ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2017 Управление, вычислительная техника и информатика № 39

УДК 519.872
DOI: 10.17223/19988605/39/5

Е.Ю. Лисовская, С.П. Моисеева

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕМАРКОВСКОЙ БЕСКОНЕЧНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ ТРЕБОВАНИЙ СЛУЧАЙНОГО ОБЪЕМА С ВХОДЯЩИМ РЕКУРРЕНТНЫМ ПОТОКОМ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-00292 мол_.

Рассматривается система массового обслуживания GI/GI/∞ с требованиями случайного объема. Решается задача исследования суммарного объема требований, находящихся в системе в стационарном режиме функционирования. С помощью метода асимптотического анализа при условии высокой интенсивности входящего потока доказано, что распределение вероятностей суммарного объема требований в системе является гауссовским.
Ключевые слова: бесконечнолинейная система массового обслуживания; метод динамического просеивания; случайный объем требований; метод асимптотического анализа.

При проектировании систем обработки и передачи сообщений, таких как систем коммутации сообщений и систем обработки радиолокационной информации возникает задача определения объема памяти, предназначенной для хранения информации о сообщении во время его передачи и обслуживания. Величина такого объема определяется непрерывной случайной величиной, которую будем называть суммарным объемом требований [1].

Задача определения характеристик суммарного объема требований в классических системах теории массового обслуживания и ее приложениях к решению задач проектирования компьютерных и коммутационных систем обсуждалась в работах [2–4], где исследовались некоторые характеристики таких систем в предположении, что входящий поток является простейшим, время обслуживания распределено по экспоненциальному закону, а параметры обслуживания требования могут зависеть от объема требования.

Современные потоки данных в информационных и телекоммуникационных системах включают в себя интегрированные потоки, содержащие передачу текста, голоса и видеоисточников, что требует использования более сложных моделей потоков. В качестве таких моделей, как правило, используют математические модели модулированных или рекуррентных потоков [5, 6]. Для исследования систем с входящими непуассоновскими потоками, например, рекуррентным и марковски модулированными потоками, в работах [7–9] предлагается использовать метод асимптотического анализа, позволяющий находить приемлемое для практических приложений решение в определенных условиях.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему массового обслуживания (СМО) с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает рекуррентный поток, заданный функцией распределения длин интервалов между последовательными моментами поступления заявок в систему $A(x)$. Продолжительность обслуживания заявки имеет произвольную функцию распределения, одинаковую для всех приборов $B(x)$. Предполагаем, что каждое требование характеризуется некоторым случайным объёмом $v > 0$, $G(y) = P\{v < y\}$ – функция распределения случайной величины v. Объемы различных требований независимы. По окончании обслуживания заявка покидает систему и «уносит» свой объем.

Пусть $i(t)$ – число заявок, находящихся на обслуживании в системе в момент t, $V(t)$ – полная сумма объемов требований, находящихся в системе в момент времени t.

Поставим задачу нахождения характеристик двумерного случайного процесса $\{i(t),V(t)\}$. Отметим, что исследуемый процесс не является марковским. Поэтому для его исследования будем использовать метод динамического просеивания [10].

Построим просеянный поток для рассматриваемой СМО GI|GI|∞. Для этого зафиксируем некоторый момент времени T. Полагаем, что заявка входящего потока, поступившая в систему в момент времени $t < T$ с вероятностью

$$S(t) = 1 - B(T - t),$$

формирует событие просеянного потока, а с вероятностью $1 - S(t)$ эта заявка в просеянном потоке не рассматривается.

Обозначим $n(t)$ – число событий просеянного потока, наступивших до момента времени t, $W(t)$ – суммарный объем просеянных требований. Тогда, если в начальный момент $t_0 < T$ система была свободна, то для момента времени T для любых m и v выполняются равенства

$$P\{i(T) = m\} = P\{n(T) = m\},\ P\{V(T) < v\} = P\{W(T) < v\}.$$

Следует отметить, что использование метода просеянного потока позволяет точно определить характеристики процесса $V(t)$, так как в просеянном потоке присутствуют только те заявки, которые не закончат обслуживание к моменту времени T.

2. Дифференциальное уравнение Колмогорова

Введем обозначение $P(z,n,w,t) = P\{z(t) < z, n(t) = n, W(t) < w\}$ – распределение вероятностей трехмерного Марковского процесса, где $z(t)$ – остаточное время от момента t до момента наступления следующего события в исходном рекуррентном потоке. Для этого распределения составим Δt-методом прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова. По формуле полной вероятности запишем равенство

$$P(z,n,w,t+\Delta t) = [P(z+\Delta t,n,w,t) - P(\Delta t,n,w,t)] + P(\Delta t,n,w,t)(1 - S(t))A(z) +$$
$$+ S(t)A(z)\int_0^v P(\Delta t, n-1, w-y, t)dG(y) + o(\Delta t), \tag{1}$$
$$z > 0,\ n = 0,1,2,...,\ w > 0.$$

Из (1) получаем систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P(z,n,w,t)}{\partial t} = \frac{\partial P(z,n,w,t)}{\partial z} + \frac{\partial P(0,n,w,t)}{\partial z}(A(z) - 1) +$$
$$+ S(t)A(z)\left[\int_0^v \frac{\partial P(0,n-1,w-y,t)}{\partial z}dG(y) - \frac{\partial P(0,n,w,t)}{\partial z}\right],$$
$$z > 0,\ n = 0,1,2,...,\ w > 0,$$

с начальным условием

$$P(z,n,w,t_0) = \begin{cases} R(z),\ n = 0, w > 0, \\ \quad 0 \text{ иначе.} \end{cases}$$

Здесь и далее $R(z)$ – стационарное распределение вероятностей значений случайного процесса $z(t)$, определяемое выражением

$$R(z) = \lambda\int_0^z (1 - A(x))dx, \text{ где } \lambda = \frac{1}{\int_0^\infty (1 - A(x))dx}.$$

Введем частичную характеристическую функцию вида

$$h(z,u_1,u_2,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{ju_1 n}\int_0^\infty e^{ju_2 w}P(z,n,dw,t),\ z > 0.$$

Учитывая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{ju_1 n} \int_0^{\infty} e^{ju_2 w} \int_0^{v} \frac{\partial P(0, n-1, d(w-y), t)}{\partial z} dG(y) = e^{ju_1} \frac{\partial h(0, u_1, u_2, t)}{\partial z} G^*(u_2),$$

где $G^*(u_2)$ определяется как

$$G^*(u_2) = \int_0^{\infty} e^{ju_2 y}\, dG(y),$$

можно записать дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial h(z, u_1, u_2, t)}{\partial t} = \frac{\partial h(z, u_1, u_2, t)}{\partial z} + \frac{\partial h(0, u_1, u_2, t)}{\partial z}\left[A(z) - 1 + S(t)A(z)\left(e^{ju_1} G^*(u_2) - 1\right)\right] \tag{2}$$

с начальным условием

$$h(z, u_1, u_2, t_0) = R(z). \tag{3}$$

3. Метод асимптотического анализа

Так как прямое решение уравнения (2) не представляется возможным, то для решения задачи (2)–(3) воспользуемся методом асимптотического анализа [11] в условии неограниченно растущей интенсивности входящего потока [10]. Запишем функцию распределения длин интервалов между моментами поступления заявок в систему в виде $A(Nz)$, где $N \to \infty$ – параметр высокой интенсивности потока.

Тогда, выполнив преобразования, уравнение (2) примет вид

$$\frac{1}{N}\frac{\partial h(z, u_1, u_2, t)}{\partial t} = \frac{\partial h(z, u_1, u_2, t)}{\partial z} + \frac{\partial h(0, u_1, u_2, t)}{\partial z}\left[A(z) - 1 + S(t)A(z)\left(e^{ju_1} G^*(u_2) - 1\right)\right] \tag{4}$$

с начальным условием

$$h(z, u_1, u_2, t_0) = R(z). \tag{5}$$

Асимптотический анализ первого порядка проведем в виде доказательства теоремы 1.

Теорема 1. Асимптотическая характеристическая функция распределения вероятностей процесса $\{z(t), n(t), V(t)\}$ первого порядка имеет вид

$$h(z, u_1, u_2, t) = R(z)\exp\left\{N\lambda\left[ju_1 + ju_2 a_1\right]\int_{t_0}^{t} S(\tau)d\tau\right\},$$

где a_1 – математическое ожидание случайной величины, определяемой функцией распределения объема требований $G(y)$.

Доказательство. Выполним в выражениях (4) и (5) замены

$$\varepsilon = \frac{1}{N},\ u_1 = \varepsilon w_1,\ u_2 = \varepsilon w_2,\ h(z, u_1, u_2, t) = f_1(z, w_1, w_2, t, \varepsilon). \tag{6}$$

Тогда задача (4)–(5) примет вид

$$\varepsilon\frac{\partial f_1(z, w_1, w_2, t, \varepsilon)}{\partial t} = \frac{\partial f_1(z, w_1, w_2, t, \varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial f_1(0, w_1, w_2, t, \varepsilon)}{\partial z}\left[A(z) - 1 + S(t)A(z)\left(e^{j\varepsilon w_1} G^*(\varepsilon w_2) - 1\right)\right] \tag{7}$$

с начальным условием

$$f_1(z, w_1, w_2, t_0, \varepsilon) = R(z). \tag{8}$$

Найдем асимптотическое, при $\varepsilon \to 0$, решение задачи (7)–(8), т.е. $f_1(z, w_1, w_2, t) = \lim_{\varepsilon \to 0} f_1(z, w_1, w_2, t, \varepsilon)$.

Этап 1. Положим в (7) $\varepsilon \to 0$, получим

$$\frac{\partial f_1(z, w_1, w_2, t)}{\partial z} + \frac{\partial f_1(0, w_1, w_2, t)}{\partial z}(A(z) - 1) = 0.$$

Можем сделать вывод, что $f_1(z, w_1, w_2, t)$ может быть представлена в виде

$$f_1(w_1, w_2, t) = R(z)\Phi_1(w_1, w_2, t), \tag{9}$$

где $\Phi_1(w_1, w_2, t)$ – некоторая скалярная функция, в силу (8) удовлетворяющая условию $\Phi_1(w_1, w_2, t_0) = 1$.

Этап 2. Выполним в (7) предельный переход $z \to \infty$. Получим

$$\varepsilon \frac{\partial f_1(\infty, w_1, w_2, t, \varepsilon)}{\partial t} = \frac{\partial f_1(0, w_1, w_2, t, \varepsilon)}{\partial z} S(t)\left(e^{j\varepsilon w_1} G^*(\varepsilon w_2) - 1\right).$$

Подставим сюда выражение (9), воспользуемся разложениями

$$e^{j\varepsilon w_1} = 1 + j\varepsilon w_1 + O\left(\varepsilon^2\right),\ e^{j\varepsilon w_2} = 1 + j\varepsilon w_2 + O\left(\varepsilon^2\right),$$

поделим обе части на ε и произведем предельный переход при $\varepsilon \to 0$. С учетом того, что $R'(0) = \lambda$ [10], получим дифференциальное уравнение относительно функции $\Phi_1(w_1, w_2, t)$:

$$\frac{\partial \Phi_1(w_1, w_2, t)}{\partial t} = \Phi_1(w_1, w_2, t)\left[\lambda S(t)\left(jw_1 + jw_2 a_1\right)\right], \tag{10}$$

здесь и далее $a_1 = \int_0^\infty y dG(y)$ – математическое ожидание случайной величины, определяемой функцией распределения объема требований $G(y)$. Решение (10) с учетом начального условия дает

$$\Phi_1(w_1, w_2, t) = \exp\left\{\lambda(jw_1 + jw_2 a_1)\int_{t_0}^{t} S(\tau)d\tau\right\}.$$

Подставляя данное выражение в (9), получаем

$$f_1(w_1, w_2, t) = R(z)\exp\left\{\lambda(jw_1 + jw_2 a_1)\int_{t_0}^{t} S(\tau)d\tau\right\}.$$

В силу замен (6) можно записать асимптотическое, при $\varepsilon \to 0$, приближенное равенство:

$$h(z, u_1, u_2, t) = f_1(z, w_1, w_2, t, \varepsilon) \approx f_1(z, w_1, w_2, t) = R(z)\Phi_1(w_1, w_2, t) =$$

$$= R(z)\exp\left\{\lambda\left[j\frac{u_1}{\varepsilon} + j\frac{u_2}{\varepsilon}a_1\right]\int_{t_0}^{t} S(\tau)d\tau\right\} = R(z)\exp\left\{N\lambda\left[ju_1 + ju_2 a_1\right]\int_{t_0}^{t} S(\tau)d\tau\right\}.$$

Теорема доказана.

Функция $h(u_1, u_2, t) = \lim_{z\to\infty} h(z, u_1, u_2, t)$ есть характеристическая функция для процесса $\{n(t), V(t)\}$ – числа событий, наступивших в просеянном потоке к моменту времени t и суммарного объема требований в просеянном потоке к моменту времени t.

Следствие. Полагая $t = T$, $t_0 = -\infty$, для характеристической функции процесса $\{i(t), V(t)\}$ в стационарном режиме получим

$$h(u_1, u_2) = \exp\{N\lambda b_1\left[ju_1 + ju_2 a_1\right]\},$$

здесь и далее

$$b_1 = \int_0^\infty (1 - B(\tau))d\tau$$

определяет математическое ожидание случайной величины с функцией распределения $B(x)$.

Асимптотический анализ второго порядка проведем в виде доказательства теоремы 2.

Теорема 2. Асимптотическая характеристическая функция распределения вероятностей процесса $\{z(t), n(t), V(t)\}$ второго порядка имеет вид

$$h(z, u_1, u_2, t) = R(z)\exp\left\{N\lambda(ju_1 + ju_2 a_1)\int_{t_0}^{t} S(\tau)d\tau + \frac{(ju_1)^2}{2}\left(N\lambda\int_{t_0}^{t} S(\tau)d\tau + N\kappa\int_{t_0}^{t} S^2(\tau)d\tau\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{(ju_2)^2}{2}\left(N\lambda a_2\int_{t_0}^{t} S(\tau)d\tau + Na_1^2\kappa\int_{t_0}^{t} S^2(\tau)d\tau\right) + (j)^2 u_1 u_2\left(N\lambda a_1\int_{t_0}^{t} S(\tau)d\tau + Na_1\kappa\int_{t_0}^{t} S^2(\tau)d\tau\right)\right\},$$

где

$$\kappa = 2\left(f'(0) - \lambda f(\infty)\right),$$

a_2 – второй начальный момент случайной величины, определяемой функцией $G(y)$; функция $f(z)$ – некоторая функция.

Доказательство. В уравнении (4) выполним замену

$$h(z,u_1,u_2,t) = h_2(z,u_1,u_2,t)\exp\left\{N\lambda(ju_1 + ju_2 a_1)\int_{t_0}^{t} S(\tau)d\tau\right\}, \tag{11}$$

получим уравнение относительно функции $h_2(z,u_1,u_2,t)$:

$$\frac{1}{N}\frac{\partial h_2(z,u_1,u_2,t)}{\partial t} + \lambda(ju_1 + ju_2 a_1)S(t)h_2(z,u_1,u_2,t) =$$
$$= \frac{\partial h_2(z,u_1,u_2,t)}{\partial z} + \frac{\partial h_2(0,u_1,u_2,t)}{\partial z}\left[A(z) - 1 + S(t)A(z)\left(e^{ju_1}G^*(u_2) - 1\right)\right], \tag{12}$$

с начальным условием

$$h_2(z,u_1,u_2,t_0) = R(z). \tag{13}$$

Выполним здесь следующие замены:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{N},\ u_1 = \varepsilon w_1,\ u_2 = \varepsilon w_2,\ h_2(z,u_1,u_2,t) = f_2(z,w_1,w_2,t,\varepsilon). \tag{14}$$

С использованием этих обозначений задача (12)–(13) перепишется в виде

$$\varepsilon^2\frac{\partial f_2(z,w_1,w_2,t,\varepsilon)}{\partial t} + f_2(z,w_1,w_2,t,\varepsilon)\lambda(j\varepsilon w_1 + j\varepsilon w_2 a_1)S(t) = \frac{\partial f_2(z,w_1,w_2,t,\varepsilon)}{\partial z} +$$
$$+ \frac{\partial f_2(0,w_1,w_2,t,\varepsilon)}{\partial z}\left[A(z) - 1 + S(t)A(z)\left(e^{j\varepsilon w_1}G^*(\varepsilon w_2) - 1\right)\right] \tag{15}$$

с начальным условием

$$f_2(z,u_1,u_2,t_0,\varepsilon) = R(z). \tag{16}$$

Найдем асимптотическое, при $\varepsilon \to 0$, решение этой задачи, т.е. $f_2(z,w_1,w_2,t) = \lim_{\varepsilon\to 0} f_2(z,w_1,w_2,t,\varepsilon)$.

Этап 1. Выполним предельный переход при $\varepsilon \to 0$ в (15), получим

$$\frac{\partial f_2(z,w_1,w_2,t)}{\partial z} + \frac{\partial f_2(0,w_1,w_2,t)}{\partial z}(A(z) - 1) = 0.$$

Отсюда следует, что $f_2(z,w_1,w_2,t)$ можно записать в виде

$$f_2(z,w_1,w_2,t) = R(z)\Phi_2(w_1,w_2,t), \tag{17}$$

где $\Phi_2(w_1,w_2,t)$ – некоторая скалярная функция, удовлетворяющая условию $\Phi_2(w_1,w_2,t_0) = 1$.

Этап 2. Решение уравнения (15) запишем в виде разложения

$$f_2(z,w_1,w_2,t,\varepsilon) = \Phi_2(w_1,w_2,t)\left[R(z) + (j\varepsilon w_1 + j\varepsilon w_2 a_1)S(t)f(z)\right] + O(\varepsilon^2), \tag{18}$$

где $f(z)$ – некоторая функция. Подставим это выражение в (15). Используя разложения

$$e^{j\varepsilon w_1} = 1 + j\varepsilon w_1 + O(\varepsilon^2),\ e^{j\varepsilon w_2} = 1 + j\varepsilon w_2 + O(\varepsilon^2),$$

получим

$$\lambda(j\varepsilon w_1 + j\varepsilon w_2 a_1)S(t)R(z)\Phi_2(w_1,w_2,t) = \Phi_2(w_1,w_2,t)\{R'(z) +$$
$$+ (j\varepsilon w_1 + j\varepsilon w_2 a_1)S(t)f'(z) + \lambda(A(z) - 1) + \lambda S(t)A(z)(j\varepsilon w_1 + j\varepsilon w_2 a_1) +$$
$$+ f'(0)S(t)(j\varepsilon w_1 + j\varepsilon w_2 a_1)(A(z) - 1)\} + O(\varepsilon^2).$$

Учитывая, что

$$R'(z) = \lambda(1 - A(z)),$$

приведя подобные и сократив обе части на $(j\varepsilon w_1 + j\varepsilon w_2 a_1)S(t)$, получаем дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $f(z)$:

$$\lambda R(z) = f'(z) + f'(0)[A(z) - 1] + \lambda A(z),$$

решение которого дает следующий результат:

$$f(z)=\lambda\int\limits_0^z\left(\mathrm{A}(u)-F(u)\right)du+f'(0)\int\limits_0^z\left(A(u)-1\right)du\,.$$

Нетрудно показать, что

$$f'(0)=\lambda f(\infty)+\frac{\kappa}{2}\,, \tag{19}$$

где величина κ определяется по формуле $\kappa=\lambda^3\left(\sigma^2-a^2\right)$ [10], величины a и σ^2 – математическое ожидание и дисперсия случайной величины с функцией распределения $A(x)$.

Этап 3. В (15) выполним предельный переход при $z\to\infty$. В силу способа построения функции $F_2(z,w_1,w_2,t,\varepsilon)$ она является монотонно возрастающей и ограниченной сверху функцией по z. Следовательно,

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\partial f_2(z,w_1,w_2,t,\varepsilon)}{\partial z}=0\,.$$

Учитывая это и применяя разложения

$$e^{j\varepsilon w_1}=1+j\varepsilon w_1+\frac{(j\varepsilon w_1)^2}{2}+O\left(\varepsilon^3\right),\ e^{j\varepsilon w_2}=1+j\varepsilon w_2+\frac{(j\varepsilon w_2)^2}{2}+O\left(\varepsilon^3\right),$$

в результате несложных преобразований получаем

$$\varepsilon^2\frac{\partial f_2(\infty,w_1,w_2,t,\varepsilon)}{\partial t}+f_2(\infty,w_1,w_2,t,\varepsilon)\lambda\left(j\varepsilon w_1+j\varepsilon w_2a_1\right)S(t)=$$

$$=\frac{\partial f_2(0,w_1,w_2,t,\varepsilon)}{\partial z}S(t)\left(j\varepsilon w_1+j\varepsilon w_2a_1+\frac{(j\varepsilon w_1)^2}{2}+\frac{(j\varepsilon w_2)^2}{2}a_2+(j\varepsilon w_1)(j\varepsilon w_2)a_1+O\left(\varepsilon^3\right)\right).$$

Подставим сюда разложение (18), при $z\to\infty$ запишем

$$\varepsilon^2\frac{\partial\Phi_2(w_1,w_2,t)}{\partial t}+\lambda\left(j\varepsilon w_1+j\varepsilon w_2a_1\right)S(t)\Phi_2(w_1,w_2,t)+$$

$$+\lambda\left((j\varepsilon w_1)^2+2(j\varepsilon w_1)(j\varepsilon w_2)a_1+(j\varepsilon w_2a_1)^2\right)S^2(t)f(\infty)\Phi_2(w_1,w_2,t)=$$

$$=\Phi_2(w_1,w_2,t)\lambda S(t)\left(j\varepsilon w_1+j\varepsilon w_2a_1+\frac{(j\varepsilon w_1)^2}{2}+\frac{(j\varepsilon w_2)^2}{2}a_2+(j\varepsilon w_1)(j\varepsilon w_2)a_1\right)+$$

$$+\left((j\varepsilon w_1)^2+2(j\varepsilon w_1)(j\varepsilon w_2)a_1+(j\varepsilon w_2a_1)^2\right)S^2(t)\frac{\partial f(0)}{\partial z}\Phi_2(w_1,w_2,t)+O\left(\varepsilon^3\right).$$

Приводя подобные слагаемые и сокращая на ε^2, учитывая (19) и переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, получим дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $\Phi_2(w_1,w_2,t)$:

$$\frac{\partial\Phi_2(w_1,w_2,t)}{\partial t}=\Phi_2(w_1,w_2,t)\left\{\frac{(jw_1)^2}{2}\left(\lambda S(t)+\kappa S^2(t)\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{(jw_2)^2}{2}\left(\lambda a_2S(t)+a_1{}^2\kappa S^2(t)\right)+(jw_1)(jw_2)\left(\lambda a_1S(t)+a_1\kappa S^2(t)\right)\right\}.$$

Решение этого уравнения с учетом начального условия, имеет вид

$$\Phi_2(w_1,w_2,t)=\exp\left\{\frac{(jw_1)^2}{2}\left(\lambda\int\limits_{t_0}^tS(\tau)d\tau+\kappa\int\limits_{t_0}^tS^2(\tau)d\tau\right)+\frac{(jw_2)^2}{2}\left(\lambda a_2\int\limits_{t_0}^tS(\tau)d\tau+a_1{}^2\kappa\int\limits_{t_0}^tS^2(\tau)d\tau\right)+\right.$$

$$\left.+(jw_1)(jw_2)\left(\lambda a_1\int\limits_{t_0}^tS(\tau)d\tau+a_1\kappa\int\limits_{t_0}^tS^2(\tau)d\tau\right)\right\},$$

подставляя которое в (17), получаем

$$f_2(z,w_1,w_2,t)=R(z)\exp\left\{\frac{(jw_1)^2}{2}\left(\lambda\int_{t_0}^{t}S(\tau)d\tau+\kappa\int_{t_0}^{t}S^2(\tau)d\tau\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{(jw_2)^2}{2}\left(\lambda a_2\int_{t_0}^{t}S(\tau)d\tau+a_1{}^2\kappa\int_{t_0}^{t}S^2(\tau)d\tau\right)+(jw_1)(jw_1)\left(\lambda a_1\int_{t_0}^{t}S(\tau)d\tau+a_1\kappa\int_{t_0}^{t}S^2(\tau)d\tau\right)\right\}. \qquad (20)$$

Выполним в выражении (20) замены, обратные к (14) и (11), получим следующее выражение для асимптотической характеристической функции $H(z,u_1,u_2,t)$ числа событий просеянного потока, наступивших до момента времени t, и суммарного объема требований, находящихся в просеянном потоке в момент времени t:

$$h(z,u_1,u_2,t)=R(z)\exp\left\{N\lambda(ju_1+ju_2a_1)\int_{t_0}^{t}S(\tau)d\tau+\frac{(ju_1)^2}{2}\left(N\lambda\int_{t_0}^{t}S(\tau)d\tau+N\kappa\int_{t_0}^{t}S^2(\tau)d\tau\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{(ju_2)^2}{2}\left(N\lambda a_2\int_{t_0}^{t}S(\tau)d\tau+Na_1{}^2\kappa\int_{t_0}^{t}S^2(\tau)d\tau\right)+(ju_1)(ju_2)\left(N\lambda a_1\int_{t_0}^{t}S(\tau)d\tau+Na_1\kappa\int_{t_0}^{t}S^2(\tau)d\tau\right)\right\}.$$

Теорема доказана.

Функция $h(u_1,u_2,t)=\lim\limits_{z\to\infty}h(z,u_1,u_2,t)$ есть характеристическая функция для процесса $\{n(t),V(t)\}$ – числа событий, наступивших в просеянном потоке к моменту времени *t* и суммарного объема требований в просеянном потоке к моменту времени *t*.

Следствие 1. Полагая $t=T$, $t_0=-\infty$, для характеристической функции процесса $\{i(t),V(t)\}$ в стационарном режиме получим

$$h(u_1,u_2)=\exp\left\{ju_1N\lambda b_1+ju_2N\lambda b_1a_1+\frac{(ju_1)^2}{2}(N\lambda b_1+N\kappa b_2)+\right.$$

$$\left.+\frac{(ju_2)^2}{2}\left(N\lambda a_2b_1+Na_1{}^2\kappa b_2\right)+(ju_1)(ju_2)(N\lambda a_1b_1+Na_1\kappa b_2)\right\}, \qquad (21)$$

где

$$b_2=\int_0^{\infty}(1-B(\tau))^2\,d\tau\,.$$

Из вида функции (21) очевидно, что двумерный процесс $\{i(t),V(t)\}$ является асимптотически гауссовским с вектором математических ожиданий

$$\mathbf{a}=N\cdot[\lambda b_1 \quad \lambda a_1b_1]$$

и ковариационной матрицей

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}\sigma_1{}^2 & r\sigma_1\sigma_2\\ r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2{}^2\end{bmatrix}=N\cdot\begin{bmatrix}\lambda b_1+\kappa b_2 & \lambda a_1b_1+a_1\kappa b_2\\ \lambda a_1b_1+a_1\kappa b_2 & \lambda a_2b_1+a_1{}^2\kappa b_2\end{bmatrix}.$$

Следствие 2. Асимптотическая характеристическая функция суммарного объема требований в системе в стационарном режиме имеет вид гауссовской характеристической функции

$$h(u,t)=\exp\left\{juN\lambda a_1b_1+\frac{(ju)^2}{2}\left(N\lambda a_2b_1+Na_1{}^2\kappa b_2\right)\right\}$$

с параметрами $a=N\lambda a_1b_1$ и $\sigma^2=N\lambda a_2b_1+Na_1{}^2\kappa b_2$.

Заключение

В результате проведенного исследования построена математическая модель обслуживания требований случайного объема в бесконечнолинейной системе массового обслуживания GI|GI|∞. С помощью метода асимптотического анализа при условии высокой интенсивности входящего потока доказано, что распределение вероятностей суммарного объема требований в системе является гауссовским.

ЛИТЕРАТУРА

1. Моделирование процессов и систем обработки информации: курс лекций / О.М. Тихоненко. Минск : БГУ, 2008. 148 с.
2. Sengupta B. The Spatial Requirement of M/G/1 Queue or: How to Design for Buffer Space Modeling and Performance Evaluation Methodology // Lect. Notes Contr. Inf. Sci. / eds. by F. Baccelli, G. Fayolle. Berlin, 1984. V. 60. P. 547–562.
3. Тихоненко О.М. Распределение суммарного объема сообщений в системах массового обслуживания с групповым поступлением // Автоматика и телемеханика. 1987. № 11. С. 111–120.
4. Тихоненко О.М. Распределение суммарного объема сообщений в однолинейной системе массового обслуживания с групповым поступлением // Автоматика и телемеханика. 1985. № 11. С. 78–83.
5. Kang S.H., Kim Y.H., Sung D.K., Choi B.D. An application of Markovian Arrival Process to modeling superposed ATM cell streams // IEEE Transactions on Communications. 2002. V. 50, No. 4. P. 633–642.
6. Klemm A., Lindermann C., Lohmann M. Modelling IP traffic using the batch Markovian arrival process // Performance Evaluation. 2003. V. 54. P. 149–173.
7. Лисовская Е.Ю., Моисеева С.П. Асимптотический анализ системы MMPP|GI|∞ с обслуживанием требований случайного объема // Труды Томского государственного университета. Т. 299. Сер. физико-математическая: Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы IV Междунар. молодеж. науч. конф. Томск, 20–21 мая 2016 г. / под общ. ред. И.С. Шмырина. Томск : Издательский Дом Том. гос. ун-та, 2016. С. 99–104.
8. Лисовская Е.Ю., Моисеева С.П. Исследование бесконечнолинейной системы массового обслуживания требований случайного объема с входящим MMPP-потоком // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2016) : материалы XV Междунар. конф. им. А.Ф. Терпугова (12–16 сентября 2016 г.). Томск : Изд-во Том. ун-та, 2016. Ч. 1. С. 77–82.
9. Лисовская Е.Ю., Моисеева С.П. Суммарный объем заявок в бесконечнолинейной системе массового обслуживания с рекуррентным входящим потоком // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2016) = Distributed computer and communication networks: control, computation, communications (DCCN-2016) : материалы Девятнадцатой междунар. науч. конф., 21–25 нояб. 2016 г. : в 3 т. / под общ. ред. В.М. Вишневского, К.Е. Самуйлова. М. : РУДН, 2016. С. 313–325.
10. Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания / А.Н. Моисеев, А.А. Назаров. Томск : Изд-во НТЛ, 2015. 240 с.
11. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А.А. Назаров, С.П. Моисеева. Томск : Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.

Лисовская Екатерина Юрьевна. E-mail: ekaterina_lisovs@mail.ru
Моисеева Светлана Петровна, д-р физ.-мат. наук, доцент. E-mail: smoiseeva@mail.ru
Национальный Исследовательский Томский государственный университет

Поступила в редакцию 30 декабря 2016 г.

Lisovskaya Ekaterina Yu., Moiseeva Svetlana P. (National Research Tomsk State University, Russian Federation).
Asymptotical analysis of a non-Markovian queueing system with renewal input process and random capacity of customers.
Keywords: Infinite-server Queue; dynamic screening method; customer with random capacity; asymptotic analysis method.

DOI: 10.17223/19988605/39/5

In this paper, the GI/GI/∞ queueing system (QS) with random capacity customers is studied. The arrival process is a Renewal process. The system has an unlimited number of servers and service times on each server are i.i.d. with distribution function $B(x)$. All customers have a random capacity $\nu > 0$ with probability distribution $G(y) = P\{\nu < y\}$ and the customers capacities are independent. Moreover, we assume that service time and customers capacity are mutually independent. After the service, customers leave the system and "take away" the capacity.

We considered two-dimensional stochastic process $\{i(t),V(t)\}$, where $i(t)$ and $V(t)$ denote the number of customers in the system and the total customers capacity at time t, respectively.

We proposed the dynamic screening method for its investigation. Note that this method exactly determines the characteristics of the process $V(t)$ since the screened process contains only those customers, which do not finish the service at the moment T.

We obtained the system of Kolmogorov differential equations and by using the partial characteristic function, we wrote the main equation:

$$\frac{\partial h(z,u_1,u_2,t)}{\partial t} = \frac{\partial h(z,u_1,u_2,t)}{\partial z} + \frac{\partial h(0,u_1,u_2,t)}{\partial z}\left[A(z) - 1 + S(t)A(z)\left(e^{ju_1}G^*(u_2) - 1\right)\right]$$

with the initial condition

$$h(z,u_1,u_2,t_0) = R(z).$$

By using the asymptotic analysis method under the condition of an infinitely growing arrival rate, we obtained that in steady state regime the characteristic function of the customers number in the system and the total customers capacity corresponds to a two-dimensional Gaussian distribution

$$h(u_1,u_2)=\exp\left\{ju_1N\lambda b_1+ju_2N\lambda a_1b_1+\frac{(ju_1)^2}{2}\left(N\lambda b_1+N\kappa b_2\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{(ju_2)^2}{2}\left(N\lambda a_2b_1+Na_1{}^2\kappa b_2\right)+(ju_1)(ju_2)\left(N\lambda a_1b_1+Na_1\kappa b_2\right)\right\},$$

and the asymptotic characteristic function of the total customers capacity corresponds to a Gaussian distribution

$$h(u,t)=\exp\left\{juN\lambda a_1b_1+\frac{(ju)^2}{2}\left(N\lambda a_2b_1+Na_1{}^2\kappa b_2\right)\right\}.$$

REFERENCES

1. Tihonenko, O.M. (2008) *Modelirovanie protsessov i system obrabotki informatsii* [Modelling of processes and information processing systems: lectures]. Minsk: BSU.
2. Sengupta, B. (1984) The Spatial Requirement of M/G/1 Queue or: How to Design for Buffer Space Modeling and Performance Evaluation Methodology. In: Baccelli, F. & Fayolle, G. (eds) *Lect. Notes Contr. Inf. Sci*. Vol. 60. Berlin. pp. 547–562.
3. Tihonenko, O.M. (1987) Raspredelenie summarnogo ob"ema soobshcheniy v sistemakh massovogo obsluzhivaniya s gruppovym postupleniem [Distribution of the total volume of messages in a queuing system with batch arrival]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control.* 11. pp. 111–120.
4. Tihonenko, O.M. (1985) Raspredelenie summarnogo ob"ema soobshcheniy v odnolineynoy sisteme massovogo obsluzhivaniya s gruppovym postupleniem [Distribution of the total volume of messages in a single-server queuing system with batch arrival]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control.* 11. pp. 78–83.
5. Kang, S.H., Kim, Y.H., Sung, D.K. & Choi, B.D. (2002) An application of Markovian Arrival Process to modeling superposed ATM cell streams. *IEEE Transactions on Communications.* 50(4). pp. 633–642.
6. Klemm, A., Lindermann, C. & Lohmann, M. (2003) Modelling IP traffic using the batch Markovian arrival process. *Performance Evaluation.* 54. pp. 149–173. DOI: 10.1016/S0166-5316(03)00067-1
7. Lisovskaya, E.Yu. & Moiseeva, S.P. (2016) [Asymptotic analysis MMPP|GI|∞ queue with random customers capacity]. *Matematicheskoe i pro-grammnoe obespechenie informatsionnykh, tekhnicheskikh i ekonomicheskikh sistem* [Mathematical and software information, technical and economic systems]. Proc. of the 4th International Youth Scientific Conference. Tomsk: Tomsk State University. pp. 99-104. (In Russian).
8. Lisovskaya, E.Yu. & Moiseeva, S.P. (2016) [Study of infinite-server queue with random customers capacity with the MMPP arrives]. *Informatsionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie (ITMM-2016)* [Information technology and mathematical modeling (ITMM 2016)]. Proc. of the 15th International Conference named after A.F. Terpugov. Vol. 1. Tomsk: Tomsk State University. pp. 77-82. (In Russian).
9. Lisovskaya, E.Yu. & Moiseeva, S.P. (2016) [The total volume of customers in the infinite-server queuing system with renewal input process]. *Raspredelennye komp'yuternye i telekommunikatsionnye seti: upravlenie, vychislenie, svyaz' (DCCN-2016)* [Distributed computer and communication networks: control, computation, communications (DCCN-2016)]. Proc. of the 19th International Conference. Moscow: PFUR. pp. 313-325. (In Russian).
10. Moiseev, A.N. & Nazarov, A.A. (2015) *Beskonechnolineynye sistemy i seti massovogo obsluzhivaniya* [Queuing systems and networks with infinite number of servers]. Tomsk: NTL.
11. Nazarov, A.A. & Moiseeva, S.P. (2006) *Metod asimptoticheskogo analiza v teorii massovogo obsluzhivaniya* [Method of asymptotic analysis in queuing theory]. Tomsk: NTL.