

УДК 519.21

**УЛУЧШЕНИЕ ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ
В МНОГОМЕРНОЙ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ
ДЛЯ СУММ ЛОКАЛЬНО ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ**

А. В. Волгин

*Московский государственный университет информационных технологий, радиотехники
и электроники, г. Москва, Россия*

Приведена улучшенная явная оценка скорости многомерной нормальной аппроксимации сумм локально зависимых случайных векторов. При любой фиксации размерности векторов и числа слагаемых данный результат позволяет вычислять численную оценку скорости сходимости. Установлено, что главный член полученной оценки для сумм независимых и одинаково распределённых случайных векторов имеет порядок $d^{9/2}n^{-1/2} \ln n$, где d — размерность векторов и n — число слагаемых. Приведено применение результата в задаче о нормальной аппроксимации числа рёбер, инцидентных вершинам одного цвета, в регулярном графе.

Ключевые слова: *многомерная центральная предельная теорема, локально зависимые случайные векторы.*

DOI 10.17223/20710410/36/2

**IMPROVING THE RATE OF CONVERGENCE
IN THE MULTIDIMENSIONAL CENTRAL LIMIT THEOREM
FOR SUMS OF LOCALLY DEPENDENT RANDOM VECTORS**

A. V. Volgin

*Moscow Technological University, Moscow, Russia***E-mail:** artem.volgin@bk.ru

Estimates of the rate of convergence in multidimensional limit theorems for sums of dependent random vectors are considered in many papers. The types of dependence in a sequence of random vectors can be different, for example, m -dependent and locally dependent sequences of random vectors. It is important that these estimates are implicit. They do not specify how the estimate depends on the dimension of random vectors.

In this connection, in one of the author's previous papers, an explicit estimate for the distance between a multidimensional normal distribution and the distribution of the sum of locally dependent random vectors was obtained. In this paper, we improve this estimate. Also, it is proved that for centered and normalized sums of independent random vectors, the order of this estimate is equal to $d^{9/2}n^{-1/2} \ln n$, where d is dimension and n is number of vectors.

Results of this paper have applications for discrete mathematical objects. For example, in the paper we consider a fixed regular graph. Each vertex is independently assigned one of the colors with a certain probability. A condition for the normal approximation of the number of edges incident to vertices of the same color is obtained.

Keywords: *multivariate CLT, locally dependent random vectors.*

Введение

Оценки скорости сходимости сумм случайных векторов с различными типами зависимостей рассматриваются во многих работах [1–5]. В [1, 2] приводятся оценки для сумм независимых и m -зависимых случайных векторов соответственно. В [3–5] с использованием метода Стейна рассматриваются оценки для более сложных типов зависимостей. Данные результаты имеют приложения для дискретных математических объектов. В п. 3 приводится применение основного результата данной работы в задаче о раскраске вершин регулярного графа.

Особенность оценок из упомянутых выше работ заключается в том, что для них не указывается явный вид зависимости от размерности векторов. Это обусловлено тем, что задача аппроксимации рассматривается для случая фиксированной размерности d и неограниченного роста числа слагаемых n ; $d, n \in \mathbb{N}$.

В работе [6] анонсирован, а в [7] приведён результат об уточнении оценки скорости многомерной нормальной аппроксимации сумм локально зависимых случайных векторов, которая получена в [5]. Под уточнением подразумевается нахождение явного вида зависимости оценки от размерности d . При этом в [7] доказано, что главный член полученной оценки имеет порядок

$$(2\pi)^{d/2} d^3 n^{-1/2} \ln n. \quad (1)$$

В настоящей работе приводится улучшение оценки (1), главный член которой имеет порядок

$$d^{9/2} n^{-1/2} \ln n.$$

Далее кратко рассмотрим основные понятия и определения, введённые в [5, 7].

В [5] рассматривается оценка скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме для сумм зависимых ограниченных случайных векторов

$$W = \sum_{i=1}^n X_i, \quad X_i \in \mathbb{R}^d, \quad d, n \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

$$|X_i| \leq B, \quad i = 1, \dots, n,$$

где через $|\cdot|$ обозначается сумма абсолютных значений всех элементов вектора (или матрицы); $B \in \mathbb{R}$ — неотрицательная величина, которая может зависеть от n и d .

Структура зависимости определяется следующим образом. Рассмотрим множество индексов $J = \{1, \dots, n\}$. Для каждого $i \in J$ сумма W представляется двумя способами:

$$W = U_i + V_i \quad \text{и} \quad W = R_i + T_i, \quad (3)$$

при этом предполагается, что существуют неотрицательные величины $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$, которые могут зависеть от n и d , такие, что

$$|U_i| \leq A_1, \quad |R_i| \leq A_2 \quad \text{и} \quad A_1 \leq A_2. \quad (4)$$

Интересующий нас результат работы [5] получен с использованием метода Стейна и заключается в оценке величины

$$\gamma = \sup_{h \in \mathcal{H}} |\mathbf{E}h(W) - \mathbf{E}h(Z)|,$$

где $\mathcal{H} = \{h : \mathbb{R}^d \rightarrow [-1, 1]\}$ — класс измеримых функций; Z — случайный вектор, имеющий d -мерное стандартное нормальное распределение.

Заметим, что для класса $\mathcal{H}_1$ индикаторов измеримых выпуклых подмножеств $\mathbb{R}^d$ справедливо выражение

$$\gamma = \sup_{h \in \mathcal{H}_1} |\mathbf{E}h(W) - \mathbf{E}h(Z)| = \sup_{F \in \mathcal{F}} |\mathbf{P}(W \in F) - \mathbf{P}(Z \in F)|,$$

где $\mathcal{F}$ — класс измеримых выпуклых подмножеств $\mathbb{R}^d$.

1. Основная теорема о точности многомерной нормальной аппроксимации

Обозначим: I — единичная матрица над $\mathbb{R}$ размера $d \times d$; A^T — матрица, транспонированная к матрице A ; для $i = 1, \dots, n$ пусть X_i, V_i, U_i, T_i — вектор-столбцы, $X_i^T, V_i^T, U_i^T, T_i^T$ — вектор-строки. Введём также следующие обозначения:

$$\chi_1 = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}|X_i|V_i|, \quad \chi_2 = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}|X_i U_i^T - \mathbf{E}(X_i U_i^T | T_i)|, \quad \chi_3 = \left| I - \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(X_i U_i^T) \right|.$$

Теорема 1 [5]. Пусть $W = \sum_{i=1}^n X_i$ — сумма ограниченных случайных векторов, таких, что имеют место представления (2)–(4). Тогда существует такая величина c , зависящая только от размерности векторов d , что

$$\gamma \leq c(aA_2 + naA_1A_2B(|\ln A_2B| + \ln n) + \chi_1 + (|\ln A_1B| + \ln n)(\chi_2 + \chi_3)),$$

где a — величина, зависящая от конкретного класса функций $\mathcal{H}$.

Выбор представления (3) играет существенную роль в смысле уменьшения оценки сверху величины γ . Если, например, для любого $i \in J$ выбрать в качестве T_i вектор — константу, то величина χ_2 окажется равной нулю, однако при этом может увеличиться A_2 . Если $\mathbf{E}W = 0$ и ковариационная матрица вектора W является единичной, то при выборе $V_i = 0$ получим, что $\chi_3 = 0$, однако это может привести к увеличению A_1 .

В [5] указывается на возможность применения теоремы 1 для сумм *локально зависимых* ограниченных случайных векторов. Под этим подразумевается, что для любого $i \in J$ существуют множества $J_1^{(i)}, J_2^{(i)}, \emptyset \neq J_1^{(i)} \subseteq J_2^{(i)} \subset J$, для которых выполнены два условия: случайный вектор X_i не зависит от совокупности случайных векторов $\{X_j : j \in J \setminus J_1^{(i)}\}$ и множество случайных векторов $\{X_j : j \in J_1^{(i)}\}$ не зависит от совокупности случайных векторов $\{X_j : j \in J \setminus J_2^{(i)}\}$. Если для всех $i \in J$ выбрать $U_i = \sum_{j \in J_1^{(i)}} X_j$, $R_i = \sum_{j \in J_2^{(i)}} X_j$, $V_i = W - U_i$ и $T_i = W - R_i$, то в случае, когда случайный вектор W является суммой одинаково распределённых случайных векторов, имеет нулевое среднее и единичную ковариационную матрицу, величины в теореме 1 равны $\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 0$, $A_1 = \max_{i \in J} (\text{card}(J_1^{(i)})) B$ и $A_2 = \max_{i \in J} (\text{card}(J_2^{(i)})) B$, где через $\text{card}(\cdot)$ обозначается мощность множества. Для случая сумм независимых случайных векторов естественным является выбор $U_i = R_i = X_i$, $i = 1, \dots, n$. В этом случае при центрировании и нормировании W оценка γ имеет порядок $n^{-1/2} \ln n$ [5].

Обозначим через α_d^2 квантиль уровня $7/8$ распределения хи-квадрат с d степенями свободы. Сформулируем основную теорему настоящей работы.

Теорема 2. Пусть $W = \sum_{i=1}^n X_i$ — сумма случайных векторов, удовлетворяющих условиям (2)–(4) и $K = 20,28 n A_1 A_2 B$, $|K| < 1$. Тогда если $\mathcal{H} = \{h : \mathbb{R}^d \rightarrow [-1, 1]\}$ — класс измеримых функций, то верно неравенство

$$\gamma \leq aA_2 + Kad |\ln K| + 4d\chi_1 + 4d^2 |\ln K| (\chi_2 + \chi_3) + 5a\alpha_d \frac{K}{1 - K^2}, \quad (5)$$

где a — величина, зависящая от конкретного класса функций $\mathcal{H}$.

2. Доказательство теоремы 2

Вычислим те величины, которые в [5] при доказательстве теоремы 1 не определяются явно. Рассмотрим многомерный аналог уравнения Стейна [1, 5] относительно неизвестной функции $\Psi(x)$:

$$\Delta\Psi(x) - x\nabla\Psi(x) = h(x) - \mathbf{E}h(Z), \quad \Psi(x) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (6)$$

где $\Psi(x)$ — трижды дифференцируема на $\mathbb{R}$; $\Delta\Psi(x) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i^2}(x)$ и $\nabla\Psi(x) = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \Psi}{\partial x_d} \right)(x)$ — лапласиан и градиент функции $\Psi(x)$ соответственно.

Обозначим через Φ функцию распределения стандартного нормального закона. Рассмотрим функцию

$$h_s(x) = \int_{\mathbb{R}^d} h(s^{1/2}y + (1-s)^{1/2}x) d\Phi_d(y), \quad s \in (0, 1), \quad x, y \in \mathbb{R}^d,$$

где $\Phi_d(y) = \Phi(y_1) \cdot \dots \cdot \Phi(y_d)$.

Как замечено в [5], если в уравнение (6) вместо h подставить функцию h_s , то оно будет иметь решение

$$\Psi_t(x) = -\frac{1}{2} \int_t^1 [h_s(x) - \mathbf{E}h(Z)] \frac{ds}{1-s}, \quad s, t \in (0, 1), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Подставим данное решение в уравнение (6):

$$\Delta\Psi_t(W) - W\nabla\Psi_t(W) = h(W) - \mathbf{E}h(Z).$$

Согласно обобщению метода Стейна, в многомерном случае для того, чтобы оценить величину $\gamma = \sup_{h \in \mathcal{H}} |\mathbf{E}h(W) - \mathbf{E}h(Z)|$, нужно оценить величину $\sup_{h \in \mathcal{H}} \mathbf{E} |\Delta\Psi_t(W) - W\nabla\Psi_t(W)|$. Рассмотрим равенство

$$\gamma_t = \sup_{h \in \mathcal{H}} |\mathbf{E}h_t(W) - \mathbf{E}h_t(Z)|, \quad t \in (0, 1).$$

В [1] приводится следующая лемма о связи γ и γ_t .

Лемма 1 [1]. Пусть Q — произвольная вероятностная мера, заданная на $\mathbb{R}^d$, в соответствии с которой выбирается вектор W . Тогда для любого $t \in (0, 1)$ верно неравенство

$$\sup_{h \in \mathcal{H}} |\mathbf{E}h(W) - \mathbf{E}h(Z)| \leq \frac{4}{3} \sup_{h \in \mathcal{H}} |\mathbf{E}h_t(W) - \mathbf{E}h_t(Z)| + a \frac{5}{2} \alpha_d \frac{\sqrt{t}}{1-t},$$

где a — величина, зависящая от класса $\mathcal{H}$.

Из леммы 1 следует, что γ и γ_t связаны неравенством

$$\gamma \leq \frac{4}{3} \gamma_t + a \frac{5}{2} \alpha_d \frac{\sqrt{t}}{1-t}, \quad t \in (0, 1). \quad (7)$$

Далее оценим величину γ_t . Обозначим через $\Psi_t^{(1)}(x)$ и $\Psi_t^{(2)}(x)$ градиент и матрицу вторых производных функции $\Psi_t(x)$ соответственно. Элементы градиента $\frac{\partial \Psi_t}{\partial x_p}(x)$,

$p = 1, \dots, d$, обозначим через $\Psi_{t(p)}^{(1)}(x)$, элементы матрицы вторых производных $\frac{\partial^2 \Psi_t}{\partial x_p \partial x_q}(x)$, $p, q = 1, \dots, d$, — через $\Psi_{t(pq)}^{(2)}(x)$. В [7] доказана следующая лемма, в которой приводятся оценки для $|\Psi_t^{(1)}(x)|$ и $|\Psi_t^{(2)}(x)|$.

Лемма 2 [7]. Для любой функции $h : \mathbb{R}^d \rightarrow [-1, 1]$ при $t \in (0, 1)$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\Psi_t^{(1)}(x)| &< d \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \\ \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\Psi_t^{(2)}(x)| &< \left[\frac{d^2}{\pi} + d \left(\sqrt{\frac{2}{\pi e}} - \frac{1}{\pi} \right) \right] \ln(t^{-1}). \end{aligned} \quad (8)$$

Обозначим через $\text{Tr}(M)$ след матрицы M . Тогда верны равенства

$$\mathbf{E}h_t(W) - \mathbf{E}h_t(Z) = \mathbf{E}[\Delta \Psi_t(W) - W \nabla \Psi_t(W)] = \mathcal{A} - \mathcal{B} - \mathcal{C} + \mathcal{D},$$

где

$$\mathcal{A} = \mathbf{E} \text{Tr} \left[\Psi_t^{(2)}(W) \left(I - \sum_{j=1}^n X_j U_j^T \right) \right],$$

$$\mathcal{B} = \sum_{j=1}^n \mathbf{E} [X_j^T \cdot \nabla \Psi_t(V_j)],$$

$$\mathcal{C} = \sum_{j=1}^n \mathbf{E} \left[X_j^T \left(\nabla \Psi_t(W) - \nabla \Psi_t(V_j) - \Psi_t^{(2)}(V_j) U_j \right) \right]; \quad (9)$$

$$\mathcal{D} = \sum_{j=1}^n \mathbf{E} \text{Tr} \left[X_j U_j^T \left(\Psi_t^{(2)}(W) - \Psi_t^{(2)}(V_j) \right) \right]. \quad (10)$$

Заметим, что для оценки величины γ_t нужно оценить сумму $|\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| + |\mathcal{C}| + |\mathcal{D}|$. Рассмотрим следующую лемму, доказанную в работе [7], о представлении в явном виде зависимости интересующих нас величин от размерности d . Обозначим через $\Psi_{t(pqr)}^{(3)}$ частную производную третьего порядка функции $\Psi_t(x)$ по переменным x_p, x_q и x_r , $p, q, r = 1, \dots, d$.

Лемма 3 [7]. Пусть W, V и U — случайные векторы, принимающие значения в $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, $W = V + U$, и пусть Y — произвольная случайная величина. Предположим, что $|U| \leq C_1$, $|Y| \leq C_2$, где $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Тогда для любого $\tau \in (0, 1)$ и $h \in \mathcal{H}$ верно неравенство

$$\left| \mathbf{E} Y \Psi_{t(pqr)}^{(3)}(V + \tau U) \right| < C_2 \left(3,04\gamma/\sqrt{t} + 1,52aC_1/\sqrt{t} + ad |\ln t| \right),$$

где a — величина, зависящая от конкретного класса функций $\mathcal{H}$.

Для доказательства леммы 3 в [7] приводится следующая вспомогательная лемма.

Лемма 4 [7]. Пусть $\phi_{(pqr)}^{(3)} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ — частная производная третьего порядка плотности распределения d -мерного стандартного нормального закона по переменным y_p, y_q и y_r , $p, q, r = 1, \dots, d$. Тогда

а) для любых $p, q, r = 1, \dots, d$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\phi_{(pqr)}^{(3)}(y)| dy < 1,52;$$

б) для любых $p, q, r = 1, \dots, d$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |y| \cdot |\phi_{(pqr)}^{(3)}(y)| dy < 1,21d + 0,65.$$

Замечание 1. В работе [7] приведены более грубые оценки выражений в леммах 3 и 4. При проведении дополнительных исследований удалось улучшить данные оценки.

Далее оценим величины $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$.

1. Оценим величину $|\mathcal{C}|$. Обозначим через X_{jp} и U_{jp} координаты с номером $p = 1, \dots, d$ векторов X_j и U_j соответственно. С учётом обозначений для градиента и матрицы вторых производных функции $\Psi_t(x)$ рассмотрим выражение, которое является частью формулы для $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} \nabla \Psi_t(W) - \nabla \Psi_t(V_j) &= \nabla \Psi_t(V_j + U_j) - \nabla \Psi_t(V_j) = \\ &= \left(\Psi_{t(1)}^{(1)}(V_j + U_j) - \Psi_{t(1)}^{(1)}(V_j), \dots, \Psi_{t(d)}^{(1)}(V_j + U_j) - \Psi_{t(d)}^{(1)}(V_j) \right)^T. \end{aligned} \quad (11)$$

Применим формулу Тейлора с интегральной формой остаточного члена [8] в окрестности точки V_j к каждой координате вектора в правой части равенств (11):

$$\begin{aligned} \Psi_{t(p)}^{(1)}(V_j + U_j) - \Psi_{t(p)}^{(1)}(V_j) &= U_{j1} \Psi_{t(p1)}^{(2)}(V_j) + \dots + U_{jd} \Psi_{t(pd)}^{(2)}(V_j) + \\ &+ \int_0^1 (1 - \tau) \sum_{q,r=1}^d \Psi_{t(pqr)}^{(3)}(V_j + \tau U_j) U_{jq} U_{jr} d\tau, \quad p = 1, \dots, d, \quad \tau \in (0, 1). \end{aligned} \quad (12)$$

Теперь рассмотрим другое выражение, являющееся частью формулы для $\mathcal{C}$:

$$\Psi_t^{(2)}(V_j) U_j = \left(U_{j1} \Psi_{t(11)}^{(2)}(V_j) + \dots + U_{jd} \Psi_{t(1d)}^{(2)}(V_j), \dots, U_{j1} \Psi_{t(d1)}^{(2)}(V_j) + \dots + U_{jd} \Psi_{t(dd)}^{(2)}(V_j) \right)^T.$$

С учётом последнего равенства и формул (11), (12) рассмотрим следующие равенства:

$$\begin{aligned} \nabla \Psi_t(W) - \nabla \Psi_t(V_j) - \Psi_t^{(2)}(V_j) U_j &= \\ &= \left(\int_0^1 (1 - \tau) \sum_{q,r=1}^d \Psi_{t(1qr)}^{(3)}(V_j + \tau U_j) d\tau, \dots, \int_0^1 (1 - \tau) \sum_{q,r=1}^d \Psi_{t(dqr)}^{(3)}(V_j + \tau U_j) d\tau \right)^T. \end{aligned}$$

Учитывая последнее равенство, а также (9), получаем

$$\mathcal{C} = \sum_{j=1}^n \mathbf{E} \int_0^1 (1 - \tau) \sum_{p,q,r=1}^d \Psi_{t(pqr)}^{(3)}(V_j + \tau U_j) X_{jp} U_{jq} U_{jr} d\tau, \quad \tau \in (0, 1).$$

Применяя лемму 3 при $U = U_j$, $Y = U_{jp} U_{jq} X_{jr}$, $j, p, q, r = 1, \dots, d$, получаем следующую оценку:

$$|\mathcal{C}| \leq \frac{1}{2} n A_1^2 B \left(3,04\gamma/\sqrt{t} + 1,52aA_1/\sqrt{t} + ad|\ln t| \right). \quad (13)$$

2. Оценим величину $|\mathcal{D}|$. Согласно формуле Тейлора с интегральной формой остаточного члена [8], в окрестности точки V_j верно равенство

$$\Psi_{t(pq)}^{(2)}(W) - \Psi_{t(pq)}^{(2)}(V_j) = \sum_{r=1}^d \int_0^1 \Psi_{t(pqr)}^{(3)}(V_j + \tau U_j) U_{jr} d\tau, \quad \tau \in (0, 1). \quad (14)$$

Заметим, что верно следующее неравенство:

$$\text{Tr} [X_j U_j^T (U_{j1} + \dots + U_{jd})] \leq A_1^2 B. \quad (15)$$

Обоснуем неравенство (15). Из условий

$$|X_j| = |X_{1j}| + \dots + |X_{dj}| \leq B \quad \text{и} \quad |U_j^T| = |U_{j1}| + \dots + |U_{jd}| \leq A_1 \quad (16)$$

следует, что

$$|X_{1j}| \cdot |U_{j1}| + \dots + |X_{dj}| \cdot |U_{jd}| \leq A_1 B. \quad (17)$$

Из (16) и (17) следует, что

$$\begin{aligned} & \text{Tr} [X_j U_j^T (U_{j1} + \dots + U_{jd})] \leq \\ & \leq (|X_{1j}| \cdot |U_{j1}| + \dots + |X_{dj}| \cdot |U_{jd}|) |U_{j1}| + \dots + (|X_{1j}| \cdot |U_{j1}| + \dots + |X_{dj}| \cdot |U_{jd}|) |U_{jd}| \leq \\ & \leq (|U_{j1}| + \dots + |U_{jd}|) A_1 B \leq A_1^2 B. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (15) обосновано.

Учитывая формулы (14), (15), лемму 3 и равенство (10), получаем

$$\begin{aligned} |\mathcal{D}| & \leq \sum_{j=1}^n \mathbf{E} \text{Tr} \left[X_j U_j^T \sum_{r=1}^d \int_0^1 |\Psi_{t(pqr)}^{(3)}(V_j + \tau U_j)| \cdot |U_{jr}| d\tau \right] \leq \\ & \leq \sum_{j=1}^n \mathbf{E} \left(\sum_{i=1}^d |X_{ij}| \cdot |U_{ji}| \sum_{r=1}^d |U_{jr}| \int_0^1 |\Psi_{t(pqr)}^{(3)}(V_j + \tau U_j)| d\tau \right) \leq \\ & \leq \sum_{j=1}^n A_1^2 B \left(\sum_{r=1}^d \int_0^1 |\mathbf{E} \Psi_{t(pqr)}^{(3)}(V_j + \tau U_j)| d\tau \right) \leq n A_1^2 B \left(3,04\gamma/\sqrt{t} + 1,52aA_1/\sqrt{t} + ad|\ln t| \right). \end{aligned} \quad (18)$$

3. Для нахождения оценки величины $|\mathcal{B}|$ воспользуемся следующим свойством условного математического ожидания [9]: для произвольных случайных величин ξ, η и любой функции $f = f(\eta)$ верно равенство

$$\mathbf{E} [f(\eta) \mathbf{E}(\xi|\eta)] = \mathbf{E} [\xi f(\eta)]. \quad (19)$$

С учётом (19), для любого $j = 1, \dots, d$ верны следующие равенства:

$$\mathbf{E} (X_j^T \nabla \Psi_t(V_j)) = \sum_{p=1}^d \mathbf{E} (X_{jp} \Psi_{t(p)}^{(1)}(V_j)) = \sum_{p=1}^d \mathbf{E} (\Psi_{t(p)}^{(1)}(V_j) \mathbf{E} (X_{jp}|V_j)),$$

следовательно,

$$|\mathcal{B}| \leq \sum_{p=1}^d \mathbf{E} (|\Psi_{t(p)}^{(1)}(V_j)| \cdot |\mathbf{E}(X_{jp}|V_j)|). \quad (20)$$

Из леммы 2 следует, что $\sum_{p=1}^d |\Psi_{t(p)}^{(1)}(V_j)| < d\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, а значит, для любого $p = 1, \dots, d$ верно неравенство

$$|\Psi_{t(p)}^{(1)}(V_j)| < d\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (21)$$

Из (20) и (21) следует, что верно неравенство

$$|\mathcal{B}| \leq d\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^d \mathbf{E} |\mathbf{E}(X_{jp}|V_j)|. \quad (22)$$

4. Оценим величину $|\mathcal{A}|$. Заметим, что справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[\Psi_t^{(2)}(W) \left(I - \sum_{j=1}^n X_j U_j^T \right) \right] &= \sum_{p=1}^d \sum_{q=1}^d \Psi_{t(pq)}^{(2)}(W) \left(\delta_{pq} - \sum_{j=1}^n X_{jq} U_{jp} \right) = \\ &= \sum_{p=1}^d \sum_{q=1}^d \Psi_{t(pq)}^{(2)}(W) \left(\delta_{pq} - \sum_{j=1}^n \mathbf{E}(X_{jq} U_{jp}) + \sum_{j=1}^n \mathbf{E}(X_{jq} U_{jp}) - \sum_{j=1}^n X_{jq} U_{jp} \right), \end{aligned} \quad (23)$$

где δ_{pq} — символ Кронекера.

Рассмотрим первые два слагаемых в правой части (23). Согласно оценке (8) из леммы 2, верно неравенство

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left| \sum_{p=1}^d \sum_{q=1}^d \Psi_{t(pq)}^{(2)}(W) \left[\delta_{pq} - \sum_{j=1}^n \mathbf{E}(X_{jq} U_{jp}) \right] \right| &\leq \\ &\leq \left[\frac{d^2}{\pi} + d \left(\sqrt{\frac{2}{\pi e}} - \frac{1}{\pi} \right) \right] \cdot |\ln t| \cdot \sum_{p=1}^d \sum_{q=1}^d \left| \delta_{pq} - \sum_{j=1}^n \mathbf{E}(X_{jq} U_{jp}) \right|. \end{aligned} \quad (24)$$

Перепишем последние два слагаемых в правой части выражения (23) в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^d \sum_{q=1}^d \left[\Psi_{t(pq)}^{(2)}(W) - \Psi_{t(pq)}^{(2)}(T_j) + \Psi_{t(pq)}^{(2)}(T_j) \right] (\mathbf{E}(X_{jq} U_{jp}) - X_{jq} U_{jp}). \quad (25)$$

Применяя формулу Тейлора [8] для выражения $\Psi_{t(pq)}^{(2)}(W) - \Psi_{t(pq)}^{(2)}(T_j)$ и лемму 3 в условиях, когда $U = R_j$ и $Y = R_{jr} X_{jq} U_{jp}$, $j = 1, \dots, d$, оценим первые два слагаемых в (25):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^d \sum_{q=1}^d \left| \mathbf{E} \left(\left[\Psi_{t(pq)}^{(2)}(W) - \Psi_{t(pq)}^{(2)}(T_j) \right] [\mathbf{E}(X_{jq} U_{jp}) - X_{jq} U_{jp}] \right) \right| &\leq \\ &\leq n A_1 A_2 B \left(3,04\delta/\sqrt{t} + 1,52aA_2/\sqrt{t} + ad|\ln t| \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Оценим последнее слагаемое в (25). Согласно оценке (8) из леммы 2, имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^d \sum_{q=1}^d \left| \mathbf{E} \Psi_{t(pq)}^{(2)}(T_j) [\mathbf{E}(X_{jq} U_{jp}) - X_{jq} U_{jp}] \right| &\leq \left(\frac{d^2}{\pi} + d \left(\sqrt{\frac{2}{\pi e}} - \frac{1}{\pi} \right) \right) \times \\ &\times |\ln t| \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^d \sum_{q=1}^d \mathbf{E} |\mathbf{E}(X_{jq} U_{jp} - \mathbf{E}(X_{jq} U_{jp} | T_j))|. \end{aligned} \quad (27)$$

Учитывая (7), неравенство $A_1 \leq A_2$ и оценки, полученные в выражениях (13)–(22), (24), (26) и (27), получим

$$\begin{aligned} \gamma &\leq \frac{4}{3} \left\{ \frac{5}{2} n A_1 A_2 B \left(3,04\gamma/\sqrt{t} + 1,52aA_1/\sqrt{t} + ad|\ln t| \right) + \right. \\ &+ d \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^d \mathbf{E} |\mathbf{E}(X_{jp} | V_j)| + \left(\frac{d^2}{\pi} + d \left(\sqrt{\frac{2}{\pi e}} - \frac{1}{\pi} \right) \right) |\ln t| \times \\ &\times \left(\sum_{p=1}^d \sum_{q=1}^d \left| \delta_{pq} - \sum_{j=1}^n \mathbf{E}(X_{jq} U_{jp}) \right| + \right. \\ &\left. \left. + \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^d \sum_{q=1}^d \mathbf{E} |\mathbf{E}(X_{jq} U_{jp} - \mathbf{E}(X_{jq} U_{jp} | T_j))| \right) \right\} + a \frac{5}{2} \alpha_d \frac{\sqrt{t}}{1-t}. \end{aligned} \quad (28)$$

Перепишем (28) с учётом обозначений $\chi_1 = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}|\mathbf{E}(X_i|V_i)|$, $\chi_2 = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}|\mathbf{E}(X_i U_i^T) - \mathbf{E}(X_i U_i^T|T_i)|$, $\chi_3 = \left| I - \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(X_i U_i^T) \right|$:

$$\gamma \leq 10,14nA_1A_2B\gamma/\sqrt{t} + 5,07naA_1^2A_2B/\sqrt{t} + 3,34nA_1A_2Bad|\ln t| + 1,68d\chi_1 + \\ + (0,43d^2 + 0,23d)|\ln t|(\chi_2 + \chi_3) + a2,5\alpha_d \frac{\sqrt{t}}{1-t}.$$

Используя обозначение $\sqrt{t} = K = 20,28nA_1A_2B$, получаем следующую оценку:

$$\gamma \leq 0,5aA_2 + 0,66Kad|\ln K| + 3,36d\chi_1 + 3,6d^2|\ln K|(\chi_2 + \chi_3) + 5a\alpha_d \frac{K}{1-K^2}. \quad (29)$$

При округлении сомножителей в (29) получаем искомую оценку (5). Теорема 2 доказана. ■

Замечание 2. При фиксированном d главным членом в правой части неравенства (5) является слагаемое $Kad|\ln K|$, которое зависит от величин a, d, A_1, A_2 и B . В [4] замечено, что если $\mathcal{H}_1$ — класс индикаторов измеримых выпуклых подмножеств $\mathbb{R}^d$, то верно неравенство $a \leq 2d^{1/2}$. В связи с этим выражение в правой части (5) имеет порядок $n^{-1/2} \ln n$.

С учётом оценки для величины a переформулируем теорему 2.

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда верна оценка

$$\gamma = \sup_{F \in \mathcal{F}} |\mathbf{P}(W \in F) - \mathbf{P}(Z \in F)| \leq \\ \leq 2d^{1/2}A_2 + 2Kd^{3/2}|\ln K| + 4d\chi_1 + 4d^2|\ln K|(\chi_2 + \chi_3) + 10d^{1/2}\alpha_d \frac{K}{1-K^2}, \quad (30)$$

где $\mathcal{F}$ — класс измеримых выпуклых подмножеств $\mathbb{R}^d$; Z — случайный вектор, имеющий d -мерное стандартное нормальное распределение.

Доказательство следствия 1 заключается в непосредственной подстановке в неравенство (29) величины $2d^{1/2}$ вместо a .

Рассмотрим случай, когда W — центрированная и нормированная сумма независимых одинаково распределённых случайных векторов и $U_i = R_i = X_i$, $i = 1, \dots, n$. Тогда $\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 0$ и $A_1 = A_2 = B = d/\sqrt{n}$. В этом случае оценка (30) имеет порядок $d^{9/2}n^{-1/2} \ln n$.

В заключение рассмотрим случай, когда W — центрированная и нормированная сумма m -зависимых случайных векторов и компоненты всех векторов являются множеством попарно независимых случайных величин, при этом $\mathbf{E}W = 0$, ковариационная матрица вектора W является единичной, а также имеют место представления

$$U_i = \{j : |j - i| \leq m\} \cap J, \quad R_i = \{j : |j - i| \leq 2m\} \cap J, \\ \chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 0, \quad A_1 = \frac{2d(m+1)}{\sqrt{n}}, \quad A_2 = \frac{4d(m+1)}{\sqrt{n}}, \quad B = \frac{d}{\sqrt{n}}.$$

В этом случае оценка (30) имеет порядок $d^{9/2}m^2n^{-1/2} \ln n$.

3. Задача о раскраске вершин в графе

Рассмотрим применение следствия 1 в известной (см., например, [3]) задаче о нормальной аппроксимации числа рёбер, инцидентных вершинам одного цвета, в регулярном m -графе. Зафиксируем неориентированный граф с n вершинами, каждая из которых имеет степень m . Число рёбер в данном графе равно $N = nm/2$. Предположим, что каждая вершина независимо окрашивается в цвет c_i с вероятностью $\pi_i > 0$, $i = 1, \dots, d$, и выполнено условие $\sum_{i=1}^d \pi_i = 1$. Рассмотрим случайный вектор $W = (W_1, \dots, W_d)$, где W_i — случайная величина, которая равна числу рёбер, соединяющих вершины одного цвета c_i , $i = 1, \dots, d$.

На рис. 1 изображён регулярный 6-граф. Его вершины раскрашены в три цвета: c_1 , c_2 и c_3 , которые обозначены символами $\star$, $\blacktriangle$ и $\bullet$ соответственно. В цвет c_1 окрашены вершины 1, 3 и 6, в c_2 — вершина 2, в c_3 — вершины 4 и 5. Рёбра (1, 3), (1, 6) и (3, 6) инцидентны вершинам цвета c_1 , ребро (4, 5) — вершинам цвета c_3 . Поэтому реализация $\widehat{W}$ случайного вектора W в данном случае имеет вид $\widehat{W}_1 = 3$, $\widehat{W}_2 = 0$, $\widehat{W}_3 = 1$.

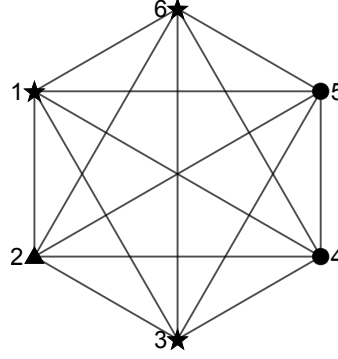


Рис. 1. Регулярный 6-граф с раскрашенными вершинами

Заметим, что для каждой координаты случайного вектора W имеет место следующее равенство:

$$W_i = \sum_{j=1}^N X_{ji}, \quad (31)$$

где X_{ji} — индикатор события, при котором обе вершины, инцидентные ребру с номером j , окрашены в один цвет c_i , $i = 1, \dots, d$, $j = 1, \dots, N$.

Обозначим $\lambda = \mathbf{E}W = N(\pi_1^2, \dots, \pi_d^2)$. С учётом (31) элементы ковариационной матрицы $\Sigma = (\sigma_{ij})_{d \times d}$ случайного вектора W имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} &= \mathbf{E}W_i^2 - (\mathbf{E}W_i)^2 = N\pi_i^2 + 2N(m-1)\pi_i^3 + \binom{n-2}{2}N\pi_i^4 - N^2\pi_i^4 = \\ &= N\pi_i^2(1 - \pi_i^2) + 2N(m-1)(\pi_i^3 - \pi_i^4), \quad i = 1, \dots, d, \\ \sigma_{ij} &= \mathbf{E}W_iW_j - \mathbf{E}W_i\mathbf{E}W_j = -N(2m-1)\pi_i^2\pi_j^2, \quad i, j = 1, \dots, d, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Обозначим $L = \left[\left(\min_{1 \leq i \leq d} \{\pi_i^2(1 - \pi_i^2)\} \right)^{-1/2} \right]$, где $[\cdot]$ означает целую часть числа. В [3] показано, что $\|\Sigma^{-1/2}\| \leq N^{-1/2}L$; через $\|\cdot\|$ обозначается наибольшее абсолютное значение элемента вектора или матрицы.

Применим следствие 1 к вектору $\Sigma^{-1/2}(W - \lambda)$ с учетом равенства

$$B = dN^{-1/2}L. \quad (32)$$

Обозначим множество номеров рёбер графа через $J = \{1, \dots, N\}$. Для $j \in J$ рассмотрим множества индексов

$$J_1^{(j)} = \{t \in J : \text{ребро } t \text{ имеет общую вершину с ребром } j\}, \quad J_2^{(j)} = \bigcup_{t \in J_1^{(j)}} J_1^{(t)}. \quad (33)$$

С учётом (33) для $j \in J$ выберем $U_j = \sum_{t \in J_1^{(j)}} X_t$, $R_j = \sum_{t \in J_2^{(j)}} X_t$, где $X_t = (X_{t1}, \dots, X_{td})$.

В этом случае верны оценки

$$A_1 \leq (2m - 1)B, \quad A_2 \leq (2m - 1)^2 B, \quad \chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 0. \quad (34)$$

Подставляя в неравенство (30) параметры из формул (32) и (34), получаем, что главный член оценки имеет порядок $\varphi_1 = N^{-1/2}d^{9/2}(2m - 1)^3 L^3 \ln N$.

Рассмотрим следующее условие. Пусть параметры d, m, L изменяются так, что верна формула

$$\varphi_1 \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty. \quad (35)$$

С учётом следствия 1 при выполнении условия (35) выполняется сходимость

$$\sup_{F \in \mathcal{F}} |\mathbf{P}(W \in F) - \mathbf{P}(Z \in F)| \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty, \quad (36)$$

где $\mathcal{F}$ — класс измеримых выпуклых подмножеств $\mathbb{R}^d$; Z — случайный вектор, имеющий d -мерное стандартное нормальное распределение.

Условие (36) означает, что при увеличении числа рёбер N и изменении числа цветов раскраски d в соответствии с (35) случайный регулярный m -граф с раскрашенными вершинами будет обладать следующим свойством: для каждого $i = 1, \dots, d$ количество рёбер, инцидентных вершинам цвета c_i , будет сближаться (в смысле формулы (36)) с многомерным нормальным распределением $\mathcal{N}(\lambda, \Sigma)$.

Заключение

В работе с использованием метода Стейна получен результат по улучшению известной ранее [7] оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме для сумм локально зависимых случайных векторов. Данный результат позволяет вычислять точные оценки скорости сходимости, а также имеет приложения для дискретных математических объектов. Получено условие многомерной нормальной аппроксимации числа рёбер в раскрашенном регулярном графе, инцидентных вершинам одного цвета.

Автор выражает благодарность О. В. Денисову за ряд полезных замечаний, способствовавших существенному улучшению статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Götze F. On the rate of convergence in the multivariate CLT // Ann. Probab. 1991. V. 19. P. 724–739.
2. Sunklodas J. Convergence rate estimate in central limit theorem for m -dependent random vectors // Lithuanian Math. J. 1978. V. 18(4). P. 566–575.

3. *Goldstein L. and Rinott Y.* Multivariate normal approximations by Stein's method and size bias couplings // Appl. Probab. 1996. V.33. P. 1–17.
4. *Reinert G. and Röllin A.* Multivariate normal approximation with Stein's method of exchangeable pairs under a general linearity condition // Ann. Probab. 2009. V.37. P. 2150–2173.
5. *Rinott Y. and Rotar V. I.* A multivariate CLT for local dependence with $n^{-1/2} \log n$ rate and applications to multivariate graph related statistics // J. Multivariate Analysis. 1996. V.56. P. 333–350.
6. *Волгин А. В.* Оценка скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2013. №6. С. 11–12.
7. *Волгин А. В.* Об оценке точности многомерной нормальной аппроксимации сумм локально зависимых случайных векторов // Обозрение прикл. и промышл. матем. 2015. Т. 22(4). С. 11–30.
8. *Зорич В. А.* Математический анализ. Ч. I. М.: МЦНМО, 2002. 664 с.
9. *Ширяев А. Н.* Вероятность-1. М.: МЦНМО, 2007. 552 с.

REFERENCES

1. *Götze F.* On the rate of convergence in the multivariate CLT. Ann. Probab., 1991, vol. 19, pp. 724–739.
2. *Sunklodas J.* Convergence rate estimate in central limit theorem for m -dependent random vectors. Lithuanian Math. J., 1978, vol. 18(4), pp. 566–575.
3. *Goldstein L. and Rinott Y.* Multivariate normal approximations by Stein's method and size bias couplings. Appl. Probab., 1996, vol. 33, pp. 1–17.
4. *Reinert G. and Röllin A.* Multivariate normal approximation with Stein's method of exchangeable pairs under a general linearity condition. Ann. Probab., 2009, vol. 37, pp. 2150–2173.
5. *Rinott Y. and Rotar V. I.* A multivariate CLT for local dependence with $n^{-1/2} \log n$ rate and applications to multivariate graph related statistics. J. Multivariate Analysis, 1996, vol. 56, pp. 333–350.
6. *Volgin A. V.* Otsenka skorosti skhodimosti v mnogomernoy tsentral'noy predel'noy teoreme [An improved estimate for the convergence rate in the multidimensional central limit theorem]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika. Prilozhenie, 2013, no. 6, pp. 11–12. (in Russian)
7. *Volgin A. V.* Ob otsenke tochnosti mnogomernoy normal'noy approksimatsii summ lokal'no zavisimykh sluchaynykh vektorov [On the accuracy estimation for the multidimensional normal approximation of locally dependent random vectors sums]. Obozrenie Prikl. i Promyshl. Matem., 2015, vol. 22(4), pp. 11–30. (in Russian)
8. *Zorich V. A.* Matematicheskiy analiz [Mathematical Analysis]. P. I. Moscow, MCCME Publ., 2002. 664 p. (in Russian)
9. *Shiryayev A. N.* Veroyatnost'-1 [Probability-1]. Moscow, MCCME Publ., 2007. 552 p. (in Russian)