Вестник Томского государственного университета
Философия. Социология. Политология. 2017. № 38

ИСТОРИЯ ФИЛОСОФИИ

ДК 1(091)
DOI: 10.17223/1998863Х/38/15

К.А. Родин, М.Н. Шалдяков

ВИТГЕНШТЕЙН О ЗАКОНЕ ИСКЛЮЧЕННОГО ТРЕТЬЕГО В МАТЕМАТИКЕ[1]

Рассматриваются замечания Витгенштейна о статусе закона исключенного третьего в математике – в контексте интуиционизма. Демонстрируется ограниченное влияние соответствующих идей Брауэра и Вейля на философию математики Витгенштейна после 1929 г. Прослеживается параллель между отказом Витгенштейна от теории квантификации Логико-философского трактата и вопросом о природе общих пропозиций в работах интуиционистов. Подробно реконструируется логика обсуждения Витгенштейном закона исключенного третьего в IV части «Замечаний по основаниям математики».

Ключевые слова: *Витгенштейн, Брауэр, Вейль, интуиционизм, закон исключенного третьего.*

По свидетельству Георга фон Вригта, Витгенштейн в одной из приватных бесед назвал ошибкой идею Логико-философского трактата об общих пропозициях как о бесконечных конъюнкциях и дизъюнкциях [1. С. 123]. Отказ от сформулированной в ЛФТ теории квантификации (совершился в 1929) мог идти одновременно с критической рецепцией философом некоторых положений интуиционистской философии математики (вспоминается известный сюжет о возвращении Витгенштейна в философию после посещения лекции Брауэра). Влияние интуиционизма Вейля и Брауэра на Витгенштейна непосредственно связано со статусом закона исключенного третьего в математике.

Матью Марион считает близкими Витгенштейну некоторые положения из статьи Вейля «Ьber die neue Grundlagenkrise der Mathematik» [2]. Вейль общие математические пропозиции не относит к утверждениям. Он считает утверждение с квантором существования не полноценным утверждением, но абстрактной формой утверждения (judgement-abstract). {пропозицию $\exists x\ F(x)$ для любого разрешимого предиката F можно утверждать, когда существует некоторое число n – выполняющее предикат F (нужно уметь продемонстрировать выполнение предиката F числом n): $F(n) \rightarrow \exists x\ F(x)$}. Утверждение же с квантором всеобщности – общим правилом для высказывания утверждений (в пример приводится пропозиция «для любого числа m справедливо: m+1 = 1+m»). Выражение «для любого числа m» не может быть аббревиатурой или сокращением для бесконечной дизъюнкции (такая аббревиатура осмысленна только в случае конечной дизъюнкции). Утвер-

[1] Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации (МК-5659.2016.6).

ждение с квантором всеобщности – не есть утверждение, но гипотеза (или claim). Гипотеза может быть обоснованной или необоснованной. Утверждение может быть истинным или ложным. Подобное различение справедливо и относительно арифметических пропозиций с квантором существования.

Марион связывает тему общих пропозиций с законом исключенного третьего [3. С. 88–89]. Если мы не располагаем частным случаем F(n) и, следовательно, не может утверждать общую пропозицию $\exists x\, F(x)$, одновременно мы не можем утверждать и $\neg F(n)$ (тем более утверждать $\forall x \neg F(x)$). Из подобного понимания природы общих пропозиций сразу следует неприменимость к ним закона исключенного третьего. Иначе: если мы не располагаем выполняющим предикат F конкретным числом n, мы не может утверждать ни □x F(x), ни $\forall x \neg F(x)$ (общие пропозиции относятся здесь к <u>бесконечному</u> множеству чисел). Брауэр представил бы ситуацию так:

формула $\exists x\, F(x) \vee \forall x \neg F(x)$ подразумевает возможность эффективно обнаружить некоторое m (пусть x пробегает бесконечное множество некоторых последовательностей). Возьмем число π. Правило для вычисления десятичного разложения числа π не позволяет знать, встречается ли в десятичном разложении π определенная последовательность 0123456789. Поэтому, пока мы не нашли последовательность 0123456789 в десятичном разложении π, мы не можем утверждать $\exists x\, F(x)$. Не можем мы утверждать и $\forall x \neg F(x)$. Используя десятичное разложение числа π, Брауэр конструирует известный пример числа-маятника (pendulum number) [4. С. 337]. Пусть будет: d_v – v-ая цифра в десятичном разложении π. И $m=k_n$ если в n-й раз с цифры d_m сегмент десятичного разложения $d_m d_{m+1} \ldots d_{m+9}$ формирует последовательность 0123456789. Далее пусть $c_v = (–1/2)$ в степени k_1, если $v \geq k_1$ и $c_v = (–1/2)$ в степени v в противном случае. Пусть бесконечная последовательность c_1, c_2, $c_3 \ldots$ формирует действительное число r. Относительно числа r нельзя утверждать ни что оно больше или меньше нуля, ни что оно равно нулю. Пример Брауэра, как видно, работает против закона исключенного третьего. Брауэр в ранней статье 1908 г. «Ненадежность логических принципов» соотносит закон исключенного третьего с вопросом о существовании неразрешимых математических проблем (или пропозиций) [5. С. 109].

Немногочисленные фрагменты о Брауэре в тестах и заметках Витгенштейна позволяют реконструировать рецепцию Витгенштейном интуиционизма.

§173 «Философских заметок» (ФЗ) [6]:

> Брауэр прав, когда утверждает, что свойства числа-маятника несовместимы с законом исключенного третьего. Однако в подобном утверждении не выявляется специфика пропозиций о бесконечных множествах. Скорее утверждение основано на факте – который предполагает логика – что не может быть априори – т.е. логически – невозможным сказать, истинна пропозиция или ложна. Ведь если вопрос об истинности/ ложности пропозиции априори неразрешим, пропозиция теряет смысл. Отсюда следует, что предложения логики становятся к подобной пропозиции неприложимы.
>
> ...если пропозиция применима в одной математической области, она не должна с необходимостью быть применима также в другой области – подобный подход совершенно неуместен в математике и полностью противоречит

природе математики. Хотя некоторые авторы и считают подобный подход особенно проницательным и направленным против заблуждения.

Брауэр в статье 1908 г. считает надежными закон силлогизма (principle of syllogism) и закон противоречия, но дисквалифицирует закон исключенного третьего. Под сомнение ставится, однако, универсальность закона исключенного третьего: закон все же сохраняет силу в применении к «конечной» математике. Витгенштейн в процитированном фрагменте не соглашается с выборочной применимостью закона исключенного третьего (подобный подход противоречит природе математики). Одновременно Витгенштейн утверждает: пропозиции логики – любые – становятся не применимы к математической пропозиции, если к математической пропозиции не применим закон исключенного третьего. В общем, можно сказать, что Витгенштейн соглашается с Брауэром относительно неприменимости закона исключенного третьего в ряде случаев, но обнаруживает и некоторые расхождения с позицией интуиционизма. Понять Витгенштейна помогает §151 ФЗ: «Я должен сказать резко: где неприменим закон исключенного третьего, неприменимы и другие законы логики – ведь в подобном случае мы не имеем дела с математическими пропозициями (против Вейля и Брауэра)». Витгенштейн, выходит, отрицает существование неразрешимых математических пропозиций. Мысль Витгенштейна не до конца ясна. Несогласие Витгенштейна с интуиционизмом касается, по-видимому, аргументов Брауэра и не затрагивают тезиса об ограниченной применимости закона исключенного третьего. Так, Ф. Вайсман записывает следующее замечание Витгенштейна [7. С. 71]:

> Не может быть вопроса: встречаются ли цифры 0, 1, 2... 9 в числе π. Я могу спросить, встречаются ли они в определенном месте или среди первых 10000 чисел. Никакое разложение – насколько бы длинным оно ни было – не может опровергнуть утверждение, что такие числа встречаются. Следовательно, это утверждение не может быть и верифицировано. Верифицируется совершенно отличное суждение, а именно, что такая последовательность встречается в том или ином месте. Поэтому мы не можем подтвердить или опровергнуть это утверждение, и, следовательно, не можем применить к нему закон исключенного третьего.

Понимать следует так: неправомерный вопрос о наличии в десятичном разложении числа π некоторой последовательности чисел навязан ложной картинкой: будто кому-то в некотором актуальном порядке доступно обозрение бесконечного множества чисел десятичного разложения π. Поэтому для Витгенштейна правомерны лишь вопросы, ограниченные принципиально обозримым множеством чисел. Для Витгенштейна невозможно актуальное бесконечное множество, поэтому и пропозиции о бесконечном множестве не похожи на «обычные» пропозиции. Можно, следовательно, так понять Витгенштейна: неприменимость закона исключенного третьего не говорит о характере и свойствах соответствующих пропозиций: для Витгенштейна не существует отдельной математики для актуальных бесконечных множеств (§173 ФЗ). Когда априори невозможно считать пропозицию истинной-или-ложной, перед нами «странная» пропозиция, к которой неприложимы логические законы. Из невозможности априори некоторую пропозицию рассматривать как истинную-или-ложную следует неприменимость к ней закона исключенного третьего: именно потому, что перед нами «нетипичная» пропозиция, но не потому, что подобная пропозиция связана с некоторым свойством бесконечных множеств. (Логика применима, когда априори существует возможность утверждать истинность или ложность пропозиции (следовательно, закон исключенного третьего не применим в рассматриваемых случаях)).

Существует и другое объяснение позиции Витгенштейна. Невзирая на сходство пропозиций «конечной» математики с обычными эмпирическими пропозициями (в возможности верификации), нам трудно представить обстоятельства, когда можно было бы утверждать ложность доказанного математического утверждения (тогда как подобные обстоятельства для истинного <u>сейчас</u> эмпирического высказывания вполне представимы). Отсюда: математические пропозиции не могут отрицаться подобно эмпирическим (или отрицание будет иметь другой смысл). Относительно доказанного математического утверждения не соблюдается условие быть истинным-или-ложным. Поэтому несогласие Витгенштейна с Брауэром следует понимать сразу в двух аспектах: через отрицание актуального подхода к рассмотрению бесконечных множеств и через отказ признавать любые математические пропозиции пропозициями в «обычном» эмпирическом смысле (а логика ЛФТ применима только к эмпирическим, не к математическим, пропозициям). Отрицание в арифметике совершенно отличается от отрицания некоторого эмпирического утверждения (ФЗ §202). Справедливо замечание Матью Мариона: для Витгенштейна логическое исчисление истинностных функций целиком не применимо в математике (а не только закон исключенного третьего) (см. более подробно: [3. С. 169]). Фрагмент параграфа 173 ФЗ: «если вопрос об истинности или ложности пропозиции априори неразрешим, пропозиция теряет смысл» – соотносит неприменимость закона исключенного третьего с теорией осмысленных пропозиций в ЛФТ: по сути говорится, что математические пропозиции не есть пропозиции осмысленные (соотносимые с некоторым положением дел).

Без обращения к интуиционистам и более подробно Витгенштейн рассматривает закон исключенного третьего в IV разделе «Замечаний по основаниям математики» [8] (1942–1943 гг.). Предположим: в некоторой странной арифметике счет не идет дальше определенного числа, и тогда вопрос о сумме двух чисел, превосходящей данное число, не будет иметь смысла. Например, счет не идет дальше 5. Тогда вопрос о сумме 4+3 не имеет никакого смысла, как и положение об исключенном третьем (§11). Мы не можем осмысленно утверждать, что в подобной арифметике 4+3 либо равняется какому-то числу, либо нет. Витгенштейн проводит следующую аналогию: в ряду десятичного разложения числа π определены члены ряда от 1 до 1000, до 1010 и т.д. – значит, определены <u>все</u> члены ряда. Однако подобная определенность не позволяет ответить на вопрос о появлении в ряду некоторой последовательности (если еще такая последовательность не появилась). Дезориентирует слово <u>все</u>: будто возможен некоторый взгляд со стороны, из другого измерения (как бы перемещение с линии на окружающую линию плоскость). На самом деле подобного другого измерения не существует самого по себе, как в урезанной арифметике еще нет суммы 4+3. И сразу возникает вопрос о технике или правиле разложения (которое и диктует определенность). Можно спросить: разве закон разложения не полностью детерминирует ряд – и тогда определены все члены ряда. Но здесь речь идет только о конечных рядах. Другой мысленный эксперимент: в некотором примитивном сообществе люди приучены при вычислении располагать знаки по известным правилам (§ 9). И теперь мы спрашиваем: будет ли выписана когда-нибудь последовательность 777 в десятичном разложении π. Тем самым мы выходим за пределы «прикладной» математики {в одном месте Витгенштейн задает такой вопрос: когда учат ребенка умножать, учат ли также <u>возможности</u> умножения}. И если мы утверждаем: в ходе бесконечного разложения мы придем или не придем к последовательности 777, – устанавливается некоторое дополнительное к правилам примитивного сообщества правило или постулат. И сам вопрос есть взгляд со стороны на процесс деятельности в соответствии с некоторыми исходными правилами. При чтении Витгенштейна нужно иметь в виду решающее различие между внутренними и внешними отношениями (любая доказанная пропозиция находится во внутреннем отношении с предшествующими доказанными пропозициями, любая недоказанная – выступает как бы <u>внешней</u> гипотезой). Вопрос перестает быть внешним вопросом – как только оказывается решаемым: устанавливается новая внутренняя взаимосвязь, которой раньше не было (сравните § 9). Приведем аналогию: если автор романа говорит, что еще не решил, есть ли у главного героя сестра или брат – вопрос разрешим (и наличие и отсутствие брата или сестры может быть приведено в согласие с уже написанной частью романа). Но вопрос о разрешимости вопроса: встречается ли в десятичном разложении числа π некоторая последовательность – исключительно внешний вопрос, и невозможно внутренне согласовать такой вопрос с исходными правилами примитивного сообщества. Обращаясь мыслью к усвоенной технике разложения, часто используется ложная картинка завершенного разложения. Поэтому вопрос о наличии некоторой последовательности в десятичном разложении π, правомерен относительно конечного сегмента такого разложения (в подобном случае вопрос внутренне связан с техникой разложения и актуальным результатом разложения). Предполагать ряд несодержащим определенную последовательность имеет смысл, когда закон данного ряда может исключить (или исключает) такую последовательность (сравните § 11).

Витгенштейн рассматривает закон исключенного третьего в контексте темы следования правилу (и здесь нет влияния интуиционизма). Я понимаю выражение «последовательность m не встречается в ряду» из употребления подобных выражений. Примеры употребления подобных выражений служат основанием для существования некоторого правила (предписывающего или запрещающего появление некоторой последовательности в некотором ряду). Если выражение «ты получишь такую-то последовательность» (P) значит: ты <u>должен</u> получить такую-то последовательность. А фраза «ты не получишь такую-то последовательность» (не-P) значит: ты не сможешь (должен не) получить такую последовательность, то тогда не будет предложением об исключенном третьем выражение «P или не-P» (сравните § 17). Или, допустим, у нас есть правило или закон. Правило диктует некоторую возможность или исключает некоторую возможность (в данном примере – возможность получить некоторую последовательность). Утверждение «есть такой закон, что ты получишь такую-то последовательность» (Р) не противоположно утверждению «есть такой закон, что ты не получишь такую-то последовательность (эквивалентно не-Р) (сравните § 13). В случае с десятичным разложением числа π подобного правила-закона не существует. Здесь интересно такое замечание Витгенштейна: есть различие между «как далеко ты бы ни зашел, никогда не найдешь такой-то последовательности» и «как далеко ты бы ни зашел, ты не должен найти такой-то последовательности». Во втором случае – перед нами приказ (обучающий нас некоторому правилу) и правило. Таким образом, вопрос о наличии или отсутствии последовательности 777 в десятичном разложении π был бы правомерен только в контексте правила или закона (такого закона нет – вопрос неправомерен). Для Витгенштейна спрашивать, «появляется ли в некотором разложении такая-то последовательность», □ значит задавать вопрос о правиле появления такой последовательности, а альтернатива существованию или не-существованию подобного правила – не математическая проблема (сравните § 20). Вопрос «появляется ли в некотором разложении последовательность m» имеет математический смысл только в рамках математической структуры (вопрос должен быть внутренне связан с математической структурой).

Справедливо видеть в заметках Витгенштейна о законе исключенного третьего оригинальность: контекст следования правилу и контекст различия между внутренними и внешними отношениями задают своеобразие подходу. Несмотря на параллели с интуиционизмом, больший интерес представляет не степень возможного влияния или даже заимствования, но реконструкция логики рассуждения Витгенштейна.

Литература

1. *Wright G. H.* Wittgenstein's Views on Probability // Wittgenstein et le problème d'une philoophie de la science. Paris: CNRS, 1971. P. 113–33.

2. *Weyl H.* Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik // Gesammelte Abhandlungen (ed. K. Chandrasekharan). Berlin: Springer, 1968. P. 143–80.

3. *Marion M.* Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics. Oxford, 1998.

4. *Brouwer L.E.J.* On the Significance of the Principle of Excluded Middle in Mathematics, Especially in Function Theory // From Frege to Gödel: A. Sourcebook in Mathematical Logic (ed. van Heijenoort). Cambridge, Mass.: Harvard University, 1967. P. 334–45.

5. *Brouwer L.E.J.* The Unreliability of the Logical Principles/ Brouwer L. E. J. Collected Works (ed. A. Heyting). Amsterdam: North-Holland. P. 107–11.

6. *Wittgenstein L.* Philosophical remarks. Oxford: Blackwell, 1975.

7. Ludwig Wittgenstein and the Vienna Circle: from the notes of F. Waismann. Oxford: Blackwell, 1979.

8. *Wittgenstein L.* Remarks on the Foundations of Mathematics. Oxford: Blackwell, 1978.

Rodin Kirill A. Siberian State University of Telecommunications and Informatics (Novosibirsk, Russian Federation)

E-mail: rodin.kir@gmail.com

DOI: 10.17223/1998863X/38/15

Shaldyakov Maksim N. National Research Tomsk State University (Tomsk, Russian Federation)

E-mail: rodin.kir@gmail.com

DOI: 10.17223/1998863X/38/15

WITTGENSTEIN ON THE LAW OF EXCLUDED MIDDLE IN MATHEMATICS

Key words: Wittgenstein, Brouwer, Weyl, Intuitionism, the Law of Excluded Middle

In the paper we show in what degree Wittgenstein's remarks on the Law of Excluded Middle connected with intuitionism, especially with some works of Brouwer and Weyl. we argue that Wittgenstein's approach to the problem was sufficiently original and independent and that Wittgenstein used only general contra-examples to the Law of Excluded Middle propose by Brouwer. In other respects, he developed his own novel line of thought. Also we try to show how can be connected Wittgenstein's turn in philosophy in 1929 with the issue of the Law of Excluded Middle (and with the question of the status of general propositions).

References

1. Wright, G.H. (1971) Wittgenstein's Views on Probability. In: Granger, G.G. (ed.) *Wittgenstein et le problème d'une philoophie de la science* [Wittgenstein and the problem of a philosophy of science]. Paris: CNRS. pp. 113–33.

2. Weyl, H. (1968) Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik [On the New Fundamental Crisis of Mathematics]. In: Chandrasekharan, K. (ed.) *Gesammelte Abhandlungen* [Collected Essays]. Berlin: Springer. pp. 143–80.

3. Marion, M. (1998) *Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics*. Oxford: Clarendon Press.

4. Brouwer, L.E.J. (1967) On the Significance of the Principle of Excluded Middle in Mathematics, Especially in Function Theory. In: Heijenoort, J. van (ed.) *From Frege to Gödel: A Sourcebook in Mathematical Logic*. Cambridge, Mass.: Harvard University. pp. 334–45.

5. Brouwer, L.E.J. (1976) *Collected Works*. Amsterdam: North-Holland. pp. 107–11.

6. Wittgenstein, L. (1975) *Philosophical Remarks*. Oxford: Blackwell.

7. Waismann, F. (1979) *Ludwig Wittgenstein and the Vienna Circle*. Oxford: Blackwell.

8. Wittgenstein, L. (1978) *Remarks on the Foundations of Ma*thematics. Oxford: Blackwell.