

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2015

№ 2(34)

Свидетельство о регистрации: ПИ № ФС77-30658
от 20 декабря 2007 г.



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА
«ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»**

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (председатель редколлегии), С.П. Гулько (зам. председателя редколлегии), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), В.Ю. Хайруллина (отв. секретарь по разделу «Механика»), И.А. Александров, В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.М. Гришин, А.Н. Ищенко, В.В. Конец, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, С.В. Панько, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер, Н.Р. Щербаков.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д.36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

H-index: <http://elibrary.ru>, <http://Math-Net.ru>

Оригинал-макет подготовлен

ООО «Издательство научно-технической литературы»

634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*

Верстка *Д.В. Фортеса*

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001. Подписано к печати 16.04.2015.
Формат 70 × 100 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 8,39. Уч.-изд. л. 9,39. Тираж 300 экз. Заказ № 4.

Отпечатано на оборудовании

Издательского Дома Томского государственного университета,
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. Заказ ??.
<http://publish.tsu.ru> E-mail: rio.tsu@mail.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Бухтяк М.С., Соломина А.В. Геометрическое моделирование раскрыя сетеполотна для осесимметричного рефлектора. Часть 1	5
Емельянова Т.В., Конев В.В. О последовательном оценивании периодического сигнала на фоне авторегрессионного шума	18
Пестов Г.Г., Забарина А.И., Тоболкин А.А., Фомина Е.А. О 2-упорядоченных группах	30

МЕХАНИКА

Бабушкин И.А., Кондрашов А.Н., Рыбкин К.А., Сбоев И.О. Развитие теплового плюма в узком вертикальном слое	41
Бахтеев О.А., Лысиков А.В., Дегтярев Н.А., Михеев Е.Н. Разработка методики измерения распределения пор в объеме топливных таблеток из диоксида урана	52
Долгий М.Е., Катаев С.Г. Исследование естественного импульсного электромагнитного поля Земли	61
Замбалов С.Д., Скрипняк В.А. Исследование сопряженных процессов гидроупругости и ресурса конструкции центробежной форсуночной установки для подготовки высоковязких видов котельного топлива	71
Рикконен С.В., Пономарев С.В., Азин А.В. Моделирование колебательных процессов пьезоэлектрического преобразователя	86
Шерстобитов А.А., Потеряева В.А., Усенко О.В. Дифференциальная проницаемость ультратонкого пористого слоя монодисперсных наночастиц	96
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	103

CONTENTS

MATHEMATICS

Bukhtyak M.S., Solomina A.V. Geometric modeling of metallic mesh sheet tailoring for an axisymmetric reflector. Part 1	5
Emel'yanova T.V., Konev V.V. On sequential estimation of a periodic signal on the background of an autoregressive noise	18
Pestov G.G., Zabarina A.I., Tobolkin A.A., Fomina E.A. On 2-ordered groups	30

MECHANICS

Babushkin I. A., Kondrashov A. N., Rybkin K. A., Sboev I. O. Development of thermal plume in a thin vertical layer	41
Bahteev O. A., Lysikov A. V., Dyagterev N. A., Mikheev E. N. Method of volumetric pore distribution measuring for uranium dioxide pellets.....	52
Dolgy M. E., Kataev S. G. Research of a natural pulse electromagnetic field of Earth	61
Zambalov S. D., Skripnyak V. A. Coupled processes research of hydroelasticity and durability of centrifugal injector using to preparation high viscosity fuels.....	71
Rikkonen S.V., Ponomarev S.V., Azin A.V. Simulation of oscillatory processes piezoelectric transducer.....	86
Sherstobitov A.A., Poteryaeva V.A., Usenko A.V. Differential permeability of ultra-thin porous layer of monodisperse nanoparticles	96
BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS	103

МАТЕМАТИКА

УДК 519.711.3

DOI 10.17223/19988621/34/1

М.С. Бухтяк, А.В. Соломина

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСКРОЯ СЕТЕПОЛОТНА
ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО РЕФЛЕКТОРА. ЧАСТЬ 1

Для параболической антенны рефлекторного типа актуальна задача прикрепления отражающего сетеполотна таким образом, чтобы как можно менее страдали радиофизические характеристики устройства. Ясно, что при различных избранных схемах раскроя указанная задача решается (приближенно) разными способами. Схема раскроя порождает задачу об оптимуме раскроя, который может пониматься в различных смыслах. Известен подход, основанный на уменьшении, насколько возможно, СКО (среднего квадратичного отклонения от идеальной поверхности). Положим в основу оптимизации другой критерий – степень однородности натяжения сетеполотна в различных областях рефлектора (например, степень растяжения сетеполотна вблизи технологического центра должна составлять некоторую долю от степени его натяжения на периферии). Обычно же предполагается, что приемлемый результат достигается, если во всех точках рефлектора максимальное натяжение находится в некоторых заранее указанных пределах и минимальное – тоже в пределах (своих). Представлено решение задачи об оптимальном раскрое, причем оптимальность предполагает условия: экстремальные относительные искажения длины должны быть максимально близки к единице, при этом чем ближе к центру параболоида, тем «строже» должно быть соблюдено указанное условие.

Ключевые слова: параболическая антенна, сетеполотно, прикрепление, натяжение, оптимум.

1. Постановка задачи

В конструкторской практике слово «раскрой» должно означать и «выкройку» листа сетеполотна, и некоторый способ прикрепления его к несущим конструкциям, при этом имеется ввиду указанная равномерность локальных деформаций (здесь отличие нашего подхода от традиционного – уменьшения СКО). Технологические приемы достижения желаемого традиционного результата можно проследить в работах [1–3]. В рамках представленной задачи геометрического моделирования *раскрой определяется как точечное соответствие между временно плоским листом и областью на параболоиде* [4–6]. Применяемая идеализация предполагает, что СКО, конечно же, равен нулю (раз уж есть точечное соответствие). Геометрически очевидно, что равное нулю СКО само по себе не обеспечивает сколь-нибудь приемлемой равномерности натяжения сетеполотна (как бы ни понимать эту приемлемость). Причина в том, что СКО зависит от смещений от-

дельных участков сетеполотна по нормали идеального параболоида (такие смещения принадлежат внешней геометрии поверхности [7, 8]), а натяжение сетеполотна в предположении равенства нулю СКО зависит от смещений участков сетеполотна по поверхности параболоида (принадлежит его внутренней геометрии [9]).

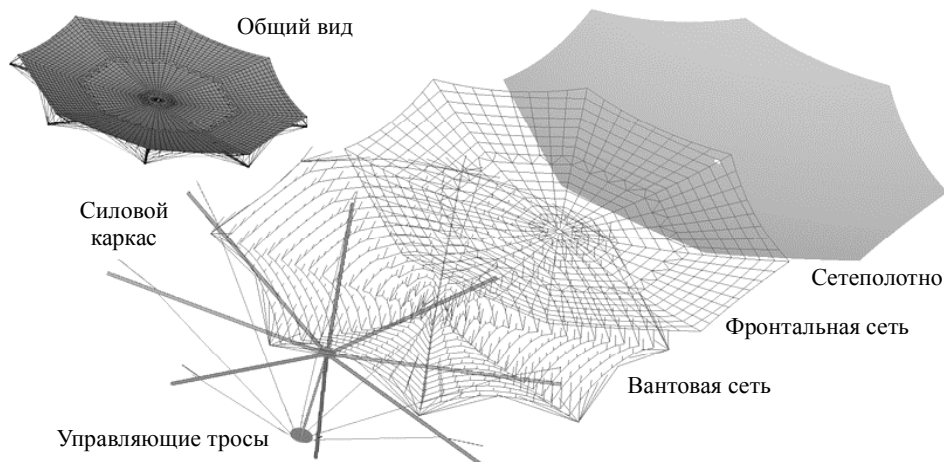


Рис. 1. Принципиальная схема рефлектора

Действуя как в [10], вводим в рассмотрение две параметризованные поверхности

$$\Sigma_1 : \mathbf{R}_1 = \mathbf{r}_1(u, v), \quad \Sigma_2 : \mathbf{R}_2 = \mathbf{r}_2(u, v).$$

Точки $A = \mathbf{r}_1(u, v)$ и $A' = \mathbf{r}_2(u, v)$ как раз и являются соответствующими. Локальная метрика каждой из поверхностей определяется соответствующим метрическим тензором. Матрицы этих тензоров составлены из коэффициентов первых квадратичных форм:

$$M_1 = \begin{pmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} E_2 & F_2 \\ F_2 & G_2 \end{pmatrix}.$$

Сами же первые квадратичные формы [9] имеют вид

$$ds_1^2 = E_1 du^2 + 2F_1 dudv + G_1 dv^2, \quad ds_2^2 = E_2 du^2 + 2F_2 dudv + G_2 dv^2.$$

Мерой локального искажения длин (точнее, их квадратов) является величина

$$\lambda = \frac{ds_2^2}{ds_1^2}.$$

Экстремальные значения λ суть совместные инварианты матриц M_1 и M_2 , равные корням уравнения

$$m \equiv \det(M_2 - \lambda M_1) = E_1 G_1 - F_1^2 + \lambda(2F_1 F_2 - E_1 G_2 - E_2 G_1) + \lambda^2(E_2 G_2 - F_2^2) = 0. \quad (1.1)$$

Важно отметить, что положительная определенность симметричных матриц M_1 и M_2 гарантирует вещественность корней уравнения (1.1). Коэффициенты уравнения (1.1) имеют вид

$$a = E_2 G_2 - F_2^2, \quad b = 2F_1 F_2 - E_1 G_2 - E_2 G_1, \quad c = E_1 G_1 - F_1^2.$$

Составим выражение, обращение которого в нуль равносильно равенству обоих корней λ_1, λ_2 уравнения (1.1) единице:

$$L = (a - c)^2 + (2a + b)^2,$$

то есть

$$L = (E_2 G_2 - F_2^2 - E_1 G_1 + F_1^2)^2 + (2E_2 G_2 - 2F_2^2 - E_1 G_2 - E_2 G_1 + 2F_1 F_2)^2. \quad (1.2)$$

Постановка задачи содержит элемент, формализация которого нетривиальна. Дело в том, что **равномерность натяжения сетеполотна (и степень его близости к структуре плоского куска) более важна (с точки зрения эффективности радиофизических характеристик рефлектора) вблизи вершины осесимметричного параболоида, нежели у его границы**. Эти соображения формализуем способом, который будет объяснен ниже.

Применим наши построения к ситуации, которая кажется (на первый взгляд) тривиальной. Имеется в виду прикрепление к несущим конструкциям рефлектора круглого плоского диска сетеполотна (иногда так и делают).

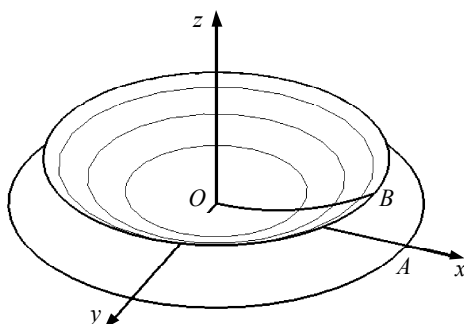


Рис. 2. Параболический рефлектор и плоский лист сетеполотна

Ясно, что (ввиду осевой симметрии) для установления биективного соответствия между плоским диском и куском параболоида достаточно сделать это для прямолинейного отрезка [OA] и отрезка параболы [OB]. «Само собой напрашивается», что оптимальное соответствие должно быть таким (рис. 3).

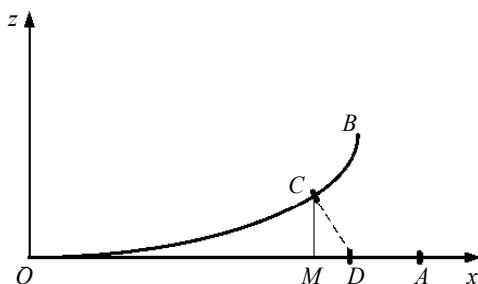


Рис. 3. Схема соответствия отрезка [OA] и отрезка параболы [OB]

Именно, длина прямолинейного отрезка [OD] должна равняться длине дуги [OC] параболы. Примем обозначения:

$$|OM| = u, \quad |OC| = |OD| = g(u).$$

Действуя так, как это обычно в конструкторской практике, задаем параболу уравнением $z = u^2 / 4F$. Тогда

$$g(u) = \int_0^u \sqrt{1 + \left(\frac{u}{2F}\right)^2} du = \frac{u\sqrt{4F^2 + u^2} + 4F^2 \ln\left(u + \sqrt{4F^2 + u^2}\right) - 4F^2 \ln 2 - 4F^2 \ln F}{4F}.$$

Первая поверхность, участвующая в соответствии, – плоская область

$$R_1 = \{g(u) \cos v, g(u) \sin v, 0\}, \quad u \in [0, R], \quad v \in [0, 2\pi). \quad (1.3)$$

Здесь константа R – радиус вырезающего цилиндра для параболоида. Вторая поверхность – кусок параболоида вращения

$$R_2 = \left\{u \cos v, u \sin v, \frac{u^2}{4F}\right\}, \quad u \in [0, R], \quad v \in [0, 2\pi). \quad (1.4)$$

Для первой поверхности вычисляем компоненты метрического тензора

$$E_1 = \frac{4F^2 + u^2}{4F^2}, \quad F_1 = 0, \\ G_1 = \frac{\left(-4F^2 \ln(2) - 4F^2 \ln F + u\sqrt{4F^2 + u^2} + 4F^2 \ln\left(u + \sqrt{4F^2 + u^2}\right)\right)^2}{16F^2}.$$

Для параболоида соответственно

$$E_2 = \frac{4F^2 + u^2}{4F^2}, \quad F_2 = 0, \quad G_2 = u^2.$$

Подставляем компоненты метрических тензоров в (1.2), тем самым получаем значение лагранжиана в виде

$$\tilde{L} = 2 \left(\frac{(4F^2 + u^2)u^2}{4F^2} - \frac{(4F^2 + u^2) \left(4F^2 \ln(2) + 4F^2 \ln F - u\sqrt{4F^2 + u^2} - 4F^2 \ln(u + \sqrt{4F^2 + u^2})\right)^2}{64F^4} \right). \quad (1.5)$$

Следует вычислить интеграл от лагранжиана при изменении u от 0 до R (радиус вырезающего цилиндра для рефлектора). Но, во-первых, при одном и том же значении фокального параметра F радиус R может быть весьма разным, а во-вторых **как практически непреложное правило** $R \leq F$. Поэтому, интегрируя от 0 до F , мы можем получить **завышенные** оценки погрешностей исследуемой схемы раскроя, а это заведомо лучше, чем риск получения **заниженных** оценок. Интегрирование $\tilde{L}$ не приведет к осязаемым результатам (выражение слишком сложно). Применим оценку разложением по формуле Тейлора в окрестности точки $u = 0$, до 16-го порядка малости, отбросив остаточный член. Результат обозначим Ls . Таким образом,

$$Ls = \frac{u^8 (50400F^6 + 23520u^2F^4 + 2504u^4F^2 - 35u^6)}{3628800F^{10}}.$$

Теперь получаем оценку значимого для нас интеграла в виде

$$\int_0^F \tilde{L} du \approx \int_0^F L s du \approx 0,002184 F^5 .$$

Далее сравним полученную оценку с той, к которой приведет более основательный подход к построению функции $g(u)$. Заметим, однако, что

$$g(u) = u + \frac{u^3}{24F^2} + o(u^4),$$

что наводит на мысль задавать функцию $g(u)$ в виде $uf(u)$. Тогда в качестве первой поверхности оказывается плоская область

$$R_1 = \{uf(u) \cos v, uf(u) \sin v, 0\}, u \in [0, R], v \in [0, 2\pi). \quad (1.6)$$

Вторая поверхность – кусок параболоида вращения (1.4)

$$R_2 = \left\{ u \cos v, u \sin v, \frac{u^2}{4F} \right\}, u \in [0, R], v \in [0, 2\pi).$$

Отнесенность обеих поверхностей к одним и тем же криволинейным координатам создает точечное соответствие между поверхностями. Таким образом, мы собираемся (как и раньше) плоскую область (1.3) «натянуть» на кусок параболоида (1.4).

Задача же заключается в том, чтобы в области задания наших поверхностей корни λ_1, λ_2 уравнения (1.1) были максимально близки к единице. Значит, речь идет о вариационной задаче.

2. Вариационный подход

Прежде всего, параметризация (1.6) должна быть регулярной. Вычисляем

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_1}{\partial u} &= \left\{ \cos(v) \left(f(u) + u \frac{d}{du} f(u) \right), \sin(v) \left(f(u) + u \frac{d}{du} f(u) \right), 0 \right\}, \\ \frac{\partial R_2}{\partial v} &= \{-uf(u) \sin v, uf(u) \cos v, 0\}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Условие параллельности этих векторов (то есть условие нарушения регулярности параметризации) имеет вид

$$uf(u) \left(f(u) + u \frac{d}{du} f(u) \right) = 0.$$

Ясно, что (2.1) безусловно выполнено в точке $u = 0$ (изолированная точка – полюс полярной системы координат, к которой отнесена плоская область). Это обстоятельство, как мы увидим ниже, не отразится на исследовании выражения L вариационными методами. Возможны, однако, иные варианты:

А) Для некоторого $u_0 \in (0, R]$ имеем $f(u_0) = 0$.

Б) Для некоторого $u_1 \in (0, R]$ имеем $f(u_1) + u_1 f'(u_1) = 0$.

В) Существует интервал $J = (\alpha, \beta) \subset (0, R]$, такой, что на J выполнено

$f(u) + u \frac{d}{du} f(u) = 0$, то есть функция $f(u)$ локально удовлетворяет тождеству $uf(u) \equiv \text{const}$.

Мы преобразуем (1.2) в предположении, что указанные случаи А), Б), В) не имеют места. Вычисляем коэффициенты первых квадратичных форм:

$$\begin{aligned} E_1 &= (f(u))^2 + 2f(u)u \frac{d}{du} f(u) + u^2 \left(\frac{d}{du} f(u) \right)^2, \quad F_1 = 0, \quad G_1 = u^2 (f(u))^2, \\ E_2 &= \frac{4F^2 + u^2}{4F^2}, \quad F_2 = 0, \quad G_2 = u^2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Внеся (2.2) в (1.2), получаем лагранжиан

$$\begin{aligned} & \left(\frac{(4F^2 + u^2)u^2}{4F^2} - \left((f(u))^2 + 2f(u)u \frac{d}{du} f(u) + u^2 \left(\frac{d}{du} f(u) \right)^2 \right) u^2 (f(u))^2 \right) + \\ & + \left(\frac{(4F^2 + u^2)u^2}{2F^2} - \left((f(u))^2 + 2f(u)u \frac{d}{du} f(u) + u^2 \left(\frac{d}{du} f(u) \right)^2 \right) u^2 - \frac{(4F^2 + u^2)u^2 (f(u))^2}{4F^2} \right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Для наших целей следует минимизировать функционал

$$\Phi(f) = \int_0^R L du.$$

Первая вариация V^* [11] функционала определяется из уравнения

$$\frac{4F^4 V^*}{u^4} = T_1 + T_2 + T_3 + T_4,$$

где

$$\begin{aligned} T_1 &= 96(f(u))^5 F^4 u^3 \left(\frac{d^2}{du^2} f(u) \right) \frac{d}{du} f(u) + 48(f(u))^4 F^4 u^4 \left(\frac{d}{du} f(u) \right)^2 \frac{d^2}{du^2} f(u) + \\ & + 96F^4 u^3 f(u) \left(\frac{d^2}{du^2} f(u) \right) \frac{d}{du} f(u) - 64F^2 u^3 \frac{d}{du} f(u) - 192F^4 u \frac{d}{du} f(u); \\ T_2 &= 160F^4 u^3 \left(\frac{d}{du} f(u) \right)^3 - 32F^4 u^2 \frac{d^2}{du^2} f(u) - 8F^2 u^4 \frac{d^2}{du^2} f(u) + 48(f(u))^3 F^4 + \\ & + 48(f(u))^7 F^4 - 96F^4 f(u) + 2u^4 f(u) - u^4 (f(u))^3 + 288(f(u))^2 F^4 u \frac{d}{du} f(u); \\ T_3 &= 288(f(u))^6 F^4 u \frac{d}{du} f(u) + 480(f(u))^5 F^4 u^2 \left(\frac{d}{du} f(u) \right)^2 + \\ & + 288(f(u))^4 F^4 u^3 \left(\frac{d}{du} f(u) \right)^3 + 48(f(u))^6 F^4 u^2 \frac{d^2}{du^2} f(u) + 48(f(u))^3 F^4 u^4 \left(\frac{d}{du} f(u) \right)^4; \\ T_4 &= 8(f(u))^2 F^4 u^2 \frac{d^2}{du^2} f(u) + 384u^2 f(u) \left(\frac{d}{du} f(u) \right)^2 F^4 + \\ & + 48F^4 u^4 \left(\frac{d}{du} f(u) \right)^2 \frac{d^2}{du^2} f(u) - 8(f(u))^3 F^2 u^2 - 32F^2 u^2 f(u). \end{aligned}$$

Воспользуемся прямым методом решения вариационной задачи, который по сути является методом Ритца [12, с. 397 и далее], но упрощенный благодаря тому обстоятельству, что минимизируемый функционал есть интеграл от строго положительного лагранжиана (2.3). В качестве координатных функций применим последовательные степени переменной u , таким образом, искомая функция примет вид

$$f(u) = 1 + \frac{qu}{F} + \frac{lu^2}{F^2} + \frac{pu^3}{F^3} + \dots, \quad (2.4)$$

где q, l, p – константы, подлежащие отысканию.

Подставив (2.4) в (1.5), и применяя разложение в окрестности точки $u = 0$ до 9-го порядка малости, получаем разложение нашего лагранжиана в виде

$$\begin{aligned} L = & 72 \frac{q^2 u^6}{F^2} - \frac{6u^7 q}{F^3} + 192 \frac{u^7 ql}{F^3} + 216 \frac{u^7 q^3}{F^3} + 864 \frac{u^8 q^2 l}{F^4} + 338 \frac{u^8 q^4}{F^4} + \\ & + 240 \frac{u^8 qp}{F^4} + \frac{u^8}{8F^4} - \frac{8u^8 l}{F^4} - \frac{3u^8 q^2}{F^4} + 128 \frac{u^8 l^2}{F^4} + o(u^9). \end{aligned}$$

Для выполнения требования об особой существенности равномерности деформаций вблизи вершины параболоида потребуем обращения в нуль коэффициентов при высших степенях переменной u – именно, при u^6 и u^7 . Тогда $q = 0, l = 1/32$. Теперь

$$f(u) = 1 + \frac{u^2}{32F^2} + \frac{pu^3}{F^3},$$

и наш функционал (вернее, функционал, деленный на F^5 , – для сокращения записи)

$$\begin{aligned} \Phi = \frac{1}{F^5} \int_0^F L du = & \frac{256}{29} p^8 + \frac{666}{13} p^7 + \frac{6919661}{55200} p^6 + \frac{5354721065983}{59528246722560} p^5 + \\ & + \frac{1402566198144293087}{59886036288798720} p^2 + \frac{98473225}{585728} p^5 + \frac{613321218044089}{4089682329600} p^4 + \\ & + \frac{4030848073775}{46506442752} p^3 + \frac{42698040381683}{484769179128299520} \end{aligned} \quad (2.5)$$

есть многочлен восьмой степени от p .

3. Минимизация функционала

К многочлену (2.5) применяем методы, обычные для алгебры многочленов [12, с. 288–290], [13, с. 214–235].

Для производной от (2.5) коэффициент при высшей степени равен $a_0 = \frac{2048}{29}$,

а максимум модуля прочих коэффициентов равен $A = \frac{492366125}{585728}$. Вещественные

корни (если они есть) располагаются в промежутке $(-N, N)$, где

$$N = 1 + \frac{A}{|a_0|} = \frac{15478188569}{1199570944} \approx 12,9031.$$

В качестве верхней оценки принимаем $N=13$. Далее строим ряд Штурма (не приводим здесь ввиду крайней громоздкости).

Зная границы вещественных корней и их количество, находим, что производная $\frac{d\Phi}{du}$ обращается в нуль в следующих вещественных точках (и только в них):

$$p_1 = -0,751842, \quad p_2 = -0,422277, \quad p_3 = -0,0019412.$$

Нетрудно проверить, что при $p = p_3 = -0,001942$ получаем наименьшее значение нашего функционала:

$$\Phi = \Phi_0 = 0,108604 \cdot 10^{-5}.$$

Таким образом, функция, доставляющая минимум данному функционалу и удовлетворяющая требованию наименьших искажений вблизи вершины параболоида, имеет вид (с точностью до принятой нами аппроксимации)

$$f(u) = 1,0 + 0,031250 \frac{u^2}{F^2} - 0,0019412 \frac{u^3}{F^3}. \quad (3.1)$$

Попутно решим следующий вопрос. Хотя мы интегрируем от 0 до F , реальный рефлектор может быть вырезан из родительского параболоида цилиндром радиуса R , не обязанного быть равным F . Применяя (3.1), определим радиус плоского диска из сетеполотна, необходимого для прикрепления его к несущим конструкциям в соответствии с нашими рекомендациями. Из (1.3) и (3.1) видно, что искомый радиус

$$R_0 = R \cdot f(R) = R \left(1,0 + 0,031250 \frac{R^2}{F^2} - 0,0019412 \frac{R^3}{F^3} \right),$$

а при $R = F$ получаем

$$R_0 = F \cdot f(F) = 1,029309 \cdot F.$$

Заметим, что оставаясь в пределах избранной нами точности, можем записать

$$f(u) = 1 + \frac{u^2}{32F^2} - 0,0019412 \frac{u^3}{F^3}.$$

Приведем графическую информацию (в относительных единицах) о локальных деформациях плоского диска при условии использования функции (2.4). Данные приведены для $F = 8$ м и $R = 8$ м.

Вероятно, наглядность приведенных диаграмм выиграет, когда мы дополним их пространственными диаграммами тех же величин.

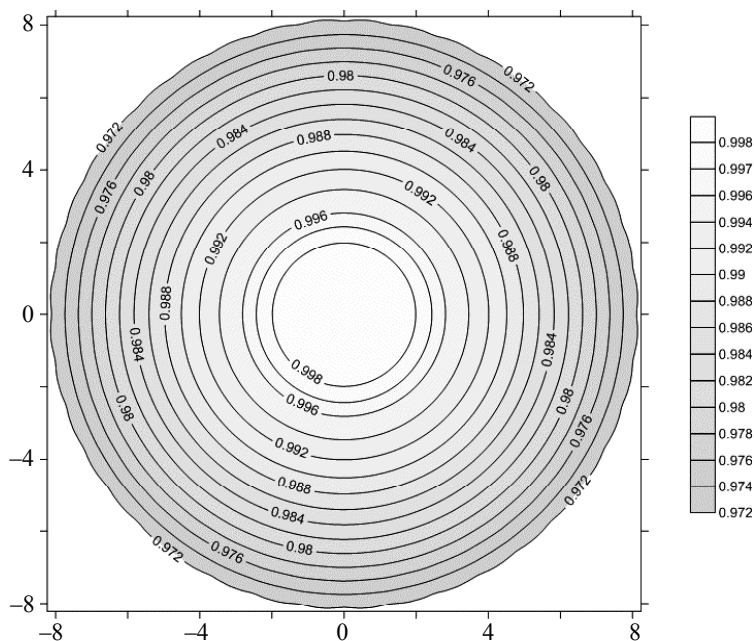


Рис. 4. Наименьшие значения локальных искажений длин на плоском диске относительно длин в соответствующих точках параболоида и их положения на диске

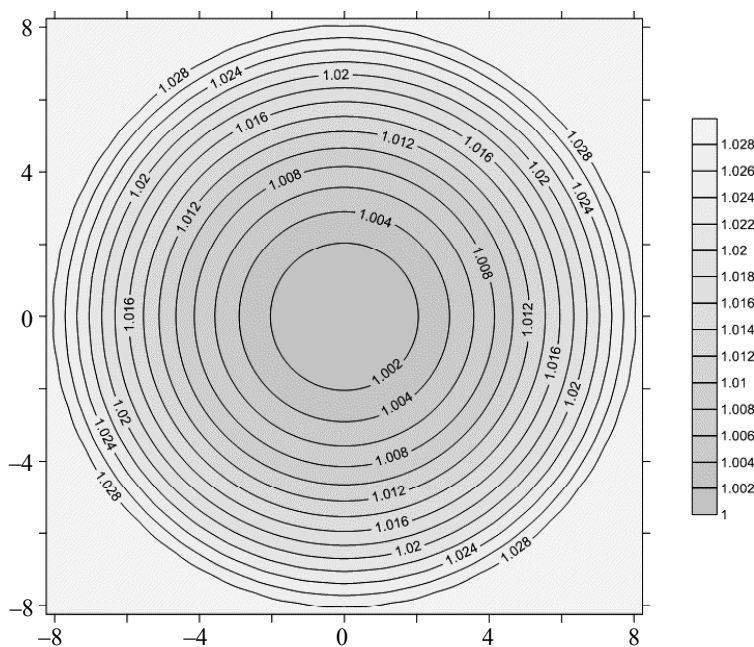


Рис. 5. Наибольшие значения локальных искажений длин на плоском диске относительно длин в соответствующих точках параболоида и их положения на диске

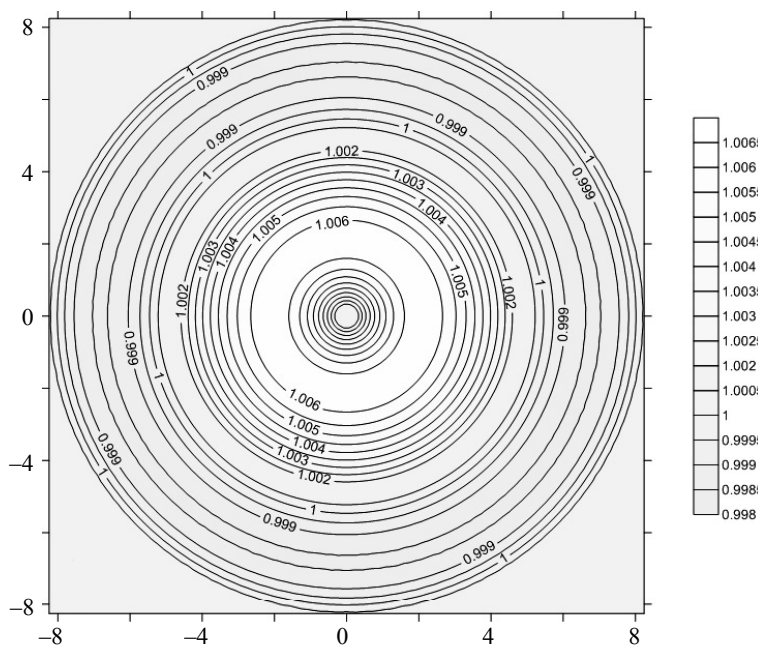


Рис. 6. Локальные искажения площади малых кусков плоского диска относительно площадей соответствующих малых кусков параболоида (относительные значения)

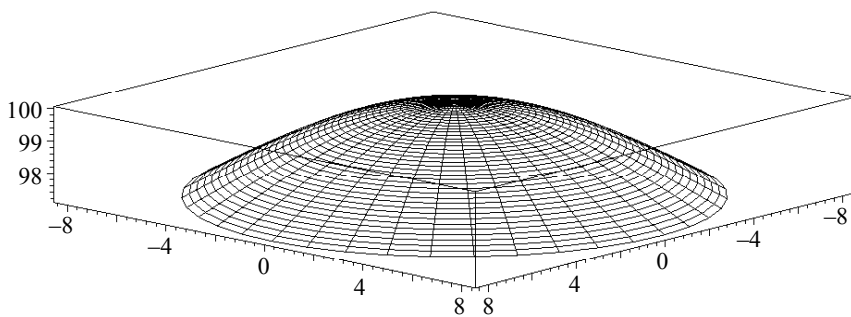


Рис. 7. Диаграмма наименьших локальных искажений длин. Величина умножена на 100

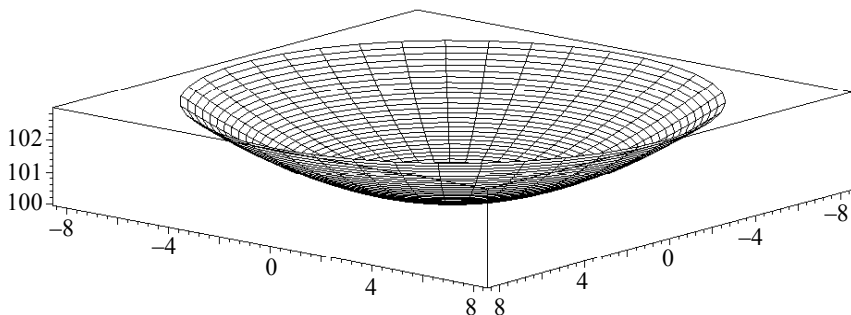


Рис. 8. Диаграмма наибольших локальных искажений длин. Величина умножена на 100

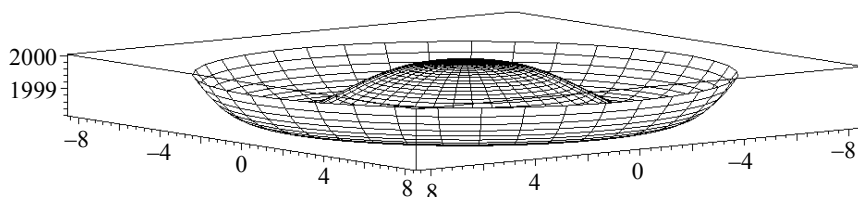


Рис. 9. Диаграмма локальных искажений по площади.
Величина умножена на 2000

4. Радиальный шов

Рассмотрим осевое сечение нашего параболоида, проведенное через ось абсцисс. Тогда в плоскости этих двух осей получаем параболу

$$R = \left\{ u, \frac{u^2}{4F} \right\}$$

и континуум точек на оси абсцисс, параметризованный тем же параметром

$$r = \left\{ u + \frac{u^3}{32F^2} - 0,0019412 \frac{u^4}{F^3}, 0 \right\}. \quad (4.1)$$

Точечное соответствие между этими линиями обеспечено отнесением их к одному параметру. При монтаже рефлектора соответствующие точки линий соединяются швом, длину стежка которого мы склонны считать пропорциональным дифференциалу длины дуги соответствующей вектор-функции. Тогда легко подсчитать отношение длины стежка на параболе к длине соответствующего стежка на линии (4.1):

$$W = \frac{F^2 \sqrt{4F^2 + u^2}}{2(F^3 + 0,09375u^2F - 0,0077648u^3)}.$$

Это выражение хорошо приближается формулой

$$W_s = 1 + \frac{u^2}{32F^2} + 0,0077648 \frac{u^3}{F^3}.$$

Полагая, как и раньше, $F = 8$, мы можем на соответствующем рисунке показать соответствие между точками прямолинейного отрезка и параболы на рис. 10.

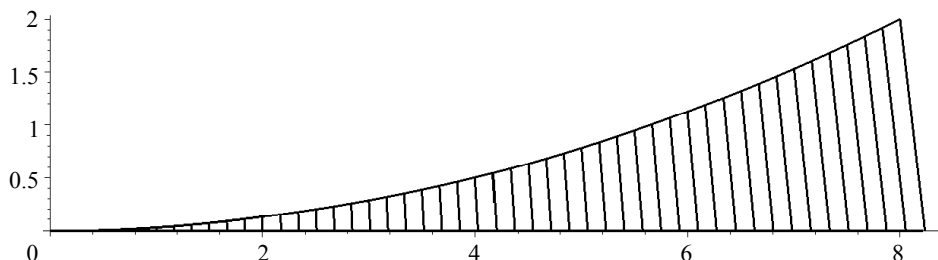


Рис. 10. Соответствие точек прямолинейного отрезка и точек параболы

5. Заключение

Данная статья демонстрирует вариационный подход к оптимизации (в определенном смысле) раскроя рефлектора из плоского диска сетеполотна. Содержательный смысл решенной задачи таков: если конструктор надеется путем установления поточечного соответствия плоского диска сетеполотна и куска параболоида добиться наилучшей равномерности натяжения, отдавая предпочтения окрестности технологического центра, то соответствие следует устанавливать так, как это рекомендовано в статье. Очевидно, что схема раскроя рефлектора по секторам (в зависимости от количества поддерживающих параболических ребер) обещает лучшее (то есть меньшее) значение минимизируемого функционала (1.2). Этот вопрос будет рассмотрен в продолжениях данной статьи.

Автор заранее благодарит за обсуждение результатов и неизбежную (надеюсь, благожелательную) критику.

ЛИТЕРАТУРА

1. Патент RU 2350518 C1, 13.06.2007.
2. Патент RU 2350519 C1, 13.06.2007.
3. Рытикова И.В. Разработка технологии формирования сложноконструктивных изделий из металлических трикотажных полотен технического назначения: дис. ... канд. технич. наук. М.: Моск. гос. текстильный университет, 2005.
4. Бухтяк М.С., Самылкина О.А. О раскрой сетеполотна для осесимметричного рефлектора // Всероссийская конференция по математике и механике: тезисы докладов. 2–4 октября 2013 г. Томск: ТГУ, 2013. С. 93.
5. Бутов В.Г., Бухтяк М.С., Пономарев С.В. Методика оптимального раскроя отражающей поверхности трансформируемых рефлекторов // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики (доклады IV Всеросс. научн. конф.) Томск, 5–7 октября 2005 г. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. С. 180–181.
6. Бухтяк М.С., Никульчиков А.В. Поля на поверхностях, находящихся в точечном соответствии // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 6(26). С. 56–69.
7. Погорелов А.В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М.: Наука, 1969. 760 с.
8. Фавар Ж. Курс локальной дифференциальной геометрии. М.: ИЛ, 1960. 559 с.
9. Раиеский П.К. Курс дифференциальной геометрии. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. 428 с.
10. Бухтяк М.С., Никульчиков А.В. Моделирование деформации сотовой панели // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 2(22). С. 5–16.
11. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 280 с.
12. Варден ван дер Б.Л. Алгебра. М.: Наука, 1976. 648 с.
13. Мишина А.П., Проскуряков И.В. Высшая алгебра. Линейная алгебра. Многочлены. Общая алгебра. М.: Наука, 1966. 300 с.

Статья поступила 24.03.2015 г.

Bukhtyak M.S., Solomina A.V. GEOMETRIC MODELING OF METALLIC MESH SHEET TAILORING FOR AN AXISYMMETRIC REFLECTOR. PART 1

DOI 10.17223/19988621/34/1

For a parabolic reflector-type antenna, an attachment of a reflecting metallic mesh sheet in a manner ensuring the least possible impact on radiophysical properties of the device is a crucial problem. It is clear that under different selected schemes of tailoring, the specified problem is solved (approximately) in different ways. The scheme of tailoring gives rise to a problem of op-

timum tailoring. Optimum tailoring can be understood in different ways. There is a well-known approach based on reducing the RMSD as much as possible, (root-mean-square deviation from an ideal surface). We however take different criteria as a basis for optimization – the degree of homogeneity of tension for the metallic mesh in different areas of the reflector (for example, the degree of metallic mesh stretching near the technological center should be a certain fraction of its degree of tension on the periphery). Usually, it is assumed that an acceptable result is achieved if there is a maximum tension at all the points of the reflector within some pre-specified limits, and minimal – also within the desirable limits (own ones). In this paper, we solve a problem of optimal tailoring, and optimality suggests the following conditions: extreme distortion of the relative length should be as close to unity, while the closer to the center of the paraboloid, the "stricter" specified condition must be satisfied.

Keywords: parabolic antenna, metallic mesh sheet, attachment, stretching, optimum.

BUKHTYAK Mikhail Stepanovich (Candidate of Physics and Mathematics,
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: bukhtyakm@mail.ru

SOLOMINA Anna Vladimirovna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: annavladimirovna483@mail.ru

REFERENCES

УДК 519.216.3

DOI 10.17223/19988621/34/2

Т.В. Емельянова, В.В. Конев

О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ ОЦЕНИВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО СИГНАЛА НА ФОНЕ АВТОРЕГРЕССИОННОГО ШУМА

Рассматривается задача оценивания коэффициентов тригонометрического сигнала с дискретным временем по наблюдениям с аддитивным шумом, описываемым стационарным процессом авторегрессии с неизвестными параметрами и распределением. Предлагается одноэтапная последовательная процедура, позволяющая оценить среднеквадратическую точность оценок при любых значениях мешающих параметров шума. Получена асимптотическая формула для средней длительности процедуры.

Ключевые слова: *последовательное оценивание, заданная среднеквадратическая точность, тригонометрическая регрессия, момент остановки, авторегрессионный шум.*

В последние годы разработаны различные эффективные методы оценивания параметров сигналов с дискретным и непрерывным временем на фоне аддитивных помех при различных уровнях априорной информации относительно типа сигналов и вида помех [1–3].

В случае дискретного времени проблема выделения сигналов наиболее полно изучена для случая помех, являющихся последовательностью независимых случайных величин. Менее изучена проблема оценивания параметров сигналов при шумах с неизвестными спектральными свойствами. Наличие дополнительных неизвестных (мешающих) параметров шума существенно усложняет задачу вычисления точности оценок параметров сигнала (см., например, [4]). В работе [5] построена последовательная процедура оценивания периодического сигнала на фоне авторегрессионных помех с неизвестными параметрами, обладающая хорошими асимптотическими свойствами и гарантирующая оценивание параметров сигнала с любой заданной среднеквадратической точностью. Эта процедура, однако, может оказаться достаточно сложной для практической реализации в случае многих неизвестных параметров, поскольку она требует построения системы из случайного числа оценок методом наименьших квадратов (МНК), путем сглаживания которых находится последовательная оценка.

В данной работе предлагается одноэтапная последовательная процедура оценивания параметров периодического сигнала при авторегрессионном шуме с неизвестными параметрами, которая дает возможность контролировать среднеквадратическую точность оценок.

Постановка задачи. Построение последовательной процедуры

Рассмотрим задачу оценивания параметров $\mu_1, \mu_2, \beta_{j1}, \beta_{j2}, j = 1, \dots, r$, тригонометрического сигнала

$$S_n = \mu_1 + (-1)^n \mu_2 + \sum_{j=1}^r \beta_{j1} \cos \omega_j n + \beta_{j2} \sin \omega_j n \quad (1)$$

$$\text{по наблюдениям} \quad x_n = S_n + \xi_n, \quad (2)$$

где ξ_n – шум, являющийся устойчивым процессом авторегрессии p -го порядка:

$$\xi_n = \lambda_1 \xi_{n-1} + \dots + \lambda_p \xi_{n-p} + \varepsilon_n. \quad (3)$$

Здесь $\{\varepsilon_n\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $E\varepsilon_n = 0$, $E\varepsilon_n^2 = \sigma^2$; $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ – неизвестные параметры, такие, что все корни характеристического полинома $P(z) = z^p - \lambda_1 z^{p-1} - \dots - \lambda_p$ лежат внутри единичного круга комплексной плоскости. Относительно известных параметров ω_j предположим, что $0 < \omega_j < \pi$, $\omega_i \neq \omega_j$ при $i \neq j$.

Известно, [1, с. 113] что тригонометрическим полиномом (1) может быть описан любой периодический сигнал с целочисленным периодом T , при этом

$$r = \left\lceil \frac{T-1}{2} \right\rceil, \quad \omega_j = \frac{2\pi j}{T}, \quad [a] \text{ обозначает целую часть числа } a.$$

С учетом (1) и (3), наблюдаемый процесс (2) удовлетворяет уравнению

$$x_n = m_1 + (-1)^n m_2 + \sum_{j=1}^r (\gamma_{j1} \cos \omega_j n + \gamma_{j2} \sin \omega_j n) + \sum_{k=1}^p \lambda_k x_{n-k} + \varepsilon_n, \quad n \geq p+1. \quad (4)$$

Здесь m_1, m_2, γ_{jl} и λ_k – неизвестные параметры, связанные с параметрами сигнала равенствами

$$\begin{aligned} m_1 &= \mu_1 \left(1 - \sum_{l=1}^p \lambda_l \right), \quad m_2 = \mu_2 \left(1 - \sum_{l=1}^p (-1)^l \lambda_l \right), \\ \gamma_{j1} &= \beta_{j1} \left(1 - \sum_{l=1}^p \lambda_l \cos \omega_j l \right) + \beta_{j2} \sum_{l=1}^p \lambda_l \sin \omega_j l, \\ \gamma_{j2} &= -\beta_{j1} \left(1 - \sum_{l=1}^p \lambda_l \sin \omega_j l \right) + \beta_{j2} \left(1 - \sum_{l=1}^p \lambda_l \cos \omega_j l \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Используя обозначения

$$Y_n = \begin{pmatrix} \Phi_n \\ X_{n-1} \end{pmatrix}, \quad X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_{n-p+1} \end{pmatrix}, \quad \Phi_n = \begin{pmatrix} \varphi_1(n) \\ \vdots \\ \varphi_{2r+2}(n) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$\varphi_1(n) = 1, \quad \varphi_2(n) = (-1)^n, \quad \varphi_k(n) = \cos \omega_{k-2} n \quad \text{при } 3 \leq k \leq r+2,$$

$$\varphi_k(n) = \sin \omega_{k-r-2} n \quad \text{при } r+3 \leq k \leq 2r+2,$$

запишем это уравнение в векторной форме:

$$X_n = \alpha' Y_n + \varepsilon_n, \quad n \geq p+1, \quad \text{где } Y_n = \begin{pmatrix} \Phi_n \\ X_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \Lambda, \quad (7)$$

где $\alpha = (m_1, m_2, \gamma_{11}, \gamma_{12}, \dots, \gamma_{r1}, \gamma_{r2})'$ – вектор оцениваемых параметров; Λ – множество всех допустимых значений вектора, учитывающее требования на параметры $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ в (3), штрих обозначает транспонирование.

Оценка по МНК вектора параметров α по наблюдениям процесса (7) имеет вид

$$\alpha(n) = M_n^{-1} \sum_{k=1}^n Y_k x_k, \quad (8)$$

где $M_n = \sum_{k=1}^n Y_k Y_k'$ – выборочная информационная матрица Фишера размера $l \times l$, $l = 2r + 2 + p$. Будем предполагать, что минимальное собственное значение $\lambda_1(M_n)$ матрицы M удовлетворяет с вероятностью единица условию $\lambda_1(M_n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Как следует из (7), обратная матрица M_n^{-1} в (8) является случайной. Это создает трудности при анализе среднеквадратической точности оценки вектора параметров α . Чтобы обойти эти трудности, предлагается использовать последовательную оценку МНК со специальным правилом прекращения наблюдений. Выбор такого правила можно осуществить, используя оценку уклонения оценки МНК в модели типа (7), полученную в [6]. Для процесса (7) эта оценка имеет вид

$$\|\alpha(n) - \alpha\|^2 \leq \|M_n^{-2}\| \cdot \|m_n\|^2, \text{ где } m_n = \sum_{k=1}^n Y_k \varepsilon_k. \quad (9)$$

Поскольку в силу условия на матрицу M множитель $\|M_n^{-2}\| = \sum_{j=1}^l \lambda_j^{-4}(M_n)$ в правой части (9) монотонно стремится к нулю с ростом объема выборки n , это можно использовать для выбора момента остановки $\tau(h)$ последовательной процедуры.

Для любого положительного h

$$\tau = \tau(h) = \inf \left\{ n \geq 1 : \|M_n^{-2}\|^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{h} \right\}. \quad (10)$$

Последовательную оценку МНК $\alpha^*(h)$ параметра α определим равенством

$$\alpha^*(h) = \tilde{M}_{\tau(h)}^{-1} \sum_{k=p+1}^{\tau(h)} \beta_k Y_k x_k, \quad (11)$$

где $\tilde{M}_{\tau(h)}^{-1} = \sum_{k=p+1}^{\tau(h)} \beta_k Y_k Y_k'$, $\beta_k = \begin{cases} 1, & \text{если } k < \tau(h), \\ v(h), & \text{если } k = \tau(h), \end{cases}$

а корректирующий множитель $v(h)$, находится из равенства

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^{\tau(h)-1} Y_k Y_k' + v(h) Y_{\tau(h)} Y_{\tau(h)}' \right) \right\|^{-2} = \frac{1}{h}. \quad (12)$$

В силу монотонности последовательности матриц $(M_n)_{n \geq 1}$ имеем $0 < v(h) \leq 1$.

Теоретические свойства последовательной процедуры

При изучении свойств последовательного плана (10), (11) в зависимости от выбора порога h будем предполагать, что вектор неизвестных параметров α в уравнении (7) принадлежит некоторому известному компакту K из параметрического множества Λ .

Результаты анализа последовательного плана (10), (11), относящиеся к средней длительности последовательной процедуры и качеству последовательных оценок неизвестных параметров, сформулируем в виде теорем.

Теорема 1. Пусть $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ – последовательность н.о.р. случайных величин, $E\varepsilon_n = 0$, $E\varepsilon_n^2 = \sigma^2$, $E\varepsilon_n^8 < \infty$, Λ – множество допустимых значений вектора параметров α . Тогда для любого компакта $K \subset \Lambda$

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in K} \left| E_\alpha \frac{\tau(h)}{h} - \|F^{-2}\|^{\frac{1}{2}} \right| = 0,$$

где предельная матрица F определена в (15).

Теорема 2. Для любого компактного множества $K \subset \Lambda$ среднеквадратическая точность последовательной оценки удовлетворяет неравенству

$$\sup_{\alpha \in K} E_\alpha \left(\|\alpha^*(h) - \alpha\|^2 \right) \leq \frac{b_K}{h} (1 + o(1)), \quad (13)$$

где $b_K = \sup_{\alpha \in K} \varphi(\alpha)$, $\varphi(\alpha) = Q(\alpha) \|F^{-2}\|^{\frac{1}{2}}$, где $o(1) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow \infty$, функция $Q(\alpha)$ определена в (43).

Доказательства теорем 1,2 приводятся в Приложении.

Замечание 1. Теорема 2 позволяет контролировать среднеквадратическую точность последовательной оценки с помощью выбора порога h , с учетом того, что величина b_K может быть вычислена априори. При этом средняя длительность процедуры, согласно теореме 1, растет линейно с ростом h .

Замечание 2. В простейшем случае при оценивании сигнала

$$S_n = \theta \cos n$$

по наблюдениям

$$x_n = S_n + \xi_n,$$

где ξ_n – шум, являющийся устойчивым процессом авторегрессии первого порядка,

$$\xi_n = \lambda \xi_{n-1} + \varepsilon_n,$$

предельная матрица F , определенная в (15), будет иметь вид

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{\theta}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\theta}{2} & 0 & \frac{1}{1-\lambda^2} + \frac{\theta^2}{2} \end{pmatrix}.$$

Зададим компакт K равенством

$$K = \{(\theta, \lambda), 0.2 \leq \theta \leq 0.7, -0.6 \leq \lambda \leq 0.6\}.$$

В этом случае $b_K = \sup_K Q(\alpha) \cdot \|F^{-2}\|_2^{\frac{1}{2}} = 61.964$.

Заключение

В работе построена последовательная процедура оценивания параметров тригонометрического сигнала, наблюдаемого на фоне авторегрессионного шума. Используется специальное правило прекращения наблюдений, определяемое по выборочной информационной матрице Фишера, которое позволяет контролировать заданную среднеквадратическую точность оценок неизвестных параметров.

Результаты работы могут быть использованы в задачах автоматического управления и идентификации.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Доказательство теоремы 1.

Доказательство теоремы 1 основывается на предельных свойствах выборочной информационной матрицы Фишера M_N , построенной по N наблюдениям процесса (7). В работе [5] установлено, что последовательность векторов $\{Y_n\}$, определенная в (7) при $\lambda \in \Lambda$, с вероятностью единица удовлетворяет предельному соотношению

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=p+1}^N Y_n Y_n' = F, \quad (14)$$

где F – положительно определенная матрица, имеющая вид

$$F = \begin{bmatrix} M_0 & M_1 \\ M_1' & F_0 + D M_0 D' \end{bmatrix}, \text{ в которой } M_0 = \text{diag}\left(1, 1; \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right), \quad (15)$$

$$V_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & (-1)^k & & 0 \\ & & V_1(k) & V_2(k) \\ 0 & & -V_2(k) & V_1(k) \end{pmatrix}, \quad (16)$$

причем $V_1(k) = \text{diag}(\cos \omega_1 k, \dots, \cos \omega_r k)$, $V_2(k) = \text{diag}(\sin \omega_1 k, \dots, \sin \omega_r k)$,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_p \\ I_{p-1} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \Gamma = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{r1} & \gamma_{r2} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$D = \sum_{k \geq 0} A^k \Gamma V(k), M_1 = M_0 V'(1) D', F_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=p+1}^N \zeta_n \zeta_n' \text{ п.н.,}$$

$$\zeta_n = A \zeta_{n-1} + \eta_n, \zeta_p = 0, \eta_n = (\varepsilon_n, 0, \dots, 0)'.$$

Заметим, что матрица M_n , удовлетворяющая (14), обладает требуемым свойством $\lambda_{\min}(M_n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Кроме свойства (14) нам требуется оценить скорость сходимости матрицы $\frac{M_N}{N}$ к предельному значению F .

Лемма 1. Пусть $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ в (3) последовательность н.о.р. случайных величин с $E\varepsilon_n = 0$, $E\varepsilon_n^2 = \sigma^2$, $E\varepsilon_n^8 < \infty$. Тогда

$$\sup_{\alpha \in K} E_\alpha \left\| \frac{M_N}{N} - F \right\|^4 \leq \frac{L}{N^2}. \quad (18)$$

Доказательство леммы 1 достаточно громоздко и приводится после доказательства теоремы 1.

Используя лемму 1 и схему доказательства теоремы 3.1 из [6], можно показать, что $\lim_{h \rightarrow +\infty} \sup_{\alpha \in K} E_\alpha \frac{\tau(h)}{h} < +\infty$.

Далее имеем оценку

$$\begin{aligned} \left| E_\alpha \frac{\tau(h)}{h} - \|F^{-2}\|^{\frac{1}{2}} \right| &= \left| E_\alpha \left\| \left(\frac{\tilde{M}_{\tau(h)}}{\tau(h)} \right)^{-2} \right\|^{\frac{1}{2}} - \|F^{-2}\|^{\frac{1}{2}} \right| \leq \\ &\leq \Delta + E_\alpha \left[\frac{\tau(h)}{h} \chi \left(\left\| \frac{\tilde{M}_{\tau(h)}}{\tau(h)} - F \right\| \geq \eta \right) \right] + \|F^{-2}\|^{\frac{1}{2}} P_\theta \left(\left\| \frac{\tilde{M}_{\tau(h)}}{\tau(h)} - F \right\| \geq \eta \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь Δ – некоторая положительная постоянная.

Для анализа асимптотического поведения правой части этого неравенства будет использоваться следующий результат из работы [6].

Лемма 2. Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда для любого компакта $K \subset \Lambda$ и произвольного η верно неравенство

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in K} P_\theta \left(\left\| \frac{M_{\tau(h)}}{\tau(h)} - F \right\| \geq \eta \right) = 0. \quad (20)$$

Используя эту оценку, можно показать, что аналогичное предельное соотношение выполняется и для второго слагаемого в правой части (19). Теорема 1 доказана.

2. Доказательство леммы 1. Учитывая (7), запишем процесс (5) в векторной форме

$$X_n = AX_{n-1} + \Gamma\Phi_n + \eta_n, \quad n \geq p+1, \quad (21)$$

где A , Γ и η_n определены в (17).

I_{p-1} – единичная матрица порядка $p-1$.

Отсюда

$$X_n = A^{n-p} X_p + \zeta_n + W_n, \quad n \geq p, \quad (22)$$

где $\zeta_n = A\zeta_{n-1} + \eta_n$, $\zeta_p = 0$, $W_n = \sum_{j=0}^{n-p-1} A^j \Gamma \Phi_{n-j}$.

Тогда выборочная информационная матрица Фишера будет иметь вид

$$\frac{M_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{n=p+1}^N Y_n Y_n' = \begin{pmatrix} \frac{1}{N} \sum_{n=p+1}^N \Phi_n \Phi_n' & \frac{1}{N} \sum_{n=p+1}^N \Phi_n X_{n-1}' \\ \frac{1}{N} \sum_{n=p+1}^N X_{n-1} \Phi_n' & \frac{1}{N} \sum_{n=p+1}^N X_{n-1} X_{n-1}' \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Отсюда, выделив компакт K из параметрической области Λ с помощью элементарного неравенства, получаем

$$\sup_{\alpha \in K} E_{\alpha} \left\| \frac{M_N}{N} - F \right\|^4 \leq 4^3 \left(\|A_N\|^4 + \sup_{\alpha \in K} E_{\alpha} \|B_N\|^4 + 2 \sup_{\alpha \in K} E_{\alpha} \|C_N\|^4 \right), \quad (24)$$

где
$$A_N = \frac{1}{N} \sum_{n=p+1}^N \Phi_n \Phi_n' - M_0, \quad B_N = \frac{1}{N} \sum_{n=p+1}^N X_{n-1} X_{n-1}' - (F_0 + D M_0 D'), \quad (25)$$

$$C_N = \frac{1}{N} \sum_{n=p+1}^N X_{n-1} \Phi_n' - M_1'.$$

Покажем, что для A_N , B_N и C_N выполняются неравенства

$$\|A_N\|^4 \leq \frac{L_1}{N^4}; \quad (26)$$

$$\sup_{\alpha \in K} E_{\alpha} \|B_N\|^4 \leq \frac{L_2}{N^2}; \quad (27)$$

$$\sup_{\alpha \in K} E_{\alpha} \|C_N\|^4 \leq \frac{L_3}{N^2}, \quad (28)$$

где $L_i, i=1,2,3$, – некоторые положительные постоянные.

Неравенство (26) можно легко проверить, учитывая периодичность компонент вектора Φ в (7) и определение M_0 в (11).

Подставляя X_N в C_N , с помощью элементарного неравенства, получим

$$\sup_{\alpha \in K} E_{\alpha} \|C_N\|^4 \leq 4^3 \sup_{\alpha \in K} (E_{\alpha} G_N + E_{\alpha} H_N + E_{\alpha} Q_N), \quad (29)$$

где

$$G_N = \left\| \frac{1}{N} \sum_{m=p}^{N-1} A^{m-p} X_p \Phi_{m+1}' \right\|^4,$$

$$H_N = \left\| \frac{1}{N} \sum_{m=p}^{N-1} \zeta_m \Phi_{m+1}' \right\|^4,$$

$$Q_N = \left\| \frac{1}{N} \sum_{m=p}^{N-1} W_m \Phi_{m+1}' - M_1' \right\|^4, \quad M_1 = M_0 V'(1) D'.$$

Учитывая оценку $\sum_{m=1}^{\infty} \|A^m\| \leq \sum_{m=1}^{\infty} Cq^m$, $0 < q < 1$, и ограниченность нормы вектора Φ_{m+1} , имеем

$$\sup_{\alpha \in K} G_N \leq \frac{C}{N^4} E_{\alpha} \|X_p\|^4 \cdot \sum_{m=p}^{N-1} \|A^{m-p}\|^4 \cdot \|\Phi'_{m+1}\| \leq \frac{C_1}{N^4} \sum_{m=p}^{N-1} q^{m-p} \leq \frac{L}{N^4}. \quad (30)$$

Меняя порядок суммирования и используя неравенство Бургхольдера для $p = 4$, для математического ожидания H_N получим

$$\sup_{\alpha \in K} E_{\alpha} H_N = E_{\alpha} \left\| \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-p-2} A^j \sum_{l=j+1}^{N-p-1} \eta_{l+p-j} \Phi'_{l+p+1} \right\|^4 \leq \frac{C(2r+2)B_4^4}{(1-q)N^2} \leq \frac{C_1}{N^2}. \quad (31)$$

Записав W_n в виде

$$W_n = D\Phi_n + \Delta_n, \quad (32)$$

где $D = \sum_{k \geq 0} A^k \Gamma V(k)$, $\Delta_n = - \sum_{k \geq n-p} A^k \Gamma V(k) \Phi_n$, и учитывая, что $\Phi_m = V(1) \cdot \Phi_{m+1}$,

оценим Q_N :

$$\begin{aligned} Q_N &\leq C \left\| \frac{1}{N} DV(1) \sum_{m=p}^{N-1} \Phi_{m+1} \Phi'_{m+1} - M_1' \right\|^4 + \left\| \frac{1}{N} \sum_{m=p}^{N-1} \Delta_m \Phi'_m \right\|^4 \leq \\ &\leq C \left(\left\| DV(1) \left(\frac{1}{N} \sum_{m=p+1}^N \Phi_m \Phi'_m - M_0 \right) \right\|^4 + \left\| \sum_{k \geq m} A^k \Gamma V(k) \right\|^4 \left\| \frac{1}{N} \sum_{m=p}^{N-1} \Phi_m \Phi'_m \right\|^4 \right) \leq \frac{C_1}{N^4}. \end{aligned} \quad (33)$$

Подставляя (30), (31), (33) в (29), приходим к (28). Учитывая (22), для B_N , получим следующее неравенство:

$$\sup_{\alpha \in K} E_{\alpha} \|B_N\|^4 \leq C \sum_{i=1}^6 \sup_{\alpha \in K} E_{\alpha} I_i(N), \quad (34)$$

где

$$I_1(N) = \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=p+1}^N A^{n-p-1} X_p X_p' (A^{n-p-1})' \right\|^4, \quad I_2(N) = 2 \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=p}^N \zeta_n W_n' \right\|^4,$$

$$I_3(N) = 2 \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=p}^N \zeta_n X_p' (A^{n-p-1})' \right\|^4, \quad I_4(N) = 2 \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=p}^N A^{n-p} X_p W_n' \right\|^4,$$

$$I_5(N) = \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=p+1}^N W_n W_n' - DM_0 D \right\|^4, \quad I_6(N) = \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=p}^N \zeta_n \zeta_n' - F_0 \right\|^4.$$

Оценим слагаемые правой части этого неравенства. Первое слагаемое допускает оценку

$$\sup_{\alpha \in K} E_{\alpha} I_1(N) \leq \frac{C}{N^4} E_{\alpha} \|X_p\|^8 \sum_{n=p+1}^N q^{8N} \leq \frac{C_1 E_{\alpha} \|X_p\|^8}{N^4}. \quad (35)$$

Записав ζ_n в виде

$$\zeta_n = \sum_{m=0}^{n-p-1} A^m \eta_{n-m}, \quad (36)$$

изменив порядок суммирования, с помощью неравенств Коши и Бургхольдера [7] для второго слагаемого получим неравенство

$$\sup_{\alpha \in K} E_{\alpha} I_2(N) \leq \frac{C}{N^4 (1-q)^3} \sum_{m=0}^{N-p} q^m B_4^4 (N-p)^2 < \frac{C_1}{N^2}. \quad (37)$$

Используя аналогичные рассуждения, для $I_3(N)$ имеем оценку

$$\sup_{\alpha \in K} E_{\alpha} I_3(N) \leq \frac{C_2 E_{\alpha} \|X_p\|^4}{N^2}. \quad (38)$$

Поскольку норма вектора W_n ограничена, четвертое слагаемое удовлетворяет неравенству

$$\sup_{\alpha \in K} E_{\alpha} I_4(N) \leq \frac{C E_{\alpha} \|X_p\|^4}{N^4}. \quad (39)$$

Учитывая (22) и (32), для I_5 получаем

$$I_5(N) \leq C \left(\left\| \frac{1}{N} D \left(\sum_{n=p}^N \Phi_n \Phi_n' - M_0 \right) D' \right\|^4 + 2 \left\| \frac{1}{N} \Delta_m \Phi_n' D' \right\|^4 + \frac{1}{N^4} \|\Delta_m\|^8 \right) \leq \frac{C}{N^4}. \quad (40)$$

Как показано в [6], скорость сходимости последнего слагаемого $I_6(N)$ в (34) допускает оценку

$$\sup_{\alpha \in K} E_{\alpha} I_6(N) = \sup_{\alpha \in K} E_{\alpha} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=p}^N \zeta_n \zeta_n' - F_0 \right\|^4 \leq \frac{L}{N^2}, \quad (41)$$

где L – некоторая положительная постоянная, F_0 определено в (17).

Используя оценки (35), (37) – (41) в (31), получаем утверждение леммы 1.

3. Доказательство теоремы 2. Оценка $\alpha^*(h)$, определенная в (12), удовлетворяет для любого $h > 0$ неравенству

$$E_{\alpha} \|\alpha^*(h) - \alpha\|^2 \leq \frac{E_{\alpha} \text{tr} M_{\tau(h)}}{h^2}. \quad (42)$$

Для проверки этого неравенства достаточно применить оценку (9) для уклонения оценки $\alpha^*(h)$ и заменить n на момент остановки $\tau(h)$, определенный в (10).

Далее нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ – н.о.р. случайные величины, $E\varepsilon_n = 0$, $E\varepsilon_n^2 = \sigma^2 < +\infty$.

Тогда для любого $h > 0$

$$E_\alpha \text{tr} \tilde{M}_\tau \leq Q(\alpha) E_\alpha \tau + m \sqrt{E_\alpha \tau} + U, \quad (43)$$

где

$$Q(\alpha) = \text{tr} F_0 + 2r + 2 + (2r + 2)^2 \left(\|D\|^2 + \frac{c}{1-q} \right),$$

$$m = \frac{c\sigma}{1-q} (2r + 2) (\|D\| + \|\Gamma\|), \quad U = \frac{c}{1-q} ((2r + 2)\|D\| + 2) E_\alpha \|X_p\|.$$

Доказательство. Поскольку

$$\text{tr} M_N = \text{tr} \sum_{h=p+1}^N (\Phi_n \Phi_n') + \text{tr} \sum_{h=p+1}^N X_{n-1} X_{n-1}', \quad (44)$$

то учитывая (22), получим

$$\text{tr} M_N \leq (N - p - 1)(2r + 2) + \sum_{k=1}^6 I_k, \quad \text{где} \quad (45)$$

$$I_1 = \text{tr} \sum_{n=p+1}^N A^{n-p-1} X_p X_p' (A^{n-p-1})', \quad I_2 = 2 \text{tr} \sum_{n=p+1}^N \zeta_{n-1} X_p' (A^{n-p-1})',$$

$$I_3 = 2 \text{tr} \sum_{n=p+1}^N A^{n-p-1} X_p W_{n-1}', \quad I_4 = \text{tr} \sum_{n=p+1}^N W_{n-1} W_{n-1}',$$

$$I_5 = \text{tr} \sum_{n=p+1}^N \zeta_{n-1} \zeta_{n-1}', \quad I_6 = 2 \text{tr} \sum_{n=p+1}^N \zeta_{n-1} W_{n-1}'.$$

Оценим математическое ожидание I_k , $k = \overline{1, 6}$. Учитывая, что $\sum_{k=1}^{\infty} \|A^k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} c q^k$, где

$0 < q < 1$, получим

$$E_\alpha I_1 \leq E_\alpha \|X_p\| \cdot \frac{c q^{2(p+1)}}{1 - q^2}. \quad (46)$$

Учитывая, что

$$\zeta_n = \sum_{m=0}^{n-p-1} A^m \eta_{n-m}, \quad (47)$$

имеем

$$E I_2 \leq \sum_{m=0}^{N-p-1} \|A^m\| \cdot \left\| \sum_{l=m+1}^{N-p} \eta_{l+p-m} X_p' (A')^{l-1} \right\| \leq \frac{c \sigma^2}{(1-q)^2} E_\alpha \|X_p\|. \quad (48)$$

Используя (32), для математического ожидания I_3 получим неравенство

$$E_\alpha I_3 \leq \frac{c}{1-q} (\|D\| \cdot \|\Phi_n\| + 1) E_\alpha \|X_p\|. \quad (49)$$

Подставляя (32) в выражение для I_4 , имеем

$$I_4 \leq (N-p-1) \left[(2r+2)^2 \cdot \|D\| \right] + c \cdot \frac{q^{2(n-p)}}{1-q^2} + (2r+2) \sum_{k \geq 1} \text{tr} \left(A^k \Gamma V(k) \right) = \\ = (N-p-1) \cdot L(r), \quad (50)$$

где $L(r)$ – некоторая положительная постоянная.

По лемме 3.1 из [6] математическое ожидание I_5 при замене N на $\tau(h)$ удовлетворяет неравенству

$$I_5 \leq (\text{tr } F_0) E_\alpha \tau + \sum_{j \geq 0} \text{tr } A^j E_\alpha \zeta_p \zeta_p' (A')^j. \quad (51)$$

Подставляя (22) в выражение для I_6 и учитывая (29), получим $I_6 = 2J_1 + 2J_2$, где

$$J_1 = \text{tr} \sum_{k=p+1}^{N-p} \zeta_k \Phi_k' D', \quad J_2 = -\text{tr} \sum_{k=p+1}^{N-p} \zeta_k \Phi_k' \Delta_k. \quad \text{Замечая, что } \Phi_{n-k} = V(k) \Phi_n, \text{ и используя (42), имеем}$$

$$J_1 \leq \sum_{l=0}^{N-2p-1} \|A^l\| \cdot \|V^{-1}(l)\| \cdot \|D\| \cdot \left\| \sum_{m=p+1}^{N-p} \eta_m \Phi_m \right\| \leq L \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{2r+2} \left(\sum_{m=p+1}^{N-p} \varepsilon_m \langle \Phi_m \rangle_j \right)^2}, \quad (52)$$

где $L = \frac{c \|V^{-1}(l)\| \cdot \|D\|}{1-q}$.

Так как Δ_k – остаток сходящегося ряда, то J_2 допускает аналогичную оценку.

Заменяя N на $\tau(h)$, переходя к усечённым моментам и используя лемму Фату для математического ожидания I_6 , получим

$$E_\alpha I_6 \leq L \sigma \sqrt{E_\alpha \tau(h)}. \quad (53)$$

Подставляя (46), (48) – (51), (53) в (45), получаем утверждение леммы.

Лемма 3 доказана.

Используя лемму 3 в (42) и применяя теорему 1, приходим к утверждению теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. М.: Мир, 1976.
Anderson T.W. *The statistical analysis of time series*. New York: John Wiley & Sons, 2011.
2. Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З. Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979.
Ibragimov I.A., Khasminsky R.Z. *Asymptotic estimation theory*. New York: Springer-Verlag, 1981.
3. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
Liptser R., Shiryaev A.N. *Statistics of Random Processes*. New York: Springer, 2001.
4. Конев В., Пергаменичников С. On guaranteed estimation of the mean of an autoregressive process // Ann. Statist. 1997. V. 25. No. 5. P. 2127–2163.
5. Конев В.В., Пергаменичников С.М. Гарантированное оценивание периодического сигнала на фоне авторегрессионных помех с неизвестными параметрами // Проблемы передачи информации. 1997. Т. 3. Вып. 4.

6. Galtchouk L., Konev V. On Sequential Least Squares Estimates of Autoregressive Parameters // Sequential Analysis. 2005. V. 24. No. 4. P. 335–364.

7. Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1989.

Shiryayev A.N. *Probability*. New York: Springer, 1996.

Статья поступила 11.02.2015 г.

Emel'yanova T.V., Konev V.V. ON SEQUENTIAL ESTIMATION OF A PERIODIC SIGNAL ON THE BACKGROUND OF AN AUTOREGRESSIVE NOISE

DOI 10.17223/19988621/34/2

We consider the problem of estimating coefficients of a trigonometric signal in a discrete time from observations with an additive noise described by a stationary autoregressive process with unknown parameters and unknown distribution. A one-step sequential procedure to estimate signal coefficients is proposed, which provides a given root-mean-square accuracy of estimates for any values of the nuisance parameters. An asymptotic formula for the mean duration of the procedure is constructed.

Keywords: sequential estimation, given root-mean-square accuracy, trigonometric regression, stopping time, autoregressive noise.

EMEL'YANOVA Tatiana Veniaminovna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: tv_em@mail.ru

KONEV Viktor Vasil'evich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: vvkonev@mail.tsu.ru

REFERENCES

УДК 519.46

DOI 10.17223/19988621/34/3

Г.Г. Пестов, А.И. Забарина, А.А. Тоболкин, Е.А. Фомина

О 2-УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУППАХ

Приведены новые примеры двумерно упорядоченных групп. Доказано, что в двумерно упорядоченной группе существует не более одной инволюции. Доказано, что в двумерно упорядоченной группе прямая $l_{e,a}$ является подгруппой, если и только если она замкнута относительно возведения каждого элемента группы в квадрат.

Ключевые слова: *двумерный порядок, 2-упорядоченная группа, инволюция, прямая.*

Исследование алгебраических систем, снабжённых различными структурами порядка, имеет давнюю и богатую историю. Сюда относятся работы по линейно упорядоченным группам, решёточно упорядоченным группам, по частично упорядоченным кольцам и телам и линейно упорядоченным полям.

В эту область математики внесли выдающийся вклад Р. Дедекин, Д. Гильберт, Дж. Нойман, Г. Биркгоф, А. И. Мальцев, Ф. Холл, Р. Бэр, Е. Артин, О. Шрайер, И. Капланский, Ю. Л. Ершов, А. И. Кокорин, В. М. Копытов.

Настоящая статья относится к этой быстро развивающейся области математики. Она содержит новые интересные результаты по теории двумерно упорядоченных групп.

1. Основные понятия и результаты теории 2-упорядоченных групп

Напомним основные понятия, связанные с двумерно упорядоченными группами [1].

Определение двумерного порядка в аксиоматической форме.

Определение 1.1. Пусть M – непустое множество и на M^3 задана функция $\zeta(x, y, z)$, принимающая значения 0, 1, -1 и удовлетворяющая следующим условиям:

A1. Функция $\zeta(x, y, z)$ меняет значение на противоположное при каждой перестановке двух аргументов.

A2. Если $A \subset M$, $|A| = 4$ и существуют $a, b, c \in A$, такие, что $\zeta(a, b, c) \neq 0$, то:

а) Для каждой пары $x, y \in A$ найдётся $z \in A$, такое, что $\zeta(x, y, z) \neq 0$;

б) существует такая пара $a, b \in A$, что для $x, y \in A \setminus \{a, b\}$ выполнено $\zeta(a, b, x) = \zeta(a, b, y) \neq 0$.

A3. $(A \subset M, |A| = 5 \wedge a, b \in A) \rightarrow \exists c \in A \wedge \exists \varepsilon = \pm 1 (\forall x \in A \setminus \{a, b\} (\zeta(a, c, x) \neq 0 \rightarrow \zeta(a, b, x) = \varepsilon \zeta(a, c, x)))$.

Пара $\langle M, \zeta \rangle$ называется **2-упорядоченным (или двумерно упорядоченным) множеством**. Функция $\zeta(x, y, z)$ называется **функцией двумерного порядка** на множестве M .

Определим двумерный порядок через отображение в ориентированную плоскость.

Определение 1.2. Введём естественную ориентацию плоскости. Пусть x, y, z есть точки плоскости $\mathbf{R}^2$. Если обход тройки точек (x, y, z) происходит против ча-

совой стрелки, то полагаем $\eta(x, y, z) = 1$. Если обход происходит по часовой стрелке, полагаем $\eta(x, y, z) = -1$. Наконец, если точки x, y, z расположены на одной прямой, то принимаем $\eta(x, y, z) = 0$. Функцию $\eta(x, y, z)$ назовём **естественной ориентацией плоскости $\mathbf{R}^2$** . Разумеется, функцию $\eta(x, y, z)$ легко задать как знак соответствующего определителя:

$$\eta(x, y, z) = \text{sg} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & y_1 & y_2 \\ 1 & z_1 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Определение 1.3. Если для множества $A \subset M$, $|A| \leq 5$ существует инъективное отображение $\phi: A \rightarrow \mathbf{R}^2$, такое, что

$$\forall x, y, z \in A \quad \zeta(x, y, z) = \eta(\phi(x), \phi(y), \phi(z)),$$

то говорят, что ϕ есть реализация множества A в плоскости $\mathbf{R}^2$ или что множество A реализуемо в $\mathbf{R}^2$.

Если каждое множество $A \subset M$, $|A| \leq 5$, реализуемо в $\mathbf{R}^2$, то пара $\langle M, \zeta \rangle$ называется **двумерно упорядоченным множеством**. В дальнейшем вместо «двумерно упорядоченное множество $\langle M, \zeta \rangle$ » будем часто говорить «двумерно упорядоченное множество M ». Порядок ζ в двумерно упорядоченном множестве $\langle M, \zeta \rangle$ называется **невырожденным**, если $\zeta(x, y, z)$ не обращается тождественно в нуль на M . Более полные сведения о двумерно упорядоченных множествах представлены в [1].

Определение 1.4. Пусть на группе G задан двумерный порядок $\zeta(x, y, z)$. Будем говорить, что порядок $\zeta(x, y, z)$ **согласован с групповой операцией**, если для всех элементов x, y, z, a группы G выполнено

$$\zeta(ax, ay, az) = \zeta(xa, ya, za) = \zeta(x, y, z).$$

Группу с заданным на ней двумерным порядком, согласованным с групповой операцией, назовём **двумерно упорядоченной группой**.

Более общее определение n -упорядоченной группы см. в [2].

2. Примеры 2-упорядоченных групп

Пример 2.1. Простейшим примером 2-упорядоченной группы является аддитивная группа комплексных чисел со стандартным 2-порядком $\langle \mathbf{C}, +, \eta \rangle$.

Пример 2.2. Мультипликативная группа комплексных чисел со стандартным 2-порядком $\langle \mathbf{C}^*, \cdot, \eta \rangle$.

Пример 2.3. Каждая циклически упорядоченная группа $\langle G, \cdot, \omega \rangle$ является двумерно упорядоченной группой [3].

Пример 2.4. Внешняя 2-упорядоченная группа.

Теорема 2.1. Пусть $\langle G, \cdot, \zeta \rangle$ есть 2-упорядоченная группа. Тогда ультрастепень $\langle {}^*G, \cdot, {}^*\zeta \rangle$ также есть 2-упорядоченная группа.

Доказательство. Напомним аксиомы двумерного порядка:

$$A1. \forall x, y, z \in G \quad \zeta(x, y, z) = -\zeta(y, x, z), \quad \zeta(x, y, z) = -\zeta(z, y, x).$$

$$A2a. (A \subset G \wedge |A| = 4 \wedge \exists a, b, c \in A \quad \zeta(a, b, c) \neq 0) \rightarrow (\forall x, y \in A \quad \exists z \in A \quad \zeta(x, y, z) \neq 0),$$

$$A2b. \exists a, b \in A \quad \forall x, y \in A \setminus \{a, b\} \quad (\zeta(a, b, x) = \zeta(a, b, y) \neq 0).$$

$$A3. (A \subset M, |A| = 5 \wedge a, b \in A) \rightarrow \exists c \in A \wedge \exists \varepsilon = \pm 1 \quad (\forall x \in A \setminus \{a, b\} \quad (\zeta(a, c, x) \neq 0 \rightarrow \zeta(a, b, x) = \varepsilon \zeta(a, c, x))).$$

Применяя к A1 – A3 принцип переноса (*transfer principle*) [4], получим

$$A1^*. \forall x, y, z \in {}^*G \zeta(x, y, z) = -\zeta(y, x, z), \zeta(x, y, z) = -\zeta(z, y, z).$$

$$A2^*a. (A \subset {}^*G \wedge |A| = 4 \wedge \exists a, b, c \in A \zeta(a, b, c) \neq 0) \rightarrow (\forall x, y \in A \exists z \in A \zeta(x, y, z) \neq 0),$$

$$A2^*б. \exists a, b \in A \forall x, y \in A \setminus \{a, b\} (\zeta(a, b, x) = \zeta(a, b, y) \neq 0).$$

$$A3^*. (A \subset {}^*G \wedge |A| = 5 \wedge a, b \in A) \rightarrow$$

$$[\exists c \in A \wedge \exists \varepsilon = \pm 1 (\forall x, y \in A \setminus \{a, b\} (\zeta(a, c, x) \neq 0 \rightarrow \zeta(a, b, x) = \varepsilon \zeta(a, c, x)))].$$

Итак, *G есть 2-упорядоченное множество.

Далее, порядок в группе G согласован с операцией умножения:

$$\forall x, y, z, a \in G \zeta(ax, ay, az) = \zeta(xa, ya, za) = \zeta(x, y, z).$$

По принципу переноса имеем

$$\forall x, y, z, a \in {}^*G \zeta(ax, ay, az) = \zeta(xa, ya, za) = \zeta(x, y, z).$$

Порядок в *G согласован с алгебраической операцией.

Пример внешней 2-упорядоченной группы

Мультипликативная группа комплексных чисел C со стандартным 2-порядком η есть 2-упорядоченная группа. Группа $\langle {}^*C, \cdot, {}^*\eta \rangle$, согласно теореме 2.1 также есть двумерно упорядоченная группа. Обозначим через H подмножество *C , состоящее из таких элементов $x \in {}^*C$, что $(|x| - 1)$ есть бесконечно малая. Итак:

$$H = \{x \in {}^*C \mid (|x| - 1) \in \mu(0)\}.$$

Покажем, что H есть подгруппа группы *C . Пусть $x, y \in H$. Тогда

$$x = 1 + \alpha, y = 1 + \beta; \alpha, \beta \in \mu(0).$$

Имеем

$$xy = 1 + (\alpha + \beta) + \alpha\beta = 1 + \gamma; \gamma \in \mu(0),$$

отсюда $xy \in H$.

Далее:

$$x^{-1} = (1 + \alpha)^{-1},$$

$$|1 - x^{-1}| = \left| \frac{\alpha}{1 + \alpha} \right| < \frac{|\alpha|}{1 - 1/2} = 2|\alpha|.$$

Итак, $|1 - x^{-1}| \in \mu(0)$, значит, $x^{-1} \in H$. Таким образом, H – подгруппа *C . Так как *C – абелева группа, то $H \triangleleft {}^*C$.

Докажем, что группа H есть внешнее множество. Прямая $l_{0,1}$ есть внутреннее множество. Пересечение $H \cap l_{0,1}$ есть множество $\mu(-1) \cap \mu(1)$. Это внешнее множество. Поскольку пересечение двух внутренних множеств есть внутреннее множество, то множество H – внешнее. Итак, $\langle H, \cdot, {}^*\eta \rangle$ является внешней двумерно упорядоченной группой.

Пример 2.5. На каждой линейно упорядоченной, в том числе и неабелевой, группе можно задать 2-порядок, согласованный с операцией [5]. Таким образом, получаем целый класс неабелевых 2-упорядоченных групп.

Теорема 2.2. Каждая конечная двумерно упорядоченная группа является абелевой, более того, циклической группой [3].

Следствие 2.3. Каждая двумерно упорядоченная неабелева группа – бесконечна.

Пример 2.6. Нестандартный двумерный порядок на C .

Теорема 2.4. Пусть T_0 – тороидальная группа, L – произвольная линейно упорядоченная группа, тогда $T_0 \times L$ допускает 2-упорядочивание.

Доказательство. Обозначим двумерную функцию порядка на группе T_0 через ω , а линейную функцию порядка на группе L через ζ_1 . Группу T_0 будем интерпретировать как окружность, а L будем называть прямой. Тогда структура группы $G = T_0 \times L$ выглядит так: в каждой точке окружности проведена перпендикулярная ориентированная прямая (направление от центра окружности) бесконечно малого масштаба по сравнению с самой окружностью. Каждый элемент $g = (t, l)$ группы G в этой интерпретации определяется следующим образом: первая координата показывает, что этот элемент принадлежит прямой с индексом t и на этой прямой занимает место l .

Введем на группе G двумерную функцию порядка ζ_2 . Покажем, как действует ζ_2 на кортеже:

$$g = (g_1, g_2, g_3) \in G^3, \text{ где } g_k = (t_k, l_k), t_k \in T_0, l_k \in L.$$

Для удобства положим: $t = (t_1, t_2, t_3)$, $l = (l_1, l_2, l_3)$. Рассмотрим несколько случаев по мощности $\text{set}(t)$.

Случай первый: $|\text{set}(t)| = 3$, т. е. все элементы t попарно различны. Положим

$$\zeta_2(g) = \omega(t).$$

Второй случай: $|\text{set}(t)| = 2$, т. е. среди элементов t ровно два одинаковых. Не умаляя общности, можно считать $t_1 = t_2$. Покажем, как ζ_2 действует на тройки (t_1, l_1) , (t_2, l_2) , (t_3, l_3) . Так как функция порядка должна согласовываться с алгебраической структурой группы, то умножим исходную тройку на $(t_1^{-1}, 1)$ – поворот на «угол» t_1 по часовой стрелке. Получим

$$(1, l_1), (1, l_2), (t_1^{-1}t_3, l_3).$$

Прямая $(1, L)$ разбивает окружность на положительный (верхний) и отрицательный (нижний) конусы.

Пусть $l_1 < l_2$. Тогда:

Если $t_1^{-1}t_3$ попадает в строго положительный конус, то положим $\zeta_2(g) = 1$.

Если $t_1^{-1}t_3$ попадает в строго отрицательный конус, то положим $\zeta_2(g) = -1$.

Если $t_1^{-1}t_3$ принадлежит пересечению конусов, то положим $\zeta_2(g) = 0$.

Если $l_1 > l_2$, то все знаки меняются на противоположные.

Если $l_1 = l_2$, то положим $\zeta_2(g) = 0$ независимо от того, куда попадает $t_1^{-1}t_3$. Другими словами, положим

$$\zeta_2(g) = \zeta_1(l_1, l_2)\omega(t_3^{-1}t_1, 1, t_1^{-1}t_3).$$

В случае $|\text{set}(t)| = 1$ положим $\zeta_2(g) = 0$.

Функция ζ_2 задается явным образом как произведение функций порядка ζ_1 и ω , которые согласованы с алгебраической структурой групп L и T_0 соответственно. Поэтому ζ_2 согласована с алгебраической структурой группы G .

Проверим реализацию $\langle G, \zeta_2 \rangle$ на $\langle \mathbf{R}^2, \eta \rangle$. Покажем, что для каждого $S \subset G$, $|S| = 5$, существует инъекция $\phi: S \rightarrow \mathbf{R}^2$ такая, что $\forall g \in S^3$ выполняется: $\zeta_2(g) = \eta(\phi(g))$.

Переобозначим некоторые ранее введенные переменные. Пусть

$$s \in S^5, s_j = (t_j, l_j), t_j = \exp(\alpha_j i), t = (t_1, \dots, t_5), l = (l_1, \dots, l_5), j = \overline{1, 5}.$$

Шаг 1. Отметим на комплексной плоскости C точки $t_j = \exp(\alpha_j i)$. Если $|\text{set}(t)| \leq 2$, то сразу переходим ко второму шагу. Если $|\text{set}(t)| \geq 3$, то выберем из t произвольную тройку различных элементов $t_{j_1}, t_{j_2}, t_{j_3}$ ($1 \leq j_1 \leq j_2 \leq j_3 \leq 5$). Рассмотрим функцию

$$\rho(x, y, z): G^3 \rightarrow [0, +\infty),$$

которая равна расстоянию от точки z до прямой, проходящей через точки x и y .

Если $x = y$, то значение функции $\rho(x, y, z)$ равно расстоянию между точками x и z . Точки $t_{j_1}, t_{j_2}, t_{j_3}$ являются различными точками окружности, поэтому $\rho(t_{j_1}, t_{j_2}, t_{j_3}) > 0$. Пусть

$$\varepsilon = \min_{j_1, j_2, j_3} \rho(t_{j_1}, t_{j_2}, t_{j_3}).$$

В силу непрерывности ρ получаем

$$\exists \delta > 0 \forall \tau_{j_1}, \tau_{j_2}, \tau_{j_3} \in \mathbb{C}.$$

Как только выполнены неравенства

$$\rho(\tau_{j_1}, t_{j_1}) < \delta, \rho(\tau_{j_2}, t_{j_2}) < \delta, \rho(\tau_{j_3}, t_{j_3}) < \delta,$$

то справедливо неравенство

$$\rho(\tau_{j_1}, \tau_{j_2}, \tau_{j_3}) > \varepsilon.$$

Шаг 2. В δ -окрестности каждой точки t_j проведём ориентированные отрезки (направление от центра), перпендикулярные окружности $|z| = 1$. Отрезок, проходящий через точку t_j , обозначим a_j . Если на прямой (t_j, L) в группе G расположена только одна точка s_j , то положим $\phi(s_j) = t_j$. Если таких точек несколько $s_{j_1}, \dots, s_{j_n}$ (без потери общности можно считать $l_{j_1} < l_{j_2} \dots < l_{j_n}$), то на отрезке a_j выберем произвольные n точек

$$z_{j_1} <_{a_j} \dots <_{a_j} z_{j_n},$$

причём положим $\phi(s_{j_k}) = z_{j_k}$, где $k = \overline{1, 5}$. Таким образом, мы построили алгоритм реализации 5-элементного множества $S \subset G$.

Итак, функция ζ_2 согласована с алгебраической структурой группы G , и каждое 5-элементное подмножество G реализуемо в $\mathbb{R}^2$, т.е. $\langle G, \zeta_2 \rangle$ есть 2-упорядоченная группа. #

Следствие. Мультипликативная группа комплексных чисел допускает нестандартный 2-порядок.

3. Свойства двумерно упорядоченных групп

Определение 3.1. Пусть $\langle M, \zeta \rangle$ есть 2-упорядоченное множество, $a, b \in M$; $a \neq b$. Множество всех таких $x \in M$, что $\zeta(a, b, x) = 0$, называется *прямой*, проходящей через a и b , и обозначается $l_{a,b}$ [1].

Определение 3.2. Если для всех $x \in M \setminus \{a, b\}$ выполнено $\zeta(a, b, x) > 0$, то $\{a, b\}$ называется *внешней гранью* множества $\langle M, \zeta \rangle$ [1].

В [6] доказана

Теорема 3.1. Пусть $\langle G, \cdot, \zeta \rangle$ есть невырожденная двумерно упорядоченная группа и для некоторого натурального n выполнено $g^n \in Z(G)$. Тогда $g \in Z(G)$.

Следствие 3.2. Периодическая часть двумерно упорядоченной группы есть её нормальный делитель.

Обратимся к инволюциям двумерно упорядоченной группы. Пусть

$$H = \{x \in G \mid x^2 = e\}$$

или, что то же самое

$$H = \{x \in G \mid x = x^{-1}\}.$$

Справедлива следующая

Теорема 3.3. Для каждой 2-упорядоченной группы $\langle G, \cdot, \zeta \rangle$ с невырожденным порядком выполнено неравенство $|H| \leq 2$.

Иными словами, в каждой невырожденной двумерно упорядоченной группе существует не более одной инволюции.

Доказательство от противного. Предположим, что $|H| > 2$. Заметим, что H – подгруппа G .

Действительно, так как $H \subset Z(G)$, то

$$\forall h_1, h_2 \in H (h_1 h_2^{-1})^2 = h_1 h_2^{-1} h_1 h_2^{-1} = h_1 h_2 h_1 h_2 = h_1 h_1 h_2 h_2 = h_1^2 h_2^2 = e.$$

Следовательно, имеем

$$|H| \geq 4.$$

Рассмотрим $S \subset H$: $S = \{e, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$. Здесь все элементы попарно различны.

1) Предположим, что $\zeta(e, \alpha, \beta) \neq 0$.

Не нарушая общности, можно считать, что $\zeta(e, \alpha, \beta) = 1$. Отсюда, в силу инвариантности ζ , получаем

$$\zeta(\alpha, e, \alpha\beta) = 1, \zeta(\beta, \alpha\beta, e) = 1, \zeta(\alpha\beta, \beta, \alpha) = 1.$$

Покажем, что в невырожденном множестве $\langle S, \zeta \rangle$ нет внешних граней. Действительно, так как

$$\zeta(e, \alpha, \alpha\beta) \neq \zeta(e, \alpha, \beta),$$

множество $\{e, \alpha\}$ не является внешней гранью. Непосредственно проверяется, что каждое из множеств

$$\{e, \beta\}, \{e, \alpha\beta\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \alpha\beta\}, \{\beta, \alpha\beta\}$$

также не является внешней гранью в $\langle S, \zeta \rangle$. Получили противоречие с аксиомой A2 в определении двумерно упорядоченного множества. Следовательно, $\zeta(e, \alpha, \beta) = 0$. Отсюда: $\zeta(\alpha, e, \alpha\beta) = \zeta(e, \beta, \alpha\beta) = 0$.

2) Рассмотрим прямую

$$l_{e,\alpha} = \{x \in G \mid \zeta(e, \alpha, x) = 0\}.$$

Если

$$\forall g \in G (g \in l_{e,\alpha}),$$

то

$$\zeta \equiv 0 \text{ на } G.$$

Следовательно, существует $c \in G \setminus l_{e,\alpha}$. Бинарное отношение, заданное на $l_{e,\alpha}$:

$$\forall x, y \in l_{e,\alpha} (x < y \leftrightarrow \zeta(c, x, y) = 1),$$

является отношением линейного порядка на $l_{e,\alpha}$ [1].

Не нарушая общности, будем считать, что

$$\zeta(c, e, \alpha) = 1.$$

Для краткости обозначим

$$\zeta(c, e, \alpha) = \zeta_c(e, \alpha)$$

(Функция ζ_c называется проекцией двумерного порядка ζ на прямую $l_{e,\alpha}$ из c [1].)

Заметим, что

$$\zeta(c\alpha, \alpha, e) = 1.$$

Тогда

$$\zeta(c\alpha, e, \alpha) = -1.$$

Следовательно,

$$c\alpha \notin l_{e,\alpha},$$

причём

$$\zeta_c(e, \alpha) = -\zeta_{c\alpha}(e, \alpha).$$

Согласно [1],

$$\forall x, y \in l_{e,\alpha} (\zeta_c(x, y) = -\zeta_{c\alpha}(x, y)).$$

Так как

$$\forall x, y \in S (\alpha x \in S, \alpha y \in S)$$

то

$$\zeta_c(\alpha x, \alpha y) = -\zeta_{c\alpha}(\alpha x, \alpha y) = -\zeta_c(x, y).$$

Заметим, что $\beta \in l_{e,\alpha}$, следовательно, $l_{e,\alpha} = l_{e,\beta}$. Значит,

$$\forall x, y \in S (\zeta_c(\beta x, \beta y) = -\zeta_c(x, y)).$$

Таким образом, $\forall x, y \in S (\zeta_c(\alpha x, \alpha y) = \zeta_c(\beta x, \beta y)).$

Положим $x = \beta, y = \alpha.$

Имеем $\zeta_c(\alpha\beta, e) = \zeta_c(e, \alpha\beta).$

Так как ζ_c есть функция линейного порядка, то отсюда следует, что

$$\zeta_c(\alpha\beta, e) = 0,$$

что неверно, так как $\alpha\beta \neq e.$ Полученное противоречие доказывает теорему. #

Таким образом, $|H| \leq 2,$ то есть в $\langle G, \cdot, \zeta \rangle$ не может быть более **одной** инволюции.

Группу H будем называть *группой инволюций*.

Рассмотрим примеры группы инволюций в некоторых 2-упорядоченных группах.

В группе $\langle \mathbf{C}, +, \eta \rangle$ группа инволюций состоит только из нулевого элемента:

$$H = \{0\}, |H| = 1; H - \text{вырожденная.}$$

В $\langle \mathbf{C}^*, \cdot, \eta \rangle$ $H = \{-1, 1\}, |H| = 2.$

В $\langle T_0 \times \Gamma, \cdot, \zeta \rangle$ $H = \{(1, e), (-1, e)\}, |H| = 2.$

В $\langle \mathbf{C}_{2n}, \cdot, \zeta \rangle$ $H = \{-1, 1\}, |H| = 2.$

4. Прямые в двумерно упорядоченной группе

С использованием доказанных результатов обратимся теперь к изучению прямых $l_{e,a}.$

Имеет место

Теорема 4.1. Прямая $l_{e,a}$ является подгруппой 2-упорядоченной группы $\langle G, \cdot, \zeta \rangle$ тогда и только тогда, когда она замкнута относительно возведения в квадрат своих элементов:

$$\forall x \in l_{e,a} (x^2 \in l_{e,a}).$$

Доказательство. Необходимость очевидна.

Обратимся к достаточности. Для её доказательства нам понадобится следующая

Лемма 4.2. Пусть $u, u^2 \in l_{e,a}.$ Тогда $u^{-1} \in l_{e,a}.$

Доказательство. Действительно, согласно [1],

$$\zeta(e, u, u^2) = 0.$$

Значит, $\zeta(u^{-1}, e, u) = 0.$

Так как $l_{e,a} = l_{e,u}$ и $u^{-1} \in l_{e,u},$

то $u^{-1} \in l_{e,a}.$ #

Достаточность. Пусть теперь $b, c \in l_{e,a}.$ Убедимся, что $bc^{-1} \in l_{e,a}.$

Рассмотрим возможные случаи:

(1) Пусть $o(b) = 2.$

Согласно теореме 3.3,

$$c \neq c^{-1}, c^2 \neq e.$$

Используя условие теоремы и лемму 4.2, получаем

$$\{e, b, c, c^2, c^{-1}, a\} \subset l_{e,a}.$$

Отсюда имеем $\zeta(b, c, c^2) = 0,$

то есть $\zeta(bc^{-1}, e, c) = 0.$

Так как $l_{e,c} = l_{e,a}$,

то $bc^{-1} \in l_{e,a}$.

(2) Пусть $o(b) \neq 2$, $o(c) \neq 2$. Вышеприведённые рассуждения остаются в силе.

(3) Пусть $o(c) = 2$.

Следовательно, $b \neq b^{-1}$, $b^2 \neq e$.

Так как $c = c^{-1}$,

то $\zeta(c^{-1}, e, b) = 0$.

Следовательно, $\zeta(bc^{-1}, b, b^2) = 0$.

Учитывая тот факт, что $b \neq b^2$, получаем

$$l_{e,b}^2 = l_{e,a}.$$

Следовательно, $bc^{-1} \in l_{e,a}$.

Теорема доказана. #

Следствие 4.3. Пусть $\langle G, \cdot, \zeta \rangle$ – 2-упорядоченная группа, $\alpha \in G$, $o(\alpha) = 2$. Тогда $l_{e,\alpha} \triangleleft G$.

Доказательство. Согласно доказанной теореме 4.1, достаточно убедиться, что

$$\forall x \in G (x \in l_{e,\alpha} \rightarrow x^2 \in l_{e,\alpha}).$$

Пусть $x \in l_{e,\alpha}$, то есть $\zeta(e, x, \alpha) = 0$. В силу инвариантности:

$$\zeta(\alpha, x\alpha, e) = 0,$$

то есть $x\alpha \in l_{e,\alpha}$.

Так как $x\alpha \neq x$,

то $l_{e,\alpha} = l_{x\alpha,x}$.

Заметим, что $\zeta(x, x^2, \alpha x) = 0$,

следовательно, $x^2 \in l_{x,\alpha x}$.

Значит, $x^2 \in l_{e,\alpha}$.

Таким образом, $l_{e,\alpha}$ – подгруппа G .

Так как $\alpha \in Z(G)$ [6], то из условия $x \in l_{e,\alpha}$ непосредственно следует, что

$$\forall g \in G \zeta(e, x^g, \alpha) = 0,$$

то есть $l_{e,\alpha} \triangleleft G$. #

Проиллюстрируем доказанную теорему.

1) а) Рассмотрим аддитивную группу комплексных чисел с естественной ориентацией: $\langle \mathbf{C}, +, \eta \rangle$. Тогда для каждого $b \in \mathbf{R}$, $b \neq 0$ имеем

$$l_{0,b} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbf{R}\} \text{ изоморфна } \langle \mathbf{R}, + \rangle.$$

Очевидно, $l_{0,b} \triangleleft \mathbf{C}$.

б) В этой же группе прямая

$$l_{0,i} = \{(0, y) \mid y \in \mathbf{R}\} \triangleleft \mathbf{C}.$$

в) И наконец, пусть $z = a + bi$, где $ab \neq 0$.

Так как

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & b \\ 1 & x & y \end{vmatrix} = ay - bx,$$

то
$$l_{0,z} = \{(x, y) \mid ay - bx = 0\} = \left\{ \left(x, \frac{bx}{a} \right) \mid x \in \mathbf{R} \right\}.$$

Так как
$$\forall x \in \mathbf{R} \left(\left(x, \frac{bx}{a} \right) + \left(x, \frac{bx}{a} \right) = \left(2x, \frac{2bx}{a} \right) \in l_{0,z} \right),$$

то
$$l_{0,z} \triangleleft \mathbf{C}.$$

2) Обратимся к группе $\langle \mathbf{C}^*, \cdot, \eta \rangle$.

Пусть $b \in \mathbf{R}, b \neq 0, b \neq 1$. Имеем

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 1 & x & y \end{vmatrix} = y(b-1).$$

Следовательно,
$$l_{1,b} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbf{R}^*\} \triangleleft \mathbf{C}^*.$$

Однако
$$l_{1,i} = \{(x, 1-x) \mid x \in \mathbf{R}\}.$$

Очевидно,
$$l_{1,i} \ntriangleleft \mathbf{C}^*.$$

3) Пусть $\langle G, \cdot, < \rangle$ – произвольная линейно упорядоченная группа. Положим

$$\forall x, y \in G \quad (\zeta_1(x, y) = 1 \leftrightarrow x < y).$$

Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$. Положим

$$\zeta_2(x) = \prod_{1 \leq i \leq j \leq 3} \zeta_1(x_i, x_j).$$

В [5] доказано, что $\langle G, \cdot, \zeta_2 \rangle$ – 2-упорядоченная группа. Тогда

$$\forall g \in G \setminus \{e\} \quad (l_{e,g} = \{e, g\}).$$

Так как $g^2 \neq e$, то
$$l_{e,g} \ntriangleleft G.$$

5. Группы бесконечно узкого поля

Один из разделов теории двумерного порядка изучает двумерно упорядоченные поля.

Определение 5.1. Поле $\langle P, +, \cdot, \zeta \rangle$ называется *двумерно упорядоченным полем*, если функция двумерного порядка ζ , заданная на P , согласована с алгебраической структурой поля.

В любом 2-упорядоченном поле можно рассматривать две двумерно упорядоченные группы: $\langle P, +, \zeta \rangle$ и $\langle P^*, \cdot, \zeta \rangle$.

Определение 5.2. Базой P_0 двумерно упорядоченного поля P называется множество

$$P_0 = \{x \in P \mid \zeta(0, 1, x) = 0\}$$

База P_0 является линейно упорядоченным полем.

Определение 5.3. Верхним конусом P^μ поля P называется множество

$$P^\mu = \{x \in P \mid \zeta(0, 1, x) \geq 0\}.$$

В [1] показано, что верхний конус однозначно определяет двумерный порядок в поле. Поэтому часто 2-упорядоченное поле обозначают $\langle P, P^\mu \rangle$.

Определение 5.4. Пусть $\langle P, P^\mu \rangle$ – двумерно упорядоченное поле с базой P_0 . Элемент $a \in P$ называется *бесконечно близким к базе* P_0 , если

$$\forall n \forall r \in P_0 \quad (r < a) \Rightarrow (a - r)^n \in P^\mu$$

или

$$\forall n \forall r \in P_0 \quad (r < a) \Rightarrow (a - r)^n \in -P^\mu.$$

Множество B бесконечно близких к базе элементов относительно операций сложения и умножения образует *бесконечно узкое* поле $\langle B, +, \cdot \rangle$ [7].

Известно [8, 9], что бесконечно узкие поля допускают как линейное, так и двумерное упорядочивания. В частности, в [10] показано, что в поле $\langle \mathbf{Q}(\pi), +, \cdot \rangle$ кроме линейного порядка можно задать двумерное упорядочивание ζ , такое, что $\langle \mathbf{Q}(\pi), +, \cdot, \zeta \rangle$ есть бесконечно узкое поле. Мультипликативная и аддитивная группы бесконечно узких полей доставляют ещё один класс двумерно упорядоченных групп.

Обзор работ по n -упорядоченным группам по состоянию на 2007 г. содержится в [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Пестов Г.Г. Двумерно упорядоченные поля. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2003. 128 с.
2. Забарина А.И., Пестов Г.Г. Об n -мерно упорядоченных группах // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2003. № 280. С. 40–43.
3. Забарина А.И. О циклически упорядоченных группах: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.06. Томск, 1984. 84 с.
4. Văth M. Nonstandard Analysis. Basel: Birkhäuser Verlag, 2007. 252 p.
5. Тоболкин А.А. К теории n -упорядоченных групп: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.06. Томск, 2009. 71 с.
6. URL: <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000370652>
7. Забарина А.И., Пестов Г.Г. Двумерно упорядоченные группы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2009. № 1 (13). С. 5–8.
8. Пестов Г.Г., Фомина Е.А. Подполе B бесконечно близких к базе элементов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2009. № 2 (6). С. 41–47.
9. Пестов Г.Г., Фомина Е.А. Конструкция бесконечно узкого двумерно упорядоченного поля // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2007. № 1(1). С. 50–53.
10. Фомина Е.А. Критерий бесконечно узкого поля // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2009. № 1(5). С. 27–30.
11. Фомина Е.А. К вопросу о бесконечно близких к базе элементах // XIII Всероссийская конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Наука и образование» (20–24 апреля 2009 г.): в 6 т. Т. 1. Естественные и точные науки. Томск: Изд-во ТГПУ, 2009. С. 25–28.
12. Избранные вопросы алгебры. Сборник статей, посвящённый памяти Н.Я. Медведева. Барнаул: Изд-во Алтайского государственного университета, 2007. 310 с.

Статья поступила 15.03.2015 г.

Pestov G.G., Zabarina A.I., Tobolkin A.A., Fomina E.A. ON 2-ORDERED GROUPS

DOI 10.17223/19988621/34/3

Let $h(x, y, z)$ denote the standard orientation of the plane $\mathbf{R}^2$. Let M be a non-empty set, $\zeta: M \rightarrow \{0, +1, -1\}$.

If for every subset A of a set M , $|A| \leq 5$, there exists a map $\phi: A \rightarrow \mathbf{R}^2$, such that $x, y, z \in A$ implies

$$\zeta(x, y, z) = \eta(\phi(x), \phi(y), \phi(z)),$$

then (M, ζ) is called a 2-ordered set and ζ is called a 2-order function on M .

If ζ is a 2-order function on a group G such that for every x, y, z, a from the group G the equality

$$\zeta(ax, ay, az) = \zeta(xa, ya, za) = \zeta(x, y, z)$$

holds, then G is said to be a 2-ordered group.

The paper contains new examples of 2-ordered groups. It is proved that every 2-ordered group contains only one involution or none. A criterion is formulated for a straight line in a 2-ordered group G to be a subgroup of G .

Keywords: two-dimensional order, 2-ordered group, involution, straight line.

PESTOV German Gavrilovich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: gpestov@mail.ru

ZABARINA Anna Ivanovna (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State Pedagogical University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: aizabarina@gmail.com

TOBOLKIN Anton Aleksandrovich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk Academic Lyceum, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: tobantal@gmail.com

Fomina Elena Anatolievna (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State Pedagogical University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: ef254@mail.ru

REFERENCES

МЕХАНИКА

УДК 536.24.023:53.083.6:53.083.92

DOI 10.17223/19988621/34/4

И.А. Бабушкин, А.Н. Кондрашов, К.А. Рыбкин, И.О. Сбоев

РАЗВИТИЕ ТЕПЛОВОГО ПЛЮМА В УЗКОМ ВЕРТИКАЛЬНОМ СЛОЕ¹

Проведены лабораторные исследования развития в узком вертикальном слое жидкости фронта тепловой волны, создаваемой точечным подогревом снизу. Наблюдение за полем температуры осуществлялось в ИК-диапазоне излучения. Получена тепловая картина внутренней поверхности широких границ рабочей полости. Для узкого слоя жидкости построена зависимость скорости роста плюма от мощности источника тепла. Проведено сравнение результатов с экспериментальными работами других авторов, а также с предложенной теорией для движения фронта волны вдали от источника тепла и границ полости.

Ключевые слова: *узкий вертикальный слой, локальный подогрев, тепловой плюм.*

Известно, что закономерности образования и движения литосферных плит, выхода пород на земную поверхность, а также извержения вулканов в геологии основаны на предположении существования мантийных потоков внутри Земли [1, 2]. Их развитие происходит за счет появления локальных градиентов температуры на границе мантии и ядра. При описании этих процессов рассматривается модель конвекции от точечного источника тепла в средах с большим числом Прандтля. В газах и жидкостях с небольшим числом Прандтля под действием как точечного, так и протяженного источника тепла способна развиваться неустойчивость, по форме напоминающая гриб. В литературе подобное явление получило название «плюм», а сам процесс носит ламинарный или турбулентный характер [3].

В природе непрерывно происходит теплообмен между различными системами, и состояние окружающей среды редко остается неизменным. Это приводит к различным ситуациям, в которых становится возможным распространение тепловых плюмов. Так, в океанах тепловые плюмы проявляются в виде потоков нагретого вещества, связанных с активностью геотермальных источников, а в атмосфере они играют важную роль в образовании облаков [1, 3, 4]. Стоит отметить, что возникающие в таких условиях конвективные течения приобретают дополнительные свойства, благодаря появлению центробежной силы. Эффект, связанный с влиянием такой силы на тепломассоперенос, наблюдался в экспериментах [5]. В указанной работе действие центробежной силы на конвективный факел более детально изучалось численными методами.

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №14-01-31430 мол_а).

Тепловые плюмы, создаваемые в промышленных установках в ходе химических реакций, способны оказывать влияние на кинетику и направление протекания реакции, а также на выход конечных продуктов. Поэтому для решения ряда прикладных задач требуется более детальное изучение этого явления. К примеру, работа [6] посвящена исследованию режимов распространения плюмов в ячейке Хеле – Шоу, возникающих на границе раздела двух сред в результате межфазной экзотермической реакции. Интересным является тот факт, что в этом исследовании энергия в систему поступает от внутреннего источника. Описанный в работе механизм часто обнаруживается в химических реакторах.

Тепловое воздействие остается не единственной причиной возникновения плюмов. В работе [7] показано, что организация потока также возможна в процессе впрыскивания вещества с одним значением плотности в среду, имеющую другое значение плотности.

Одна из первых попыток классификации плюмов принадлежит Тернеру, проводившему исследования в 1970-х гг. Исходя из условий подогрева, в своих работах он предложил различать «плюмы» и «термики». Первые образуются в жидкости при постоянном подогреве, а вторые возникают в результате кратковременной подачи тепла. В зависимости от геометрических параметров нагревателя тепловые плюмы бывают трехмерными или двумерными [8]. Последующая классификация проводилась для осесимметричного случая и заключалась в рассмотрении толщины температурного и вязкого пограничных слоев [9–11].

С практической точки зрения помимо качественного описания важно понимание законов, которым подчиняется развивающийся плюм. Одной из важнейших характеристик этого процесса является скорость удаления теплового фронта от локализованной области подогрева. Необходимость решения этой задачи положила начало многим теоретическим и экспериментальным исследованиям.

Центральная работа по исследованию закономерностей движения тепловой волны под действием непрерывного источника тепла выполнена Бэтчелором [12]. Пользуясь размерными соображениями, он установил соотношение между вертикальной скоростью W_B движения фронта теплового осесимметричного плюма и мощностью источника:

$$W_B = k \left(\frac{g\beta Q}{\rho\nu C_p} \right)^{1/2}, \quad (1)$$

где k – безразмерный коэффициент; g – модуль ускорения свободного падения, действующего вдоль линии распространения фронта; β , ρ , ν , C_p – коэффициент объемного расширения, плотность, кинематическая вязкость, удельная теплоемкость рабочей жидкости соответственно; Q – тепловая мощность нагревателя.

Формула (1) получена для плюма, развивающегося вдали от источника тепла и без учета влияния границ. Только в этом случае скорость распространения теплового фронта остается постоянной. В последовавших за предложенной теорией экспериментальных и теоретических исследованиях [1,13–15] было подтверждено существование участка с постоянной скоростью плюма и предпринята попытка определения безразмерного коэффициента пропорциональности

$$k = (0,57 \pm 0,02) \ln \left(\frac{\varepsilon^{-2}}{2\pi} \right)^{1/2}. \quad (2)$$

Согласно работе [15], параметр ε , входящий в это выражение, связан с физическими свойствами исследуемой жидкости. В приближении больших чисел Прандтля ($\sigma > 6$) его значение определяется из решения уравнения

$$\varepsilon^4 \ln(\varepsilon^{-2}) = \sigma^{-1}. \quad (3)$$

При этом физически верному решению удовлетворяют значения $\varepsilon < 0,8$.

Стоит отметить, что большинство исследований были направлены на понимание динамики плюма в бесконечном объеме жидкости. Поэтому развитие плюма в слоях малой толщины все еще остается недостаточно изученным. Осложняющим фактором с точки зрения теоретического исследования является описание присутствующих граничных эффектов. При экспериментальном исследовании плюмов в узких слоях также возникает ряд осложнений. До сих пор основными способами наблюдения температурных полей остаются бесконтактные оптические методы. Решение задач с малыми температурными градиентами и узкими слоями с применением теневых методов является трудоемким процессом. К тому же, на практике локальный нагрев часто создается при помощи электрических нагревателей, обладающих важной особенностью, заключающейся в инертности по отношению к изменению температуры. В этом случае конечное время установления постоянного значения температуры, главным образом, сказывается на динамике менее продолжительных процессов [16, 17].

Настоящая работа посвящена экспериментальному исследованию развития теплового плюма. Рассматривается поведение фронта тепловой волны, создаваемой локальным подогревом снизу, для случая узкого вертикального слоя с твердыми границами.

Описание установки и методика проведения эксперимента

Как обсуждалось ранее, теневые приборы требовательны к оптическим свойствам деталей экспериментальной установки, к исследуемой жидкости и размерам рабочего слоя. Причем наблюдаемое при помощи них температурное поле является результатом осреднения по толщине слоя.

Исследование тепловых процессов в узких слоях удобнее проводить при помощи инфракрасной камеры или тепловизора. Съемка в длинноволновой части спектра позволяет регистрировать распределение тепла только на поверхности исследуемого объекта. Поэтому главный недостаток метода состоит в отсутствии возможности измерения температуры в толщине слоя жидкости. Кроме того для получения изображения в конструкции модели необходимо использовать прозрачные для инфракрасного излучения поверхности.

Эксперименты проводятся в конвективной ячейке, схематично изображенной на рис. 1, *а*. Измерительная область имеет вид прямоугольного параллелепипеда со сторонами $l = 28$ мм, $h = 24$ мм и $d = 4$ мм. Широкие грани ячейки ограничены оптическими стеклами из фторида лития. Такие стекла способны пропускать излучение в диапазоне длин волн 0,1–8,5 мкм. Доступное наблюдению поле температур расположено в плоскости соприкосновения прозрачных стенок с жидкостью (на рис. 1, *а* соответствует $y = d/2$). Узкими сторонами конвективной ячейки служат грани алюминиевого массива (рис. 1, *б*).

Локальный подогрев осуществляется снизу при помощи нагревателя, роль которого играет медный цилиндр радиусом $r = 1$ мм. Цилиндр приводится в тепловой контакт с резистором сопротивлением $R = 1$ кОм. Все элементы нагревателя

располагаются внутри основания из плексигласа, имеющего теплопроводность $\lambda_{\text{п}} = 0,20 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$. В качестве рабочей жидкости по причине высокого конвективного параметра выбран гептан, обладающий числом Прандтля $\sigma = 7$ и теплопроводностью $\lambda_{\text{т}} = 0,13 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$.

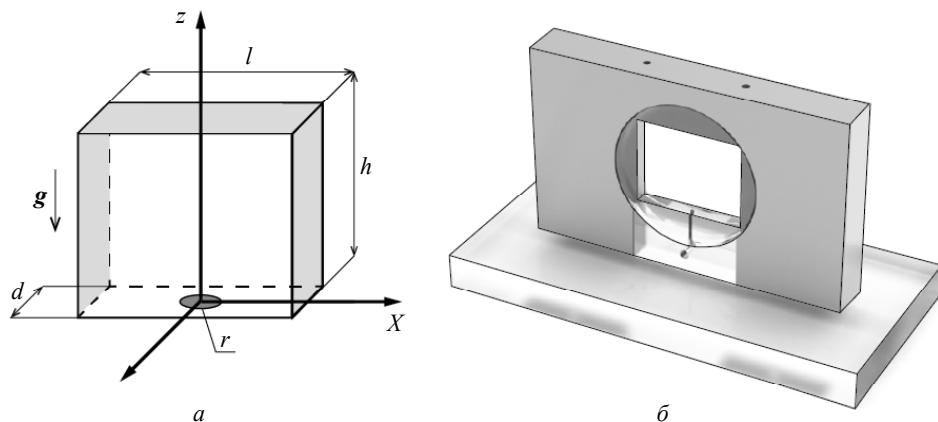


Рис. 1. Схема конвективной ячейки и расположение системы координат (а), изображение лабораторной модели (б)

В связи с небольшим различием значений теплопроводностей рабочей жидкости и плексигласа отношение тепловых потоков через поперечное сечение и боковую поверхность медного цилиндра можно считать пропорциональным отношению этих площадей. Вследствие этого поступающая в жидкость полезная мощность Q_{max} составляет примерно 5 % от полной мощности, рассеянной нагревателем.

Общая схема установки приведена на рис. 2.

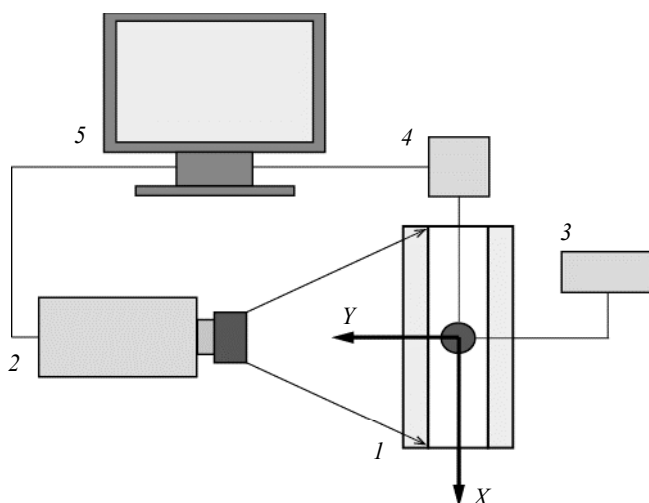


Рис. 2. Схема экспериментальной установки: 1 – конвективная ячейка, 2 – инфракрасная камера, 3 – источник питания, 4 – микровольтметр, 5 – компьютер

Рабочая полость модели 1 располагается так, что вектор ускорения свободного падения g параллелен оси Z . Инфракрасная камера 2 фокусируется на плоскость $y = d/2$. Полная мощность подогрева Q регулируется источником питания 3 и принимает значения в диапазоне 0,1–2,5 Вт.

При использовании нагревателя малых размеров возникает трудность измерения теплового потока через поперечное сечение цилиндра. Учитывая это, в экспериментах за характеристику подогрева берется разность температур ΔT , измеренная дифференциальной медь-константановой термопарой. Измерительный спай термопары находится внутри цилиндра при температуре T_i , а спай сравнения располагается в термостате и имеет температуру T_0 . Сигнал термопары поступает на микровольтметр 4. Обработка получаемых ИК-камерой полей температуры и показаний микровольтметра выполняется на компьютере 5.

В силу того, что теплоемкость нагревателя имеет конечное значение, мощность потока тепла, поступающего в жидкость, со временем увеличивается. Этот процесс представлен в виде графика $T(t)$ на рис. 3, а. При этом за температуру нагревателя T принимается безразмерная величина, определяемая как

$$T = \frac{T_i - T_0}{T_{\max} - T_0} = \frac{\Delta T}{\Delta T_{\max}}, \quad (4)$$

где через $\Delta T_{\max}$ обозначено максимальное превышение температуры резистора над T_0 , достигаемое при постоянной силе тока. На основании полученной зависимости составлена математическая модель, описывающая процесс прогрева источника тепла. В рамках решаемой задачи изменение температуры нагревателя со временем происходит согласно закону

$$\Delta T = \Delta T_{\max} (1 - e^{-t/\tau}). \quad (5)$$

Важным параметром в модели выступает такая характеристика источника тепла, как время релаксации τ , которая в этой работе определяется эмпирически и принимает значение $\tau = 10$ с.

Предполагая связь между температурой и мощностью источника тепла линейной, выражение (1) можно переписать с учетом функции прогрева. В этом случае тепловая мощность нагревателя со временем ведет себя похожим образом. Модель удовлетворяет теории Бэтчелора в том случае, если положить

$$Q_{\max} = \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t). \quad (6)$$

С учетом проделанных рассуждений скорость распространения фронта тепловой волны W_B можно рассчитать следующим образом:

$$W_B = (0,57 \pm 0,02) \ln \left(\frac{\varepsilon^{-2}}{2\pi} \right)^{1/2} \left[\frac{g\beta}{\rho\nu C_p} Q_{\max} (1 - e^{-t/\tau}) \right]^{1/2}. \quad (7)$$

В условиях высокой интенсивности подогрева фронт температурной волны способен достичь верхней границы полости намного быстрее выравнивания температуры нагревателя. С другой стороны, при небольшой мощности развитие плюма может занимать время, превышающее время релаксации τ в несколько раз. В свою очередь, длительный процесс сопровождается прогревом дна полости, в результате чего нарушается локальность источника тепла. Для оценки влияния наблюдаемого эффекта рассматривается профиль температуры вдоль оси X в плоскости нагревателя. Эксперименты показывают, что при минимальном значе-

нии полезной мощности (0,05 Вт) отличие эффективного размера нагревателя, в момент достижения фронтом верхней границы, от его начального радиуса r близко к 70 % (рис. 3, б). Под эффективным размером понимается радиус области, с которой в жидкость поступает 95 % выделившегося тепла. Для максимальной величины подогрева (0,12 Вт) при той же высоте плюма отклонение размера нагревателя от реального значения не превышает 2 %.

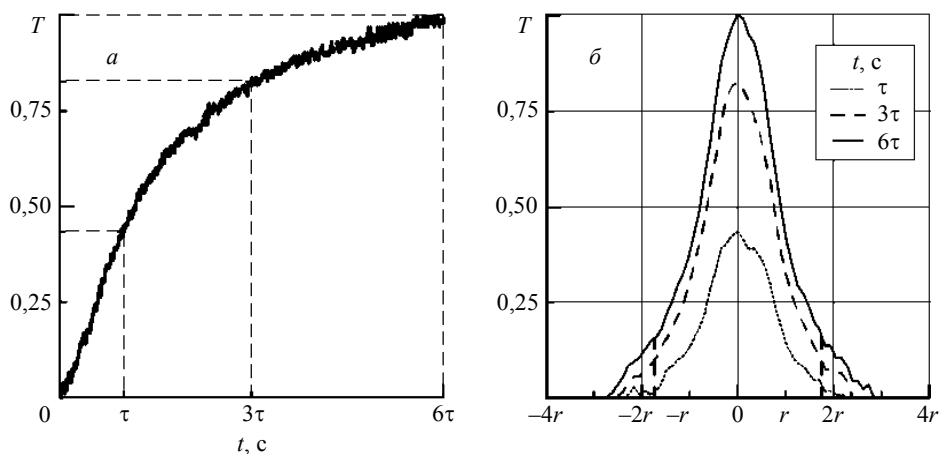


Рис. 3. График изменения безразмерной температуры нагревателя T со временем (а) и нормированное распределение температуры T на нижней грани вдоль оси X в последовательные моменты времени (б) при минимальном значении полезной мощности источника тепла 0,05 Вт

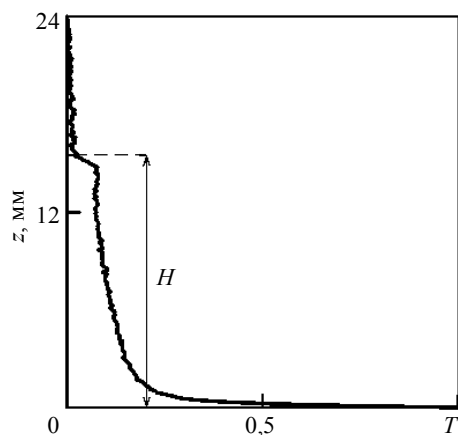


Рис. 4. Распределение нормированного значения температуры T вдоль вертикальной оси Z . Текущая высота плюма обозначена через H

На следующем этапе исследования измеряется высота H фронта волны в разные моменты времени. Для этого на известных полях $T(x, z)$ восстанавливается вертикальный профиль температуры $T(0, z)$ (рис. 4). На таком профиле в начале координат располагается локальный максимум $T=1$, соответствующий положению нагревателя. С увеличением высоты температура в столбе плюма уменьшается и на границе теплового фронта с невозмущенной жидкостью происходит резкий спад до $T=0$. Текущее значение высоты плюма H определяется координатой границы на вертикали в каждый момент времени.

Результаты экспериментов и их обсуждение

На рис. 5 приведена серия температурных полей, включающая последовательные этапы развития плюма. Качественно процесс формирования плюма в узком слое повторяет сценарий, описанный в работах с безграничным объемом жидкости [1, 9]. Так, на начальном этапе вблизи поверхности нагревателя образуется сферический температурный пограничный слой и перенос тепла имеет преимущественно теплопроводный характер. Спустя некоторое время происходит разрушение пограничного слоя, сопровождающееся возникновением конвективного течения. В то же время фронт тепловой волны начинает медленно удаляться от источника (рис. 5, *а*). Более нагретая всплывающая жидкость образует узкий канал, а границы фронта начинают расширяться, образуя тепловую шапку (рис. 5, *б*). В результате тепловой фронт принимает форму гриба (рис. 5, *в*). После достижения плюмом некоторого размера его скорость роста остается постоянной (рис. 5, *з*).

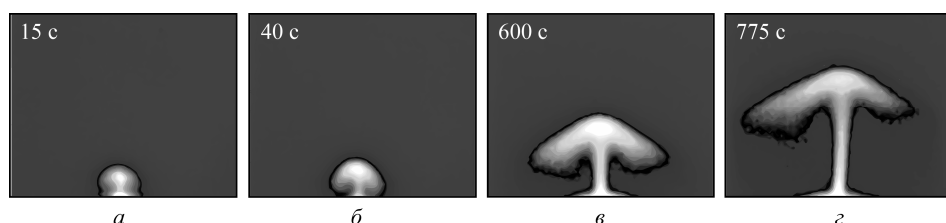


Рис. 5. Последовательность ИК-снимков температурной неоднородности в плоскости соприкосновения широкой грани и жидкости. Время отсчитывается с момента включения источника питания: *а* – 15 с, *б* – 40 с, *в* – 600 с, *з* – 775 с

Согласно описанной выше методике, определяется высота теплового плюма как функция времени (рис. 6, *а*). На зависимости $H(t)$ можно выделить центральную область, которая с хорошей степенью точности аппроксимируется прямой. Тангенс угла наклона α этой прямой позволяет найти скорость равномерного движения теплового фронта W_C .

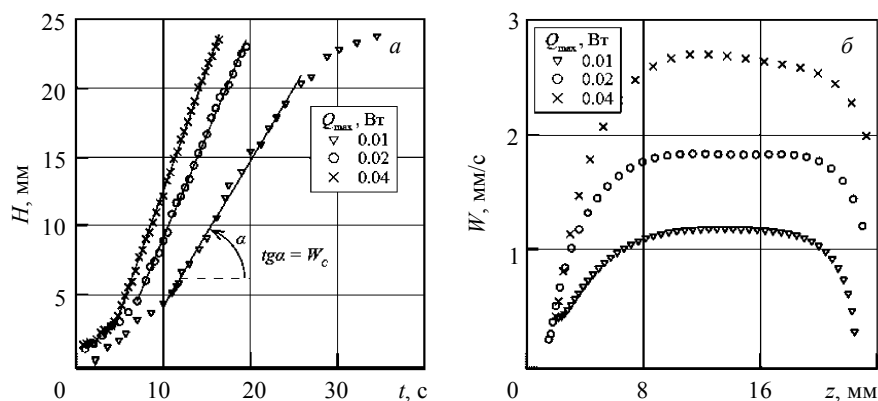


Рис. 6. График изменения высоты плюма H со временем при различных мощностях подогрева $Q_{\max}$ (*а*) и профили мгновенной скорости W роста теплового фронта вдоль вертикальной оси Z , соответствующие выбранным мощностям (*б*)

Помимо участка прямолинейного движения графики содержат начальный и конечный этапы, на которых граница тепловой волны имеет отличное от нуля ускорение. С целью детального изучения поведения плюма определяется значение мгновенной скорости движения фронта W . Для этого по дискретному набору экспериментальных точек $H(t)$ вычисляются центральные разности. По причине того, что процесс при различных мощностях подогрева имеет разную продолжительность, удобнее использовать профиль мгновенной скорости вдоль оси Z (рис. 6, б).

Как и в случае безграничного объема, в задаче с узким слоем на полученном распределении мгновенной скорости $W(z)$ хорошо различимы участки неравномерного движения тепловой волны. Во время формирования шапки плюма скорость роста теплового фронта постепенно возрастает до тех пор, пока не достигнет постоянного значения. На продолжительность такого процесса в значительной мере оказывают влияние инертность нагревателя и число Прандтля рабочей жидкости [1]. По мере приближения тепловой волны к верхней границе наблюдается постепенное уменьшение скорости, а конвективный перенос тепла в вертикальном направлении замедляется.

Используя формулу (7), можно рассчитать мгновенное значение скорости движения фронта тепловой волны, а затем сравнить полученный результат с экспериментом. В настоящей работе предполагается, что на участке равномерного движения плюма величина мгновенной скорости W_B имеет смысл постоянной скорости движения теплового фронта. Исходя из этого, скорость W_C определяется средней высотой плато на рис. 6, б.

Полученные экспериментальные значения $W_C(Q_{\max})$ подчиняются корневому закону с погрешностью, не превышающей 7 % (изображено точками на рис. 7, а). Пунктирной линией на графике показано изменение скорости для постоянных мощностей в случае безграничного объема (согласно уравнению (1)), а сплошной – с учетом инертности нагревателя (уравнение (7)). Обе кривые плохо описывают результаты эксперимента в узком слое. Причем рассчитанная скорость оказывается выше экспериментальной. Так, без учета прогрева отношение скоростей может составлять от 5 до 7 в зависимости от интенсивности подогрева (на рис. 7, б обозначено треугольниками). В случае использования поправки (5), разница между

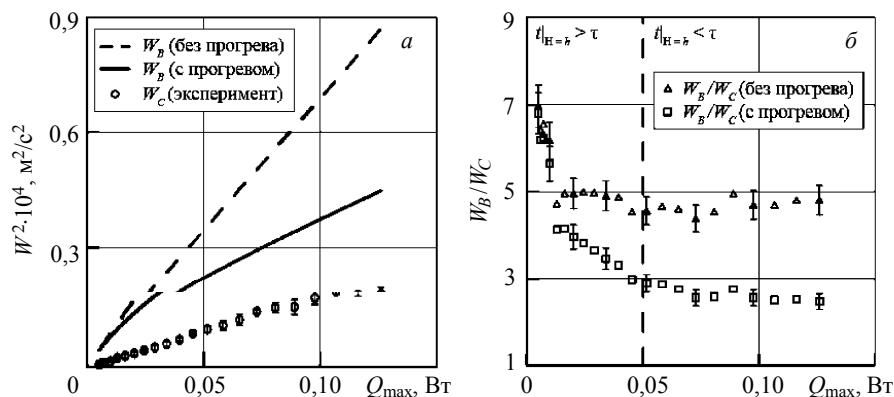


Рис. 7. Функция квадратов скоростей распространения фронта тепловой волны, найденных в эксперименте и рассчитанных из уравнений (1) и (7) для случаев без учета и с учетом прогрева соответственно (а), отношение рассчитанной скорости к экспериментальной в зависимости от мощности источника тепла (б)

скоростями становится меньше (квадраты на рис. 7, б). Точность предсказания повышается по мере уменьшения продолжительности процесса до тех пор, пока время развития плюма не достигнет τ . При длительности процесса больше τ отношение скоростей в пределах погрешности остается постоянным. Таким образом, чем больше времени требуется для развития плюма, тем менее значительным оказывается прогрев нагревателя.

Учет поправки (5) приближает теоретическую кривую к экспериментальной. Тем не менее даже в лучшем случае их значения отличаются вдвое, что, по-видимому, связано с влиянием стенок конвективной ячейки. Наличие твердых границ приводит к возрастанию гидродинамического сопротивления по сравнению с бесконечным слоем, а следовательно, к уменьшению скорости распространения тепла за счет конвекции. Поэтому отношение рассчитанной и измеренной скоростей должно увеличиваться с ростом числа Прандтля. Таким образом, появляется необходимость обобщения используемой математической модели (7) на случай развития плюма в ограниченном пространстве.

Заключение

Проведено экспериментальное исследование развития тепловой волны в узком слое. Для регистрации температурных полей применялась инфракрасная съемка, которая позволила наблюдать распределение тепла в плоскости соприкосновения рабочей жидкости и твердой стенки. Наблюдаемые этапы развития теплового плюма качественно совпадают с этапами, описанными ранее для бесконечного объема.

Выполнена оценка влияния инертности нагревателя на локальность подогрева и скорость распространения фронта тепловой волны. Отмечена необходимость учета прогрева нагревателя, особенно в случае длительного процесса, когда время развития плюма оказывается больше времени тепловой релаксации.

Получен корневой закон, связывающий скорость роста конвективного факела с мощностью источника тепла. Показано, что скорость распространения теплового фронта в узком слое существенно ниже скорости в отсутствии боковых границ. Таким образом, для адекватного предсказания скорости роста теплового плюма требуется модификации модели на случай конечной толщины рабочего слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kaminski E., Jaupart C. Laminar starting plumes in high-Prandtl number fluids // J. Fluid Mech. 2003. V. 478. P. 287–298.
2. Lithgow-Bertelloni C., Richards M.A., Conrad C.P. and Griffiths R.W. Plume generation in natural thermal convection at high Rayleigh and Prandtl numbers // J. Fluid Mech. 2001. V. 434. P. 1–21.
3. Turner J.S. Buoyant plumes and thermals // Annual Review of Fluid Mechanics. 1969. V. 1. No. 1. P. 29–44.
4. Shlien D.J. Transition of the axisymmetric starting plume cap // Physics of Fluids (1958–1988). 2008. V. 21. No. 12. P. 2154–2158.
5. Бабушкин И.А., Демин В.А., Кондрашов А.Н., Пенелаяев Д.В. Тепловая конвекция в ячейке Хеле – Шоу при действии центробежных сил // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2012. №. 1. С. 14–25.
6. Eckert K. Grahn K. Plume and finger regimes driven by an exothermic interfacial reaction // Physical Review Letters. 1999. V. 82. No. 22. P. 4436–4439.
7. Shlien D.J. Method for heat injection into a liquid // Review of Scientific Instruments. 2008. V. 48. No. 9. P. 1152–1153.

8. Shlien D.J. Some laminar thermal and plume experiments // *Physics of Fluids* (1958–1988). 2008. V. 19. No. 8. P. 1089–1098.
9. Гаврилов К.А., Демин В.А., Попов Е.А. Режимы всплывания тепловых плюмов в вертикальном слое // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2013. Т. 6. № 3. С. 261–268.
10. Lappa M. *Thermal Convection: Patterns, Evolution and Stability*. UK: Wiley, 2010. 670 p.
11. Majumder C.A Hier Yuen D.A. Vincent A.P. Four dynamical regimes for a starting plume model // *Physics of Fluids* (1994–present). 2004. V. 16. No. 5. P. 1516–1531.
12. Batchelor G.K. Heat convection and buoyancy effects in fluids // *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*. 1954. V. 80. No. 345. P. 339–358.
13. Shlien D.J. Transition of the axisymmetric starting plume cap // *Physics of Fluids* (1958–1988). 1978. V. 21. No. 12. P. 2154–2158.
14. Moses E. et al. An experimental study of laminar plumes // *Journal of Fluid Mechanics*. 1993. V. 251. P. 581–601.
15. Worster M. Grae. The axisymmetric laminar plume: asymptotic solution for large Prandtl number // *Stud. Appl. Maths*. 1986. V. 75. P. 139–152.
16. Бабушкин И.А., Кондрашов А.Н., Сбоев И.О. Развитие конвективного факела в вертикальном слое // *Вестник Пермского университета. Сер. Физика*. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2012. Вып. 4 (22). С. 101–105.
17. Davaille A. et al. Anatomy of a laminar starting thermal plume at high Prandtl number // *Experiments in Fluids*. 2011. V. 50. No. 2. P. 285–300.

Статья поступила 16.03.2015 г.

Babushkin I. A., Kondrashov A. N., Rybkin K. A., Sboev I. O. DEVELOPMENT OF THERMAL PLUME IN A THIN VERTICAL LAYER

DOI 10.17223/19988621/34/4

An experimental investigation of the propagation of thermal plume in a thin liquid layer under the influence of a point heating from below was carried out. Visualization of the temperature field was made using IR camera. The distribution of heat on the interface between salt glass and fluid was measured. Stages of development of the thermal plume were described. Qualitative agreement with the known mechanism of motion of an axisymmetric plume was showed. The influence of the warm heat source on the speed of the thermal wave front was investigated. The necessity of taking into account this effect in the case of the slow development of the plume, which duration exceeds the relaxation time of the heater a few times was noted. We got the power law between the velocity of the wave front and effective heat output. The results are compared with the experimental work of other authors, as well as with the proposed theory for the motion of the wave front away from the heat source and the boundaries of the cavity. It is shown that the propagation velocity of the thermal front in a thin layer has substantially lower rate in the absence of its lateral boundaries.

Keywords: thin vertical layer, local heat source, thermal plume

BABUSHKIN Igor' Arcad'evich (Candidate of Physics and Mathematics, Perm State University, Perm, Russian Federation)

E-mail: lapans@yandex.ru

KONDRASHOV Aleksandr Nicolaevich (Perm State University, Perm, Russian Federation)

E-mail: akon.psu@yandex.ru

RYBKIN Konstantin Anatol'evich (Candidate of Physics and Mathematics, Perm State University, Perm, Russian Federation)

E-mail: k.rybkin@gmail.com

SBOEV Ivan Olegovich (Perm State University, Perm, Russian Federation)

E-mail: ivan-sboev@yandex.ru

REFERENCES

УДК 621.039:51-7;621.039:007
DOI 10.17223/19988621/34/5

О.А. Бахтеев, А.В. Лысиков, Н.А. Дегтярев, Е.Н. Михеев

РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ ИЗМЕРЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОР В ОБЪЕМЕ ТОПЛИВНЫХ ТАБЛЕТОК ИЗ ДИОКСИДА УРАНА

Для проведения расчетов в обоснование надежности работы ТВЭЛов необходимо знать как параметры микроструктуры распределяются по объему таблетки. Было предложено использовать штатные методы контроля микроструктуры с последующим пересчетом характеристик в 3D. В данной работе определены требования к исходным данным, описан алгоритм пересчета в 3D, оценены возможные ошибки и пути их минимизации. В статье приведены результаты исследования и пересчета пористости топливных таблеток, изготовленных из различных порошков.

Ключевые слова: *ТВЭЛ, топливные таблетки, алгоритм, пористость.*

Согласно требованиям действующей отраслевой инструкции по контролю параметров микроструктуры, контролю подлежат поры с размерами свыше 1 мкм. При этом не менее 80 % пор должно находиться в диапазоне 1–10 мкм. Поры с размером свыше 100 мкм встречаются достаточно редко, а с размером 500 мкм недопустимы. Доля площади шлифа, занимаемая порами, достигает 10–20 %. Поры с размерами менее 1 мкм (субмикронные) можно контролировать с помощью методики, разработанной в ОАО «ВНИИНМ». При этом поры с размером менее 0,15 мкм практически не встречаются, а средний размер составляет 0,4–0,6 мкм. Учитывая, что форма сечений пор близка к кругу (эллипсность – отношение длинной диагонали к короткой – не более 3), можно сделать предположение, что трехмерная форма пор может быть в первом приближении аппроксимирована сферой. Работы по созданию алгоритма пересчета параметров распределений из двух измерений в три проводились с середины 20 века [1–3] и впоследствии были продолжены [4]. Сфера как объект для моделирования может быть описана аналитически и, следовательно, наиболее точно [5]. В то же время, при практическом использовании алгоритма выявляются дополнительные погрешности, вносимые методикой подготовки шлифов и съемки микроструктуры, которые необходимо учитывать в данной работе. К ним относятся ошибки металлографических методов и дефекты типов «купол» и «блюдец», которые описаны ниже. Указанные дефекты приводят к изменению функции формы трехмерного объекта. Под функцией формы трехмерного объекта (ФФ) в данном случае подразумевается кривая распределения сечений по размеру от 3D-формы заданного размера.

Разработка алгоритма

Контроль пор микроструктуры производится согласно действующим методикам контроля параметров микроструктуры при различных увеличениях микроскопа на нетравленных шлифах. Реальные размеры и количество видимых пор зависят от разрешающей способности устройства регистрации изображения. Также

необходимо учитывать, что при изменении увеличения объектива изменяется регистрируемая площадь образца и количество регистрируемых пор, а следовательно, и количество необходимых измерений. Различные диапазоны и количество измерений требуют приведения получаемых распределений пор по размерам к обобщенному распределению, получение которого должно проводиться до преобразования из распределения по сечениям в распределение по объемам.

Из сказанного следует, что для составления обобщенной гистограммы невозможно непосредственно использовать указанный в методиках параметр «количество пор». Требуется ввод параметра «поверхностная плотность пор, $1/\text{мм}^2$ » (количество пор данного вида на 1 мм^2 поверхности), который бы учитывал реальные размеры изображения. Кроме того, различные диапазоны измерений пор (0,1–1,0 мкм, 1–10 мкм, 10–100 мкм, свыше 100 мкм) возможно совмещать только при логарифмическом интервале гистограмм распределения. Таким образом, после вычисления поверхностной плотности пор для каждого изображения частные логарифмические гистограммы для отдельных изображений необходимо объединить с учетом доверительных диапазонов измерений и количества измерений. Пример полученной обобщенной гистограммы приведен на рис. 1.

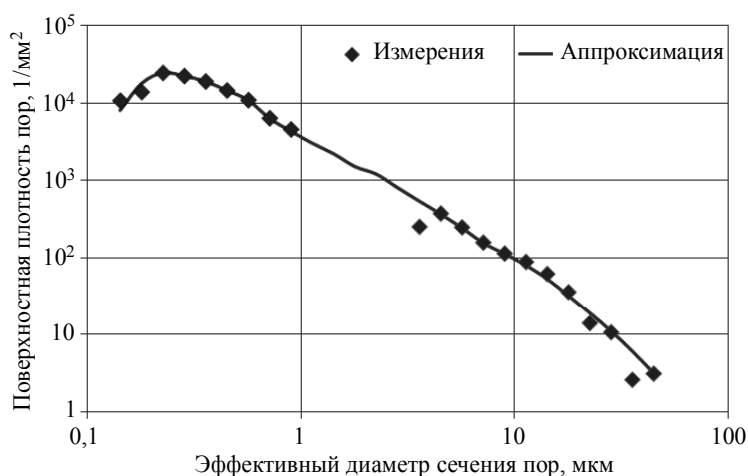


Рис. 1. Обобщенная гистограмма распределения поверхностной плотности пор

Разработанный алгоритм основывается на статистическом подходе, заключающемся в том, что для каждого сечения можно рассчитать вероятность его получения из трехмерной формы рассекаемого объекта, а найденные вероятности будут пропорциональны плотности объектов в объеме образца.

Функция формы (ФФ) может быть задана аналитически для сферы [6] либо подготовлена с помощью моделирования для любой другой формы заданных размеров. В данной работе в качестве аппроксимирующей форму поры объекта на первом этапе была выбрана сфера. Численное решение ФФ зависит от размера аппроксимирующей сферы и интервала гистограммы. Например, на рис. 2 приведена ФФ сферы с диаметром, соответствующим категории гистограммы с логарифмическим интервалом в пределах 39,8–50,1 мкм.

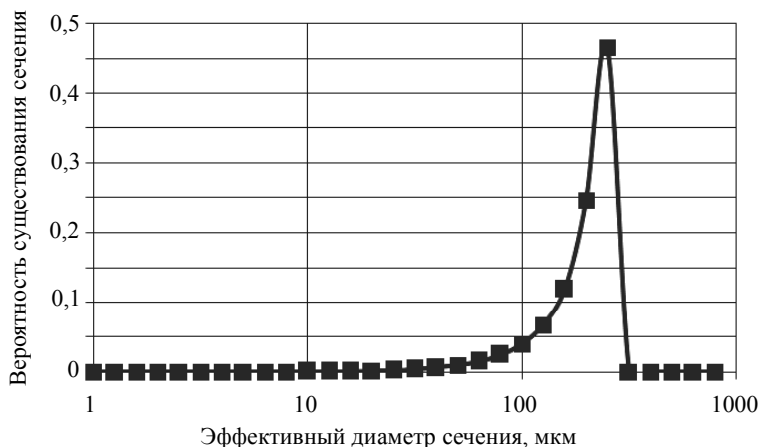


Рис. 2. Функция формы сферы с диаметром, соответствующим категории гистограммы в пределах 39,8–50,1 мкм

Для преобразования исходного распределения сечений в плоскости шлифа $h(d)$, где d – диаметр сечений, в распределение сфер в плоскости шлифа $h(D)$, где D – диаметр сфер, для каждого размера сечения из $h(d)$ необходимо найти наиболее вероятные 3D-объекты и их количество. Данная задача может быть решена несколькими способами. В частности, можно решать систему алгебраических уравнений или использовать метод Монте-Карло. Однако самым известным и популярным остается метод Салтыкова [3], который является модификацией метода Шейла [2] для логарифмических интервалов. В данной работе этот метод взят за основу. Для преобразования распределения сфер в плоскости шлифа $h(D)$ в распределение в объеме $H(D)$ сделано предположение, что количество сфер в объеме обратно пропорционально диаметру сферы. В данной работе использован следующий набор функций:

$$h(D)_i = (h(d)_i - h'(d)_i) / f(D_i, d_i); \quad (1)$$

$$h'(d)_i = \sum_j^n h(D)_j f(D_j, d_i); \quad (2)$$

$$H(D)_i = h(D)_i / D_i, \quad (3)$$

где n – количество категорий гистограммы; D, d – диаметры 3D-объектов и сечений, соответственно; $f(D, d)$ – функция формы 3D-объекта;

Ошибки пересчета складываются из: физических ошибок съемки и регистрации пор; ошибок выбора функции формы; ошибок преобразования распределений.

Под физическими ошибками съемки и регистрации пор подразумевают ограничения, накладываемые регистрирующей аппаратурой микроскопа и процедурой подготовки шлифов.

Первым фактором, влияющим на погрешность, является снижение чувствительности распознавания пор в области малых размеров (на нижней границе диапазона исследования) пор. Вклад этой ошибки определяется металлографически-

ми методиками и составляет 5–20 %. Снизить влияние этого дефекта можно программными средствами при обработке изображений микроструктуры или дополнительными измерениями с более высоким увеличением.

Вторым фактором являются дефекты типов «блюдец» и «купол». Дефект типа «блюдец» заключается в невозможности регистрации сечений находящихся на глубине меньшей h (рис. 3, а) из-за малого угла отклонения поверхности поры от поверхности образца. Вероятность возникновения такого дефекта зависит от соотношения глубины сечения и размера поры h/D . Данный дефект существенно (до 30 %) влияет на итоговое распределение пор в объеме. Для нивелирования влияния этого дефекта введено условие $h/D < 0,25$, при котором все сечения, удовлетворяющие этому условию, отбрасываются.

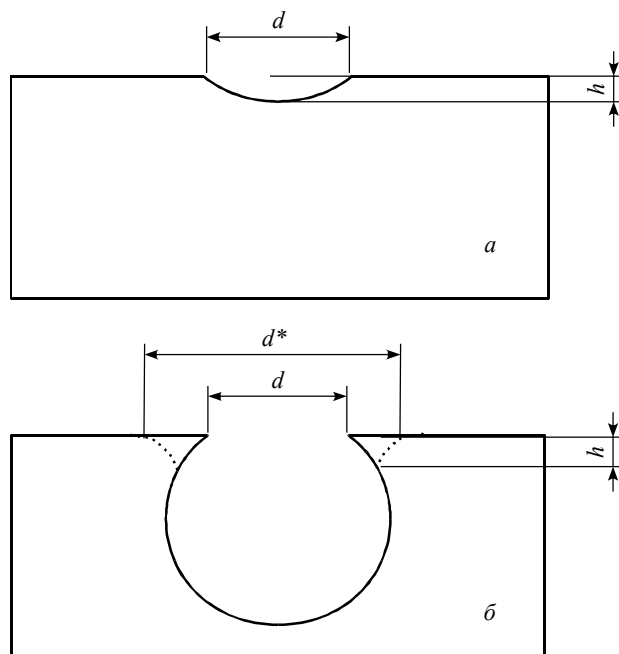


Рис. 3. Дефекты при регистрации пор:
а – «блюдец»; б – «купол»

Суть дефекта типа «купол» заключается в разрушении тонких стенок верхнего сечения поры при возникающих в процессе подготовки шлифов напряжениях (рис. 3, б). Наличие данного дефекта, так же, как и в случае «блюдца», приводит к увеличению доли крупных сечений, что в конечном итоге уменьшает объемную долю пор относительно объемной доли пор, рассчитанной без учета дефектов. Вклад данного фактора в суммарную погрешность оценивается в 5–10 %. Снизить вносимую этим фактором погрешность можно за счет введения поправочных значений в используемую ФФ, однако на данном этапе работы поправка не вносилась.

Ошибка преобразования распределений была оценена путем моделирования рассеяемого объема образца, с распределенными в объеме согласно $H(D)$ пора-

ми. Сравнение исходного распределения $h(d)$ и распределения $h'(d)$, полученного по результатам моделирования, по R^2 показало ошибку на уровне 0,1 %.

Также стоит отметить, что переход от сечений к объемным характеристикам пористости значительно увеличивает ошибку значений характеристик (~8–35 %). Поэтому для подготовки исходного распределения пор $h(d)$ необходимо получать снимки с большим разрешением и пропорционально увеличивать количество измерений.

Для учета влияния описанных дефектов с помощью моделирования была получена функция формы для сферы с учетом поправок. На рис. 4 приведена модельная ФФ, используемая для данной работы, в сравнении с ФФ для сферы.

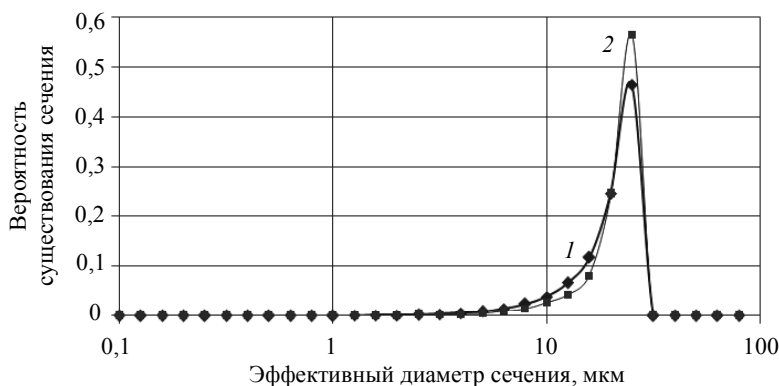


Рис. 4. Сравнение модельной (1) и аналитической (2) функций формы

На основе описанного алгоритма авторами разработан программный модуль *h2d3d*, входными данными для которого являлось распределение поверхностной плотности пор по размерам, а выходными распределение объемной плотности пор по размерам, а также объемная доля пор и удельный объем пор разного сорта.

Результаты и обсуждение

Для исследования было выбрано 16 образцов от 8 партий, изготовленных по различным технологическим схемам, как в заводских, так и в лабораторных условиях. Для каждой партии было снято по 18 изображений пористой структуры при различных увеличениях и на различных микроскопах. Диапазон измерений размеров пор составил от 0,1–100 мкм. Для обработки изображений использовался программный комплекс IRBIS [7], разработанный в ОАО «ВНИИНМ». По результатам обработки построены обобщенные логарифмические гистограммы, аналогичные приведенной на рис. 1. Интервал гистограммы выбран пропорциональным $10^{0,1}$.

Полученные обобщенные гистограммы обработаны с помощью алгоритма *h2d3d*. На рис. 5 для сравнения приведены исходная гистограмма поверхностной плотности пор N_S и итоговая гистограмма объемной плотности пор N_V .

Как видно из рис. 5, характер зависимости в логарифмических координатах близок к линейному. Разброс результатов в правой части (области крупных пор) графика связан с недостаточным количеством измерений и, следовательно, меньшей достоверностью данных.

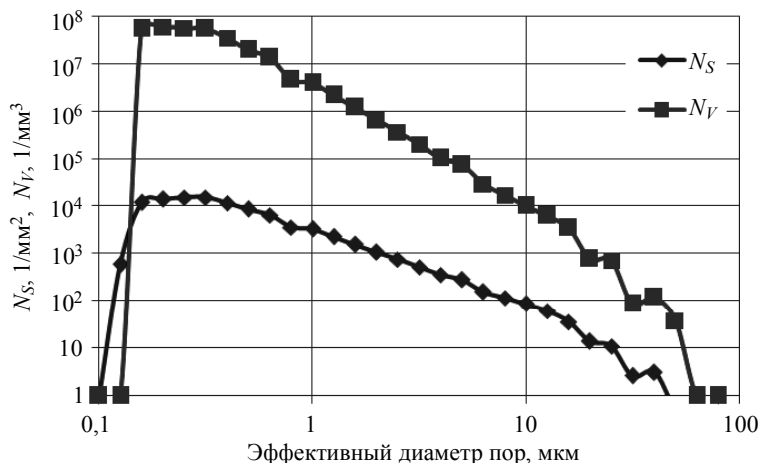


Рис. 5. Зависимость поверхностной N_S и объемной N_V плотности пор от эффективного диаметра пор

На основании параметра объемной плотности пор, показывающего количество пор данного типа в 1 мм^3 , легко посчитать объемную долю и удельный объем пор. Под объемной долей пор подразумевается доля объема образца, занимаемая данным видом пор. Под удельным объемом пор подразумевается доля пор данного вида в общем объеме, занимаемом порами. Рассчитанные значения объемной доли пор для партии № 8 представлены на рис. 6. Сумма объемных долей пор дает общую пористость топливной таблетки, а следовательно, и плотность.



Рис. 6. Зависимость объемной доли пор от эффективного диаметра пор

Сводные результаты по 8 партиям приведены в таблице. В таблице приведены следующие сокращения: ОДОП — объемная доля открытых пор, уд. — удельный, об. — объемный.

Результаты преобразования по алгоритму *h2d3d*

Партия	1	2	3	4	5	6	7	8
Плотность	10,59	10,56	10,64	10,62	10,63	10,62	10,57	10,38
ОДОП, %	0,10	0,05	0,16	0,36	0,28	0,20	0,22	0,50
Об. доля пор, %	4,4	3,7	4,1	3,9	3,9	3,6	3,8	5,3
Об. доля пор < 1 мкм, %	0,5	0,4	0,6	0,6	0,2	0,1	0,1	0,5
Об. доля пор 1–10 мкм, %	2,2	1,6	2,0	2,1	1,9	2,6	2,2	2,6
Об. доля пор > 10 мкм, %	1,7	1,8	1,5	1,1	1,8	0,9	1,5	2,2
Уд. объем пор < 1 мкм, %	11	10	15	16	6	3	3	9
Уд. объем пор 1–10 мкм, %	50	42	49	54	48	72	58	49
Уд. объем пор > 10 мкм, %	39	48	36	30	46	25	39	42

Плотность большинства представленных образцов, измеренная методом гидростатического взвешивания, находится в диапазоне 10,56–10,64 г/см³, что соответствует установленным в технической спецификации требованиям на таблетки, а партия № 8 представлена как исключение для проверки чувствительности алгоритма преобразования распределения.

Получено, что объем топливной таблетки, занимаемый субмикронными порами, составляет 0,1–0,6 %, занимаемый порами, с размером 1–10 мкм – 1,6–2,6 %, занимаемый порами с размерами свыше 10 мкм – 0,9–2,2. При этом основная доля пор приходится на поры с размером от 1 мкм до 10 мкм (42–72 %) и на поры с размером более 10 мкм (25–48 %). Суммарный объем пор составил 3,6–5,3 %, что в целом соответствует данным гидростатических измерений, согласно которым объемная доля пор должна составлять 2,9–5,3 %. Причинами отклонений могут являться как описанные выше дефекты и ошибки измерений, так и другие дефекты, возникающие, например, при транспортировке или подготовке шлифов. Для дальнейшего уточнения алгоритма предполагается проведение большего количества измерений микроструктуры и модификация функции формы.

Из представленных данных следует, что предложенный алгоритм пересчета параметров пористости, измеренных в плоскости шлифа, позволяет получить в целом достоверные характеристики распределения пор в объеме топливной таблетки.

Заключение

Обобщены сведения о характерных особенностях пор. Большинство сечений пор представляют собой форму, близкую к кругу, а использование параметра эффективный диаметр еще сильнее снижает ошибки, связанные с отличием формы сечения от круга. Сделан вывод о возможности в первом приближении для описания 3D-формы поры использовать сферы.

Проанализированы особенности регистрирующих систем и методик, влияющих на результаты пересчета. Описаны возникающие при обработке изображений микроструктуры дефекты, вносимые ими ошибки и способы снижения их влияния.

Предложен формат входных данных для пересчета из 2D в 3D для существующих методик. Предлагается использовать обобщенные гистограммы распределения пор по размерам с логарифмическим интервалом. Предложено и обосновано

вано введение дополнительных параметров пористости: поверхностная плотность пор, объемная плотность пор, удельный объем пор, объемная доля пор.

Проведен пересчет распределений пористости из 2D в 3D для 8 партий образцов в диапазоне размеров 0,1–100,0 мкм.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Schwartz H.A.* The metallographic determination of the size distribution of temper carbon nodules // *Metals and Alloys*. 1934. V. 5. P. 139–140.
2. *Scheil E.* Statistische Gefügeuntersuchungen // *Zeitschrijl jeer Afetollkunda*. 1935. V. 27. No. 9. P. 199–208.
3. *Saltykov S.A.* The determination of the size distribution of particles in an opaque material from the measurement of the size distribution of their sections // *Stereology*. Springer Berlin Heidelberg. 1967. P. 163–173.
4. *Gulbin Y.* On estimation and hypothesis testing of the grain size distribution by the Saltykov method // *Image Anal. Stereol.* 2008. V. 27. P. 163–174.
5. *Takahashi J., Suito H.* Evaluation of the accuracy of the three-dimensional size distribution estimated from the Schwartz-Saltykov method // *Metallurgical and Materials Transactions*. 2003. V. 34. No. 1. P. 171–181.
6. *Heilbronner R.* How to derive size distributions of particles from size distributions of sectional areas // *Conférence Universitaire de Suisse Occidentale. 3ème Cycle Séminaire: "Analyse d'images et morphométrie d'objets géologiques"*, Organisé à Neuchâtel. Institut de Géologie. Université de Neuchâtel. 2002.
7. *Свидетельство о государственной регистрации ПО IRBIS № 2013660806*, от 19.11.2013, Правообладатели: ОАО «ВНИИНМ», ОАО «ТВЭЛ».

Статья поступила 02.03.2015 г.

Bahteev O. A., Lysikov A. V., Dyagterev N. A., Mikheev E. N. METHOD OF VOLUMETRIC PORE DISTRIBUTION MEASURING FOR URANIUM DIOXIDE PELLETS

DOI 10.17223/19988621/34/5

In order to verify reliability of fuel assembly exploitation it's necessary to know volumetric distribution of microstructure parameters in 3D. In this paper we propose to use standard methods of microstructure analysis with further conversion in 3D. This paper represents initial data requirements, algorithm of 3D-conversion, possible errors and ways of their minimization. Results of investigation and conversion of porosity of fuel pellets produced from various powders are presented.

Keywords: TVEL (fuel element), pellets, algorithm, porosity.

BAHTEEV Oleg Alexandrovich (Engineer, Joint Stock Company "A.A. Bochvar High-technology Research Institute of Inorganic Materials", Moscow, Russian Federation)

LYSIKOV Alexandr Vladimirovich (Candidate of physical and mathematical science, Joint Stock Company "A.A. Bochvar High-technology Research Institute of Inorganic Materials", Moscow, Russian Federation)
E-mail: avlynikov@bochvar.ru

DYAGTEREV Nikita Alexandrovich (Engineer, Joint Stock Company "A.A. Bochvar High-technology Research Institute of Inorganic Materials", Moscow, Russian Federation)

MIKHEEV Evgeny Nikolaevich (Candidate of physical and mathematical science, Joint Stock Company "A.A. Bochvar High-technology Research Institute of Inorganic Materials", Moscow, Russian Federation)

REFERENCES

УДК 53.098, 53.097

DOI 10.17223/19988621/34/6

М.Е. Долгий, С.Г. Катаев

ИССЛЕДОВАНИЕ ЕСТЕСТВЕННОГО ИМПУЛЬСНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ

Исследования естественного импульсного электромагнитного поля Земли (ЕИЭМПЗ) проводятся в разных научно-исследовательских центрах уже более 50 лет. Однако большого продвижения в понимании природы основных составляющих ЕИЭМПЗ не видно, что можно объяснить колоссальной сложностью проблемы. В литосфере и атмосфере протекает множество процессов, ведущих к появлению хаотичных электромагнитных полей, обладающих разной интенсивностью. В результате датчик фиксирует в каждый момент времени случайную суперпозицию этих полей. Объяснение суточного и годового хода временных рядов ЕИЭМПЗ является одной из главных задач, решение которой позволило бы значительно прояснить природу и основные механизмы возникновения ЕИЭМПЗ. Представлены некоторые результаты исследования структуры сигналов ЕИЭМПЗ на основе «энергетических» представлений. Переход от амплитуды и количества импульсов, являющихся основными характеристиками сигнала, к его энергетическому описанию, возможно, позволит выделить отдельные процессы, формирующие результирующее ЕИЭМПЗ. С использованием корреляционного анализа проведены оценки влияния Солнца и Луны как наиболее близких и значимых космических тел. Рассмотрена возможная связь между ЕИЭМПЗ и параметрами, характеризующими процессы, которые протекают в верхних слоях Земли и влияют на содержание влаги.

Ключевые слова: *естественное импульсное электромагнитное поле Земли, электромагнитная эмиссия, геодинамические процессы, атмосферные процессы, корреляционный анализ.*

Электромагнитные помехи импульсного характера были обнаружены летчиками еще во время Второй мировой войны. Они слышали свист в наушниках радиосвязи. Начавшиеся позже исследования данных помех привели ученых к заключению, что они связаны с атмосферными процессами, а именно с грозовыми центрами мира. Данная гипотеза существует достаточно долго и описана в работах [1 – 3]. Считалось, что в любой точке земной поверхности регистрируется две составляющие электромагнитного поля Земли: шумовая и импульсная. Основой шумовой составляющей являются мелкие грозы и импульсы, многократно обошедшие вокруг Земли. Импульсную компоненту составляют более мощные грозовые разряды.

В семидесятых годах прошлого века профессор А.А. Воробьев вводит понятие «естественное импульсное электромагнитное поле Земли» (ЕИЭМПЗ). Ему также принадлежат идеи о том, что импульсы могут возникать не только в атмосфере, но и в земной коре в результате преобразования тектонической энергии в электрическую [4, 5]. В соответствии с этими идеями ожидалось, что увеличение интенсивности потока импульсов будет наблюдаться в момент землетрясений и близкие к нему моменты времени.

Первое подтверждение того, что импульсы ЕИЭМПЗ возникают в литосфере, были получены группой Малышкова [6]. Они показали, что в зависимости от энергии предстоящего землетрясения снижение интенсивности поля продолжалось от нескольких часов до нескольких суток. Основной упор был сделан на анализ шумовой составляющей полей, показано, что информация о глубинных процессах в земной коре скрыта именно в ней. Отстояв литосферное происхождение ЕИЭМПЗ, авторам предстояло объяснить по-новому суточные и годовые вариации поля. Причиной таких вариаций, по мнению авторов, служили периодические процессы, протекающие в земной поверхности, вызванные, например, приливными силами.

В работах Коровякова [7], Сидоренкова [8] обсуждается идея гравитационного смещения ядра Земли относительно геометрического центра планеты. В работе [9, 10] предложена гипотеза об эксцентричном вращении ядра Земли и ее земной коры. В результате эксцентричного суточного вращения оболочки Земли вокруг смещенного твердого ядра возникнет давление со стороны ядра и окружающего его расплава на мантию, выдавливающее оболочку изнутри. В земной коре возникнет волна механических напряжений, которая после выхода на поверхность, будет распространяться в строгом соответствии с вращением Земли и в направлении, обратном направлению суточного вращения.

Очевидно, что в литосфере протекает множество процессов, ведущих к появлению электромагнитных полей, вследствие известных в физике перекрестных явлений между процессами и полями различной природы, причем большинство из них носит случайный характер. Данные процессы протекают одновременно, следовательно, электромагнитные поля, произведенные ими, накладываются друг на друга. Суперпозицию этих полей и измеряет датчик-регистратор.

Главная проблема при интерпретации ЕИЭМПЗ состоит в отсутствии представления о вкладе того или иного механизма в суммарный сигнал. Решение этой проблемы возможно только на пути использования комплексного подхода, включающего в себя не только анализ экспериментальных данных, теоретическое моделирование, но и целенаправленные экспериментальные исследования. Одной из главных задач, решение которой позволило бы значительно продвинуться в понимании природы основных составляющих ЕИЭМПЗ, является объяснение суточного и годового хода временных рядов ЕИЭМПЗ.

В данной статье представлены результаты исследования структуры сигналов ЕИЭМПЗ на основе «энергетических» представлений. С использованием корреляционного анализа проведены оценки гравитационного влияния астрономических тел (Солнца и Луны), наиболее близких и значимых из близлежащих, на изменение структуры ЕИЭМПЗ. Рассмотрена возможная связь между ЕИЭМПЗ с параметрами, характеризующими процессы, которые протекают в приземном слое атмосферы.

Структура временных рядов ЕИЭМПЗ

Применяемые для исследования процессов в земной коре и нижней мантии радиоволновые методы основаны на явлении электромагнитной эмиссии – способности диэлектрических материалов излучать электромагнитные сигналы при воздействии на них. В горных породах источниками естественных импульсных элек-

ромагнитных полей являются неоднородности структуры грунтов. В результате механоэлектрических явлений под действием деформационных волн из нижней мантии, приливных сил, микросейсмических колебаний, ветровой и техногенной нагрузки на этих источниках возникают электромагнитные импульсы, которые и создают естественный электромагнитный фон литосферного происхождения. Многолетние измерения в различных регионах показали, что ЕИЭМПЗ литосферного происхождения имеет ярко выраженный устойчивый суточный и сезонный ход [10].

Результаты по измерению электромагнитных шумов Земли получаются с использованием многоканальных геофизических регистраторов различных модификаций. Выходящие данные представляют собой ряд, содержащий дату и время (t) снятия показаний, значение амплитуды электрического поля (E), амплитуды магнитного поля и плотности импульсов в направлениях Север – Юг B_{NS}, N_{NS} , Восток – Запад B_{WE}, N_{WE} .

Исследуемые в настоящей работе часовые данные получены с 12 датчиков, расположенных в районе Урала, в период с 1.06.2010 по 1.11.2014. На рис. 1 приведены временные ряды амплитуд A_{NS} и A_{WE} , усредненных по всем датчикам, для пары B_{NS} и B_{WE} . Поведение во времени этих величин достаточно хорошо скоррелировано. Так, коэффициенты корреляции между парами B_{NS} и B_{WE} и N_{NS} и N_{WE} для среднесуточных равны 0,748 и 0,958 соответственно. Кроме этого, средние значения этих величин за изучаемый период близки друг другу ($\bar{B}_{NS} = 161,1$, $\bar{B}_{WE} = 186,7$, $\bar{N}_{NS} = 271,0$, $\bar{N}_{WE} = 276,2$). Это позволяет осуществить преобразование исходных данных таким образом, чтобы получить величину, имеющую физический смысл энергии.

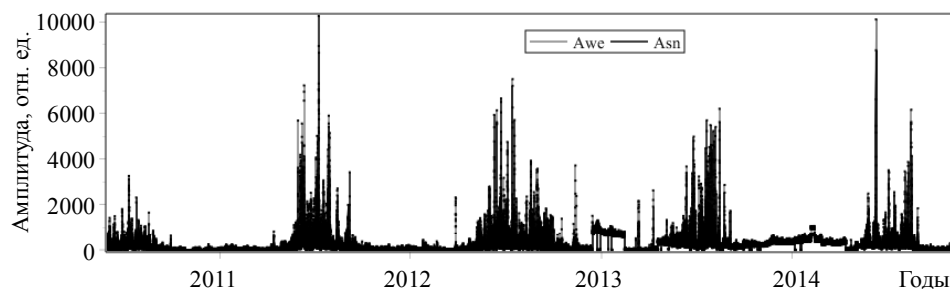


Рис. 1. Временные ряды амплитуды B_{NS} и B_{WE} за исследуемый период

«Энергетическое» представление

Величина, измеряемая датчиком и названная авторами амплитудой, характеризует величину магнитного поля, поэтому логично назвать мерой интегральной (полной) энергии произведение квадрата амплитуды импульса на их число:

$$\varepsilon = B^2 \cdot n.$$

Размерность величины ε — относительные единицы энергии.

В качестве обобщенной меры энергии по всем станциям будет выступать величина

$$\varepsilon = \frac{1}{\tilde{k}} \sum_i \tilde{\varepsilon}_i = \frac{1}{\tilde{k}} \sum_i \sqrt{\varepsilon_{NSi}^2 + \varepsilon_{WEi}^2},$$

где $\tilde{k}$ – число станций, работающих в данный момент времени, а $\tilde{\varepsilon}_i$ – энергия поля, измеренная на i -й станции, поскольку в данных каждой станции имеются пропуски, связанные с техническими неполадками. Поведение обобщенной меры энергии в направлении Север – Юг и Запад – Восток приведено на рис. 2 и 3 соответственно.

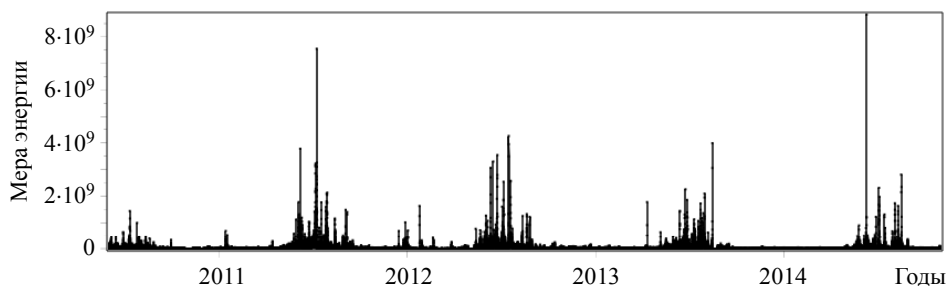


Рис. 2. Мера энергии ЕИЭМПЗ с одной станции в направлении Север – Юг

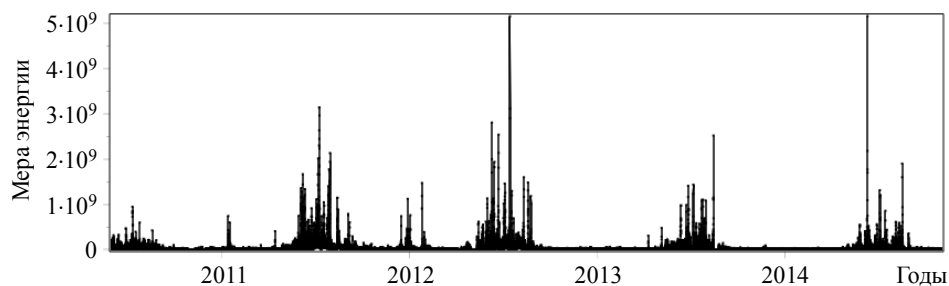


Рис. 3. Мера энергии ЕИЭМПЗ с одной станции в направлении Восток – Запад

Оценим влияние гравитационных (приливных) сил на данную местность. Основными величинами, необходимыми для определения меры энергии взаимодействия ε_g , будут являться: расстояние r от данной точки на поверхности Земли до Луны – для определения суточного цикла, до Солнца – для годового, а также угол φ , под которым «видны» Солнце и Луна в каждый из соответствующих моментов времени. Энергия гравитационного взаимодействия определяется как

$$E_g = G \frac{Mm}{r} \cos \varphi.$$

Изменение меры взаимодействия Солнца и Луны со временем описывается формулой

$$\varepsilon_g(t) = \frac{1}{r(t)} \cos \varphi(t),$$

где временные ряды данных искоемых величин $\varphi(t)$ и $r(t)$ были получены с сайта Horizon [13]. Величина $\varepsilon_g(t)$ представляет собой меру потенциальной энергии взаимодействия. Угол φ не достигает значений $\pm\pi/2$, что позволяет корректировать значения энергии гравитационного взаимодействия между небесными телами. Временной ряд величин $\varepsilon_g(t)$ для исследуемого периода представлен на рис. 4.

Из рис. 4 видно, что в летний период времени наблюдается своеобразная концентрация (сгущение) линий мер энергии. И в летний же период резко возрастает мера обобщенной энергии (рис. 5). Данный факт позволяет предположить наличие связи между данными процессами. Однако проведенный корреляционный анализ ряда меры обобщенной энергии ЕИЭМПЗ $\varepsilon(t)$ и меры энергии гравитационного взаимодействия Луны $\varepsilon_M(t)$ и Солнца $\varepsilon_S(t)$ свидетельствует об отсутствии или наличии крайне малого влияния приливных сил на поведение ЕИЭМПЗ. Коэффициенты корреляции между рядами $\varepsilon(t)$ и $\varepsilon_M(t)$ и $\varepsilon(t)$ и $\varepsilon_S(t)$ очень малы и равны 0,0014 и 0,0531, соответственно.

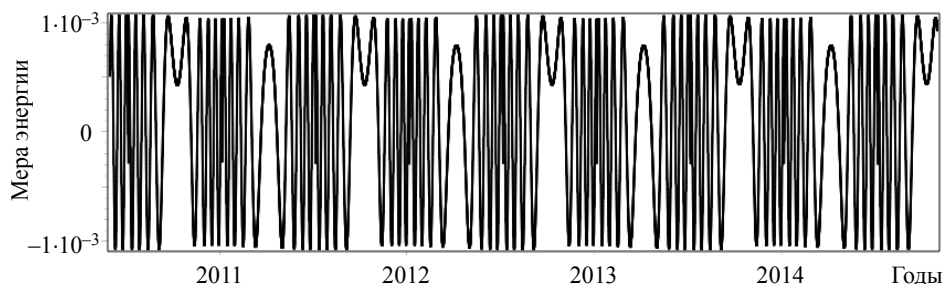


Рис. 4. Мера энергии гравитационного воздействия Солнца

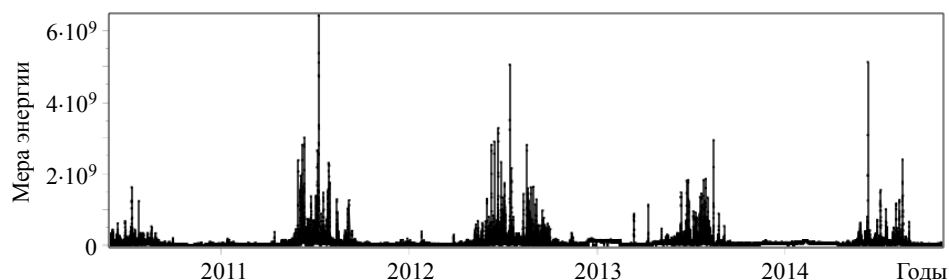


Рис. 5. Обобщенная мера энергии ЕИЭМПЗ с 12 станций

Электромагнитная эмиссия горных пород

Первые исследования электромагнитной эмиссии были проведены группой Мартышева [12], показавшей, что при деформации щелочно-галоидных кристаллов наблюдаются световые вспышки. Эти пионерские работы были проведены в 1965 году.

Позже в работе [15] приведены обширные исследования закономерностей электромагнитной эмиссии в процессе нагружения горных пород. Авторами уста-

новлено, что электромагнитная эмиссия является результатом процессов треще-нообразования.

Первые попытки связать электромагнитный сигнал с прочностными характеристиками твердого тела были предприняты в [15]. Авторы наблюдали свечение кристаллов LiF при их царапании алмазной пирамидой. Оказалось, что моменту высвечивания соответствует появление трещин перед движущимся индентором. Эти экспериментальные данные подтверждают возможность обнаружения микро-трещин по их электромагнитному сигналу. В данной работе зарегистрированный сигнал находился в видимой части электромагнитного спектра. Группа А. А. Воробьева [16] показала наличие сигнала в радиочастотном диапазоне длин волн.

В [17–19] представлена качественная связь интенсивности электромагнитного сигнала с энергетическими свойствами тел. Также было установлено, что интенсивность электромагнитного сигнала возрастает с увеличением механической и электрической плотности твердых тел. В [20] был предложен подход, основанный на измерении малых токов в нагруженных породах, для определения их целостности.

В конце прошлого столетия активно велись работы по развитию гипотезы о механоэлектричестве [21, 22]. Ученые ожидали больших выбросов ЕИЭМПЗ в преддверии сейсмических катастроф. Однако позже интерес к данной гипотезе снизился из-за неоправданных надежд прогнозирования землетрясений с помощью ЕИЭМПЗ.

Как уже отмечалось, сигналы ЕИЭМПЗ имеют выраженный годовой ход, проявляющийся в резком возрастании и амплитуды и количества импульсов в летний период. На наш взгляд, это может быть связано с тем, что в осенний, зимний и весенний периоды уровень влажности поверхностного слоя Земли увеличивается. А хорошо известно, что с ростом влажности в пористых материалах резко возрастает затухание электромагнитных волн. Эффект уменьшения с ростом амплитуды влажности электромагнитного поля наблюдался и при импульсном механическом возбуждении гетерогенных материалов, содержащих пьезоэлектрические включения [23].

На рис. 6 показаны кривые, соответствующие мере полной энергии ЕИЭМПЗ и значения максимальной температуры по Фаренгейту за каждые сутки [24]. Температуру можно рассматривать в качестве меры энергии, поступающей в почву из атмосферы. В результате этого приповерхностный слой просыхает, влажность уменьшается, а амплитуда электромагнитного сигнала увеличивается.

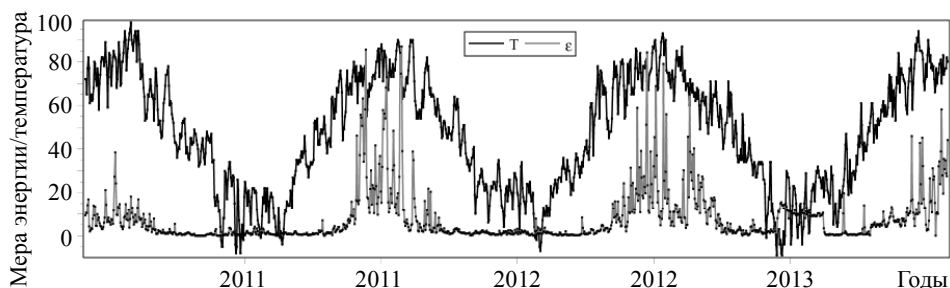


Рис. 6. Мера полной энергии ЕИЭМПЗ и мера энергии (температура по Фаренгейту приповерхностного слоя воздуха), поглощаемая поверхностью Земли

Корреляционный анализ ряда меры обобщённой энергии ЕИЭМПЗ $\varepsilon(t)$ и меры энергии, выделенной атмосферой, $T(t)$ свидетельствует о возможном воздействии атмосферных процессов на поведение ЕИЭМПЗ. Коэффициент корреляции между рядами $\varepsilon(t)$ и $\varepsilon_T(t)$ равен 0,459. Однако при этом необходимо подчеркнуть, что наличие существенной корреляции между параметрами, характеризующими различные процессы, не может свидетельствовать об однозначной причинно-следственной связи между ними. Поэтому здесь можно говорить только о возможном влиянии атмосферных процессов и процессов, происходящих в верхних слоях Земли, на поведение $\varepsilon(t)$.

Выводы

Введение понятия меры полной обобщённой энергии может быть удобной формой представления сигналов ЕИЭМПЗ. В частности, это даст возможность оценивать энергетический вклад того или иного физического процесса.

Можно считать, что Луна и Солнце мало влияют на характеристики ЕИЭМПЗ, поэтому дальнейшие исследования ЕИЭМПЗ имеет смысл проводить с опорой на процессы, протекающие в земной коре и приземном слое атмосферы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров М.С., Бакленов З.М., Гладиштейн Н.Д. и др. Флуктуация электромагнитного поля земли в диапазоне СНЧ / ред. М.С. Александров. М.: Наука, 1972. 192 с.
2. Распопов О.М., Клейменова Н.Г. Возмущение электромагнитного поля Земли. Часть 3. ОНЧ-излучения. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977. 144 с.
3. Ремизов Л.Т. Естественные радиопомехи. М.: Наука, 1985. 200 с.
4. Воробьев А.А. О возможности электрических разрядов в недрах Земли // Геология и геофизика. 1970. № 12. С. 3–13.
5. Воробьев А.А. Тектоэлектрические явления и возникновение естественного импульсного электромагнитного поля Земли – ЕИЭМПЗ. Томск, 1979. 585 с. – Рукопись представлена Томским политехническим институтом: часть 1 – № 4296-79 – 202 с.; часть 2 – № 4297-79 – 149 с.; часть 3 – № 380-80 – 243 с.
6. Малышков Ю.П., Джумабаев К.Б. Прогнозирование землетрясений по параметрам естественного импульсного электромагнитного поля Земли // Вулканология и сейсмология. 1987. № 1. С. 97–103.
7. Коряков Н.И., Никитин А.Н. Закономерность эксцентрического вращения ядра и оболочки Земли в суточном и годовом периоде // Сознание и физическая реальность. 1998. Т. 3 (2). С. 23–30.
8. Сидоренков Н.С. Физика нестабильностей вращения Земли. М.: Наука, Физматлит, 2002. 384 с.
9. Малышков Ю.П., Малышков С.Ю. Периодические вариации геофизических полей и сейсмичности, их возможная связь с движением ядра Земли // Геология и геофизика 2009. № 2. С. 152–172.
10. Yury P. Malyshev, Sergey Yu. Malyshev, Vasily F. Gordeev, Sergey G. Shtalin, Vitaly I. Polivach, Vladimir A. Krutikov, Michail M. Zaderigolova. Electromagnetic Fields: Principles, Engineering Applications and Biophysical Effects. Chapter 1. Earth's Natural Electromagnetic Noises in a Very-Low Frequency Band. Nova Science Publishers, Inc., 2013. P. 1–86.
11. Долгий М.Е., Тартаковский В.А., Кусков А.И. Декомпозиция эмпирических рядов данных на коррелированные и антикоррелированные составляющие на основе выделения существенных признаков // Хаос и структуры в нелинейных системах. Теория и эксперимент: Материалы 8-й Международной научной конференции. – Караганда: Изд-во КарГУ, 2012. С. 86–89.

12. Мартышев Ю.Н. Исследование свечения и электризации кристаллов LiF при их деформации // Кристаллография. 1965. Т. 10. Вып. 2. С. 224–226.
13. <http://www.ssd.jpl.nasa.gov/?horizons>
14. Егоров П.В., Иванов В.В., Колпакова Л.А. О некоторых закономерностях импульсного электромагнитного излучения щелочно-галогидных кристаллов и горных пород // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 1988. № 1. С. 67–70.
15. Беляев Л.М., Мартышев Ю.Н. О свечении при царапании кристаллов фтористого лития // Кристаллография. 1964. Т. 9. Вып. 1. С. 117–119.
16. Воробьев А.А., Чаусов В.М., Гордеев В.Ф. Импульсное радиоизлучение при царапании некоторых диэлектрических материалов // Изв. вузов. Физика. 1977. № 10. С. 126–128.
17. Яковицкая Г.Е. Методы и технические средства диагностики критических состояний горных пород на основе электромагнитной эмиссии. Новосибирск: Параллель, 2008. 315 с.
18. Беспалько А.А., Яворович Л.В., Вишман Е.В., Федотов П.И. Механоэлектрические преобразования в горных породах Таштагольского железорудного месторождения // Геодинамика. 2008. № 1(7). С. 54–60.
19. Беспалько А.А., Яворович Л.В., Колесникова С.И. и др. Исследование изменений характеристик электромагнитных сигналов при одноосном сжатии образцов горных пород Таштагольского рудника // Изв. вузов. Физика. 2011. № 1/2. С. 78–84.
20. Aydin A., Prance R.J., Prance H., Harland C.J. Observation of pressure stimulated voltage in rocks using an electric potential sensor // Applied Physics Letters. 2009. V. 95. Is. 12.
21. Гохберг М.Б., Моргунов В.А., Похотелов О.А. Сейсмoeлектромагнитные явления. М.: Наука, 1988. 174 с.
22. Сурков В.В. Электромагнитные эффекты при землетрясениях и взрывах. М.: МИФИ, 2000. 448 с.
23. Фурса Т.В., Дани Д.Д., Осипов К.Ю., Несстерук Д.А. Влияние влажности на параметры электрического сигнала при импульсном механическом возбуждении гетерогенных материалов, содержащих пьезоэлектрические включения // Дефектоскопия. 2011. № 6. С. 57–66.
24. <http://www.ncdc.noaa.gov/cdo-web/datasets/GHCND/stations/GHCND:RSM00028224/detail>

Статья поступила 11.02.2015 г.

Dolgy M.E., Kataev S.G. RESEARCH OF A NATURAL PULSE ELECTROMAGNETIC FIELD OF EARTH

DOI 10.17223/19988621/34/6

Investigations of a natural pulse electromagnetic field of Earth (EIEMPZ) are conducted in the different research centers more than 50 years. However essential advance in understanding of the nature of the main components of EIEMPZ it isn't visible that it is possible to explain with enormous complexity of a problem. In a lithosphere and the atmosphere the set of the processes conducting to emergence of the chaotic electromagnetic fields possessing different intensity proceeds. As a result the sensor fixes casual superposition of this field in each timepoint. The explanation of the daily and annual course of temporary ranks of EIEMPZ is one of the main tasks which decision would allow to clear considerably the nature and the main mechanisms of emergence of EIEMPZ. Some results of research of structure of signals of EIEMPZ on the basis of "energy" representations are presented in article. Transition from amplitude and quantity of the impulses which are the main characteristics of a signal to its power description, perhaps, will allow to reveal the separate processes forming resultant EIEMPZ. With use of the correlation analysis estimates of influence of the Sun and Moon, as closest and significant space bodies are carried out. Possible relation between EIEMPZ and parameters characterizing processes which proceed in the top layers of Earth is considered and influence moisture content.

Keywords: natural pulse electromagnetic field of Earth, electromagnetic emissions, geodynamic processes, atmospheric processes, correlation analysis.

DOLGY Maxim Evgenyevich (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: maxim_ev_dolgy@mail.ru

KATAEV Sergey Grigovyeich (Tomsk State Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: sgkataev@sibmail.com

REFERENCES

25. Александров М.С., Бакленов З.М., Гладштейн Н.Д. и др. Флуктуация электромагнитного поля земли в диапазоне СНЧ. Коллективная монография / ред. М.С. Александров. М.: Наука, 1972. 192 с.
26. Распопов О.М., Клейменова Н.Г. Возмущение электромагнитного поля Земли. Часть 3. ОНЧ-излучения. Л.: Изв-во Ленингр. ун-та, 1977. 144 с.
27. Ремизов Л.Т. Естественные радиопомехи. М.: Наука, 1985. 200 с.
28. Воробьев А.А. Овозможности Электрических разрядов в недрах Земли // Геология и геофизика. 1970. № 12. С. 3–13.
29. Воробьев А.А. Тектоэлектрические явления и возникновение естественного импульсного электромагнитного поля Земли – ЕИЭМПЗ. Томск, 1979. 585 с. – Рукопись представлена Томским политехническим институтом: часть 1 – № 4296-79 – 202 с.; часть 2 – № 4297-79 – 149 с.; часть 3 – № 380-80 – 243 с.
30. Малышков Ю.П., Джумабаев К.Б. Прогнозирование землетрясений по параметрам естественного импульсного электромагнитного поля Земли // Вулканология и сейсмология. 1987. № 1. С. 97–103.
31. Коряков Н.И., Никитин А.Н. Закономерность эксцентрического вращения ядра и оболочки Земли в суточном и годовом периоде // Сознание и физическая реальность. 1998. Т. 3 (2). С. 23–30.
32. Сидоренков Н.С. Физика нестабильностей вращения Земли. М.: Наука, Физматлит, 2002. 384 с.
33. Малышков Ю.П., Малышков С.Ю. Периодические вариации геофизических полей и сейсмичности, их возможная связь с движением ядра земли // Геология и геофизика 2009. № 2. С. 152–172.
34. Yury P. Malyshev, Sergey Yu. Malyshev, Vasily F. Gordeev, Sergey G. Shtalin, Vitaly I. Polivach, Vladimir A. Krutikov, Michail M. Zaderigolova. Electromagnetic Fields: Principles, Engineering Applications and Biophysical Effects. Chapter 1. Earth's Natural Electromagnetic Noises in a Very-Low Frequency Band // Nova Science Publishers, Inc. – 2013. – P. 1–86.
35. Долгий М.Е., Тартаковский В.А., Кусков А.И. Декомпозиция эмпирических рядов данных на коррелированные и антикоррелированные составляющие на основе выделения существенных признаков // Хаос и структуры в нелинейных системах. Теория и эксперимент: Материалы 8-й международной научной конференции. – Караганда: Изд-во КарГУ, 2012. С. 86–89.
36. Мартышев Ю.Н. Исследование свечения и электризации кристаллов LiF при их деформации // Кристаллография. 1965. Т. 10. Вып. 2. С. 224–226.
37. <http://www.ssd.jpl.nasa.gov/?horizons>
38. Егоров П.В., Иванов В.В., Колпакова Л.А. О некоторых закономерностях импульсного электромагнитного излучения щелочно-галогидных кристаллов и горных пород // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 1988. № 1. С. 67–70.
39. Беляев Л.М., Мартышев Ю.Н. О свечении при царапании кристаллов фтористого лития // Кристаллография. 1964. Т. 9. Вып. 1. С. 117–119.
40. Воробьев А.А., Чаусов В.М., Гордеев В.Ф. Импульсное радиоизлучение при царапании некоторых диэлектрических материалов // Изв. ВУЗов. Физика. 1977. № 10. С. 126–128.
41. Яковицкая Г.Е. Методы и технические средства диагностики критических состояний горных пород на основе электромагнитной эмиссии. Новосибирск: Параллель, 2008. 315 с.

42. Беспалько А.А., Яворович Л.В., Вишман Е.В., Федотов П.И. Механоэлектрические преобразования в горных породах Таштагольского железорудного месторождения // Геодинамика. 2008. № 1(7). С. 54–60.
43. Беспалько А.А., Яворович Л.В., Колесникова С.И. и др. Исследование изменений характеристик электромагнитных сигналов при одноосном сжатии образцов горных пород Таштагольского рудника // Изв. вузов. Физика. 2011. № 1/2. С. 78–84.
44. Aydin A., Prance R.J., Prance H., Harland C.J. Observation of pressure stimulated voltage in rocks using an electric potential sensor // Applied Physics Letters. 2009. V. 95. Is. 12.
45. Гохберт М.Б., Моргунов В.А., Похотелов О.А. Сейсмoeлектромагнитные явления. М.: Наука, 1988. 174 с.
46. Сурков В.В. Электромагнитные эффекты при землетрясениях и взрывах. М.: МИФИ, 2000. 448 с.
47. Фурса Т.В., Данн Д.Д., Осипов К.Ю., Неслерук Д.А. Влияние влажности на параметры электрического сигнала при импульсном механическом возбуждении гетерогенных материалов, содержащих пьезоэлектрические включения // Дефектоскопия. 2011. № 6. С. 57–66.
48. <http://www.ncdc.noaa.gov/cdo-web/datasets/GHCND/stations/GHCND:RSM00028224/detail>

УДК: 531:66.069.832

DOI 10.17223/19988621/34/7

С.Д. Замбалов, В.А. Скрипняк

ИССЛЕДОВАНИЕ СОПРЯЖЕННЫХ ПРОЦЕССОВ ГИДРОУПРУГОСТИ И РЕСУРСА КОНСТРУКЦИИ ЦЕНТРОБЕЖНОЙ ФОРСУНОЧНОЙ УСТАНОВКИ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ ВЫСОКОВЯЗКИХ ВИДОВ КОТЕЛЬНОГО ТОПЛИВА¹

Представлено решение сопряженной задачи о деформации и ресурсе конструкции реакционной камеры вихревой горелки, использующей мелкодисперсную смесь вязкого жидкого топлива и газообразного окислителя. На основе полученных численных результатов проведена оценка гидродинамического воздействия потока жидкости на деформацию элементов конструкции. Показано, что учет этого воздействия позволяет определить напряженно-деформированное состояние в элементах реакционной камеры при функционировании устройства, а также провести оптимизацию конструкции для достижения рациональных значений коэффициента запаса прочности.

Ключевые слова: *сопряженная задача, ресурс, усталостная долговечность, коэффициент запаса, центробежная форсунка, диспергирование, котельное топливо, мазут.*

В настоящее время особое внимание при разработке объектов энергетики уделяется требованиям в области экологичности, энергоэффективности и энергосбережения [1]. Несмотря на развитие технологий альтернативной энергетики, основная часть произведенной тепловой и электрической энергии приходится на долю традиционных углеводородных видов топлива. Одним из распространенных топлив для котельных агрегатов электростанций, промышленных и бытовых печей, судовых котельных установок являются различные виды нефтяного мазута [2 – 4]. Однако методы сжигания с использованием форсунок традиционных конструкций обладают рядом существенных недостатков [4], например высокой засоряемостью топливных каналов форсунок вследствие низких эксплуатационных характеристик мазута, значительным количеством вредных выбросов в окружающую среду, связанных с неполным сгоранием сырья. Таким образом, создание и разработка новых устройств для сжигания высоковязких видов котельного топлива с учетом повышенных требований по экологичности и энергоэффективности является актуальной задачей.

В данной работе рассмотрена задача о создании равномерного заполнения реакционной камеры вихревой горелки мелкодисперсной смесью топлива и окислителя. Предлагается использовать систему диспергирования, основанную на комбинации пульсационного и аэродинамического методов распыления, когда диспергируемая среда при прохождении через щелевой канал форсунки в режиме пульсации попадает в высокоскоростной завихренный газовый поток окислителя [5, 6]. При этом площадь истечения щелевого сопла предполагается переменной и

¹ Данное научное исследование выполнено при поддержке Программы «Научный фонд им. Д.И. Менделеева Томского государственного университета».

зависит от воздействия пульсаций давления в смеси с упругим откликом элементов конструкции форсуночной установки.

Для разработки и исследования устройств с деформируемыми рабочими элементами необходимо использовать подход, описывающий гидроупругое взаимодействие твердых тел и жидкости [7 – 9]. Таким образом, возникает потребность объединения в рамках единой вычислительной модели подходов механики жидкости и газа (МЖГ) и механики деформируемого твердого тела (МДТТ).

Построение таких физико-математических моделей осложняется тем, что система уравнений, основанная на фундаментальных законах сохранения, должна формулироваться в нестационарной постановке для описания одновременно протекающих динамических процессов. Следует отметить, что вследствие специфики пульсационной истории нагружения, для определения ресурса деформируемых элементов конструкции форсуночного устройства необходимо проводить расчет ресурса усталостной долговечности путем введения в систему дополнительных уравнений, полученных из экспериментальных данных по установлению характеристик по сопротивлению усталости при периодическом нагружении.

Рассмотрим сопряженную задачу об определении рабочих параметров диспергирования паромазутной смеси для последующего сжигания в реакционной камере вихревой горелки и надежности деформируемых элементов конструкции на примере форсуночной установки с щелевым соплом (рис. 1). Типовая схема устройства включает в себя камеру распределения топлива 1, которая состоит из упругих элементов, представляющих собой две вогнутые пластины 2, закрепленные

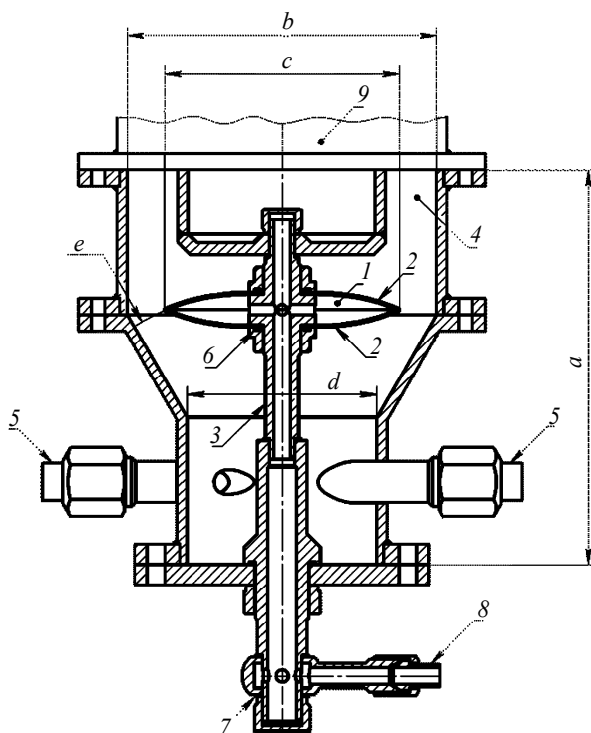


Рис. 1. Схема конструкции форсуночной установки

на полом распределяющем стержне 3 и вихревую камеру смешения 4 с двумя тангенциально расположенными штуцерами подачи окислителя 5. Устройство снабжается уплотняющими элементами в виде резиновых 6 и медных колец 7. Паро-мазутная смесь через штуцер 8 подается в распределяющий стержень 3. При возникновении волнового импульса, создаваемого генератором пульсации давления, вогнутые пластины форсунки 2, образующие камеру распределения 1, испытывают кратковременную упругую деформацию, соприкасающиеся стенки расходятся и формируют щелевое сопло, через которое осуществляется подача диспергируемой смеси в камеру смешения с окислителем 4. При смешении порция топлива приобретет тангенциальную составляющую скорости, после чего поступает в реакционную камеру вихревой горелки 9. Компонентами топливной смеси являются топочный мазут марки М-100 ГОСТ 10585-99 и водяной пар в массовом соотношении 1:1. Упругие элементы конструкции 2 камеры распределения выполнены методом штамповки из конструкционной стали марки 30 ХГС ГОСТ 4543-71. Схема наложения сварных швов по ГОСТ 16037-80. Толщина пластин 1 мм, диаметр вогнутости $e = 300$ мм, диаметр большего основания камеры распределения $c = 100$ мм, диаметр меньшего основания 20 мм. Высота камеры смешения $a = 200$ мм, внешний диаметр камеры смешения $b = 150$ мм, внутренний диаметр камеры смешения $d = 90$ мм.

Математическая модель

Сопряженная задача определения ресурса элементов конструкции форсуночного устройства включает в себя следующие одновременно решаемые задачи:

1. Определение динамических параметров движения жидкости и газа (распределение полей давлений и скоростей) и их влияния на механическое поведение элементов конструкции форсунки.

2. Определение структурного отклика конструкции на периодическую динамическую нагрузку (распределение напряжений и деформаций) и его влияния на рабочие параметры, соответствующие области МЖГ.

3. Определение усталостной долговечности конструкции устройства при циклическом нагружении.

Задача решается в переменных Лагранжа. Вводится декартова система координат, в которой ось OZ совпадает с осью полого стержня 3 (рис. 2). Начало координат расположено в точке пересечения оси OZ с плоскостью симметрии камеры распределения топлива 1.

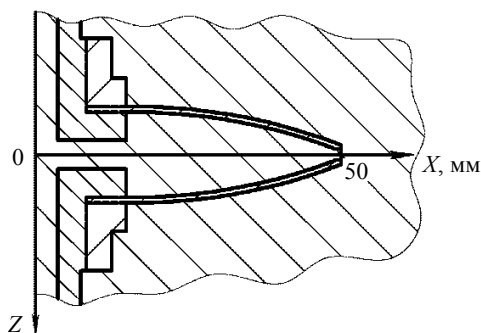


Рис. 2. Схема расположения системы координат

Обобщенная система разрешающих уравнений для решения нестационарной сопряженной задачи имеет следующий вид [10]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1)$$

где ρ – плотность вязкой паромазутной смеси, ∇ – дифференциальный оператор Гамильтона, $\mathbf{v}$ – вектор скорости;

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \nabla(\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = -\nabla P + \nabla(\boldsymbol{\tau}), \quad (2)$$

где P – давление, $\boldsymbol{\tau}$ – тензор напряжений;

Уравнение состояния для жидкой среды описывается зависимостью вида

$$\rho = \rho(P). \quad (3)$$

Для математического описания турбулентных течений используется модель переноса касательных напряжений (Shear Stress Transport – SST) с соответствующим разрешением пограничного слоя расчетной сетки.

Система уравнений описания механического поведения конструкции имеет следующий вид [11]:

$$\sigma_{ij,j} = \rho_s \frac{d^2 u_i}{dt^2}, \quad (4)$$

где u_i – компоненты вектора перемещений, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, ρ_s – плотность материала конструкции;

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (5)$$

где ε_{ij} – компоненты тензора деформаций;

Определяющее соотношение записывается в виде

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \right), \quad (6)$$

где E , ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала устройства, δ_{ij} – символ Кронекера.

При формулировании физико-математической модели, описывающей динамические процессы, в основе которых лежит взаимодействие газообразных и жидких сред с податливыми элементами конструкции, необходимо дополнительно учитывать возможность потери несущей способности устройства вследствие многоциклового усталости [12, 13].

На этапе схематизации истории нагружения происходит переход от реальной истории нагружения к её схематизированному аналогу. Для перехода от текущего многоосного напряженного состояния к экспериментальному одноосному используется гипотеза, основанная на удельной энергии формоизменения, которая описывается следующим соотношением [14]:

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}, \quad (7)$$

где σ_{eq} – эквивалентное напряжение, σ_1 , σ_2 , σ_3 – первое, второе и третье главные напряжения данного напряженного состояния.

Для описания перехода от текущего асимметричного цикла нагружений к симметричному используют зависимость, связывающую амплитуду напряжения эквивалентного по повреждаемости симметричного цикла нагружения $\sigma_{a_{eq}}$ с амплитудным и средним напряжением асимметричного цикла нагружения, соответствующего рассматриваемой сопряженной задаче, следующего вида [12]:

$$\sigma_{a_{eq}} = \sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m, \quad (8)$$

где $\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$ – амплитуда напряжений асимметричного цикла,

$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$ – среднее напряжение асимметричного цикла, ψ_σ – коэффициент учета асимметрии цикла, определяемый по формуле [12]:

$$\psi_\sigma = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0},$$

где σ_{-1} – предел усталости при симметричном цикле нагружения (индекс «-1» соответствует коэффициенту асимметрии для симметричного цикла $R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = -1$),

σ_0 – предел усталости при пульсирующем (отнулевом) цикле нагружения ($R=0$).

Для учета масштабных, технологических и геометрических факторов вводится коэффициент пересчета предела усталости K_T и вместо предела усталости σ_{-1} используется предел усталости элемента конструкции σ_{T-1} определяемый по формуле [15]

$$\sigma_{T-1} = K_T \sigma_{-1}; \quad (9)$$

$$K_T = \frac{1}{(K_\sigma/K_d + 1/K_f - 1)/K_v}, \quad (10)$$

где K_σ – коэффициент концентрации напряжений (отношение предела усталости гладкого образца к пределу усталости образца с концентратором напряжений), определяется по формуле

$$K_\sigma = 1 + (\alpha_\sigma - 1)q,$$

где q – коэффициент чувствительности материала к концентрации напряжений; из номограмм [12, 13] определяются: α_σ – теоретический коэффициент, K_d – коэффициент влияния размеров (масштабный фактор), K_f – коэффициент влияния качества обработки поверхности, K_v – коэффициент влияния поверхностного упрочнения.

С учетом (9) амплитуда напряжения σ_a принимает вид

$$\sigma_a^T = \frac{\sigma_a}{K_T}.$$

Тогда амплитуду напряжения эквивалентного по повреждаемости симметричного цикла нагружения можно записать в виде

$$\sigma_{a_{eq}} = \frac{\sigma_a}{K_T} + \psi_\sigma \sigma_m. \quad (11)$$

По результатам проведения схематизации истории нагружения производится оценка поврежденности на основе модифицированной гипотезы суммирования повреждений Седлачека [16]:

$$\sum_1^s \frac{n_i}{N_i} = 1 - \frac{\sigma_{a_{\max}}}{\sigma_B},$$

где s – число уровней напряжения; n_i – число циклов наработки за время эксплуатации при напряжении σ_{a_i} ; N_i – число циклов до разрушения при постоянном нагружении; $\sigma_{a_{\max}}$ – максимальное напряжение в блоке; σ_B – предел прочности. В этом случае суммарное число циклов N_c до разрушения выражается формулой:

$$N_c = \left(1 - \frac{\sigma_{a_{\max}}}{\sigma_B}\right) \left[\sum_1^s \frac{R_i}{N_i}\right]^{-1}, \quad (12)$$

где $R_i = n_i / \sum_1^s n_i$ – относительная длительность действия напряжения σ_{a_i} в блоке.

Граничные и начальные условия

Обозначим область пространства, занимаемую потоками жидкости и газа Ω_1 , а область, соответствующую элементам конструкции устройства, Ω_2 (рис. 3). Тогда граничные и начальные условия, замыкающие систему дифференциальных уравнений, описывающих нестационарный процесс (1) – (12), записываются в следующем виде.

Для задачи, относящейся к движению вязкой среды:

В точке $\bar{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$, принадлежащей области подачи в распределительную камеру форсунки распыления Γ_1 , задается закон изменения давления:

$$P(\bar{x}) = \frac{A}{2} \left(1 - \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right)\right), \bar{x} \in \Gamma_1 \subset \Omega_1, \quad (13)$$

где A – амплитуда, T – период;

Подача окислителя осуществляется с постоянной скоростью:

$$v_a(\bar{x}) = v_{a,0}, \quad v_t(\bar{x}) = v_{t,0}, \quad \bar{x} \in \Gamma_2 \subset \Omega_1, \quad (14)$$

где v_a – осевая компонента вектора скорости, v_t – тангенциальная компонента вектора скорости;

На выходной границе Γ_3 :

$$P(\bar{x}) = P_c, \quad \bar{x} \in \Gamma_3 \subset \Omega_1, \quad (15)$$

где P_c – давление на входе в камеру сгорания.

На внешних стенках установки Γ_4 задается условие прилипания потока:

$$v(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in \Gamma_4 \subset \Omega_1. \quad (16)$$

Для задачи о напряженно-деформированном состоянии в элементах конструкций:

Основание форсунки распыления жестко закрепляется на границе Γ_5 :

$$u(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in \Gamma_5 \subset \Omega_2. \quad (17)$$

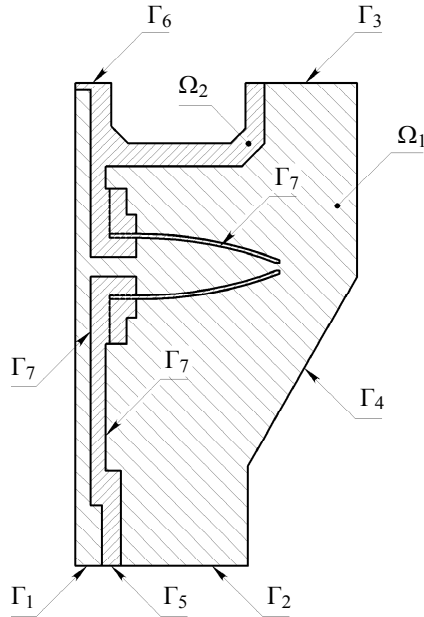


Рис. 3. Схема расчетной области

Граница Γ_6 свободна от внешних воздействий:

$$n_i \sigma_{ij}(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in \Gamma_6 \subset \Omega_2. \quad (18)$$

На граничной поверхности областей Γ_7 :

$$n_i \sigma_{ij}(\bar{x}) = P(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Gamma_7 \subset \Omega_1 \cap \Omega_2, \quad (19)$$

$$v(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in \Gamma_7 \subset \Omega_1 \cap \Omega_2. \quad (20)$$

При этом распределение давлений по координатам $P(\bar{x})$ получено из решения системы уравнений (1) – (3) на границе Γ_7 .

Начальные условия записываются в виде

$$P(\bar{x}, 0) = F_1(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Omega_1,$$

$$v(\bar{x}, 0) = F_2(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Omega_1,$$

$$T(\bar{x}, 0) = T_0, \quad \bar{x} \in \Omega_1,$$

$$u_i(\bar{x}, 0) = 0, \quad \bar{x} \in \Omega_2,$$

где функции $F_1(\bar{x})$ и $F_2(\bar{x})$ определяются из решения стационарной задачи, когда $P(\bar{x}) = P_0$, $\bar{x} \in \Omega_1$, $T_0 = 300 \text{ K} = \text{const}$.

Для решения системы уравнений вместе с граничными и начальными условиями в работе применялся метод конечных элементов, реализованный в универсальной программной системе ANSYS v.15.0. Для задания выражений, связанных с сопряжением расчетных областей и перестройкой сеточного разбиения области Ω_1 в результате изменения положения стенок упругих элементов использовались пользовательские функции, написанные на языке APDL и CEL.

При выполнении конечно-элементного анализа по достижении невязок значений порядка 10^{-6} критерий сходимости на временном шаге интегрирования считается выполненным. Временной шаг интегрирования разрешающей системы уравнений определяется из условия

$$\Delta t = \min(\Delta t_1, \Delta t_2),$$

где Δt_1 и Δt_2 – шаги интегрирования, удовлетворяющие критерию сходимости решения для областей Ω_1 и Ω_2 .

В результате исследования сеточной сходимости установлено, что в случае пространственной дискретизации расчетных областей задач МДТТ и МЖГ сеткой конечных элементов в размере 20 000 и 150 000 соответственно, дальнейшее измельчение конечно-элементного разбиения не оказывало существенного влияния на результаты расчета.

Для верификации программного комплекса использовались задачи, описанные в разделе «Verification Manual» [17]. Данный раздел содержит набор тестовых задач, в которых представлено сравнение результатов конечно-элементного анализа и аналитического расчета.

Результаты и обсуждение

Для оценки целесообразности решения сопряженной задачи и применения единой вычислительной модели (сопряженный подход – СП) численное решение системы уравнений (1) – (12) вместе с граничными (13) – (20) и начальными условиями сравнивалось с решением задачи теории упругости (ТУ) с упрощенными условиями нагружения. При решении задачи ТУ влияние течения потока жидкости на конструкцию упрощенно учитывается путем задания нагрузки в виде давления, изменяющегося по условию (13) с амплитудой $2 \cdot 10^5$ Па и периодом 2 с, равномерно распределенного на внутренних поверхностях элементов Γ_7 , т.е. решения системы уравнений (4) – (12) с граничными условиями (17) – (20).

На рис. 4 показаны расчетные распределения динамического (а), статического (б) и полного (в) давления в момент времени 1,063 с в сечении камеры при заданном законе изменения давления (13) с амплитудой $2 \cdot 10^5$ Па и периодом 2 с.

Максимальное значение полного давления наблюдается в зоне распределяющего стержня и составляет $2,04 \cdot 10^5$ Па. Возникающие зоны разрежения в окрестности камеры распыления формируются в вихревой камере смешения за счет расходящегося потока.

Указанные составляющие давления связаны соотношением

$$P_{\text{tot}} = P_{\text{stat}} + P_{\text{dyn}} = P_{\text{stat}} + \frac{1}{2} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}),$$

где P_{tot} – полное давление, P_{stat} – статическое давление, P_{dyn} – динамическое давление.

Распределения осевой (а), радиальной (б) и тангенциальной (в) компонент вектора скорости в сечении камеры в момент времени 1,063 с показан на рис. 5. Максимальное значение осевой компоненты скорости составляет 170 м/с. Для нормативных условий функционирования устройства характерно возникновение геометрически обусловленной области застойной зоны, расположенной над камерой распределения. Рост осевой компоненты вектора скорости наблюдается в областях, прилегающих к входу в вихревую горелку, где тангенциальная и радиальная компоненты вектора скорости составляют 66,7 и 12,8 м/с соответственно.

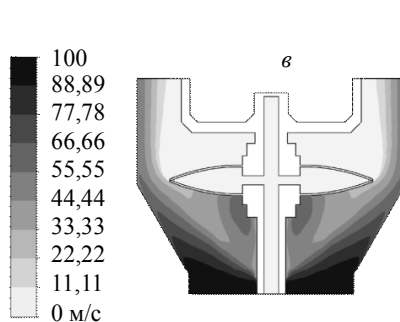
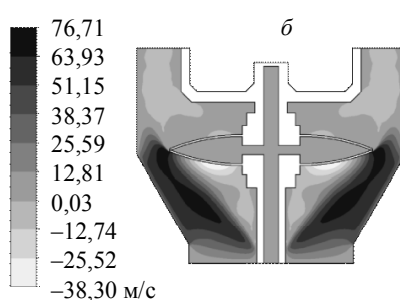
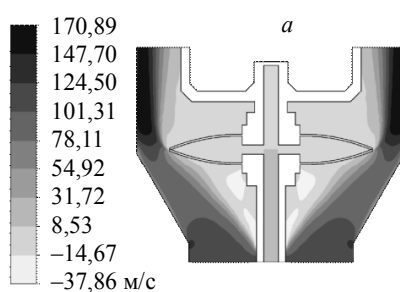
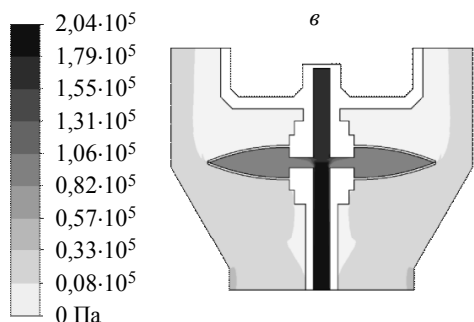
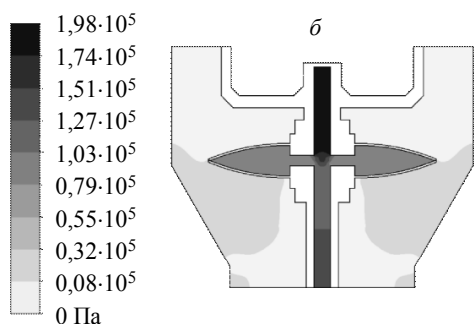
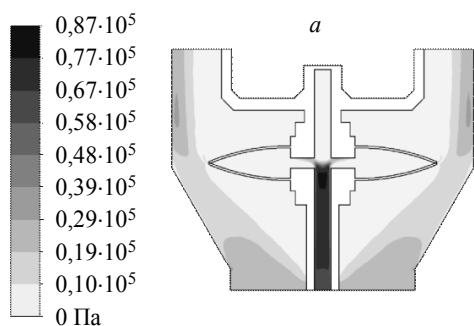


Рис. 4. Контуры распределения динамического (а), статического (б) и полного (в) давления

Рис. 5. Контуры распределения осевой (а), радиальной (б) и тангенциальной (в) компоненты вектора скорости

На рис. 6 показаны зависимости эквивалентных напряжений (а) и перемещений (б) элементов конструкции от положения на координатной оси OX для моментов времени (0,25; 0,5; 1,063 с) рабочего процесса. Штрихпунктирными линиями показаны результаты решения упрощенной задачи в рамках ТУ.

Максимальные значения эквивалентного напряжения на всем этапе нагружения находятся в упругой области функционирования материала и расположены на расстоянии 13,5 мм по оси X , что соответствует области крепления упругих элементов 2 к распределяющему стержню 3. Наибольшие значения перемещений наблюдаются в области щелевого канала форсунки. Разница между результатами, полученными в рамках СП и ТУ, достигает 8,5 % для значений эквивалентных

напряжений (265 МПа – СП; 288 МПа – ТУ) и 16,5 % – для значений перемещений (0,132 мм – СП; 0,154 – ТУ).

Расчет напряжений и фактических коэффициентов запаса производился по ГОСТ 52857.1-2007 «Нормы и методы расчета на прочность». Для учета влияния многоциклового нагружения в качестве предельного для данного материала напряжения используется предел длительной прочности. Коэффициент запаса по пределу длительной прочности в соответствии с нормативным документом принимался равным 1,5. Фактический коэффициент запаса составляет 1,7 (получен в рамках СП) и 1,6 (при решении задачи в рамках ТУ).

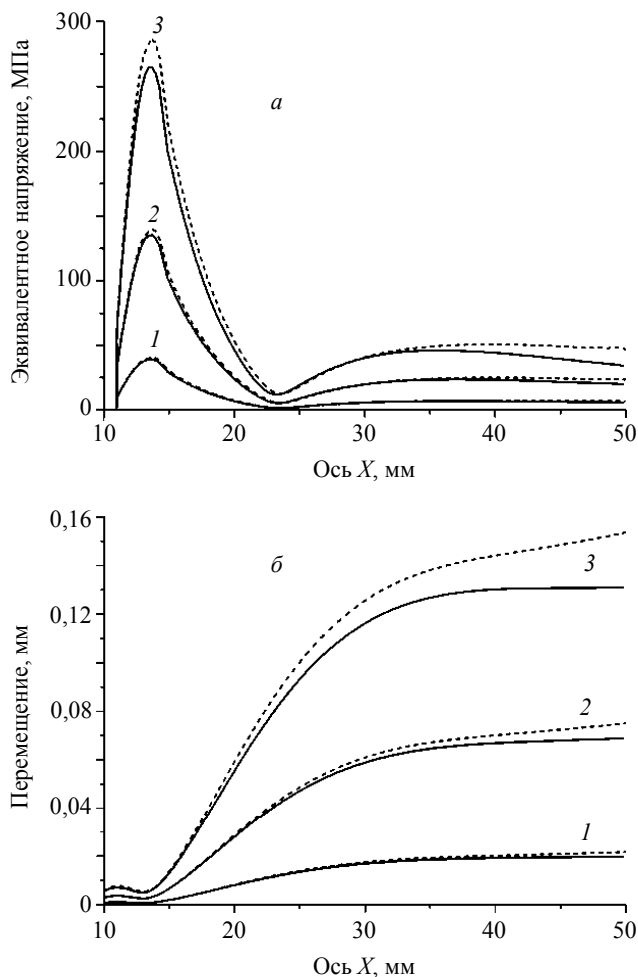


Рис. 6. Распределение эквивалентных напряжений (а) и перемещений (б) по оси X для некоторых моментов времени (1 – 0,25; 2 – 0,5; 3 – 1,063 с)

Зависимости (а) максимальных эквивалентных напряжений и перемещений (б) элементов конструкции от времени представлены на рис. 7. Функции распределения указанных параметров имеют вид волновой функции и достигают

максимума в момент максимального раскрытия щелевого сопла (1 с – результаты, полученные при решении задачи в рамках ТУ; 1,063 с – СП). Смещение по времени на 0,63 с обусловлено влиянием динамики течения диспергируемой жидкости на элементы конструкции устройства. При использовании единой вычислительной модели в рамках СП рассчитанные значения напряжений и перемещений на 10 и 19 % меньше, чем при решении задачи только в рамках ТУ соответственно.

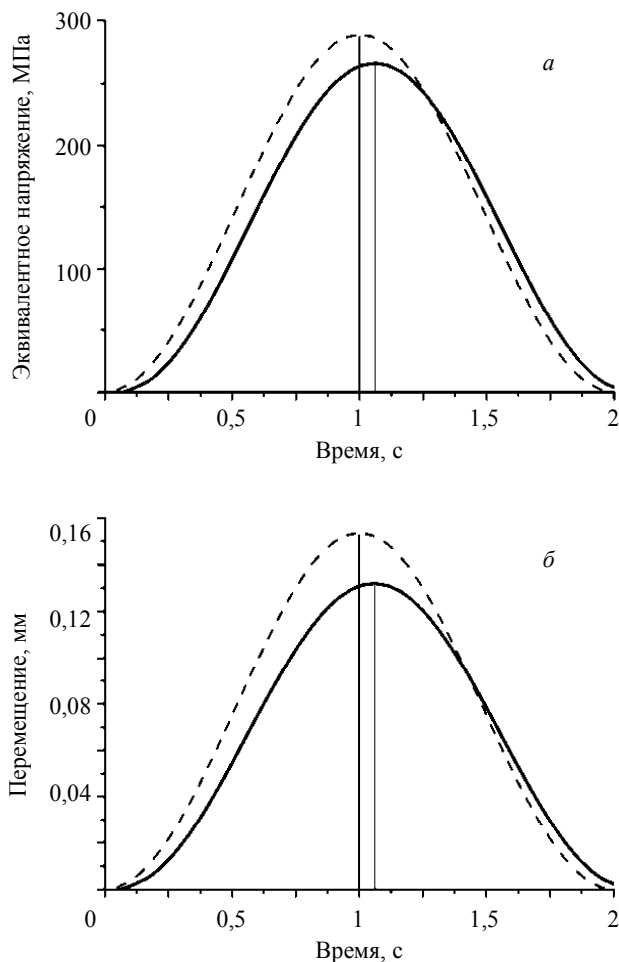


Рис. 7. Зависимость максимальных эквивалентных напряжений (а) и перемещений (б) от времени

Ввиду того, что пульсация давления диспергируемой жидкости происходит периодическим образом, за цикл работы устройства принимается промежуток, соответствующий открытию и закрытию щелевого сопла. Результаты исследования циклической долговечности устройства для подходов в рамках ТУ и СП представлены на рис. 8.

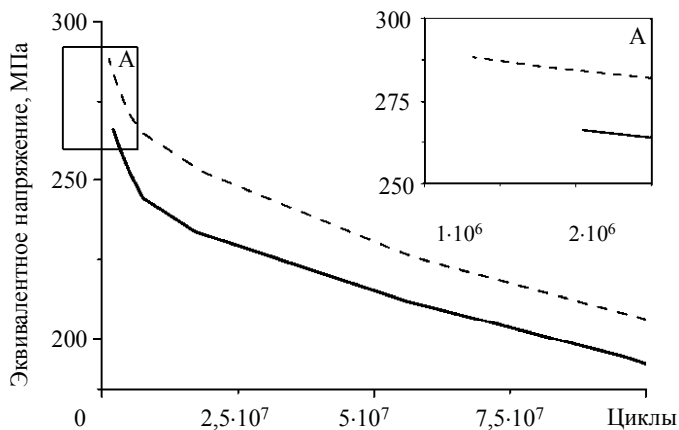


Рис. 8. Зависимость циклической долговечности устройства от реализующейся максимальной амплитуды интенсивности напряжений в элементах конструкции

Зона минимального запаса циклической прочности устройства совпадает с местом концентрации максимальных эквивалентных напряжений, которое находится в области крепления упругих элементов 2 к распределяющему стержню 3. Минимальное значение циклической долговечности, полученное в результате решения задачи в рамках ТУ? составляет 1,3 млн циклов, что на 35 % меньше по сравнению с результатами при СП (2 млн циклов). Такое снижение циклической долговечности обусловлено тем, что максимальные эквивалентные напряжения, полученные в рамках ТУ, превышают аналогичные параметры, рассчитанные при использовании СП.

Заключение

На примере задачи о деформации и ресурсе конструкции реакционной камеры вихревой горелки, использующей мелкодисперсную смесь вязкого жидкого топлива и газообразного окислителя, показано преимущество применения методики решения сопряженных задач МДТТ и МЖГ, связанных с взаимодействием жидкости, газа и элементов конструкции. Предложена физико-математическая модель, позволяющая определять реализующееся напряженно-деформированное состояние и течение жидких сред в рамках решения динамической задачи гидроупругости.

Решение сопряженной задачи с использованием единой вычислительной модели отличается от решения аналогичной задачи в упрощенной упругой постановке при задании нагрузки в виде давления, равномерно распределенного на внутренних поверхностях элементов по эквивалентным напряжениям на 10 %, по перемещениям на 19 %, по циклической долговечности на 35 %.

Установлено, что эквивалентные напряжения и перемещения элементов пластин сопла описываются волновыми функциями и достигают максимальных значений в момент максимального раскрытия щелевого сопла. Проведено исследование рабочего процесса, прочности и долговечности оригинальной конструкции форсуночного устройства, использующего принципы пульсационного и аэродинамического методов распылений котельного топлива.

Использование сопряженного подхода к моделированию связанных процессов в устройствах реакционных вихревых камер дает возможность снизить затраты на проектирование за счет более точного прогнозирования напряженно-деформированного состояния и ресурса разрабатываемых устройств.

Предложенная методика решения сопряженных задач может быть использована при разработке новых устройств, работающих в условиях вибраций и циклических нагрузок в энергетической, нефтеперерабатывающей, химической и других смежных отраслях машиностроения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Парфирьева Е.Н., Пантелева Ю.В. Перспективы развития мирового нефтегазохимического комплекса // Вестник Казанского технологического университета. 2012. Т. 15. № 12. С. 177–181.
2. Воликов А.И. Сжигание газового и жидкого топлива в котлах малой мощности. Л.: Ленхиммаш, 1989. 159 с.
3. Зверева Э.Р., Ганина Л.В. Повышение технико-экономических и экологических показателей мазутных хозяйств // Энергетика Татарстана. 2007. № 2. С. 62–66.
4. Забродин А.Г., Алибеков С.Я., Маряшев А.В., Сальманов Р.С., Филимонов С.С. Анализ физико-механических свойств мазута и устройство для его эффективной подготовки и сжигания // Вестник Казанского технологического университета. 2013. Т. 16. № 5. С. 226–230.
5. Архипов В.А., Бондарчук С.С., Евсеев М.Я. и др. Экспериментальное исследование диспергирования жидкости эжекционными форсунками // Инженерно-физический журнал. 2013. Т. 86. № 6. С. 1229–1236.
6. Коровина Н.В., Кудряшова О.Б., Антонникова А.А., Ворожцов Б.И. Распыление жидкости при импульсном воздействии // Известия вузов. Физика. 2013. Т. 56. № 9/3. С. 169–172.
7. Ковеня В.М. Некоторые тенденции развития математического моделирования // Вычислительные технологии. 2002. Т. 7. № 2. С. 59–73.
8. Данилов А. М., Гарькина И. А. Математическое моделирование сложных систем: состояние, перспективы, пример реализации // Вестник гражданских инженеров. 2012. № 2. С. 333–337.
9. Русаков С.В., Шуваев Н.В. Численное моделирование аэроупругого взаимодействия компрессорной лопатки с дозвуковым потоком воздуха в трёхмерной постановке // Вычислительная механика сплошных сред. 2013. Т. 6. № 3. С. 300–308.
10. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа: учеб. для вузов. 7-е изд., испр. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
11. Мэйз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. М.: Мир, 1974. 310 с.
12. Когаев В.П. Расчеты на прочность при напряжениях, переменных во времени. М.: Машиностроение, 1977. 232 с.
13. Троценко В.Т., Сосновский Л.А. Сопротивление усталости металлов и сплавов. Киев: Наукова думка, 1987. 1238 с.
14. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1967. 552 с.
15. Когаев В.П., Махутов Н.А., Гусенков А.П. Расчеты деталей машин и конструкций на прочность и долговечность. М.: Машиностроение, 1985. 563 с.
16. Прошковец Й., Вайтшиек Я. Расчет долговечности элементов машин, нагружаемых переменными колебательными силами // Проблемы прочности. 1980. № 8. С. 21–28.
17. ANSYS Workbench Verification Manual. SAS IP Inc., 2013. 236 p.

Zambalov S. D., Skripnyak V. A. COUPLED PROCESSES RESEARCH OF HYDROELASTICITY AND DURABILITY OF CENTRIFUGAL INJECTOR USING TO PREPARATION HIGH VISCOSITY FUELS

DOI 10.17223/19988621/34/7

The paper presents a solution of coupled problem of deformation and durability of the reaction chamber of centrifugal injector utilizing highly dispersed mixture of fuel oil and gaseous oxidizer. Problem solving deformable solid mechanics task and computational fluid dynamics task technique are proposed. Physical-mathematical model determining realizable strain-stress state of the device, fluid flow under dynamic problem of hydroelasticity and parameters of the fatigue life in a pulsating loading history are defined. On the basis of numerical results fluid flow and solid structure interactions are analyzed. Fluid dynamic parameters such as contours of pressure and velocity are evaluated. Zone of minimal safety factor of the device are obtained. Numerical result with using unified computational model and solve a similar problem in simplified statement using elasticity theory where pressure is uniformly distributed on inner surface of elements are compared. Thus, difference between the results is 10 % by equivalent stress, 19 % – total deformation and 35 % – safety factor. Using system approach to modeling conjugate processes in injectors reduce designing costs due to more precise forecast strain-stress state and durability of the devices. Proposed problem solving technique using to development new devices working in vibration and cyclic mode in energy, oil-refining industry and others kind of business.

Keywords: coupled problem, durability, fatigue life, safety factor, centrifugal injector, dispersion, black fuel oil.

Zambalov Sergey Dorzhievich (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: zambalovsd@gmail.com

Skripnyak Vladimir Albertovich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: skrp@ftf.tsu.ru

REFERENCES

18. Парфирьева Е.Н., Пантелеева Ю.В. Перспективы развития мирового нефтегазохимического комплекса // Вестник Казанского технологического университета. 2012. Т.15. №12. С. 177–181.
19. Воликов А.И. Сжигание газового и жидкого топлива в котлах малой мощности. – Л.: Ленхиммаш, 1989. – 159 с.
20. Зверева Э.Р., Ганина Л.В. Повышение технико-экономических и экологических показателей мазутных хозяйств // Энергетика татарстана. 2007. №2. С. 62–66.
21. Забродин А.Г., Алибеков С.Я., Маряшев А.В., Сальманов Р.С., Филимонов С.С. Анализ физико-механических свойств мазута и устройство для его эффективной подготовки и сжигания // Вестник Казанского технологического университета. 2013. Т.16. №5. С. 226–230.
22. Архипов В.А., Бондарчук С.С., Евсеев М.Я., Жарова И.К., Жуков А.С., Змановский С.В., Козлов Е.А., Коноваленко А.И., Трофимов В.Ф. Экспериментальное исследование диспергирования жидкости эжекционными форсунками // Инженерно-физический журнал. 2013. Т.86. №6. С. 1229–1236.
23. Коровина Н.В., Кудряшова О.Б., Антонникова А.А., Ворожцов Б.И. Распыление жидкости при импульсном воздействии // Известия вузов. Физика. 2013. Т.56. №9/3. С. 169–172.
24. Ковеня В.М. Некоторые тенденции развития математического моделирования // Вычислительные технологии. 2002. Т.7. №2. С. 59–73.

25. Данилов А. М., Гарькина И. А. Математическое моделирование сложных систем: состояние, перспективы, пример реализации // Вестник гражданских инженеров. 2012. №2. С. 333–337.
26. Русаков С.В., Шуваев Н.В. Численное моделирование аэроупругого взаимодействия компрессорной лопатки с дозвуковым потоком воздуха в трёхмерной постановке // Вычислительная механика сплошных сред. 2013. Т.6. №3. С. 300–308.
27. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа: Учеб. для вузов. – 7-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.
28. Мэйз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. – М.: Мир, 1974. – 310 с.
29. Когаев В.П. Расчеты на прочность при напряжениях, переменных во времени. – М.: Машиностроение, 1977. – 232 с.
30. Троценко В.Т., Сосновский Л.А. Сопротивление усталости металлов и сплавов. – Киев: Наукова думка, 1987. – 1238 с.
31. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1967. – 552 с.
32. Когаев В.П., Махутов Н.А., Гусенков А.П. Расчеты деталей машин и конструкций на прочность и долговечность. – М.: Машиностроение, 1985. – 563 с.
33. Прошкова И., Вайтишек Я. Расчет долговечности элементов машин, нагружаемых переменными колебательными силами // Проблемы прочности. 1980. №8. С. 21–28.
34. ANSYS Workbench Verification Manual. SAS IP Inc., 2013. P. 236.

УДК 534.21
DOI 10.17223/19988621/34/8

С.В. Рикконен, С.В. Пономарев, А.В. Азин

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ¹

Предложен подход к математическому моделированию пакетного пьезоактюатора с учетом массы и механических потерь движения пьезопластин на основе аналоговых электрических схем замещения. Данный подход допустим для решения одномерных задач и может быть полезен для предварительных расчетов колебательных систем микролинейных пакетных пьезопреобразователей.

Ключевые слова: пьезопровод, пьезоэлемент, система, частотные характеристики, аналоговая электрическая схема замещения.

В настоящее время становится актуальной задачей минимизации массогабаритных показателей всех элементов космической техники, это относится и ко всем электроприводам функционирования оборудования космических аппаратов (КА). Существенной альтернативой электромеханических устройств являются микролинейные пьезопроводы (МЛП). Замена всех приводов в КА на МЛП является не только технической задачей, но и существенным импортозамещением в важной отрасли страны.

Пьезопреобразователь состоит из пьезокерамического материала, на который нанесены два металлических электрода (рис. 1). Электрическое поле сигнала, приложенное к электродам, вызывает колебания пьезоэлектрика с амплитудой, составляющей малую долю длины волны.

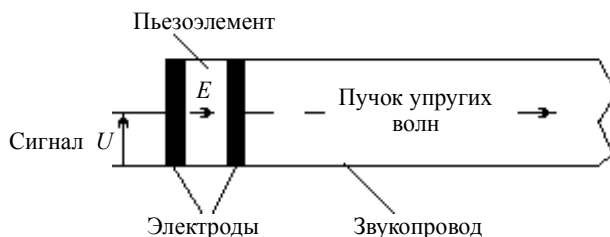


Рис. 1. Структура пьезопреобразователя упругих волн

Анализ работы такого преобразователя может быть проведен двумя способами. Первый состоит в непосредственном расчете мощности упругих волн с использованием уравнений распространения волн в каждой среде с учетом соответствующих граничных условий. Второй способ основан на представлении колебательной системы электрической схемой замещения, а затем к ней применяются законы Кирхгофа.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России, уникальный идентификатор RFMEFI57814X0060.

Целью работы является математическое моделирование работы колебательной системы пакетного пьезоактюатора способом аналоговых электрических схем замещения.

Систему, изображенную на рис. 1, можно представить с помощью эквивалентной электрической схемы [1]. Такая схема составляется из отдельных цепей, соответствующих каждому элементу системы, причем механические силы и виброскорости заменяются электрическими напряжениями и токами (рис. 2).

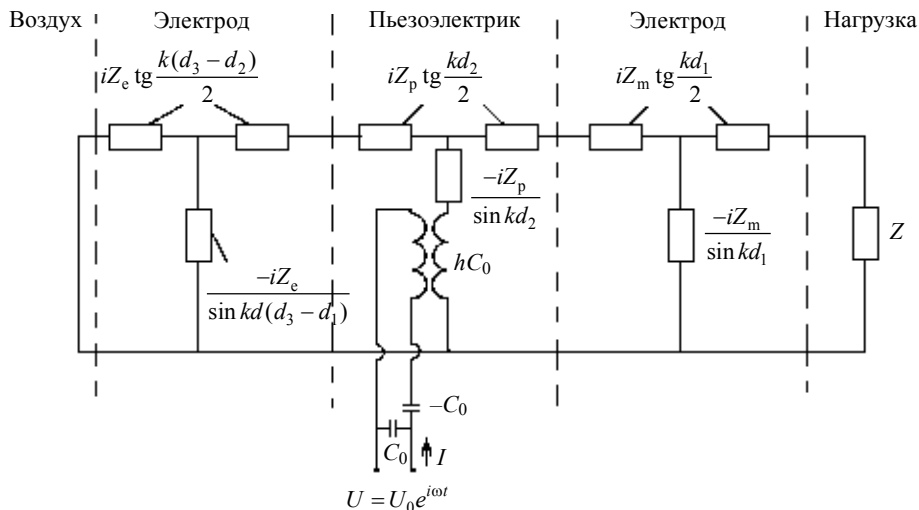


Рис. 2. Эквивалентная схема пьезоэлектрического преобразователя, работающего на частотах больших 100 МГц

Акустический импеданс пьезокерамики.

$$Z_p = c_p A / V = c_p K A / \omega, \text{ кг/с}, \quad (1)$$

где c_p – модуль Юнга; A – площадь пьезоэлемента; V – скорость распространения волны; $K = 2\pi f / V$, 1/м; C_0 – ёмкость пьезоэлемента:

$$C_0 = \varepsilon^S A / d, \text{ Ф}, \quad (2)$$

где d – толщина пьезоэлемента, м; ε^S – диэлектрическая проницаемость, Ф/м.

Частотный диапазон МЛП такой, что длина волны значительно больше толщины электродов, и поэтому влияние электродов на распространение упругих волн можно не учитывать, [1, с. 259]. Толщина электрода равна

$$d_{эл} = 2-3 \text{ мкм.}$$

$$f_p = 1 \text{ ГГц, } V = 6330 \text{ м/с,}$$

$$\lambda/2 = V / (2 \cdot f_p) = 6330 / (2 \cdot 10^9) = 3,2 \text{ мкм.}$$

На частотах $f = 100 \text{ кГц}$

$$\lambda = 63 \text{ мм} \gg d_{эл}.$$

Поэтому в электрической схеме замещения элементы, отвечающие за движение электродов, не учитываем, а Z_e и Z_m приравняем к нулю.

Для микролинейных пьезопроводов применяются пакетные пьезоактюаторы и электрическая схема замещения (рис. 2) должна быть повторена n раз, последовательно по количеству пластин (рис. 3).

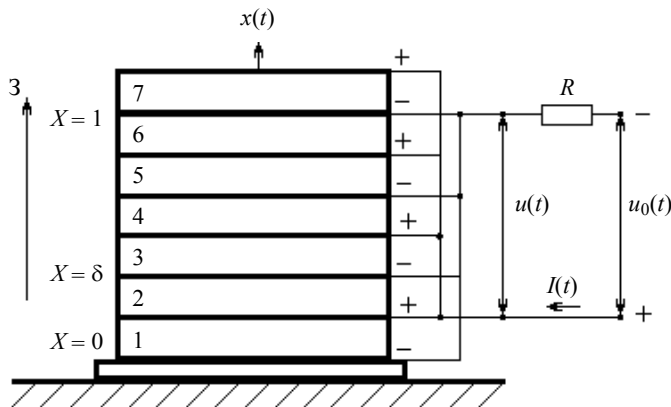


Рис. 3. Эквивалентная схема пьезоэлектрического преобразователя пакетного типа, пакет состоит из 7 пластин

Построим математическую модель составного (пакетного) пьезоактюатора при продольном пьезоэффекте с управлением по напряжению (рис. 4).

Сила возмущения одной пластины пьезоэлемента [2].

$$F = (d_{33} E_{33} A) / S_{33}^E, \quad (3)$$

где $d_{33} = 410 \cdot 10^{-12}$ – пьезоэлектрический модуль, Кл/Н, м/В; $E_{33} = U/d = 0,55 \cdot 10^{+5}$ – напряженность электрического поля, В/м; $A = 100 \cdot 10^{-6}$ – площадь, м²; $S_{33}^E = 17,5 \cdot 10^{-12}$ – упругая податливость, м²/Н.

Допущения, принятые при составлении схемы замещения [1, с. 276]:

- в схемах замещения пакета пластин масса пластин пьезоэлементов отсутствует;
- в пакете образуются только упругие волны;
- длина волны существенно больше толщины электродов – электроды в движении не участвуют;
- частотные характеристики исследуются в режиме «короткого замыкания» (выходной конец пьезоактиватора механически свободен от нагрузки и имеет максимальные амплитуды колебаний);
- механические потери на движение пластин внутри пьезоактюатора не учитываются.

Преобразование следует проводить по соотношениям, связывающим механические проводимости $g = 1/Z$ с силами F . Применяются правила преобразования параллельных электрических цепей [3, с.48].

$$g_{\Sigma} = \sum_{n=1}^{n=m} g_n; \quad (4)$$

$$F_{\Sigma} = \frac{\sum_{n=1}^{n=m} F_n g_n}{\sum_{n=1}^{n=m} g_n}. \quad (5)$$

Преобразуем электрическую схему к двухполюснику с эквивалентным сопротивлением и эквивалентной силой. Для построения частотных характеристик системы и определения резонансных частот применим режим короткого замыкания (рис. 5).

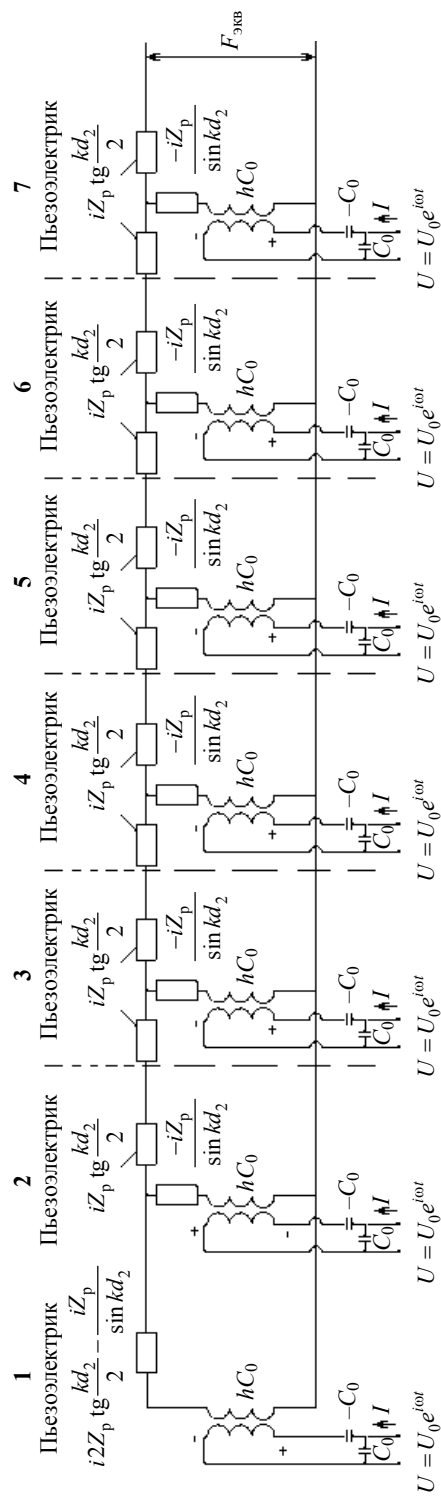


Рис. 4. Схема замещения пакетного пьезоэлектрика, состоящего из 7-и пьезопластин при продольных колебаниях, без учета массы пьезопластин и механических потерь. Режим XX – выходные концы системы разомкнуты, виброскорость нагрузки равна нулю

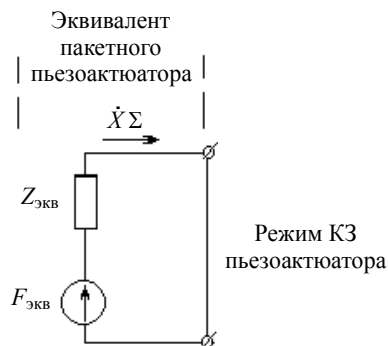


Рис. 5. Эквивалентная схема замещения пакетного пьезоэлектрика, состоящего из 7 пьезопластин, без учета массы пьезопластин и механических потерь. Режим КЗ

Режим короткого замыкания в аналоговых электрических цепях характеризуется максимальными виброскоростями и вибросмещениями. Нагрузка на пьезоактюатор отсутствует, в схеме замещения выходные клеммы замкнуты накоротко. Согласно методике [4], рассчитаем и построим частотные характеристики эквивалентного сопротивления, эквивалентной силы пьезоактюатора, силы на отдельных пластинах пьезоактюатора и амплитуды вибросмещения выходной поверхности излучения. Расчеты проводим согласно схемы, представленной на рис. 5.

Для конкретного примера используем параметры пьезоактюатора АПМ-2-7, ОАО «Элпа»: количество пластин – 7 шт., вес – 6,5 г (вес пакета пластин 6,9 г), длина – 20 мм, $C_0 = 3$ мкФ, $U = 100$ В, вибросмещение – 14 ± 15 %

мкм, $F_b = 1200$ Н, $f_0 = 10$ кГц. Результаты расчета представлены на рис. 6.

Вибросмещение торца пьезоактюатора в режиме КЗ:

$$X(\omega) = F_{\text{экр}}(\omega) / \{Z_{\text{экр}}(\omega) \cdot \omega\}. \quad (6)$$

Параметры схемы замещения (рис. 4) носят ёмкостной характер, так как в механической схеме присутствуют только упругие элементы. Однако из-за сложности схемы эквивалентные сопротивления показывают наличие резонансных частот. А частотные характеристики эквивалентных сил внутри пьезопакета показывают наличие резонансов от пластины к пластине. Силы внутри пьезоактюатора значительно превышают эквивалентную силу на выходном торце пакета. Количество резонансов соответствует количеству пластин в пьезоактюаторе. Резонансная рабочая частота выбирается по частотной характеристике вибросмещения по минимальным значениям (учитывая ограничения по быстродействию пьезокерамики). Резонансная рабочая частота равна 77 кГц.

Для получения более достоверной картины вибрационных колебаний необходимо в электрической схеме замещения учесть инерционную массу пластин пьезоэлемента и механические потери при движении пластин в пространстве.

Схема замещения пакетного пьезоэлектрика, состоящего из 7 пьезопластин, с учетом массы пьезопластин и механических потерь

Допущения, принятые при составлении полной схемы замещения (рис. 7):

- в пакете образуются только одномерные упругие и инерционные волны;
- сила возбуждения единична $F_b = 1$;
- частотные характеристики исследуем в режиме короткого замыкания;
- длина волны существенно больше толщины электродов – электроды в движении не участвуют;

$$X_m = i \cdot \omega \cdot M_{\text{пл}} / 2 \quad Z_1 = -i \cdot Z_p / (\sin kd_2) \quad Z_2 = i \cdot Z_p \cdot \tan(kd_2/2) \quad (7)$$

Коэффициент активных механических потерь движения пьезопластин $R_{\text{пл}}$ учитывался при определении механических сопротивлений каждой пластины (на схеме замещения не показан, чтобы не усложнять рисунок).

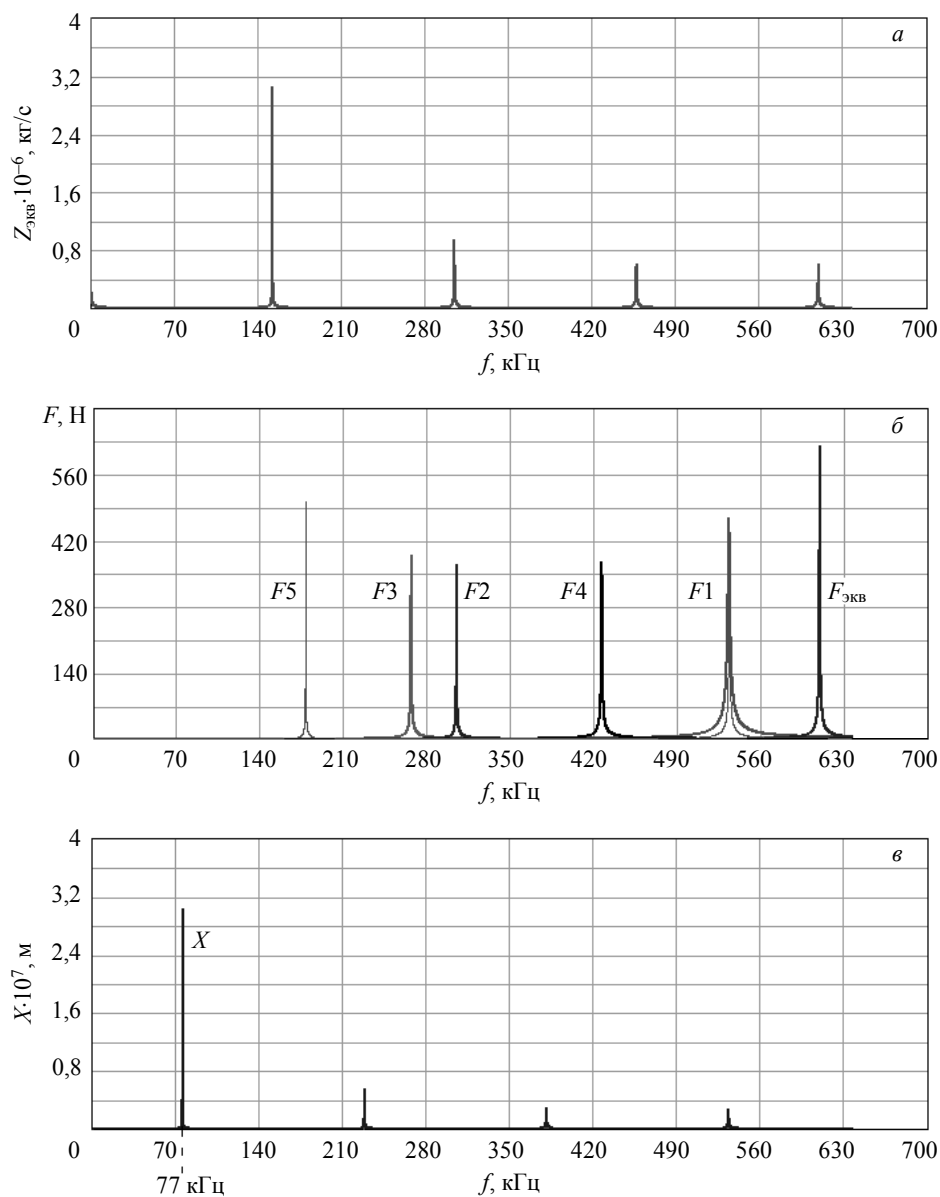


Рис. 6. Частотные характеристики пакетного пьезоэлектрика без учета массы пьезопластин и механических потерь, $n = 7$, $F = 1$ Н, режим КЗ; *a* – частотная характеристика эквивалентного сопротивления, $Z_{\text{эKB}}$; *б* – частотная характеристика внутренних сил пьезоактюатора ($F1 - F5$), частотная характеристика эквивалентной силы пьезоактюатора ($F_{\text{эKB}}$); *в* – частотная характеристика вибросмещения, X

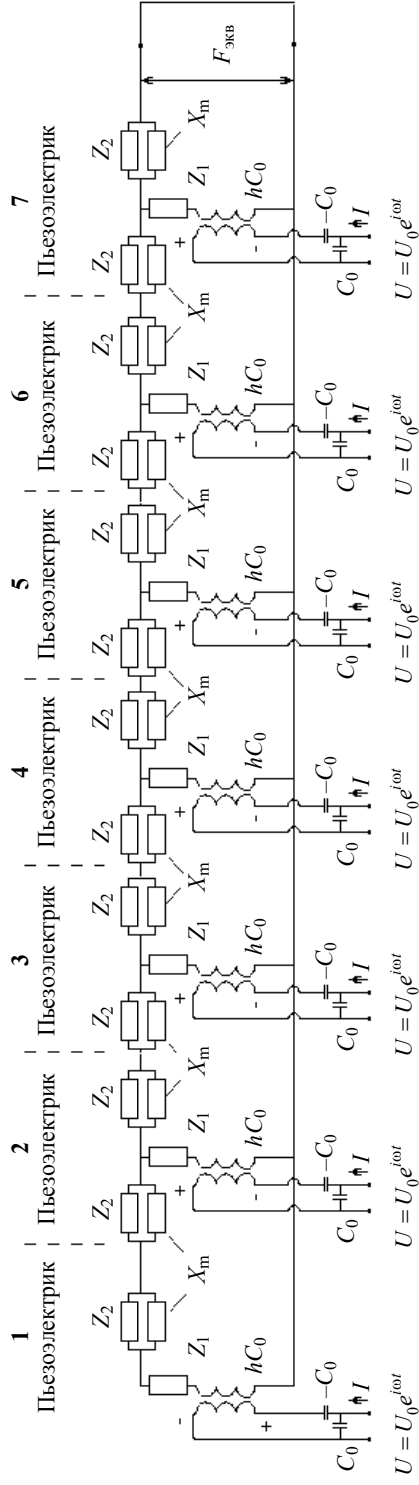


Рис. 7. Полная схема замещения пакетного пьезоэлектрика, с учетом массы пьезопластин и механических потерь, $n = 7$, режим КЗ

Массу одной пластины пакетного пьезоактюатора принимаем

$$M_{пл} = 6,9 \cdot 10^{-3} / 7 = 0,87 \cdot 10^{-3}, \text{ кг.}$$

Коэффициент механических потерь – $R_{пл} = 10,2$, кг/с. Результаты расчета представлены на рис. 8.

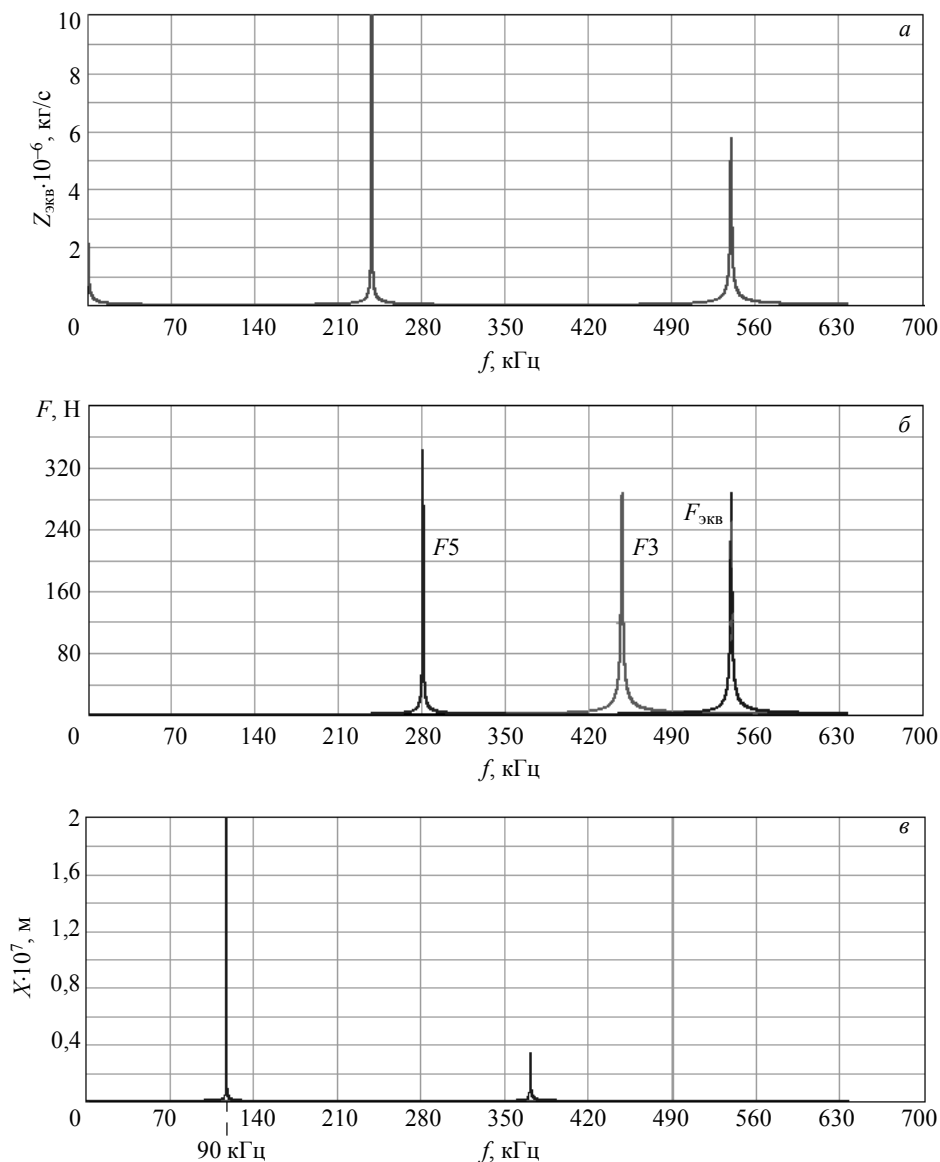


Рис. 8. Частотные характеристики пакетного пьезоактюатора с учетом массы пластин и механических потерь. $n = 7$, $F = 1$ Н, режим КЗ; а – частотная характеристика эквивалентного сопротивления, $Z_{эв}$; б – частотная характеристика внутренних сил пьезоактюатора ($F1 - F5$), частотная характеристика эквивалентной силы пьезоактюатора ($F_{эв}$); в – частотная характеристика виброперемещения, X

Виброскорость торца пьезоактюатора в режиме КЗ

$$V_{\text{наг}}(\omega) = F_{\text{экв}}(\omega) / Z_{\text{экв}}(\omega). \quad (8)$$

Сила на зажимах пьезоактюатора

$$F_{\text{н}}(\omega) = F_{\text{экв}}(\omega) - Z_{\text{экв}}(\omega) \cdot V_{\text{наг}}(\omega). \quad (9)$$

Учет масс пластин и коэффициентов механических потерь несколько изменил частотные характеристики, снизилось количество резонансов внутри пакетного пьезоактюатора, резонансная частота увеличилась до 90 кГц.

Выводы

1. Предложен подход к математическому моделированию пакетного пьезоактюатора с учетом массы и механических потерь движения пьезопластин.

2. Для одномерных задач, целесообразно применять математическое моделирование колебательных систем пакетного пьезоактюатора, основанное на аналоговых электрических схемах замещения с учетом массы и механических потерь движения пьезопластин.

3. Частотные характеристики схем замещения с учетом масс и потерь существенно отличаются от частотных характеристик схем замещения колебательной системы без учета масс и потерь.

4. Для более точного анализа колебательной системы необходимо использовать полную аналоговую электрическую схему замещения.

5. Частотные характеристики сил показывают наличие резонансов внутри пакета. Все пьезопластины резонируют на своей частоте, а амплитуда сил на отдельных пьезоэлементах может превышать результирующую силу всего пакета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. М.: Наука, 1982. 424 с.
2. Афонин С.М. Многомерная структурно-параметрическая модель составного пьезодвигателя наноперемещений // Вестник машиностроения. 2007. № 1. С. 3–13.
3. Круг К.А. Основы электротехники. М.: Гос. энерг. изд-во, 1952. 431 с.
4. Пономарев С.В., Рикконен С.В., Азин А.В. Анализ работы пьезопривода по частотным характеристикам механоакустической колебательной системы // Изв. вузов. Физика. 2014. № 8/2. Т. 57. С. 196–202.

Статья поступила 11.02.2015 г.

Rikkonen S.V., Ponomarev S.V., Azin A.V. SIMULATION OF OSCILLATORY PROCESSES PIEZOELECTRIC TRANSDUCER

DOI 10.17223/19988621/34/8

It is now an urgent task to minimize the weight and size of all the elements of space technology, this applies to all electric drives functioning spacecraft equipment. Significant alternative to electromechanical devices are micro linear piezoactuator. Replacing all the drives in the spacecraft on the micro linear piezoactuator is not only a technical objective, but also a significant important replacement in an important sector of the country.

The analysis of such a transducer can be performed in two ways. The first method consists in calculating the power of elastic waves using the equations of propagation of waves in each environment, with appropriate boundary conditions. The second method is based on the representation of the oscillating system in the form of electrical circuits, and then applies Kirchhoff's laws. In this paper an approach to the mathematical modeling of batch piezoactuator to take the weight and mechanical losses piezoplates movement piezoceramic plates based on

analog electrical equivalent circuit are proposed. This approach is valid for the solution of one-dimensional problems. This approach may be useful for preliminary calculations of oscillating systems of micro linear batch piezoelectric transducer.

According to the study determined that:

- the frequency characteristics of the analog electrical equivalent circuit considering mass and loss significantly different from the frequency characteristics of the analog electrical equivalent circuit of the oscillating system excluding the mass and loss;
- for a more accurate analysis of the vibration system to use a complete analog electrical equivalent circuit;
- frequency characteristics forces show the presence of resonances inside of batch piezoelectric transducer. All piezoplates resonate at a different frequency and amplitude of the forces on the individual piezoelectric elements can exceed the resultant force of the entire batch piezoelectric transducer.

Keywords: piezodrive, piezoelectric element, system, the frequency response, analog electrical equivalent circuit, import replacement

RIKKONEN Sergey Vladimirovich (Candidate of Technical Sciences, Assoc. Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: rikk2@yandex.ru

PONOMAREV Sergey Vasilevich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: psv@niipmm.tsu.ru

AZIN Anton Vladimirovich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: antonazin@niipmm.tsu.ru

REFERENCES

УДК 531.351

DOI 10.17223/19988621/34/8

А.А. Шерстобитов, В.А. Потеряева, О.В. Усенко

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ
УЛЬТРАТОНКОГО ПОРИСТОГО СЛОЯ
МОНОДИСПЕРСНЫХ НАНОЧАСТИЦ¹**

Выполнено математическое моделирование движения молекул гелия, метана, кислорода и азота через ультратонкий слой пористого материала, составленного сферическими наночастицами одинакового размера. Потенциал взаимодействия наночастица – молекула взят в форме, предложенной В.Я. Рудяком, С.Л. Краснолуцким. Методом классической молекулярной динамики изучена проницаемость слоя, имеющего размер порядка 10^{-7} м.

Ключевые слова: поле потенциальных сил, наночастицы, движение молекул, численные методы, проницаемость слоя.

Углеродные фильтры могут быть получены как результат прессования древесного угля или порошка высокомолекулярного углерода. В любом случае основным наполнителем полученного пористого фильтрующего элемента будут весьма малые углеродные частицы. Естественно, что в полученном таким образом материале размер пор будет соизмерим с размером частиц. В настоящей работе при определении проницаемости слоя используется следующий подход. Берём параллелепипед с прозрачными основаниями и боковыми гранями, отражающими молекулы по законам геометрической оптики. Случайным образом заполняем его объём наночастицами, добываясь необходимой пористости. При этом всякий раз, когда получаются пересечения шаров, ликвидируем их индивидуально способом разнесения центров пересекающихся шаров.

Основное уравнение динамики перемещающейся молекулы запишем в стандартной форме в виде второго закона Ньютона:

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (1)$$

где $\mathbf{v}$ – вектор скорости молекулы, M – масса летящей молекулы, $\mathbf{F}$ – главный вектор внешних по отношению к рассматриваемой молекуле воздействий.

В проекциях на оси координат вместо (1) получим три скалярных уравнения:

$$M \frac{dU}{dt} = X', \quad M \frac{dV}{dt} = Y', \quad M \frac{dW}{dt} = Z'. \quad (2)$$

Здесь X' , Y' , Z' – проекции равнодействующей ван-дер-ваальсовских сил от элементов углеродной структуры, которые определяются как простые суммы силовых вкладов от отдельных частиц системы:

¹ Работа выполнена в рамках Программы повышения конкурентоспособности Томского государственного университета и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 14-01-31365.

$$X' = \sum_{j=1}^{N_p} X'_j, \quad Y' = \sum_{j=1}^{N_p} Y'_j, \quad Z' = \sum_{j=1}^{N_p} Z'_j, \quad (3)$$

где X'_j , Y'_j , Z'_j – проекции на оси декартовых координат сил Ван-дер-Ваальса, действующих от j -й частицы системы, N_p – количество частиц в системе.

Далее введем в рассмотрение величины X_j , Y_j , Z_j : $X'_j = MX_j$, $Y'_j = MY_j$, $Z'_j = MZ_j$. Тогда в новых переменных уравнения (2) можно переписать в виде

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{j=1}^{N_p} X_j, \quad \frac{dV}{dt} = \sum_{j=1}^{N_p} Y_j, \quad \frac{dW}{dt} = \sum_{j=1}^{N_p} Z_j. \quad (4)$$

При этом

$$X_j = a_j \frac{x - x_j^0}{\rho_j}, \quad Y_j = a_j \frac{y - y_j^0}{\rho_j}, \quad Z_j = a_j \frac{z - z_j^0}{\rho_j}, \quad (5)$$

где a_j – величина ускорения, которое приобретает пробная молекула под действием j -й частицы системы.

Пористое тело представляется совокупностью сферических наночастиц, для которых имеется потенциал взаимодействия наночастица – молекула [1]:

$$\Phi_9^3(\rho_j) = \Phi_9(\rho_j) - \Phi_3(\rho_j). \quad (6)$$

Здесь ρ_j – расстояние от j -й частицы пористой структуры до пробной молекулы, ρ_p – радиус наночастицы,

$$\Phi_9(\rho) = C_9 \left\{ \left[\frac{1}{(\rho - \rho_p)^9} - \frac{1}{(\rho + \rho_p)^9} \right] - \frac{9}{8\rho} \left[\frac{1}{(\rho - \rho_p)^8} - \frac{1}{(\rho + \rho_p)^8} \right] \right\}; \quad (7)$$

$$\Phi_3(\rho) = C_3 \left\{ \left[\frac{1}{(\rho - \rho_p)^3} - \frac{1}{(\rho + \rho_p)^3} \right] - \frac{3}{2\rho} \left[\frac{1}{(\rho - \rho_p)^2} - \frac{1}{(\rho + \rho_p)^2} \right] \right\}. \quad (8)$$

Величина ускорения a_j , входящая в правые части соотношений (5), будет являться производной от (6) по ρ_j :

$$a_j = \frac{d}{d\rho_j} \Phi_9^3(\rho_j) = \frac{d}{d\rho_j} \Phi_9(\rho_j) - \frac{d}{d\rho_j} \Phi_3(\rho_j), \quad (9)$$

при этом

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_9(\rho_j)}{d\rho_j} = & -9C_9 \left\{ \left[\frac{1}{(\rho_j - \rho_p)^{10}} - \frac{1}{(\rho_j + \rho_p)^{10}} \right] - \frac{1}{\rho_j} \left[\frac{1}{(\rho_j - \rho_p)^9} - \frac{1}{(\rho_j + \rho_p)^9} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{8\rho_j^2} \left[\frac{1}{(\rho_j - \rho_p)^8} - \frac{1}{(\rho_j + \rho_p)^8} \right] \right\}; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_3(\rho_j)}{d\rho_j} = & -3C_3 \left\{ \left[\frac{1}{(\rho_j - \rho_p)^4} - \frac{1}{(\rho_j + \rho_p)^4} \right] - \frac{1}{\rho_j} \left[\frac{1}{(\rho_j - \rho_p)^3} - \frac{1}{(\rho_j + \rho_p)^3} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2\rho_j^2} \left[\frac{1}{(\rho_j - \rho_p)^2} - \frac{1}{(\rho_j + \rho_p)^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $c_9 = \frac{4\pi\epsilon_{12}\sigma_{12}^{12}}{45V}$, $c_3 = \frac{2\pi\epsilon_{12}\sigma_{12}^6}{3V}$, V – объем твердого углеродного тела, приходящийся на одну молекулу. Потенциал (6) получен интегрированием парного потенциала Леннарда – Джонса по объему наночастицы.

Значения констант взаимодействия ϵ и σ , входящих в потенциал Леннарда-Джонса, для некоторых пар веществ приведены в табл. 1.

Таблица 1

Взаимодействующие молекулы	Относительная глубина потенциальной ямы, К	Радиус влияния потенциала взаимодействия, нм
C – C	$\epsilon/k = 51,2$	$\sigma = 0,335$
He – He	$\epsilon/k = 5,5$	$\sigma = 0,228$
CH ₄ – CH ₄	$\epsilon/k = 146,7$	$\sigma = 0,386$
O ₂ – O ₂	$\epsilon/k = 116,8$	$\sigma = 0,354$
N ₂ – N ₂	$\epsilon/k = 95,3$	$\sigma = 0,377$

Примечание: k – постоянная Больцмана.

Если исследуемая система состоит из разнородных молекул (атомов), то для параметров ϵ и σ справедливы следующие правила усреднения Лорентца – Бертло (Lorentz – Berthelot mixing rule):

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}, \quad \epsilon_{12} = \sqrt{\epsilon_{11}\epsilon_{22}}. \tag{12}$$

В настоящей работе в качестве пористого элемента рассматривается система из 42 наночастиц радиуса 30 нм, случайным образом заполняющих объем 0,16 мкм³.

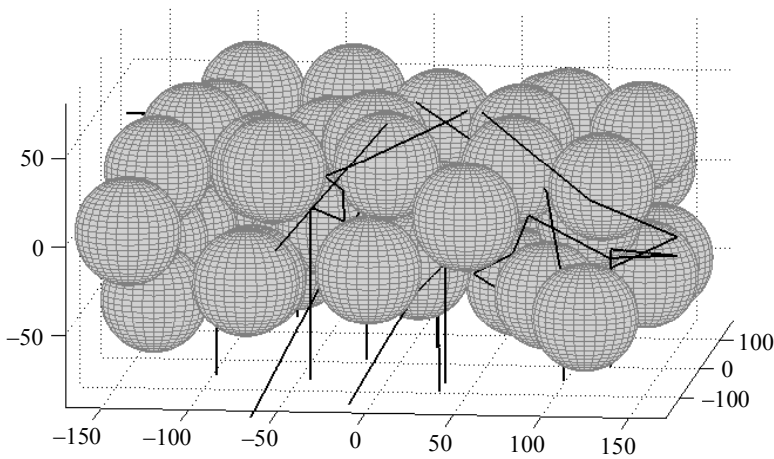


Рис. 1. Фрагмент ультратонкого слоя и траектории движения молекул геля

Начало координат помещаем в центр рассматриваемого объема, при этом пробные молекулы начинают движение в сторону положительного направления оси Oz . Проницаемые грани параллелепипеда расположены перпендикулярно оси

0z. Таким образом, после стохастического заселения рассматриваемого объёма наночастицами известны x_j^0, y_j^0, z_j^0 ($j = \overline{1, 42}$) – координаты центров наночастиц, входящие в правые части скалярных уравнений (4). Эти уравнения интегрируются численно с использованием схемы Рунге-Кутты четвертого порядка точности [2]. При этом на каждом шаге по времени ($\Delta t = 10^{-5}$ нс) и даже в каждой точке пересчета внутри этого шага требуется знать расстояние от центра пробной молекулы до центра отдельной наночастицы, которое определяется обычным образом:

$$\rho_j = \sqrt{(x - x_j^0)^2 + (y - y_j^0)^2 + (z - z_j^0)^2}, \quad (13)$$

где x, y, z – координаты перемещающейся молекулы.

Статистические аспекты молекулярной баллистики разрешаются на основе работ [3–5].

На рис. 2–5 представлены результаты расчетов молекулярной баллистики для молекул гелия, метана, азота и кислорода, взаимодействующих с наночастицами пористого элемента.

Левые графики этих рисунков представляют абсолютное значение скорости, которую приобретает молекула при столкновениях с наночастицами. На удалённых расстояниях от системы наночастиц или в зонах высокой локальной пористости скорость молекул становится равной исходной среднеквадратичной величине теплового движения. В этих же зонах силовое воздействие от системы наночастиц становится незначительным. Поскольку движение молекул осуществляется в потенциальном поле сил, то выполняется закон сохранения энергии в следующей форме:

$$\frac{mv^2}{2} = \sum_{j=1}^n \Phi_3^9(\rho_j) + \frac{mv_0^2}{2}. \quad (14)$$

Здесь v – величина мгновенной скорости молекулы, показанная на рис. 2–5; v_0 – начальное значение скорости, которое она имеет на удалении от системы наночастиц. Соотношения (14) являются первым интегралом уравнений движения (4) и могут использоваться для контроля точности проводимых вычислений.

Правые фигуры на рис. 2–5 демонстрируют путь, пройденный молекулами. Здесь пунктиром показаны границы слоя. Видно, что молекулы, обладающие кинетической энергией, отвечающей средней тепловой скорости движения молекул, отражаются от шаров данного размера как от упругих объектов. Причём эффективный радиус объекта близок к собственному радиусу частицы. Частицы, имеющие более мелкое зерно, относительно более защищены силовым полем вандерваальсовского взаимодействия.

Проницаемость слоя наночастиц с пористостью $\sigma^* = 0,706$ для рассматриваемых молекул представлена в табл. 2.

Таблица 2

Пробная молекула	Проницаемость пористого элемента
He	0,532
CH ₄	0,261
N ₂	0,236
O ₂	0,278

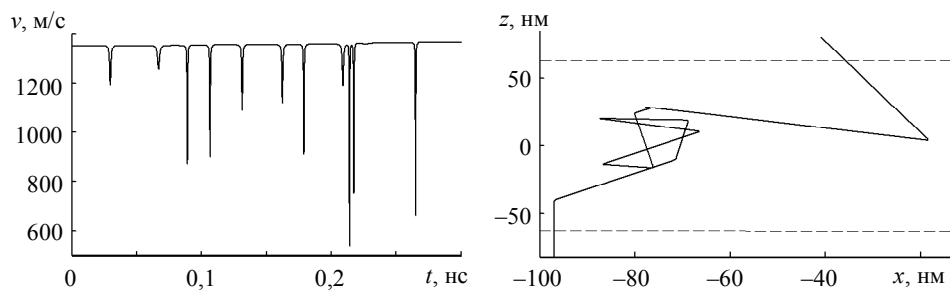


Рис. 2. Скорость и траектория молекулы гелия

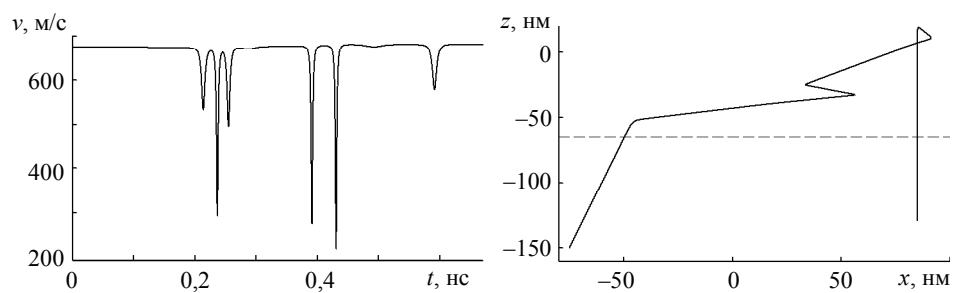


Рис. 3. Скорость и траектория молекулы метана

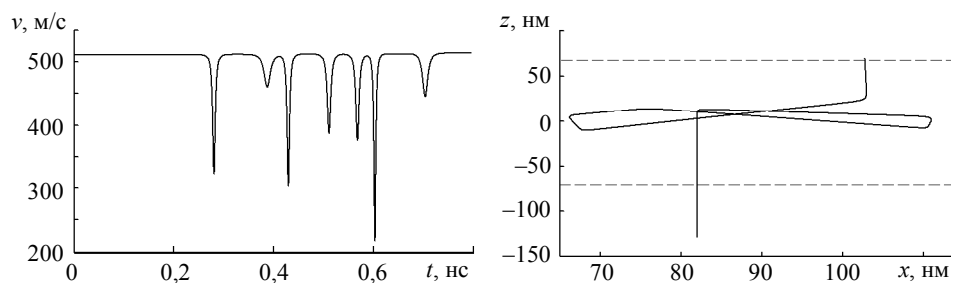


Рис. 4. Скорость и траектория молекулы азота

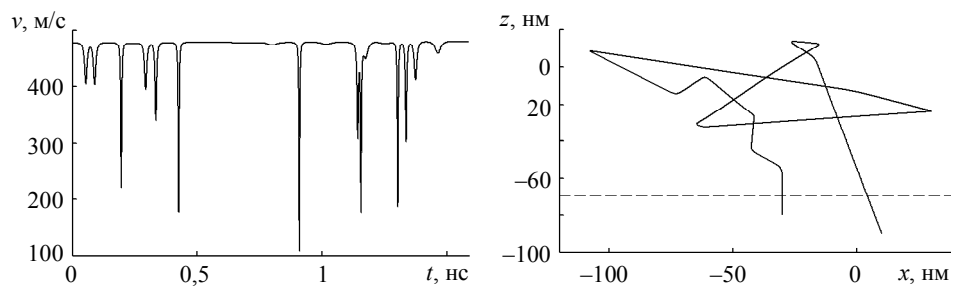


Рис. 5. Скорость и траектория молекулы кислорода

Пористость рассчитывается по следующей формуле:

$$\sigma^* = \frac{V_n - V_p}{V_n}, \quad (15)$$

где V_n — объём параллелепипеда, V_p — объём всех частиц, его населяющих.

Проницаемость D определяется по формуле:

$$D = \frac{N_{\text{пр}}}{N_{\text{пр}} + N_{\text{отр}}}, \quad (16)$$

где $N_{\text{пр}}$ — количество прошедших через слой молекул, $N_{\text{отр}}$ — количество отраженных молекул.

Таким образом, расчётами установлено, что гелий проходит примерно в два раза лучше всех других компонент. Этот результат подтверждается экспериментами В. И. Романдина лаб. 35 НИИ ПММ, полученными для различных образцов керамики.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rudiyak V.Y., Krasnolutsii S.L.* The calculation and measurements of nanoparticles diffusion coefficient in rarefied gases // *J. Aerosol Science*. 2003. V. 34. Suppl. 1. P. 579–580.
2. *Ortega J.* Scientific computing and computer science. New York: Academic Press, 1976. 340 p.
3. *Potekaev A.I., Bubenchikov A.M., Bubenchikov M.A.* New physical ideas and method of description and calculation of resistance to motion of small particles in a gaseous medium // *Russian Physics Journal*. 2013. V. 55. No. 12. P. 1434–1443.
4. *Bubenchikov M.A., Potekaev A.I., Bubenchikov A.M.* Three fundamental problems of molecular Statistics // *Russian Physics Journal*. 2013. V. 56. No. 3. P. 341–348.
5. *Bubenchikov M.A., Potekaev A.I., Bubenchikov A.M.* Thermophoresis of ultrafine and nanosized Particles // *Russian Physics Journal*. 2013. V. 56. No 7. P. 785–790.

Статья поступила 24.02.2015 г.

Sherstobitov A.A., Poteryaeva V.A., Usenko A.V. DIFFERENTIAL PERMEABILITY OF ULTRA-THIN POROUS LAYER OF MONODISPERSE NANOPARTICLES. In this paper was performed mathematical simulation of the molecules of helium, methane, oxygen and nitrogen through the ultra-thin layer of porous material consisting spherical nanoparticles of the same size. The interaction potential of nanoparticle – molecule is taken in the form proposed by V.Y. Rudjak, S.L. Krasnolutsky. The permeability layer was studied by the method of classical molecular dynamics and having a size of about 10^{-7} m.

Keywords: field of potential forces, nanoparticles, the motion of molecules, numerical methods, permeability layer.

USENKO Olesya Vadimovna (Postgraduate, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: usenko.olesya@yandex.ru

SHERSTOBITOV Alexandr Anatolyevich (Postgraduate, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: sherstobitovalexandr@gmail.com

POTERYAEVA Valentina Alexandrovna (Undergraduate, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: valentina.poteryaeva@gmail.com

REFERENCES

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АЗИН Антон Владимирович – кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник Томского государственного университета. E-mail: antonazin@niipmm.tsu.ru

БАБУШКИН Игорь Аркадьевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики Пермского государственного университета. E-mail: lapans@yandex.ru

БАХТЕЕВ Олег Александрович – научный сотрудник ОАО «Высокотехнологический научно-исследовательский институт неорганических материалов имени академика А.А. Бочвара». E-mail: lysikov@bochvar.ru

БУХТЯК Михаил Степанович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: bukhtyakm@mail.ru

ДЕГТЯРЕВ Никита Александрович – научный сотрудник ОАО «Высокотехнологический научно-исследовательский институт неорганических материалов имени академика А.А. Бочвара». E-mail: lysikov@bochvar.ru

ДОЛГИЙ Максим Евгеньевич – ассистент кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: maxim_ev_dolgy@mail.ru

ЕМЕЛЬЯНОВА Татьяна Вениаминовна – старший преподаватель кафедры математического анализа механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: tv_em@mail.ru

ЗАБАРИНА Анна Ивановна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, теории и методики обучения математике физико-математического факультета Томского государственного педагогического университета. E-mail: aizabarina@gmail.com

ЗАМБАЛОВ Сергей Доржиевич – аспирант кафедры механики деформируемого твердого тела Томского государственного университета. E-mail: zambalovsd@gmail.com

КАТАЕВ Сергей Григорьевич – доктор технических наук, профессор кафедры общей физики Томского государственного политехнического университета. E-mail: sgkataev@sibmail.com

КОНДРАШОВ Александр Николаевич – ассистент кафедры общей физики Пермского государственного университета. E-mail: akon.psu@yandex.ru

КОНЕВ Виктор Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики и математического моделирования Томского государственного университета. E-mail: vvkonev@mail.tsu.ru

ЛЫСИКОВ Александр Владимирович – кандидат физико-математических наук, заместитель начальника отдела ОАО «Высокотехнологический научно-исследовательский институт неорганических материалов имени академика А.А. Бочвара». E-mail: lysikov@bochvar.ru

МИХЕЕВ Евгений Николаевич – кандидат физико-математических наук, начальник отдела ОАО «Высокотехнологический научно-исследовательский институт неорганических материалов имени академика А.А. Бочвара». E-mail: lysikov@bochvar.ru

ПЕСТОВ Герман Гаврилович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: gpestov@mail.ru

ПОНОМАРЕВ Сергей Васильевич – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, заведующий лабораторией Томского государственного университета. E-mail: psv@niipmm.tsu.ru

ПОТЕРЯЕВА Валентина Александровна – магистрантка механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: valentina.poteryaeva@gmail.com

РИККОНЕН Сергей Владимирович – кандидат технических наук, доцент, старший научный сотрудник Томского государственного университета. E-mail: rikk2@yandex.ru

РЫБКИН Константин Анатольевич – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры общей физики Пермского государственного университета. E-mail: k.rybkin@gmail.com

СБОЕВ Иван Олегович – студент 5 курса Пермского государственного университета. E-mail: ivan-sboev@yandex.ru

СКРИПНЯК Владимир Альбертович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механики деформируемого твердого тела Томского государственного университета. E-mail: skrp@ftf.tsu.ru

СОЛОМИНА Анна Владимировна – аспирантка кафедры геометрии механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: annavladimirovna483@mail.ru

ТОБОЛКИН Антон Александрович – кандидат физико-математических наук, заместитель директора по инновациям МБОУ Академического лицея г. Томска. E-mail: tobantal@gmail.com

УСЕНКО Олеся Вадимовна – аспирантка механико-математического факультета Томского государственного университета E-mail: usenko.olesya@yandex.ru.

ФОМИНА Елена Анатольевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, теории и методики обучения математике физико-математического факультета Томского государственного педагогического университета. E-mail: ef254@mail.ru

ШЕРСТОБИТОВ Александр Анатольевич – аспирант кафедры теоретической механики механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: sherstobitovalexandr@gmail.com