (17). С. 64–73.
8. Grandell J. Simple approximation of ruin probabilities // Insurance: Mathematics and Economics. 2000. V. 26. P. 157–173.
9. De Vylder F.E. A practical solution to the problem of ultimate ruin probability // Scandinavian Actuarial Journal. 1978. P. 114–119.

Лившиц Климентий Исаакович, д-р техн. наук, профессор. E-mail: kim47@mail.ru
Назаров Анатолий Андреевич, д-р техн. наук, профессор. E-mail: nazarov.tsu@gmail.com
Национальный исследовательский Томский государственный университет

Поступила в редакцию 10 декабря 2016 г.

Livshits Klimenty I., Nazarov Anatoly A. (Tomsk State University, Russian Federation).
Simple approximation of an insurance company ruin probability for Cramer-Lundberg model with stochastic premiums.
Keywords: probability of ruin; Cramer-Lundberg model with stochastic premiums; ruin probabilities approximation.

DOI: 10.17223/19988605/39/4

In this paper the calculated formulas which allow to construct the simple approximation for the ruin probability of an insurance company for Cramer-Lundberg model with stochastic premiums are obtained. The approximation is based on the replacement of the true risk process with arbitrary distributions of the insurance premiums and the insurance payments

$$S(t) = S(0) + \sum_{i=1}^{m(t)} x_i - \sum_{j=1}^{n(t)} y_j,$$

where $S(0)$ is the initial capital, $m(t)$ is the number of received insurance premiums to the time t, $n(t)$ is the number of insurance payments, x_i is the value of i-th insurance premiums, y_j is the value of j-th insurance payment, $a_k = M\{x_i^k\}$, $b_k = M\{y_i^k\}$, the flow of insurance premiums is Poisson with intensity λ, the flow of insurance payments is Poisson with intensity μ, on the risk process with the insurance premiums and the insurance payments having the exponential distributions. At that the premiums flow intensives λ_0, the payments flow intensives μ_0, the average values of the premiums a and the payments b in the approximating process are chosen so that the first four moments of the true and approximating risk processes coincided. This requires the fulfillment of the conditions

$$d_1 = \lambda a_1 - \mu b_1 = \lambda_0 a - \mu_0 b,\ \ d_2 = \frac{1}{2}(\lambda a_2 + \mu b_2) = \lambda_0 a^2 + \mu_0 b^2,$$

$$d_3 = \frac{1}{6}(\lambda a_3 - \mu b_3) = \lambda_0 a^3 - \mu_0 b^3,\ \ d_4 = \frac{1}{24}(\lambda a_4 + \mu b_4) = \lambda_0 a^4 + \mu_0 b^4.$$

The parameters a, b, λ_0, μ_0 are determined by the ratios

$$\lambda_0 = \frac{d_1 b + d_2}{a(a+b)},\quad \mu_0 = \frac{d_2 - d_1 a}{b(a+b)},$$

$$a = \frac{v + \sqrt{v^2 + 4u}}{2},\quad b = \frac{-v + \sqrt{v^2 + 4u}}{2},$$

where

$$v = \frac{d_1 d_4 - d_2 d_3}{d_1 d_3 - d_2^2},\quad u = \frac{d_3^2 - d_2 d_4}{d_1 d_3 - d_2^2}.$$

For the rating of the ruin probability is taken the ruin probability of the approximating process

$$P(S) = \frac{\mu_0 (a+b)}{(\lambda_0 + \mu_0) a} e^{-\frac{\lambda_0 a - \mu_0 b}{(\lambda_0 + \mu_0) ab} S}.$$

REFERENCES

1. Panjer, H.Y. & Wilmot, G.E. (1992) *Insurance Risk Models.* Society of Actuaries. Schaumburg, IL.
2. Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hekman, J.C., Jones, D.A. & Nesbitt, C.J. (1998) *Actuarial Mathematics.* Society of Actuaries, Michigan.

3. Gluhova, E.V., Zmeev, O.A. & Livshits, K.I. (2004) *Matematicheskie modeli strakhovaniya* [Mathematical Models of Insurance]. Tomsk: Tomsk State University.
4. Livshits, K.I. (1999) Probability of Ruin of an Insurance Company for the Poisson Model. *Russian Physics Journal*. 42(4). pp. 394–399. DOI: 10.1007/BF02509675
5. Boykov, A.V. (2002) Cramer-Lundberg Model with Stochastic Premiums. *Theory of Probability and Its Applications*. 47(3). pp. 549–553. DOI: 10.1137/S0040585X9797987
6. Livshits, K. I. & Suhotina, L. Yu. (2016) Ruin Probability of an Insurance Company with Hyperexponential Distribution of Insurance Premiums and Insurance Payments for Different Insurance Models. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(35). pp. 37–45. (In Russian). DOI: 10.17223/19988605/35/4
7. Livshits, K.I. & Bublic, Ya.S. (2011) Ruin probability of an insurance company under double stochastic flows of insurance premium and insurance payments. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(17). pp. 64–73. (In Russian).
8. Grandell, J. (2000) Simple approximation of ruin probabilities. *Insurance: Mathematics and Economics*. 26. pp. 157–173. DOI: 10.1016/S0167-6687(99)00050-5
9. De Vylder, F.E. (1978) A practical solution to the problem of ultimate ruin probability. *Scandinavian Actuarial Journal*. pp. 114–119. DOI: 10.1080/03461238.1978.10419484