ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2017 Управление, вычислительная техника и информатика № 39

УДК 336.51
DOI: 10.17223/19988605/39/6

Г.А. Медведев

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ ДОХОДНОСТИ

Рассматривается возможность представления временных структур доходности в виде полиномов и степенных рядов в моделях с процессами краткосрочной процентной ставки, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями с полиномиальными функциями дрейфа и диффузии. Показано, что такое представление имеет место только в случае, когда функции дрейфа и диффузии – полиномы не выше первого порядка.
Ключевые слова: диффузионные модели процентных ставок; функции дрейфа и диффузии; временные структуры доходности.

Проблема представления временных структур степенными рядами связана с решением бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для коэффициентов ряда. Эта система уравнений имеет особенности, не позволяющие получить ее решение в аналитическом виде в общем случае. В тех частных случаях, когда это удалось сделать, представление временной структуры в виде степенного ряда не существует, поскольку коэффициенты ряда не удовлетворяют требуемым свойствам. Результаты иллюстрируются для известных моделей процессов краткосрочной процентной ставки Ана–Гао и CIR (1980).

1. Временная структура доходности

Пусть состояние финансового рынка описывается процентной ставкой $r(t)$, которая следует однородному по времени марковскому процессу, порождаемому стохастическим дифференциальным уравнением

$$dr(t) = \mu(r(t))\, dt + \sigma(r(t))\, dw(t)$$

с функцией дрейфа $\mu(x)$, функцией волатильности $\sigma(x)$ и стандартным винеровским процессом $w(t)$.

Уравнение временной структуры, определяющее зависимость цены бескупонной облигации $P(r, \tau)$ от срока до ее погашения τ, в этом случае имеет вид [1]:

$$-\frac{\partial P(r,\tau)}{\partial \tau} + (\mu(r) - \lambda(r)\sigma(r))\,\frac{\partial P(r,\tau)}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2(r)\,\frac{\partial^2 P(r,\tau)}{\partial r^2} - r\,P(r,\tau) = 0.$$

Для упрощения записи введем функцию дрейфа $m(r) = \mu(r) - \lambda(r)\sigma(r)$ и функцию диффузии $s(r) = 0{,}5\,\sigma^2(r)$. При этом уравнение временной структуры преобразуется к виду

$$-\frac{\partial P(r,\tau)}{\partial \tau} + m(r)\,\frac{\partial P(r,\tau)}{\partial r} + s(r)\,\frac{\partial^2 P(r,\tau)}{\partial r^2} - r\,P(r,\tau) = 0,\ \ P(r, 0) = 1.$$

Обозначим $\ln P(r, \tau) = z(r, \tau)$. Тогда можно записать уравнение временной структуры для функции $z(\tau, r)$ в следующем виде:

$$-\frac{\partial z(r,\tau)}{\partial \tau} + m(r)\frac{\partial z(r,\tau)}{\partial r} + s(r)\left[\frac{\partial^2 z(r,\tau)}{\partial r^2} + \left(\frac{\partial z(r,\tau)}{\partial r}\right)^2\right] - r = 0\,,\ z(r, 0) = 0. \qquad (1)$$

Предположим, что функции дрейфа $m(r)$ и диффузии $s(r)$ являются полиномами, т.е.

$$m(r) = \sum_{i=0}^{\beta} b_i r^i,\ \ s(r) = \sum_{i=0}^{\alpha} c_i r^i.$$

Возникает вопрос, может ли в этом случае решение уравнения (1) тоже представляться в форме полинома по переменной r, т.е. существует ли полином

$$z(\tau, r) = \sum_{i=0}^{k} a_i(\tau)\, r^i, \qquad (2)$$

удовлетворяющий уравнению (1)?

Подстановка представления (2) в уравнение (1) приводит к тому, что левая часть равенства (1) будет суммой трех полиномов по переменной r, которые условно назовем полиномом доходности, полиномом дрейфа и полиномом диффузии.

Полином доходности

$$-\frac{\partial z(r,\tau)}{\partial \tau} - r = \; -\sum_{i=0}^{k} a_i'(\tau)\, r^i - r$$

имеет степень k (штрих обозначает производную по τ).

Полином дрейфа степени $\beta + k - 1$ имеет вид

$$m(r)\frac{\partial z(r,\tau)}{\partial r} = \sum_{i=0}^{\beta}\sum_{j=1}^{k} j\, b_i\, a_j(\tau)\, r^{i+j-1}.$$

Полином диффузии имеет степень $\alpha + 2k - 2$ и определяется выражением

$$s(r)\left[\frac{\partial^2 z(r,\tau)}{\partial r^2} + \left(\frac{\partial z(r,\tau)}{\partial r}\right)^2\right] = \sum_{i=0}^{\alpha} c_i r^i \left[\sum_{j=2}^{k} j(j-1) a_j(\tau)\, r^{j-2} + \left(\sum_{j=1}^{k} j\, a_j(\tau)\, r^{j-1}\right)^2\right].$$

Это выражение выписано для случая, когда $k \ge 2$. Если это неравенство не выполняется, то первая сумма в квадратных скобках отсутствует.

Поскольку постановка задачи предполагает, что рассматриваемая модель задана, то функции $\mu(r)$, $\sigma(r)$ и $\lambda(r)$ известны. Следовательно, наборы параметров $\{b_i\}$ и $\{c_i\}$ тоже являются известными. Таким образом, задача состоит в определении набора функций $\{a_i(\tau)\}$, которые определяют решение (2), если оно существует.

2. Временная структура как полином

Как мы выяснили, левая часть уравнения (1) представляет из себя полином по переменной r степени $\gamma \equiv \max\{k, \alpha + 2k - 2, \beta + k - 1\} \ge k$. Этот полином равномерно по r равен нулю. Поскольку степенные функции $\{r^i\}$ линейно независимы, то в этом случае коэффициенты при r^i, $i = 0, 1, 2,..., \gamma$, должны быть равны нулю. Это дает систему $(\gamma + 1)$ уравнений для определения $(k + 1)$ функций $a_i(\tau)$, $i = 0, 1, 2,..., k$. Заметим, что $(k + 1)$ уравнений этой системы являются обыкновенными дифференциальными уравнениями, а остальные $(\gamma - k)$ уравнений нелинейные алгебраические. Когда $\gamma > k$, система уравнений относительно функций $a_i(\tau)$ является переопределенной. Сделаем также естественные предположения, что α, β и k – целые числа, $\alpha \ge 0$, $\beta \ge 0$, $k \ge 1$.

Пусть $\delta \equiv \max\{\alpha + 2k - 2, \beta + k - 1\}$. Рассмотрим последовательно все три возможных случая: $k > \delta$, $k = \delta$, $k < \delta$.

Предположим, что $k > \delta$. Найдем все возможные пары чисел $\{\alpha, \beta\}$, которые соответствуют этому предположению. Для этого нужно решить следующую систему неравенств: $\alpha \ge 0$, $\beta \ge 0$, $k \ge 1$, $k > \beta + k - 1$, $k > \alpha + 2k - 2$. Два последние неравенства дают $\beta < 1$, $\alpha + k < 2$. Поэтому получаем, что существует единственный вариант возможного решения уравнения (1): $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $k = 1$.

Для определения функций $a_i(\tau)$, $i = 0, 1$, получаем систему уравнений

$$a_0'(\tau) = b_0 a_1(\tau) + c_0 a_1^2(\tau),\; a_0(0) = 0;\;\; a_1'(\tau) = -1,\; a_1(0) = 0,$$

решение которой имеет вид

$$a_1(\tau) = -\tau,\;\; a_0(\tau) = -b_0\tau^2/2 + c_0\tau^3/3.$$

Наконец, решение (2) уравнения (1) выглядит следующим образом:

$$z(\tau, r) = -\,b_0\tau^2/2 + c_0\tau^3/3\ -\tau\, r.$$

Поэтому временная структура доходности в этом случае будет иметь вид полинома первой степени по переменной r:

$$y(\tau, r) = -\frac{z(\tau,r)}{\tau} = r + \frac{b_0\tau}{2} - \frac{c_0\tau^2}{3}.$$

Заметим, что цена облигации с такой доходностью рассматривалась Р. Мертоном [2].

Предположим теперь, что $k = \delta$. В этом случае имеется три варианта построения решения:

$\{\beta + k - 1 = k,\ \alpha + 2k - 2 < k\}$, откуда $\beta = 1$, $\alpha + k < 2$ и $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $k = 1$;

$\{\beta + k - 1 = k,\ \alpha + 2k - 2 = k\}$, откуда $\beta = 1$, $\alpha + k = 2$ и $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $k = 1$;

$\{\beta + k - 1 < k,\ \alpha + 2k - 2 = k\}$, откуда $\beta < 1$, $\alpha + k = 2$ и $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $k = 1$.

Как видно, все эти варианты соответствуют полиному первой степени ($k = 1$).

В случае $\{\alpha = 0, \beta = 1\}$ для определения функций $a_i(\tau)$, $i = 0, 1$, имеем систему уравнений

$$a_0'(\tau) = b_0 a_1(\tau) + c_0 a_1^2(\tau),\ a_0(0) = 0;\ a_1'(\tau) = b_1 a_1(\tau) - 1,\ a_1(0) = 0.$$

Используем обозначения, которые обычно применяются в литературе о временных структурах процентных ставок: $a_0(\tau) = A(\tau)$, $a_1(\tau) = -\,B(\tau)$, $b_0 = k\theta - \lambda\sigma$, $b_1 = -\,k$, $c_0 = \sigma^2/2$. Тогда решение этой системы уравнений запишется в виде

$$A(\tau) = -\tau\left(\theta - \frac{\sigma\lambda}{k} - \frac{\sigma^2}{2k^2}\right) + \left(\theta - \frac{\sigma\lambda}{k} - \frac{\sigma^2}{2k^2}\right)B(\tau) - \frac{\sigma^2}{4k}B(\tau)^2,\ \ B(\tau) = \frac{1 - e^{-k\tau}}{k},$$

в котором легко узнаются функции временной структуры модели Васичека [1].

В случае $\{\alpha = 1, \beta = 1\}$ для определения функций $a_i(\tau)$, $i = 0, 1$, имеем систему уравнений

$$a_0'(\tau) = b_0 a_1(\tau) + c_0 a_1^2(\tau),\ a_0(0) = 0;\ a_1'(\tau) = b_1 a_1(\tau) + c_1 a_1^2(\tau) - 1,\ a_1(0) = 0.$$

При использовании традиционных обозначений $a_0(\tau) = A(\tau)$, $a_1(\tau) = -\,B(\tau)$, $b_0 = k\theta - \lambda\sigma_0$, $b_1 = -\,(k + \lambda\sigma_1)$, $c_0 = \sigma_0/2$, $c_1 = \sigma_1/2$ эта система преобразуется к виду

$$A' = -(k\theta - \lambda\sigma_0)\, B(\tau) + \sigma_0\, [B(\tau)]^2/2,\ A(0) = 0,$$

$$B' = 1 - (k + \lambda\sigma_1)\, B(\tau) - \sigma_1\, [B(\tau)]^2/2,\ B(0) = 0.$$

Полученные уравнения определяют функции временной структуры модели Даффи–Кана.

$$A(\tau) = \frac{\sigma_0}{\sigma_1}\,[B(\tau) - \tau]\ - \frac{2k}{\sigma_1^2}(\sigma_1\theta - \sigma_0)[v\tau - \ln(1 + vB(\tau))],\ B(\tau) = \left(\frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon\tau} - 1} + V\right)^{-1},$$

где $\varepsilon = \sqrt{(k + \lambda\sigma_1)^2 + 2\sigma_1}$, $v = (\varepsilon - k - \lambda\sigma_1)/2$, $V = (\varepsilon + k + \lambda\sigma_1)/2$.

Наконец, в случае $\{\alpha = 1, \beta = 0\}$ функции $a_i(\tau)$, $i = 0, 1$, удовлетворяют системе уравнений

$$a_0'(\tau) = b_0 a_1(\tau) + c_0 a_1^2(\tau),\ a_0(0) = 0;\ a_1'(\tau) = c_1 a_1^2(\tau) - 1,\ a_1(0) = 0,$$

решение которой в традиционных обозначениях $a_0(\tau) = A(\tau)$, $a_1(\tau) = -\,B(\tau)$, $b_0 = k\theta - \lambda\sigma_0$, $c_0 = \sigma_0/2$, $c_1 = \sigma_1/2$ (в рассматриваемом случае $\lambda\sigma_1 = -\,k$) выражается через гиперболические функции

$$A(\tau) = \frac{1}{\sigma_1}\,[\sigma_0\tau - \frac{2k}{\sigma_1}(\sigma_1\theta + \sigma_0)\ln(\mathrm{ch}(\tau\sqrt{\sigma_1/2}))],\ B(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\sigma_1}}\,\mathrm{th}\left(\tau\sqrt{\frac{\sigma_1}{2}}\right).$$

Заметим, что модели временной структуры Васичека и Даффи–Кана в литературе достаточно подробно изучены (см., например, [3]), но последний случай $\{\alpha = 1, \beta = 0\}$, предусматривающий ограничение $\lambda\sigma_1 = -\,k$ (возможно, редко встречающийся на реальном рынке), еще нигде не обсуждался. Для него кривая доходности

$$y(\tau, r) = \frac{rB(\tau) - A(\tau)}{\tau} =$$

$$= \frac{1}{\sigma_1\tau}\{r\sqrt{2\sigma_1}\ \mathrm{th}(\tau\sqrt{\sigma_1/2}) - \sigma_0\tau + \frac{2k}{\sigma_1}(\sigma_1\theta + \sigma_0)\ln(\mathrm{ch}(\tau\sqrt{\sigma_1/2}))\}$$

и форвардная кривая

$$f(\tau,r) = r\frac{dB(\tau)}{d\tau} - \frac{dA(\tau)}{d\tau} =$$

$$= \frac{1}{\sigma_1}\{(\sigma_0 + \sigma_1 r)\ \mathrm{sch}[\tau\sqrt{\sigma_1/2}]^2 + \frac{k}{\sqrt{2\sigma_1}}(\sigma_1\theta + \sigma_0)\ \mathrm{th}[\tau\sqrt{\sigma_1/2}]\} - \frac{\sigma_0}{\sigma_1}$$

являются полиномами первой степени.

Заметим, что обе эти кривые имеют одинаковое предельное значение при $\tau \to \infty$, равное

$$k\left(\theta + \frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)\sqrt{\frac{2}{\sigma_1}} - \frac{\sigma_0}{\sigma_1}.$$

На рис. 1 кривые $y(\tau, r)$ и $f(\tau, r)$ представлены для следующих значений параметров r = 0,01; 0,1; 0,2; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9; k = 0,4, $\theta = 9^{-1}$, σ_0 = 0,16, σ_1 = 0,18. Для представления кривых «целиком» для всего интервала возможных значений сроков до погашения $\tau \in (0, \infty)$ использовано нелинейное преобразование сроков до погашения: $u = 1 - e^{-\rho\tau}$, которое отображает положительную полуось $(0, \infty)$ в единичный интервал (0, 1). Принятое при расчетах численное значение ρ = ln10/30 = 0,07675 соответствует тому, что сроки до погашения от 0 до 30 отображаются в интервал (0; 0,9). Кривые стартуют из точки $Y(0, r) = F(0, r) = r$ и при $u \to 1$ стремятся к одному и тому же пределу $Y(1, r) = F(1, r)$ = 0,444.

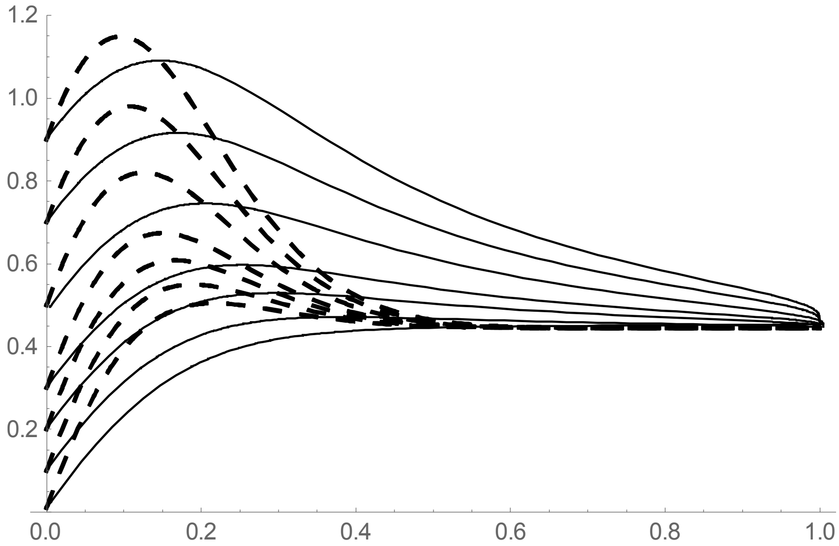

Рис. 1. Кривые доходности $Y(u, r)$ (сплошные линии) и форвардные кривые $F(u, r)$ (пунктирные линии)

Предположим наконец, что $k < \delta = \max\{\alpha + 2k - 2, \beta + k - 1\}$. Из уравнения временной структуры (1) получаем равенство

$$-r - \sum_{i=0}^{k}\frac{da_i(\tau)}{d\tau}r^i + \sum_{j=0}^{\beta}b_j r^j\sum_{i=1}^{k} i\,a_i(\tau)r^{i-1} +$$

$$+\sum_{j=0}^{\alpha}c_j r^j\left(\sum_{i=2}^{k} i(i-1)a_i(\tau)r^{i-2} + \left(\sum_{i=1}^{k} i\,a_i(\tau)r^{i-1}\right)^2\right) = 0.$$

В этом случае для определения $(k + 1)$ функций $a_i(\tau)$, i = 0, 1, 2,..., k, получается система $(k + 1)$ обыкновенных дифференциальных уравнений (уравнения этой системы являются однородными за исключением одного, при $i = 1$) и система $(\delta - k) \geq 1$ однородных алгебраических уравнений. Эти уравнения находятся приравниванием коэффициентов при r^i, i = 0, 1, 2,..., δ, к нулю. Коэффициенты при r^i, $0 \leq i \leq k$, приводят к системе дифференциальных уравнений, а коэффициенты при r^i, $k < i \leq \delta$, – к системе алгебраических уравнений. Заметим, что коэффициент при r^δ имеет вид либо $k^2 c_\alpha a_k(\tau)^2$ в случае

$\delta = \alpha + 2k - 2$, либо $kb_\beta a_k(\tau)$ в случае $\delta = \beta + k - 1$, либо $(k^2 c_\alpha a_k(\tau) + kb_\beta)a_k(\tau)$, когда $\delta = \alpha + 2k - 2 = \beta + k - 1$. Во всех этих случаях он имеет в качестве множителя функцию $a_k(\tau)$ и равномерно по τ должен быть равен нулю. Следовательно, равномерно по τ равна нулю функция $a_k(\tau)$ и, следовательно, равна нулю и ее производная. Отсюда имеем, что степень полинома доходности понижается до $(k - 1)$. Вместе с этим понижается и порядок системы дифференциальных уравнений (уравнение с производной функции $a_k(\tau)$ становится алгебраическим). После приравнивания нулю функции $a_k(\tau)$ и ее производной в оставшейся системе в уравнении, полученном приравниванием коэффициента при $r^{\delta-1}$ нулю, окажется множителем функция $a_{k-1}(\tau)$. Ввиду однородности уравнения эта функция равномерно по τ должна быть равна нулю. Так что равна нулю и ее производная. Степень полинома доходности понижается до $(k - 2)$. Продолжение этой процедуры приводит к тому, что функция $a_1(\tau)$ должна быть равна нулю, но при $i = 1$ уравнение является неоднородным, и это исключается, что приводит к противоречию. Отсюда следует, что не существет конечного k, для которого полином (2) мог бы быть решением уравнения (1).

Для иллюстрации описанной процедуры приведем пример. Пусть $k = \alpha = \beta = 2$, когда $\delta = 4$. Тогда относительно функций $\{a_i(\tau)\}$ получается система трех дифференциальных уравнений

$$\frac{da_0(\tau)}{d\tau} = a_1(\tau)b_0 + a_1^2(\tau)c_0 + 2a_2(\tau)c_0\,,$$

$$\frac{da_1(\tau)}{d\tau} = a_1(\tau)b_1 + a_1^2(\tau)c_1 + 2a_2(\tau)c_1 + 2a_2(\tau)b_0 + 4a_1(\tau)a_2(\tau)c_0 - 1\,,$$

$$\frac{da_2(\tau)}{d\tau} = a_1(\tau)b_2 + a_1^2(\tau)c_2 + 2a_2(\tau)c_2 + 2a_2(\tau)b_1 + 4a_1(\tau)a_2(\tau)c_1 + 4a_2^2(\tau)c_0$$

и система двух алгебраических уравнений

$$2a_2(\tau)b_2 + 4a_1(\tau)a_2(\tau)c_{21} + 4a_2^2(\tau)c_1 = 0\,,$$

$$4a_2^2(\tau)c_2 = 0\,.$$

Из последнего уравнения следует, что $a_2(\tau) = 0$ для всех возможных τ. Поэтому равна нулю и производная этой функции. Используем это в исходной системе уравнений. Тогда она преобразуется к виду

$$\frac{da_0(\tau)}{d\tau} = a_1(\tau)b_0 + a_1^2(\tau)c_0\,,$$

$$\frac{da_1(\tau)}{d\tau} = a_1(\tau)b_1 + a_1^2(\tau)c_1 - 1\,,$$

$$a_1(\tau)b_2 + a_1^2(\tau)c_2 = 0\,.$$

Из третьего уравнения получаем, что $a_1(\tau) = 0$ для всех возможных τ. Поэтому равна нулю и производная этой функции. Однако это противоречит второму уравнению. Следовательно, решения в виде (2) не существует.

3. Временная структура как степенной ряд

Итак, решения (2) для конечных k не существует, но, может, оно существует при неограниченном k, т.е., может быть, существует решение в виде фнкционального ряда

$$z(\tau, r) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(\tau)\, r^i. \tag{3}$$

Проверим эту версию. После подстановки представления (3) в уравнение (1) оно преобразуется к виду

$$-r - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{da_i(\tau)}{d\,\tau} r^i + \sum_{j=0}^{\beta} b_j r^j \sum_{i=1}^{\infty} i\, a_i(\tau)\, r^{i-1} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{\alpha} c_j r^j \left(\sum_{i=2}^{\infty} i\,(i-1)\, a_i(\tau)\, r^{i-2} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} i\, a_i(\tau)\, r^{i-1} \right)^2 \right) = 0\,.$$

Изменяя порядок суммирования в двойных суммах этого выражения, его можно записать в более удобном для анализа виде:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{da_i(\tau)}{d\,\tau}-B_i(\tau)-C_i(\tau)+\delta_{i1}\right)r^i=0\,, \tag{4}$$

где δ_{i1} – символ Кронекера ($\delta_{11}=1$, $\delta_{i1}=0$, если $i\neq 1$), а функции $B_i(\tau)$ и $C_i(\tau)$ определяются равенствами

$$B_i(\tau)=\sum_{j=u}^{i}b_{i-j}(j+1)a_{j+1}(\tau)+\sum_{j=v}^{i}c_{i-j}(j+1)(j+2)\,a_{j+2}(\tau)\,, \tag{5}$$

$$C_i(\tau)=\sum_{j=v}^{i}c_{i-j}\left(\sum_{l=1}^{j+1}l(j+2-l)\,a_l(\tau)a_{j+2-l}(\tau)\right), \tag{6}$$

где $u=\max\{0,\,i-\beta\}$, $v=\max\{0,\,i-\alpha\}$.

Поскольку равенство (4) должно удовлетворяться равномерно по переменным r и τ, а степенные функции $\{r^i\}$ линейно независимы, то для справедливости (4) при всех значениях индекса $i=0, 1, 2, \ldots$ должны выполняться равенства

$$\frac{da_i(\tau)}{d\,\tau}-B_i(\tau)-C_i(\tau)+\delta_{i1}=0\,,\ a_i(0)=0,\ i=0,\,1,\,2,\,\ldots, \tag{7}$$

которые с учетом (5) и (6) образуют бесконечную систему дифференциальных уравнений относительно функций $\{a_i(\tau)\}$. Заметим, что эта система является неоднородной. Решение этой системы в аналитическом виде проблематично, поскольку, во-первых, уравнения (7) являются нелинейными из-за функции $C_i(\tau)$ в виде (6), и, во-вторых, из-за того, что в уравнении (7) для функции $a_i(\tau)$ используются не только предыдущие функции $a_j(\tau)$, $j\le i$, но и последующие функции $a_{i+1}(\tau)$ и $a_{i+2}(\tau)$, поэтому нельзя реализовать стандартную рекуррентную процедуру для последовательного решения дифференциальных уравнений системы (7).

Вместе с тем можно попытаться вычислить функции $\{a_i(\tau)\}$ с помощью следующей эвристической процедуры. Заметим, что формулы (5) и (6) можно записать в виде

$$\begin{aligned}B_i(\tau)&=c_0\,(i+1)(i+2)\,a_{i+2}(\tau)+(i+1)(b_0+i\,c_1)\,a_{i+1}(\tau)+\\&+i\,(b_1+(i-1)\,c_2)\,a_i(\tau)+(i-1)(b_2+(i-1)\,c_3)\,a_{i-1}(\tau)+\ldots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_i(\tau)&=2\,c_0\,[(i+1)a_1(\tau)\,a_{i+1}(\tau)+2i\,a_2(\tau)\,a_i(\tau)+3(i-1)a_3(\tau)\,a_{i-1}(\tau)+\ldots]+\\&+2c_1\,[i\,a_1(\tau)\,a_i(\tau)+2(i-1)a_2(\tau)\,a_{i-1}(\tau)+\ldots]+2c_2[(i-1)\ a_1(\tau)\,a_{i-1}(\tau)+\ldots]+\ldots.\end{aligned}$$

С помощью этих представлений уравнения (7) можно переписать так, чтобы функция $a_i(\tau)$ выражалась только через функции с предыдущими индексами или их производные.

$$a_2(\tau)=\frac{1}{2c_0}\left(\frac{da_0(\tau)}{d\,\tau}-b_0\,a_1(\tau)-c_0a_1(\tau)^2\right),$$

$$a_3(\tau)=\frac{1}{6c_0}\left(\frac{da_1(\tau)}{d\,\tau}-b_0 2a_2(\tau)-b_1a_1(\tau)-c_0 4\,a_1(\tau)a_2(\tau)-c_1(2\,a_2(\tau)+a_1(\tau)^2)+1\right),$$

$$\begin{aligned}a_4(\tau)&=\frac{1}{12c_0}(\frac{da_2(\tau)}{d\,\tau}-3b_0a_3(\tau)-2b_1a_2(\tau)-b_2a_1(\tau)-c_0(6\,a_1(\tau)a_3(\tau)+4a_2(\tau)^2)-\\&-c_1(6\,a_3(\tau)+4\,a_1(\tau)a_2(\tau))-c_2(2\,a_2(\tau)+a_1(\tau)^2)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_5(\tau)&=\frac{1}{20\,c_0}(\frac{da_3(\tau)}{d\,\tau}-4b_0a_4(\tau)-3b_1a_3(\tau)-2b_2a_2(\tau)-b_3a_1(\tau)-c_0(8\,a_1(\tau)a_4(\tau)+12\,a_2(\tau)a_3(\tau))-\\&-c_1(12\,a_4(\tau)+6a_1(\tau)a_3(\tau)+4\,a_2(\tau)^2)-c_2(6\,a_3(\tau)+4\,a_1(\tau)a_2(\tau))-c_3(2a_2(\tau)+a_1(\tau)^2),\end{aligned}$$

и вообще для $i>3$

$$a_{i+2}(\tau)=\frac{1}{c_0\,(i+1)(i+2)}\Big(\frac{da_i(\tau)}{d\,\tau}-(i+1)[b_0+i\,c_1+2\,c_0\,a_1(\tau)]a_{i+1}(\tau)-$$
$$-i\,[b_1+(i-1)\,c_2+2\,c_1\,a_1(\tau)+4c_0a_2(\tau)]\,a_i(\tau)-(i-1)[b_2+(i-2)\,c_3+2c_2a_1(\tau)+4c_1a_2(\tau)+$$
$$+6c_0a_3(\tau)]\,a_{i-1}(\tau)-...\Big).$$

Из этих выражений следует, что все функции $a_i(\tau)$ для $i > 1$ могут быть последовательно выражены через две первые функции $a_0(\tau)$ и $a_1(\tau)$. Если удастся определить эти функции каким-либо образом или оценить их, рассматривая выборку наблюдений, остальные функции можно последовательно определить.

К сожалению, с ростом индекса i будет увеличиваться громоздкость выражений для функций $a_i(\tau)$. Кроме того, такая процедура не гарантирует того, что получающиеся функции $a_i(\tau)$ будут удовлетворять начальным условиям $a_i(0) = 0$, $i = 0, 1, 2, ...$.

Имеются и другие требования к функциям $\{a_i(\tau)\}$, основанные на их экономическом смысле. Если решение (3) уравнения (1) существует, то кривая доходности до погашения выражается в виде

$$y(\tau,\, r) = -\frac{z(\tau,r)}{\tau} = -\sum_{i=0}^{\infty}\frac{a_i(\tau)}{\tau}r^i, \tag{8}$$

что налагает на функции $a_i(\tau)$ определенные свойства.

Для равномерной сходимости ряда (8) необходимо, чтобы $\lim_{i\to\infty} a_i(\tau) = 0$ равномерно по τ. Предельная долгосрочная доходность $\lim_{\tau\to\infty} y(\tau,r) \equiv y(\infty)$ должна быть неотрицательной, конечной и не зависеть от значений краткосрочной ставки r.

В связи с этим функция $a_0(\tau)$ должна иметь прямолинейную асимптоту const $-\ \tau\, y(\infty)$, так как $\lim_{\tau\to\infty} a_0(\tau)/\tau = -\,y(\infty)$. При этом каждая функция $a_i(\tau)$, $i \geq 1$, должна удовлетворять условию $\lim_{\tau\to\infty} a_i(\tau)/\tau = 0$. Для этого достаточно, чтобы для каждой функции существовал конечный предел $\lim_{\tau\to\infty} a_i(\tau) = a_i$. В этом случае

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{da_i(\tau)}{d\,\tau}=0\,,\ \ i = 0, 1, 2, ...$$

Поэтому предельные значения a_i находятся из системы алгебраических уравнений

$$2c_0a_2 + b_0\,a_1 + c_0a_1^2 + y(\infty) = 0\,,$$
$$6c_0a_3 + b_0\,2a_2 + b_1a_1 + c_0\,4\,a_1a_2 + c_1(2\,a_2 + a_1^2) = 1\,,$$
$$(i+1)(i+2)\,c_0a_{i+2} + \sum_{j=u}^{i} b_{i-j}\,(j+1)a_{j+1} + \sum_{j=v+1}^{i} j(j+1)\,c_{i-j+1}a_{j+1} +$$
$$+\sum_{j=v}^{i} c_{i-j}\left(\sum_{l=1}^{j+1} l(j+2-l)\,a_la_{j+2-l}\right) = 0,\ \ i > 1.$$

Как видно из этой системы, значения a_i, $i > 1$, последовательно выражаются по рекуррентным формулам через две величины a_1 и $y(\infty)$:

$$a_2 = -\frac{a_1b_0 + a_1^2c_0 + y(\infty)}{2c_0} = 0,$$

$$a_3 = \frac{c_0 + a_1(b_0^2 + c_0(2a_1^2c_0 - b_1) + b_0(3a_1c_0 + c_1)) + (b_0 + 2a_1c_0 + c_1)\,y(\infty)}{6c_0^2},$$

$$a_4 = \frac{1}{24c_0^3}(3a_1b_0b_1c_0 - a_1b_0^3 - b_0c_0 - 7a_1^2b_0^2c_0 - 2a_1c_0^2 - 12a_1^3b_0c_0^2 + 4a_1^2b_1c_0^2 - 2a_1b_2c_0^2 -$$
$$-6a_1^4c_0^3 - 3a_1b_0^2c_1 - 2c_0c_1 - 4a_1^2b_0c_0c_1 + 2a_1b_1c_0c_1 - 2a_1b_0c_1^2 + 2a_1b_0c_0c_2 + (2c_0c_2 - b_0^2 -$$
$$-8a_1b_0c_0 + 2b_1c_0 - 8a_1^2c_0^2 - 3b_0c_1 - 2a_1c_0c_1 - 2c_1^2)\,y(\infty) + 2c_0y^2(\infty))$$

и т.д. К сожалению, с ростом индекса очень быстро растет сложность получающихся выражений a_i через величины a_1 и $y(\infty)$, причем значения самих величин в рамках этой системы уравнений не определяются.

С другой стороны, по определению $\lim_{\tau\to 0} y(\tau, r) = r$. Следовательно, если представление (8) имеет место, то

$$\lim_{\tau\to 0} y(\tau, r) = -\lim_{\tau\to 0} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i(\tau)}{\tau} r^i = -\sum_{i=0}^{\infty} \left.\frac{da_i(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0} r^i = r,$$

так что

$$\left.\frac{da_1(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0} = -1, \ \left.\frac{da_i(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0} = 0, \ i \neq 1.$$

4. Тестирование известных моделей

Таким образом, если набор функций $\{a_i(\tau)\}$ обладает перечисленными выше свойствами, есть надежда, что временная структура доходности имеет представление в виде степенного ряда (8). Функции $\{a_i(\tau)\}$ определяются уравнениями (5)–(7) с помощью наборов коэффициентов $\{b_j \mid 0 \le j \le \beta\}$ и $\{c_j \mid 0 \le j \le \alpha\}$. В свою очередь, набор коэффициентов определяется принятой моделью процесса краткосрочной процентной ставки. Рассмотрим некоторые примеры известных моделей краткосрочной ставки. Более интересны модели, для которых уравнения для функций $\{a_i(\tau)\}$ получаются такими, что последующие функции определяются только через предыдущие. Тогда функции $a_i(\tau)$ можно найти в аналитическом виде. К таким моделям относится модель CIR (1980) [4] и модель Ана–Гао [5]. Рассмотрим их.

Пусть процесс краткосрочной ставки $r(t)$ задается моделью CIR (1980), которая предусматривает, что

$$dr(t) = \sigma r(t)^{\gamma} dw(t), \quad r(t) \ge r_0,$$

где r_0 – нижняя граница возможных значений процентной ставки [6]. Примем $\gamma = 2{,}5$, что обеспечивает процессу $r(t)$ существование стационарного режима с математическим ожиданием $E[r(t)] = 2r_0$ и дисперсией $\mathrm{Var}[r(t)] = 2r_0^2$. Для такой модели наборы коэффициентов $\{b_j\}$ и $\{c_j\}$ определяются так: $b_j = 0$, $j \ge 0$; $c_5 = 0{,}5\sigma^2$, $c_j = 0, j \neq 5$. Подставляя эти значения в соотношения (5)–(7), получаем систему уравнений, решения которых для $\{a_i(\tau), i \le 10\}$ имеют вид

$$a_0(\tau) = a_2(\tau) = a_3(\tau) = a_4(\tau) = a_6(\tau) = a_7(\tau) = a_{10}(\tau) = 0,$$

$$a_1(\tau) = -\tau, \ a_5(\tau) = \frac{c_5\tau^3}{3}, \ a_8(\tau) = \frac{5c_5^2\tau^4}{3}, \ a_9(\tau) = -\frac{2c_5^2\tau^5}{3}.$$

Нетрудно выяснить, что ненулевые функции с последующими индексами тоже будут степенными функциями со степенями, увеличивающимися с номером индекса, что противоречит свойству $\lim_{\tau\to\infty} a_i(\tau)/\tau = 0$. Следовательно, кривая доходности для модели CIR (1980) не может быть представлена в виде ряда (8).

Рассмотрим теперь в качестве модели процесса краткосрочной ставки $r(t)$ модель Ана–Гао, задаваемую соотношением

$$dr(t) = k(\theta - r(t))r(t) + \sigma r(t)^{3/2} dw(t).$$

Для этой модели наборы коэффициентов $\{b_j\}$ и $\{c_j\}$ определяются так: $b_0 = 0$, $b_1 = k\theta > 0$, $b_2 = -k$; $b_j = 0, j \ge 3$; $c_3 = 0{,}5\sigma^2$; $c_j = 0, j \neq 3$. Аналитический вид первых функций $a_i(\tau)$ следующий:

$$a_0(\tau) = 0, \ a_1(\tau) = -\frac{1}{b_1}(e^{\tau b_1} - 1), \ a_2(\tau) = -\frac{b_2}{2b_1^2}(e^{\tau b_1} - 1)^2,$$

$$a_3(\tau) = -\frac{b_2^2 - c_3 + b_2 c_3}{3b_1^3}(e^{\tau b_1} - 1)^3,$$

$$a_4(\tau) = -\frac{b_2^3 + 3(b_2-1)b_2 c_3 + 2(b_2-1)c_3^2}{4b_1^4}(e^{\tau b_1}-1)^4 \text{ и т.д.}$$

Как видно, функции $a_i(\tau)$ экспоненциально возрастают по абсолютной величине с ростом τ, что препятствует сходимости ряда (8).

Приведенные примеры демонстрируют, что представление временной структуры доходности в виде ряда если возможно, то не всегда. Правда, это не доказывает того факта, что не существует моделей краткосрочной процентной ставки, для которых временная структура может быть представлена в виде степенного ряда (8). Для такого доказательства нужно отдельное исследование.

Заключение

В большинстве диффузионных моделей краткосрочных процессов процентных ставок функции дрейфа и диффузии задаются в виде полиномов. Среди известных в аналитическом виде временных структур доходности, соответствующих этим моделям, имеется класс аффинных моделей, в котором временные структуры тоже описываются полиномами. Поэтому возникает вопрос, существуют ли еще такие модели краткосрочных процессов процентных ставок, для которых временные структуры – полиномы по значениям процентной ставки. В статье показано, что ответ на этот вопрос – отрицательный. Несколько более сложным для анализа оказывается предположение о том, что в рассматриваемом случае временные структуры могут описываться степенным рядом по значениям процентной ставки. В статье найдена структура такого предположительного ряда, для коэффициентов которого получена система дифференциальных уравнений и обсуждены условия, при которых такой ряд мог бы быть описанием временной структуры доходности. Для диффузионных моделей краткосрочных процессов процентных ставок CIR (1980) и Ана–Гао системы дифференциальных уравнений решены аналитически и показано, что степенной ряд по значениям процентной ставки не может быть использован в качестве модели временныой структуры для этих моделей. К сожалению, доказательства этого в общем случае пока не найдено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vasiček O.A. An equilibrium characterization of the term structure // J. of Financial Economics. 1977. V. 5. P. 177–188.
2. Merton R. Theory of Rational Option Pricing // Bell Journal of Economics and Management Science. 1973. V. 4. P. 141–183.
3. Медведев Г.А. Стохастические процессы финансовой математики. Минск : БГУ, 2005. 243 с.
4. CIR: Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A. An analysis of variable rate loan contracts // J. of Finance. 1980. V. 35. P. 389–403.
5. Ahn D.-H., Gao B. A parametric nonlinear model of term structure dynamics // The Review of Financial Studies. 1999. V. 12, No. 4. P. 721–762.
6. Медведев Г.А. Плотности вероятностей процессов процентных ставок доходности // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. № 3 (36). С. 35–48.

Медведев Геннадий Алексеевич, д-р. физ.-мат. наук, профессор. E-mail: MedvedevGA@bsu.by
Белорусский государственный университет (г. Минск, Республика Беларусь)

Поступила в редакцию 22 ноября 2016 г.

Medvedev Gennady A. (Belarusian State University, Belarus).

Polinomial models of yield term structure.

Keywords: diffusion models of interest rates; drift and diffusion functions; the term structure of yield.

DOI: 10.17223/19988605/39/6

The possibility of representation of yield term structures in the form of polynomials or power series in models where short-term interest rate processes are described by stochastic differential equations is considered. In most diffusion models of short-term interest rate processes the functions of the drift and diffusion are polynomials. Among the well-known analytical form of yield term structures, corresponding to these models, there is a class of affine models in which term structure is also described by polynomials. The question therefore arises whether there are more such models short-term interest rate processes, for which the term structure are polynomials on the values of the interest rate. The paper shows that the answer to this question in the general case is negative. Such a representation takes place only in the case when the functions of drift and diffusion are polynomials not higher than of first order. Somewhat more

complex to analyze is the assumption that in the present case, the term structure could be described by a power series on values of the interest rate. The problem of representation of the term structures by power series is connected with the solution of the infinite system of ordinary differential equations of first order for the coefficients of the series. This system of equations has features that do not allow to obtain the solution in analytical form in the general case. The conditions under which a power series could be a description of the term structure of yields are discussed. It is shown that there are models of the short rate for which the equations for the coefficients of the series are such that the subsequent coefficients are determined only by the previous one. Such models are, in particular, diffusion models of short-term interest rates CIR (1980) and Ahn–Gao. For them the system of differential equations is solved analytically and it is shown that a power series on values of the interest rate cannot be used as a model of term structure for these models. Unfortunately, the proof of this in the general case has not yet been found.

REFERENCES

1. Vasiček, O. A. (1977) An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*. 5. pp. 177–188. DOI: 10.2307/2330340
2. Merton, R. (1973) Theory of Rational Option Pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science.* 4. pp. 141–183.
3. Medvedev, G.A. (2005) *Stokhasticheskie protsessy finansovoy matematiki* [Stochastic processes of financial mathematics]. Minsk: BSU.
4. Cox, J.C., Ingersoll, J.E. & Ross, S.A. (1980) An analysis of variable rate loan contracts. *Journal of Finance*. 35. pp. 389–403. DOI: 10.1111/j.1540-6261.1980.tb02169.x
5. Ahn, D.-H., Gao, B. (1999) A parametric nonlinear model of term structure dynamics. *The Review of Financial Studies*. 12(4). pp. 721–762. DOI: 10.1093/rfs/12.4.721
6. Medvedev, G.A. (2016) The probability density of the processes of yield interest rates. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 3(36). pp. 35–48. (In Russian). DOI: 10.17223/19988605/36/4