ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2017 Математика и механика № 47

МАТЕМАТИКА

УДК 519.873
DOI 10.17223/19988621/47/1

В.Н. Губин

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ НА БЕСКОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ ВРЕМЕНИ[1]

Рассматривается система с дискретным временем, работающая на бесконечном временном интервале, в которой имеется возможность проверки исправности включенных в работу блоков. Для данной системы описаны свойства оптимальных стратегий, полученные в предыдущих статьях автора, а также решена задача об экономичном использовании резерва. В результате построен алгоритм для вычисления оптимальной стратегии и проведено численное моделирование оптимальных стратегий.

Ключевые слова: *среднее время безотказной работы, отказ элемента, система, стратегия резервирования, оптимальная стратегия, критерий резервирования.*

К любому техническому устройству мы вынуждены предъявлять некоторые требования, необходимые для успешного функционирования этого устройства, такие, как безотказность, ремонтопригодность, долговечность и другие. Все эти характеристики часто объединяют в одно свойство – надежность устройства.

В роли показателей надежности могут выступать вероятность безотказной работы системы, среднее время ее работы, интенсивность отказов и т.д. Для улучшения показателей надежности системы на практике часто применяют резервирование. Это может быть как резервирование всей системы, так и отдельных ее частей. Задачами оптимального резервирования занимались многие математики как в России, так и за рубежом. Пример задачи оптимального резервирования можно найти в [1]. Модели систем с управляемым резервом впервые рассматривались в работах И.Б. Герцбаха [2] и А.Л.Райкина [3]. Далее модели динамического резервирования изучались в работах [4–10], в которых показателем надежности системы преимущественно выступает вероятность безотказной работы системы на конечном промежутке. В данной работе в роли показателя надежности системы выбрано среднее время ее безотказной работы.

Постановка задачи

Пусть имеется система, состоящая из конечного числа параллельно включенных (в смысле надежности) идентичных элементов и функционирующая на бесконечном промежутке времени. Контроль за исправностью элементов, включенных в работу, осуществляется лишь в моменты времени $t = \Delta, 2\Delta, 3\Delta, \ldots$ $(\Delta > 0)$,

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект № 17-11-01049.

когда можно подключить дополнительно исправные блоки из числа резервных или же наоборот перевести часть включенных блоков в резерв. Время на проверку и включение новых элементов из резерва считается пренебрежимо малым и в дальнейшем не учитывается. К моменту начала функционирования системы всего в наличии имеется r исправных элементов. Элементы, не включенные в работу, находятся в холодном резерве, то есть своего ресурса не расходуют. Отказ элемента, включенного в работу, не влияет на исправность остальных элементов.

Введем обозначения:

S_m – система, состоящая из конечного числа параллельно включенных элементов, которая работает исправно, если в работу включено не менее m исправных элементов;

q – вероятность отказа одного элемента на интервале длиной Δ; $p = 1 - q$ – вероятность безотказной работы одного элемента на этом же интервале длиной Δ.

Функцию $K(r)$, принимающую целые значения и такую, что для каждого натурального r выполнено неравенство $m \le K(\mathrm{r}) \le r$, назовём стратегией резервирования системы. Стратегия резервирования показывает, сколько элементов необходимо включить в работу при наличии r исправных.

Функционал T, заданный на множестве пар $(r, K(r))$ и принимающий неотрицательные значения, назовём критерием резервирования. В данной работе ограничимся случаем, когда критерием резервирования служит среднее время работы системы на бесконечном промежутке $[0, +\infty)$.

Стратегию, которая обращает в максимум среднее время безотказной работы системы на бесконечном промежутке, будем называть оптимальной и обозначать $K_0(r)$.

Задача состоит в нахождении такой стратегии, которая максимизирует функционал среднего времени безотказной работы системы на бесконечном промежутке времени и на основе вычисленной стратегии определить соответствующее значение среднего времени исправной работы системы.

Рассмотрим следующее управление резервом: в момент начала работы системы включается в нагруженный режим k ($m \le k \le r$) исправных элементов, а после первой проверки используется стратегия, оптимальная по критерию среднего времени работы системы на бесконечном промежутке. Введем вспомогательные обозначения:

$T(k,r)$ – математическое ожидание времени работы системы, если на первом шаге включено в работу k исправных элементов, а в дальнейшем используется стратегия, оптимальная по критерию среднего времени безотказной работы системы на промежутке $[0, \infty)$;

$T(r)$ – математическое ожидание времени работы системы при стратегии, оптимальной по критерию среднего времени работы системы на бесконечном промежутке, если в начальный момент имеется ровно r исправных элементов.

Тогда по формуле полного математического ожидания [11] получаем

$$T(k,r) = \sum_{i=0}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i) + 1\,. \qquad (1)$$

Для нахождения оптимальной стратегии будем использовать уравнение (1). Кроме того, чтобы найти оптимальную стратегию с помощью вычислений более экономично, докажем некоторые свойства оптимальных стратегий.

Свойства оптимальных стратегий

Естественно предположить, что функции $T(r)$ и $T(k,r)$ являются возрастающими по переменной r. В работе [12] была выделена область выпуклости функции $T(k,r)$ по переменной k, а именно, была доказана

Теорема 1. При $p \ge \dfrac{m+1}{m+3}$ функция $T(k,r)$ для системы S_m имеет не более двух максимумов при фиксированном r, причем она выпукла вверх по k в области $m \le k \le K_0(r)+1$ и не возрастает при $K_0(r) < k \le r$.

Следствие 1. Для любого $r > 0$, если $T(k,r) \ge T(k-1,r)$, то $k \le K_0(r)$; если же $T(k,r) < T(k-1,r)$, то $k \ge K_0(r)$.

Из теоремы 1 следует, что функция $T(k,r)$ возрастает по k до значения $K_0(r)+1$, а затем убывает.

Теорема 2. Для оптимальных стратегий при любом $r \ge 1$ выполнено $K_0(r+1) \le K_0(r)+1$.

В [13] было доказано следующее свойство оптимальных стратегий.

Теорема 3. Функция $K_0(r)$ возрастает (не строго) с ростом r.

Таким образом, с увеличением резерва на единицу функция $K_0(r)$ может только возрасти, но не более чем на единицу.

Перейдем к задаче об экономном расходе элементов, которая была рассмотрена для случая $m = 1$ в [14]. Эта задача состоит в поиске для системы S_m условий оптимальности включения в работу $(m+1)$ элементов. По определению системы S_m для любого $r \ge m$ имеем $K_0(r) \ge m$. Как было показано в [15], $K_0(m+1) \ge m+1$. Таким образом, возникает задача, с какого момента следует экономно расходовать оставшийся резерв, а именно, при каком количестве имеющихся в наличии исправных элементов оптимальной стратегией при каждой последующей проверке будет включение $(m+1)$ исправных элементов. Следовательно, задача сводится к поиску правой границы промежутка $[m+1,\ r_0]$, на котором $K_0(r) = m+1$, причем $r_0 = r_0(p,m)$.

Так как для всех $r \in [m+1, r_0(p,m)]$ выполнено $K_0(r) = m+1$, то

$$T(r) = T(m+1,r) = \sum_{i=0}^{1} C_{m+1}^{i} p^{m+1-i} q^{i}\, T(r-i) + 1 = p^{m+1} T(r) + (m+1) p^{m} q T(r-1) + 1 .$$

Отсюда для всех $r \in [m+1, r_0(p,m)]$ получаем рекуррентное соотношение для нахождения $T(r)$:

$$T(r) = \frac{(m+1)p^m q}{1-p^{m+1}}\, T(r-1) + \frac{1}{1-p^{m+1}} .$$

Обозначим

$$a = \frac{(m+1)p^m q}{1-p^{m+1}}\ ;\ \ b = \frac{1}{1-p^{m+1}} .$$

Тогда учитывая, что $r > m$,

$$T(r) = a\, T(r-1) + b = a^2\, T(r-2) + ab + b = \ldots =$$
$$= a^{r-m}\, T(m) + b(1 + a + a^2 + \ldots + a^{r-m+1}) = a^{r-m}\, T(m) + b\left(\frac{1-a^{r-m}}{1-a}\right). \qquad (2)$$

Упрощая выражение для $T(r)$, получим

$$T(r)=a^{r-m}\left[T(m)-\frac{b}{1-a}\right]+\frac{b}{1-a}. \qquad (3)$$

Используя обозначения для a и b и выражение для $T(m)=\frac{p^m}{1-p^m}$, имеем окончательное выражение для $T(r)$ при указанной стратегии:

$$T(r)=-\frac{(1-p^m)^2+mp^{2m}q}{(1-p^m)(1-p^m(1+mq))}\left(\frac{(m+1)p^m q}{1-p^{m+1}}\right)^{r-m}+\frac{1}{1-p^m(1+mq)}. \qquad (4)$$

Так как необходимо найти ограничения для резерва, в пределах которого оптимальной стратегией является включение в работу $(m+1)$ исправных элементов, то по следствию 1 эта задача сводится к решению относительно r следующего неравенства:

$$T(m+2,\, r)-T(m+1,\, r)\le 0.$$

Для этого преобразуем разность, используя известное свойство биномиальных коэффициентов:

$$T(k+1,r)-T(k,r)=$$
$$=\sum_{i=0}^{k-m+1}C_k^i p^{k-i}q^i T(r-i)+\sum_{i=1}^{k-m+1}C_k^i p^{k+1-i}q^i T(r-i)-\sum_{i=0}^{k-m}C_k^i p^{k-i}q^i T(r-i). \qquad (5)$$

Выделим последнее слагаемое в первой сумме:

$$T(k+1,r)-T(k,r)=$$
$$=-q\sum_{i=0}^{k-m}C_k^i p^{k-i}q^i T(r-i)+\sum_{j=0}^{k-m}C_k^j p^{k-j}q^{j+1}T(r-j-1)+C_k^{k+1-m}p^m q^{k+1-m}T(r-k-1+m)=$$
$$=q(\sigma-1)\sum_{i=0}^{k-m}C_k^i p^{k-i}(q\sigma)^i T(r)+C_k^{k+1-m}p^m(q\sigma)^{k+1-m}T(r)=$$
$$=q(\sigma-1)T(k,r)+C_k^{k+1-m}p^m q^{k+1-m}T(r-k-1+m). \qquad (6)$$

Таким образом,

$$T(k+1,r)-T(k,r)=q(\sigma-1)T(k,r)+C_k^{k+1-m}p^m q^{k+1-m}T(r-k-1+m). \qquad (7)$$

Положим в (7) $k=m+1$ и, учитывая (6), получим

$$qT(m+1,r-1)-qT(m+1,r)+C_{m+1}^2 p^m q^2 T(r-2)\le 0. \qquad (8)$$

Используя представление (4), неравенство (8) примет вид

$$\left(T(m)-\frac{b}{1-a}\right)\left(a-a^2+C_{m+1}^2 p^m q\right)a^{r-2-m}+\frac{b}{1-a}C_{m+1}^2 p^m q\le 0. \qquad (9)$$

Покажем, что

$$T(m)-\frac{b}{1-a}\le 0. \qquad (10)$$

Имеем

$$T(m)-\frac{b}{1-a}=\frac{p^m}{1-p^m}-\frac{1}{1-p^{m+1}-(m+1)p^m q}=\frac{p^m}{1-p^m}-\frac{1}{1-(mq+1)p^m}=$$

$$=\frac{p^m(1-p^m)-(1-p^m)-mp^{2m}q}{(1-p^m)(1-(mq+1)p^m)}=\frac{-(1-p^m)^2-mp^{2m}q}{(1-p^m)(1-(mq+1)p^m)}.$$

Поскольку $1-p^m>0$ и $1-p^m-mp^m q>0$, то имеет место (10). Тогда из неравенства (9), учитывая, что $a<1$, имеем

$$r\le m+2+\frac{\ln C}{\ln A}, \tag{11}$$

где $C=\dfrac{bC_{m+1}^2 p^m q}{(a-a^2+C_{m+1}^2 p^m q)((a-1)T(m)+b)}$.

Таким образом, из (11) находим

$$r_0=r_0(p,m)=m+2+\left[\frac{\ln C}{\ln A}\right], \tag{12}$$

где $[t]$ – целая часть числа t.

Вывод: если во время работы системы S_m всего в наличии осталось r исправных элементов и $r\in\left[m+1,m+2+\left[\dfrac{\ln C}{\ln A}\right]\right]$, то в моменты последующих проверок в работу следует постоянно включать по (m+1) элементов.

Следствие: Если $r>m+2+\left[\dfrac{\ln C}{\ln A}\right]$, то $K_0(r)>m+1$.

Рассмотрим далее несколько примеров расчета значения $r_0=r_0(p,m)$ при различных значениях параметров m и p, которые получены на основе выражения (11).

Таблица 1

m	1	2	3	4	5
$[m+1, r_0]$	[2, 2.859]	[3, 3.297]	[4, 4.152]	[5, 5.093]	[6, 6.062]

Промежуток оптимальности включения в работу (m+1) элементов при p = 0.5.

Таблица 2

M	1	2	3	4	5
$[m+1, r_0]$	[2, 9.205]	[3, 5.499]	[4, 5.266]	[5, 5.761]	[6, 6.506]

Промежуток оптимальности включения в работу (m+1) элементов при p = 0.9.

Таблица 3

m	1	2	3	4	5
$[m+1, r_0]$	[2, 17.296]	[3, 8.362]	[4, 6.741]	[5, 6.661]	[6, 7.112]

Промежуток оптимальности включения в работу (m+1) элементов при p = 0.95.

Из приведенных таблиц можно сделать следующий вывод: в системе S_m стратегию включения в работу (m+1) исправных элементов имеет смысл использовать при малых значениях порога исправной работы системы (m = 1, 2, 3) и значениях p, близких к единице ($p \geq 0.9$).

Алгоритм нахождения оптимальной стратегии на основе изложенных результатов

Так как рассматриваемая система S_m функционирует на бесконечном промежутке и в качестве критерия резервирования выступает среднее время безотказной работы системы на бесконечном промежутке, то на первом этапе алгоритма необходимо вычислить значение среднего времени работы системы, если в начальный момент имеется m исправных элементов.

Обозначим через A_{lm} событие, состоящее в том, что система из m элементов проработала безотказно l шагов, а на следующем шаге отказала. Тогда выражение для среднего времени безотказной работы системы на бесконечном промежутке времени, если всего в наличии имеется m элементов, имеет вид

$$T(m) = \sum_{l=1}^{\infty} lP(A_{lm}) = \sum_{l=1}^{\infty} lp^{ml}(1-p^m)\,.$$

Отсюда получаем значение среднего времени, если всего в наличии имеется m исправных элементов:

$$T(m) = \frac{p^m}{1-p^m}\,.$$

Дальнейшие вычисления проводятся с помощью равенства (1). Выделим слагаемое при $i = 0$:

$$T(k,r) = p^k T(r) + \sum_{i=1}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i) + 1\,. \tag{13}$$

При подстановке в (13) $k = K_0(r) = k_0$ получим

$$T(r) = \frac{1}{1-p^{k_0}}\left(\sum_{i=1}^{k_0-m} C_{k_0}^i p^{k_0-i} q^i T(r-i) + 1\right). \tag{14}$$

Если же теперь в (13) подставить значение $k = k_1 \neq K_0(r)$, то в силу того, что $T(r) = \max\limits_k T(k,r)$, получим неравенство

$$T(r) \geq T(k_1,r) = \frac{1}{1-p^{k_1}}\left(\sum_{i=1}^{k_1-m} C_{k_1}^i p^{k_1-i} q^i T(r-i) + 1\right).$$

Таким образом, $T(r) = \max\limits_{m\leq k\leq r} \dfrac{1}{1-p^k}\left(\sum\limits_{i=1}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i) + 1\right)$.

Полученные соотношения дают возможность, двигаясь от «начала» с минимально возможного значения параметра r, найти значение оптимальной стратегии и максимальное среднее время безотказной работы системы при любом заданном r.

Покажем это. Обозначим $f(k,r) = \dfrac{1}{1-p^k}\left(\sum\limits_{i=1}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i) + 1\right)$.

Пусть уже вычислены $K_0(m), \dots, K_0(r-1)$ и $T(m), \dots, T(r-1)$. Вычислим теперь $K_0(r)$ и $T(r)$. На основе изложенных свойств функции $K_0(r)$ для этого необходимо вычислить всего два значения функции $f(k,r)$. Вычисляем значения $f(K_0(r-1), r)$ и $f(K_0(r-1)+1, r)$ и сравниваем их:

1) если $f(K_0(r-1), r) \geq f(K_0(r-1)+1, r)$, то $K_0(r) = K_0(r-1)$ и соответственно $T(r) = f(K_0(r-1), r)$;

2) если же $f(K_0(r-1)+1, r) \geq f(K_0(r-1), r)$, то $K_0(r) = K_0(r-1) + 1$ и $T(r) = f(K_0(r-1)+1, r)$.

Численное моделирование оптимальных стратегий

На основе приведенного алгоритма нахождения оптимальной стратегии были построены графики оптимальных стратегий при различных значениях параметров m и p.

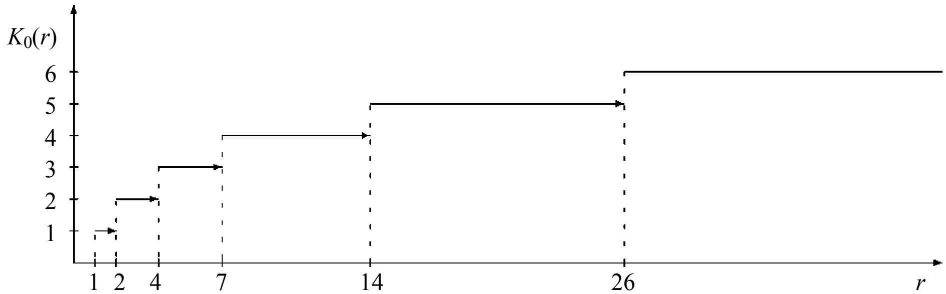

Рис. 1. График оптимальной стратегии при $p = 0.5$, $m = 1$
Fig. 1. Plot of optimal strategy at $p = 0.5$ and $m = 1$

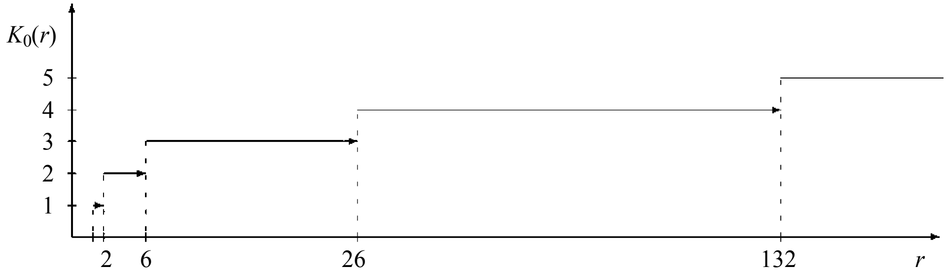

Рис. 2. График оптимальной стратегии при $p = 0.8$, $m = 1$
Fig. 2. Plot of optimal strategy at $p = 0.8$ and $m = 1$

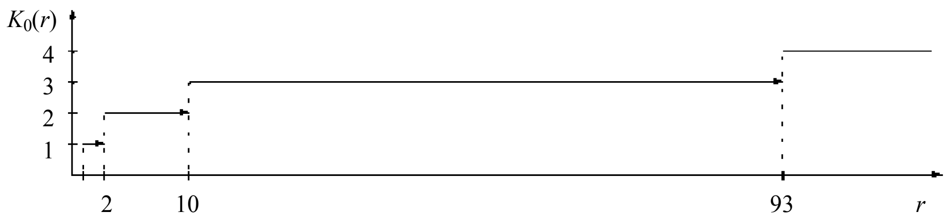

Рис. 3. График оптимальной стратегии при $p = 0.9$, $m = 1$
Fig. 3. Plot of optimal strategy at $p = 0.9$ and $m = 1$

Из приведенных графиков можно сделать вывод о том, что при фиксированном значении параметра m «скачки» функции $K_0(r)$ с увеличением вероятности p происходят реже. Это происходит за счет увеличения длины промежутков K_0-постоянства. Кроме того, приведенные графики наглядно иллюстрируют нестрогое возрастание оптимальной стратегии, причем скачок всегда происходит на единицу.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алексеев О.Г.* Об одной задаче оптимального резервирования // Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика. 1967. № 1. С. 44–47.
2. *Герцбах И.Б.* Об оптимальном управлении включением резервных элементов // Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика. 1966. №5. С. 75–80.
3. *Райкин А.Л.* Маневрирование аппаратурной избыточностью в реальных системах // Труды III Всесоюзного совещания по автоматическому управлению. Одесса, 1965 г. М.: Наука, 1967. Т.5: Технические средства автоматики. С. 94.
4. *Конев В.В.* Об оптимальном включении резервных элементов // Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика. 1974. №4. С. 75–83.
5. *Конев В.В.* Об оптимальном программном включении резервных элементов // Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика. 1975. №3. С. 109–117.
6. *Конев В.В., Овчинников А.В.* Оптимальное резервирование группы однотипных элементов // Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика. 1976. №4. С. 75–84.
7. *Пестов Г.Г., Ушакова Л.В.* Исследование оптимальных стратегий в задаче динамического резервирования // Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика. 1973. № 5. С. 76–82.
8. *Пестов Г.Г., Ушакова Л.В.* Исследование оптимальных стратегий в задаче динамического резервирования // Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика. 1973. № 5. С. 69–72.
9. *Райкин А.Л.* Элементы теории надёжности технических систем. М.: Сов. радио, 1978. 280 с.
10. *Томиленко В.А.* Об одной задаче динамического резервирования // Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика. 1975. № 4. С. 93–100.
11. *Чистяков В.П.* Курс теории вероятностей. 5-е изд. М.: Агар, 2000. 256 с.
12. *Губин В.Н., Пестов Г.Г.* Об одном классе резервируемых устройств // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 4(30). С. 14–23.
13. *Губин В.Н.* О среднем времени безотказной работы резервированной системы // Всероссийская молодежная научная конференция «Все грани математики и механики» (Томск, 25–29 апреля 2016 г.). Томск, 2016. С. 173–180.
14. *Губин В.Н.* Об оптимальном резервировании на бесконечном промежутке // Современные проблемы науки и образования: электрон. журн. 2014. № 4. URL: http://www.science-education.ru/118-14484 (дата обращения: 05.09.2014).
15. *Губин В.Н., Травкина В.В.* Две задачи динамического резервирования // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 5(25). С. 5–12.

Статья поступила 22.02.2017 г.

Gubin V.N. (2017) ON AN ALGORITHM FOR CALCULATING OPTIMAL STRATEGIES ON AN INFINITE TIME INTERVAL *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 47. pp. 5–14

DOI 10.17223/19988621/47/1

In this paper, a system where the interval between check times is discrete and constant is considered. The probability of failure for one element between check times is equal to p. The redundancy criterion satisfies the following equation:

$$T(k,r) = \sum_{i=0}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i) + 1\,, \tag{1}$$

which is used for finding the function $K_0(r)$.

Then, previous results related to properties of optimal strategies are stated. The main result of the paper is the solution of the problem about saving the reserve consumption. In the case $m = 1$, this problem was solved by the author earlier. To solve this problem in the general case, the inequality

$$T(m+2,\, r) - T(m+1,\, r) \leq 0 \tag{2}$$

is used. Since $T(r)$ can be found explicitly from the conditions of the problem, inequality (2) is easy resolved. Therefore, the reserve interval $\left[m+1, m+2+\left[\frac{\ln C}{\ln A}\right]\right]$, where $K_0(r) = m+1$, is obtained. The algorithm for optimal strategy computing consists of the following steps:

1) for $r = m$, we have $K_0(m) = m$ and $T(m) = p^m/(1 - p^m)$.

2) then, if we find $K_0(m+1)$, $K_0(m+2)$, … , and $K_0(r\text{-}1)$ to define $K_0(r)$, it is sufficient to compare $f(K_0(r\text{-}1), r) \geq f(K_0(r\text{-}1)+1, r)$, where $f(k,r) = \frac{1}{1-p^k}\left(\sum_{i=1}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i) + 1\right)$.

Results of the numerical simulation are represented in the final section of the paper.

Keywords: mean time between failures, element failure, system, reliability, redundancy strategy, optimal strategy, redundancy criterion.

GUBIN Vladimir Nikolaevich, (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk Polytechnic University, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: vovantus@sibmail.com

REFERENCES

1. Alekseev O.G. (1967) Ob odnoy zadache optimal'nogo rezervirovaniya [On a problem of optimum redundancy]. *Izv. Acad. Nauk SSSR Tekh. Kibernetika.* 1. pp. 44–47.
2. Gertsbakh I.B. (1966) Ob optimal'nom upravlenii vklyucheniem rezervnykh elementov [On optimum control for triggering reserve elements]. *Izv. Acad. Nauk SSSR Tekh. Kibernetika.* 5. pp. 75–80.
3. Raykin A.L. (1967) Manevrirovanie apparaturnoy izbytochnost'yu v real'nykh sistemakh [Maneuvering by equipment duplication in real systems]. *Trudy III vsesoyuzonogo soveshchanya po avtomaticheskomu upravleniyu* [Proceedings of the 3rd All-Union Conference on Automatic Control]. Odessa, 1965. Moscow: Nauka. Vol. 5: Tekhnicheskie sredstva avtomatiki [Engineering Tools of Automatics]. p. 94.
4. Konev V.V. (1974) Ob optimal'nom vklyuchenii rezervnykh elementov [On optimum triggering of reserve elements]. *Izv. Acad. Nauk SSSR. Tekh. Kibernetika.* 4. pp. 75–83.
5. Konev V.V. (1975) Ob optimal'nom programmnom vklyuchenii rezervnykh elementov [On optimum program triggering of reserve elements]. *Izv. Acad. Nauk SSSR. Tekh. Kibernetika*. 3. pp. 109–117.

6. Konev V.V., Ovchinnikov A.V. (1976) Optimal'noe rezervirovanie gruppy odnotipnykh elementov [Optimum redundancy of a group of homogeneous components]. *Izv. Acad. Nauk SSSR. Tekh. Kibernetika*. 4. pp. 75–84.
7. Pestov G.G., Ushakova L.V. (1973) Issledovanie optimal'nykh strategiy v zadache dinamicheskogo rezervirovaniya elementov [Studying optimum strategies in the problem of dynamic redundancy of elements]. *Izv. Acad. Nauk SSSR. Tekh. Kibernetika*. 5. pp. 76–82.
8. Pestov G.G., Ushakova L.V. (1973) Issledovanie optimal'nykh strategiy v zadache dinamicheskogo rezervirovaniya [Studying optimum strategies in the problem of dynamic redundancy]. *Izv. Acad. Nauk SSSR. Tekh. Kibernetika*. 5. pp. 69–72.
9. Raykin A.L. (1978) *Elementy teorii nadezhnosti tekhnicheskikh system* [Elements of the theory of reliability of technical systems]. Moscow: Sov. Radio.
10. Tomilenko V.A. (1975) Ob odnoy zadache dinamicheskogo rezervirovaniya [On a problem of dynamic redundancy]. *Izv. Acad. Nauk SSSR. Tekh. Kibernetika*. 4. pp. 93–100.
11. Chistyakov V.P. (2000) *Kurs teorii veroyatnostey* [A course of the probability theory]. Moscow: Agar.
12. Gubin V.N., Pestov G.G. (2014) Ob odnom klasse rezerviruemykh ustroystv [On a class of reserved devices]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(30). pp. 14–23.
13. Gubin V.N. (2016) O srednem vremeni bezotkaznoy raboty rezervirovannoy sistemy [On the average time of failure-free operation of a reserved system]. *All-Russian Youth Scientific Conference "All Facets of Mathematics"* (Tomsk, April 25–29, 2016). Tomsk. pp. 173–180.
14. Gubin V.N. (2014) Ob optimal'nom rezervirovanii na beskonechnom promezhutke [On optimal reservation in an infinite interval]. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya – Current Issues of Science and Education*. 4. URL: http://www.science-education.ru/118-14484.
15. Gubin V.N., Travkina V.V. (2013) Dve zadachi dinamicheskogo rezervirovaniya [Two problems of dynamic redundancy]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(25). pp. 5–12.