

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2018

№ 51

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учредитель:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский Томский государственный университет»

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), К.М. Моисеева (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.М. Гришин, А.Н. Ищенко, В.В. Конеv, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, С.В. Панько, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер, Н.Р. Щербаков.

EDITORIAL COUNCIL

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

EDITORIAL BOARD

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Elena G. Lazareva (Executive Editor of the Mathematics Section), Kseniya M. Moiseeva (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimатов, Aleksey M. Bubenichikov, Igor M. Vasenin, Anatoliy M. Grishin, Aleksandr N. Ishchenko, Viktor V. Konev, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Sergey V. Panko, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager, Nikolay R. Shcherbakov.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

H-index: <http://elibrary.ru>, <http://Math-Net.ru>

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Бозиев О.Л. Решение нелинейного гиперболического уравнения приближенно-аналитическим методом.....	5
Danchev Peter V. A note on essentially indecomposable n -summable Abelian p -groups	15
Зюзьков В.М. Вокруг теоремы Эйлера о суммах делителей.....	19
Рачинская М.А., Федоткин М.А. Исследование условий существования стационарного режима в системе конфликтного обслуживания неоднородных требований.....	33
Шишкова А.А. Расчет азиатских опционов для модели Блэка – Шоулса.....	48

МЕХАНИКА

Анисимова М.А., Князева А.Г., Севостьянов И.Б. Оценка эффективных тепловых свойств композитов на основе титана	64
Боталов А.Ю., Родионов С.П. Численное исследование влияния жидкого наполнителя на свободные колебания тела, имеющего одну степень свободы.....	75
Бошнятов Б.В., Жильцов К.Н. Исследование взаимодействия волн цунами с подводными преградами конечной толщины в гидродинамическом лотке.....	86
Бубенчиков М.А., Уколов А.В., Уколов Р.Ю., Жамбаа С. О селективных свойствах наноразмерной бифуркации.....	104
Пейгин С.В., Пущин Н.А., Болсуновский А.Л., Тимченко С.В. Оптимальное аэродинамическое проектирование крыла широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета	117
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	130

CONTENTS

MATHEMATICS

Boziev O.L. Solution of nonlinear hyperbolic equations by an approximate analytical method.....	5
Danchev P.V. A note on essentially indecomposable n -summable Abelian p -groups	15
Zyuz'kov V.M. Around euler's theorem on sums of divisors	19
Rachinskaya M.A., Fedotkin M.A. Investigation of the stationary mode existence in a system of conflict service of non-homogeneous demands.....	33
Shishkova A.A. Calculation of asian options for the Black – Scholes model.....	48

MECHANICS

Anisimova M.A., Knyazeva A.G., Sevost'anov I.B. Evaluation of effective thermal properties of titanium-based composites.....	64
Botalov A.Yu, Rodionov S.P. Numerical investigation of the effect of liquid filling on free oscillations of one-degree-of-freedom body	75
Boshenyatov B.V., Zhil'tsov K.N. Investigation of the interaction of tsunami waves and submerged obstacles of finite thickness in a hydrodynamic wave flume	86
Bubenchikov M.A., Ukolov A.V., Ukolov R.Yu., Jambaa S. On the selective properties of nanoscale bifurcation	104
Peygin S.V., Pushchin N.A., Bolsunovskiy A.L., Timchenko S.V. An optimal aerodynamic design for the wing of a wide-body long-range aircraft	117
BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS	130

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.35
DOI 10.17223/19988621/51/1

MSC 35L20, 35L72

О.Л. Бознев

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
ПРИБЛИЖЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Предлагается метод решения смешанной задачи для гиперболического уравнения со степенной нелинейностью путем ее редукции к задаче для нагруженного уравнения, содержащего интеграл натуральной степени модуля неизвестной функции. Последнее уравнение линеаризуется посредством априорных оценок решения поставленной задачи. Получена формула, выражающая его решение через решение обыкновенного дифференциального уравнения, ассоциированного с нагруженным уравнением. Приближение к решению нелинейного уравнения производится с помощью итерационного процесса решения последовательности нелинейных задач.

Ключевые слова: нелинейные уравнения в частных производных, нагруженные уравнения в частных производных, априорные оценки, приближенные решения.

Нелинейное уравнение

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + b|u|^p u_t = 0 \quad (1)$$

с положительными параметрами a и b , натуральным p и начально-краевыми условиями различного вида в прямоугольной области является математической моделью различных нестационарных процессов. В частности, при $p \geq 0$ неоднородное уравнение вида (1) возникает в релятивистской квантовой механике [1, с. 16]. При $p = 1$ уравнение (1) моделирует неустановившееся течение жидкости в трубе со скоростью $u(x,t)$ [2, с. 42]. Для нахождения приближенного решения (1) с соответствующими условиями, как правило, используются трудоемкие численные методы. В данной статье предлагается приближенно-аналитический метод решения уравнения (1). Для его применения необходимо сначала от (1) перейти к нагруженному [3, с. 17] уравнению

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + bu_t \int_{\Omega} |u|^p dx = 0, \quad (2)$$

которое рассматривается в качестве аппроксимирующего относительно (1) при исходных начальных и граничных условиях. Уравнения вида (2) и его обобщения представляют самостоятельный интерес и исследованы, например, в [4, 5], где доказаны теоремы существования и единственности обобщенных решений соответствующих краевых задач. Переход от (1) к (2) позволяет «ослабить» нелинейность исходного уравнения и при этом избежать чрезмерного искажения сути модели-

руемого процесса. Найденное впоследствии точное или приближенное решение нагруженного уравнения (2) впоследствии можно принять за приближенное решение исходного нелинейного уравнения (1). Такой подход применен в [6, 7], где получены формулы общих членов последовательностей приближенных решений начально-краевых задач для некоторых нагруженных уравнений, аппроксимирующих исходные нелинейные уравнения. В [8] для нахождения приближенного решения первой смешанной задачи с однородными граничными условиями для уравнения (2), используются априорные оценки решения поставленной задачи. Ниже используется комбинация этих подходов, в которой для запуска итерационного процесса приближения к регулярному решению задачи (1), (3), (4) предварительно ищется решение задачи (2) – (4) с использованием его же априорных оценок.

1. Априорные оценки

В области $Q = \{(x, t): 0 < x < l, 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение (2) с натуральной степенью $p \geq 3$. Требуется найти интегрируемую функцию $u(x, t) \in C^{2,2}(\bar{Q})$, удовлетворяющую уравнению (2) в области Q , а также условиям

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l; \quad (3)$$

$$u(0, t) = \psi_1(t), \quad u(l, t) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

с функциями $\psi_1(t), \psi_2(t) \in C^1(0, T)$.

Всюду ниже равенство

$$\|v\|_{p,\Omega}^p = \int_{\Omega} |v|^p dx$$

выражает норму функции $v(t)$ в пространстве $L_p(\Omega)$, $\Omega = [0, l]$.

Установим некоторые априорные оценки решения задачи (2) – (4), необходимые для нахождения ее приближенного решения.

Сначала умножим уравнение (2) скалярно на функцию u_t

$$(u_{tt}, u_t) - a^2(u_{xx}, u_t) + b \int_{\Omega} |u|^p dx (u_t, u_t) = 0. \quad (2')$$

Преобразуем по отдельности каждое слагаемое:

$$\begin{aligned} (u_{tt}, u_t) &= \int_{\Omega} u_{tt} u_t dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (u_t)^2 dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_t^2 dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx, \\ -(u_{xx}, u_t) &= - \int_{\Omega} u_{xx} u_t dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} (u_x u_t) dx + \int_{\Omega} u_x u_{tx} dx = \\ &= - (u_x u_t)|_{x=0}^{x=l} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} u_x^2 dx = u_x(0, t) u_t(0, t) - u_x(l, t) u_t(l, t) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_x^2 dx = \\ &= u_x(0, t) \psi_{1t}(t) - u_x(l, t) \psi_{2t}(t) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_x|^2 dx, \\ (u_t, u_t) &= \int_{\Omega} u_t^2 dx = \int_{\Omega} |u_t|^2 dx. \end{aligned}$$

После подстановки в (2') приходим к уравнению

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (|u_t|^2 + a^2 |u_x|^2) dx + b \int_{\Omega} |u|^p dx \int_{\Omega} |u_t|^2 dx = u_x(l, t) \psi_{2t}(t) - u_x(0, t) \psi_{1t}(t),$$

интегрируя которое по t в границах от 0 до t получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (|u_t|^2 + a^2 |u_x|^2) dx + 2b \int_0^t \int_{\Omega} |u|^p dx \int_{\Omega} |u_t|^2 dx dt = \\ & = 2 \int_0^t (u_x(l, t) \psi_{2t}(t) - u_x(0, t) \psi_{1t}(t)) dt + \int_{\Omega} (|u_t(x, 0)|^2 + a^2 |u_x(x, 0)|^2) dx. \end{aligned}$$

Учитывая начальные условия (3) и неотрицательность второго слагаемого левой части, а также оценивая по модулю первое слагаемое правой части, перейдем от последнего уравнения к неравенствам

$$\|u_t\|_{2,\Omega}^2 + a^2 \|u_x\|_{2,\Omega}^2 \leq 2 \int_0^t |u_x(l, t) \psi_{2t}(t) + u_x(0, t) \psi_{1t}(t)| dt \leq C_1(t),$$

где

$$C_1(t) = 2 \max \left\{ \max_{t \in [0, T]} |u_x(l, t)|, \max_{t \in [0, T]} |u_x(0, t)| \right\} \int_0^t |\psi_{2t}(t) + \psi_{1t}(t)| dt = 2C_0 \int_0^t |\psi_{2t}(t) + \psi_{1t}(t)| dt,$$

$$C_0 = \max \left\{ \max_{t \in [0, T]} |u_x(l, t)|, \max_{t \in [0, T]} |u_x(0, t)| \right\}.$$

Отсюда следует, что для всех значений $t \in [0, T]$ выполняются неравенства

$$\|u_t\|_{2,\Omega}^2 \leq C_1(t), \quad \|u_x\|_{2,\Omega}^2 \leq \frac{C_1(t)}{a^2}, \quad C_1(0) = 0. \quad (5)$$

Теорема. Пусть функция $u \in L_{p-2}(\Omega)$ является решением задачи (2) – (4), а убывающие функции $\psi_1(t), \psi_2(t) \in L_{p-1}[0, T]$. Тогда функция $\|u\|_{p,\Omega}^p$ ограничена константой, зависящей только от t .

Доказательство. Умножим уравнение (2) скалярно на функцию u^{p-1}

$$(u_{tt}, u^{p-1}) - a^2 (u_{xx}, u^{p-1}) + b \int_{\Omega} |u|^p dx (u_t, u^{p-1}) = 0. \quad (6)$$

Преобразуем по отдельности каждое слагаемое:

$$\begin{aligned} (u_{tt}, u^{p-1}) &= \frac{1}{p} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} u^p dx - (p-1) \int_{\Omega} u_t^2 u^{p-2} dx, \\ (u_{xx}, u^{p-1}) &= u_x(l, t) \psi_2^{p-1}(t) - u_x(0, t) \psi_1^{p-1}(t) - (p-1) \int_{\Omega} u_x^2 u^{p-2} dx, \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} |u|^p dx (u_t, u^{p-1}) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u|^p dx \cdot \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^p dx.$$

Вернемся к (6) и умножим его на $\operatorname{sgn}^p u$, чтобы перейти к уравнению

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} |u|^p dx + \frac{b}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^2 = p(p-1) \int_{\Omega} |u|^{p-2} (u_t^2 - a^2 u_x^2) dx + F_1(t),$$

$$F_1(t) = pa^2 (u_x(l, t) \psi_2^{p-1}(t) - u_x(0, t) \psi_1^{p-1}(t)) \operatorname{sgn}^p u,$$

после интегрирования которого по t с учетом однородности начальных условий получаем

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^p dx + \frac{b}{2} \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^2 = p(p-1) \int_0^t \int_{\Omega} |u|^{p-2} (u_t^2 - a^2 u_x^2) dx dt + \int_0^t F_1(t) dt. \quad (7)$$

К первому слагаемому в правой части (7) применим неравенство Гёльдера:

$$\int_0^t \int_{\Omega} |u|^{p-2} (u_t^2 - a^2 u_x^2) dx dt \leq \left(\int_0^t \left| \int_{\Omega} |u|^{p-2} dx \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left| \int_{\Omega} u_t^2 - a^2 u_x^2 dx \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Сомножители правой части полученного неравенства ограничены: первый в силу $u \in L_{p-2}(\Omega)$:

$$\left(\int_0^t \left| \int_{\Omega} |u|^{p-2} dx \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^t |C_2|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{t} |C_2|,$$

а второй – в силу оценок (5):

$$\begin{aligned} \left(\int_0^t \left| \int_{\Omega} u_t^2 - a^2 u_x^2 dx \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\int_0^t \left| \int_{\Omega} u_t^2 + a^2 u_x^2 dx \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^t \|u_t\|_{2,\Omega}^2 + a^2 \|u_x\|_{2,\Omega}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left(\int_0^t |C_1(t) + C_1(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = 2 \left(\int_0^t |C_1(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = C_3(t). \end{aligned}$$

Подставляя сюда $C_1(t)$, видим, что

$$C_3(t) = 4C_0 \left(\int_0^t \left(\int_0^t |\psi_{2t}(t) + \psi_{1t}(t)|^2 dt \right) dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом,

$$\int_0^t \int_{\Omega} |u|^{p-2} (u_t^2 - a^2 u_x^2) dx dt \leq \sqrt{t} C_2 C_3(t),$$

что позволяет перейти от уравнения (7) к неравенству

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^p dx + \frac{b}{2} \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^2 \leq p(p-1) \sqrt{t} C_2 C_3(t) + \int_0^t |F_1(t)| dt. \quad (8)$$

Используя свойства функций $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$, можно убедиться в том, что

$$\begin{aligned} \int_0^t |F_1(t)| dt &\leq pa^2 \left(\int_0^t |u_x(l, t)| |\psi_2^{p-1}(t)| dt + \int_0^t |u_x(0, t)| |\psi_1^{p-1}(t)| dt \right) \leq \\ &\leq pa^2 \left(\int_0^t |\psi_2(t)|^{p-1} dt + \int_0^t |\psi_1(t)|^{p-1} dt \right) C_0. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (8) усилится:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^p dx + \frac{b}{2} \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^2 \leq p(p-1) \sqrt{t} C_2 C_3(t) + pa^2 \left(\int_0^t |\psi_2(t)|^{p-1} dt + \int_0^t |\psi_1(t)|^{p-1} dt \right) C_0.$$

Проинтегрируем это соотношение и получим

$$\int_{\Omega} |u|^p dx + \frac{b}{2} \int_0^t \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^2 dt \leq \int_{\Omega} |u(x, 0)|^p dx + F(t), \quad (9)$$

где первое слагаемое правой части равно нулю в силу первого условия (3), а

$$F(t) = \frac{2}{3} p(p-1) t^{\frac{3}{2}} C_2 C_3(t) + pa^2 \left(\int_0^t \left(\int_0^t |\psi_2(t)|^{p-1} dt + \int_0^t |\psi_1(t)|^{p-1} dt \right) dt \right) C_0 t. \quad (10)$$

Заметим, что $F(t) \leq F(T)$, в силу чего перейдем от (9) к неравенству

$$\|u\|_{p, \Omega}^p \leq \frac{b}{2} \int_0^t \left(\|u\|_{p, \Omega}^p \right)^2 dt + F(T).$$

Применяя к нему следствие из леммы Бихари [9, с.112], получаем оценку

$$\|u\|_{p, \Omega}^p \leq K(t), \quad (11)$$

с правой частью

$$K(t) = \frac{2F(T)}{2 - F(T)bt}, \quad (12)$$

выполняющуюся для всех $t \in [0, T]$, $T < 2/(bF(T))$.

Таким образом, теорема доказана.

2. Начальное приближенное решение

Для нахождения начального приближенного решения задачи (2) – (4) перейдем от (2) к ассоциированному с ним обыкновенному дифференциальному уравнению. Для этого проинтегрируем (2) в границах от 0 до x :

$$u_x(x, t) = \frac{1}{a^2} \int_0^x \left(u_{tt} + bu_t \|u\|_{p, \Omega}^p \right) dx + A(t).$$

Применяя к интегралу теорему о среднем значении, запишем последнее равенство в виде

$$u_x(x, t) = \frac{x}{la^2} \int_0^l \left(u_{tt} + bu_t \|u\|_{p, \Omega}^p \right) dx + A(t).$$

После повторного интегрирования по x и удовлетворения условий (3) приходим к соотношению

$$u(x, t) = \frac{x}{2a^2} \left(\frac{x}{l} - 1 \right) \left(\bar{u}'' + b\bar{u}' \|u\|_{p, \Omega}^p \right) + x \frac{\Psi_2 - \Psi_1}{l} + \Psi_1, \quad (13)$$

в котором

$$\bar{u}(t) = \int_{\Omega} u dx. \quad (14)$$

Применим преобразование (14) к функции (13) для того, чтобы перейти к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\bar{u}'' + b \|u\|_{p, \Omega}^p \bar{u}' + \frac{12a^2}{l^2} \bar{u} = \frac{6a^2}{l} (\Psi_1 + \Psi_2). \quad (15)$$

Начальные условия, необходимые для его интегрирования, получаются из условий (3):

$$\bar{u}(0) = \int_{\Omega} u(x, 0) dx = 0, \quad \bar{u}'(0) = \int_{\Omega} u_t(x, 0) dx = 0. \quad (16)$$

Для решения полученной задачи выберем в (11) верхнюю границу неравенства, что позволяет сделать замену

$$\|u\|_{p, \Omega}^p = K(t), \quad (17)$$

приводящую от (15) к линейному уравнению

$$\bar{u}'' + bK(t)\bar{u}' + \frac{12a^2}{l^2} \bar{u} = F_2(t), \quad (18)$$

$$F_2(t) = \frac{6a^2}{l} (\Psi_1 + \Psi_2).$$

Как известно, единственное решение задачи (18), (16) существует для непрерывных функций $K(t)$ и $F_2(t)$ при $t \in (0, T)$. После его подстановки вместе с (17) в формулу (13) будет найдена функция

$$u(x, t) = \frac{3x}{l} \left(\frac{x}{l} - 1 \right) \left(\Psi_1 + \Psi_2 - \frac{2}{l} \bar{u} \right) + x \frac{\Psi_2 - \Psi_1}{l} + \Psi_1, \quad (19)$$

которую примем за приближенное решение задачи (2) – (4) и начальное приближение аппроксимируемой ею задачи (1), (3), (4).

3. Итерационный процесс

Функцию (19) примем за нулевое приближение $u^{(0)}$ в итерационном процессе поиска решения задачи (1), (3), (4), состоящем в нахождении «улучшенных» приближенных решений путем последовательного решения задач вида

$$u_{tt}^{(k)} - a^2 u_{xx}^{(k)} + b \left| u^{(k-1)} \right|^p u_t^{(k)} = 0; \quad (1')$$

$$u^{(k)}(x, 0) = 0, \quad u_t^{(k)}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3')$$

$$u^{(k)}(0, t) = \Psi_1(t), \quad u^{(k)}(l, t) = \Psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4')$$

где $k = 1, 2, \dots$ – итерационный индекс. Процесс завершится при выполнении условия

$$\left| u^{(k)}(x, t) - u^{(k-1)}(x, t) \right| \leq \varepsilon,$$

с достаточно малым наперед заданным числом ε или по достижении заданного количества итераций.

Таким образом, задача решения нелинейного уравнения (1) сводится к последовательному решению линейных уравнений (1') при соответствующих условиях.

4. Пример

Абстрагируясь от смысла уравнения (1), примем в нем для упрощения выкладок $a = b = 1$. Будем искать решение задачи (2) – (4), рассматривая уравнение (2) в качестве аппроксимирующего для (1).

Пусть $p = 3$. Положим $l = 1$ и выберем граничные условия (4) в виде $\psi_1(t) = \psi_2(t) = 1$, тогда в (18) правая часть $F_2(t) = 12$, $C_3(t) = 0$, а величина $F(T)$, определяемая формулой (10), имеет вид

$$F(T) = 3T^3 C_0.$$

При этом функция (19) запишется следующим образом:

$$u(x, t) = 6x(x-1)(1-\bar{u}) + 1. \quad (21)$$

Перейдем к определению постоянных, входящих в эти выражения. Из (12) следует условие положительности функции $K(t)$, а именно, $F(T)t < 2$, т.е. $t < 2/(3T^3 C_0)$. Так как $t \leq T$, то должно быть $T < 2/(3T^3 C_0)$, откуда следует, что $C_0 < 2/(3T^4)$. Положим $T = 1$, и выберем, например, $C_0 = 0,6$. Затем последовательно найдем $F(T) = 1,8$, $K(t) = 1,8/(1 - 0,9t)$. Функция $K(t)$ непрерывна при $t \leq T$. Теперь задача (18), (16) принимает вид

$$\bar{u}'' + \frac{1,8}{1 - 0,9t} \bar{u}' + 12\bar{u} = 12,$$

$$\bar{u}(0) = 0, \quad \bar{u}'(0) = 0.$$

Ее решением является функция [10, с. 386, ур. 2.104]

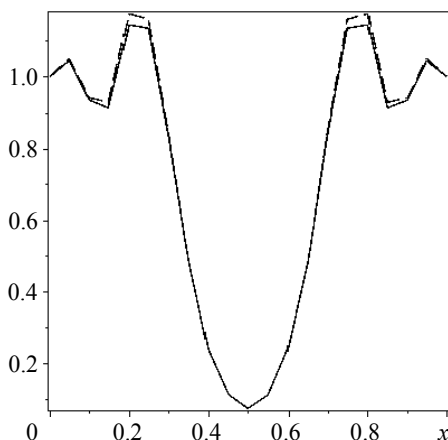
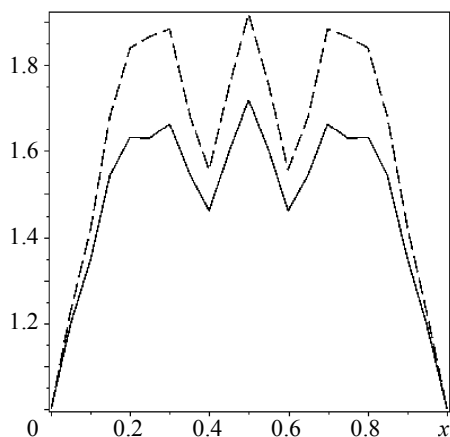
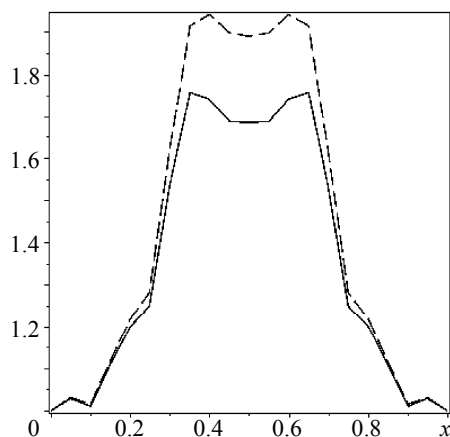
$$\bar{u}(t) = \left(\frac{9}{10}t - 1 \right) \cos(2\sqrt{3}t) - \frac{3\sqrt{3}}{20} \sin(2\sqrt{3}t) + 1,$$

подстановка которой в (21) дает приближенное решение задачи (2) – (4):

$$u(x, t) = 6x(x-1) \left(\frac{3\sqrt{3}}{20} \sin(2\sqrt{3}t) - \left(\frac{9}{10}t - 1 \right) \cos(2\sqrt{3}t) \right) + 1. \quad (22)$$

Так как уравнение (2) является аппроксимирующим по отношению к уравнению (1) и его интегрирование проводится при тех же условиях (3), (4), что и для уравнения (1), то функцию (22) будем считать начальным приближением решения задачи (1), (3), (4). Чтобы найти «улучшенные» решения, функцию (22), принимаемую за $u^{(0)}$, необходимо подставить в (1') для запуска итерационного процесса (1'), (3'), (4').

На рис. 1 – 3 приведены графики функций $u(x,t)$ и $u^{(1)}(x,t)$ при $t = 0.4, 0.8$ и 1.0 соответственно, полученные путем численного решения задачи (1), (3), (4) и задачи (1'), (3'), (4') с функцией $u^{(0)}$, определяемой по формуле (21). Сплошная линия соответствует функции $u(x,t)$, а пунктирная – $u^{(1)}(x,t)$.

Рис. 1. $t = 0.4$ Рис. 2. $t = 0.8$ Рис. 3. $t = 1.0$

Результаты вычислений показывают, что при $t \leq 0.3$ значения этих функций практически совпадают, а их графики не различимы. Увеличение t приводит к росту относительной погрешности вычислений, не превышающей 13.25 %. Полученные результаты позволяют предположить, что продолжение итерационного процесса приведет к ее уменьшению.

Заключение

В работе предложен приближенно-аналитический метод нахождения решения задачи (1), (3), (4), состоящий, во-первых, в переходе от исходного нагруженного уравнения (2) к ассоциированному с ним обыкновенному дифференциальному

уравнению (15), а во-вторых, в линеаризации (15) с помощью априорной оценки решения исходной задачи вида (11). Полученное начальное приближенное решение выражается аналитически функцией (21). Данная функция используется для запуска итерационного процесса (1'), (3'), (4'), предназначенного для последовательного приближения к (тривиальному) решению задачи (1), (3), (4).

Данный метод применим для приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных со степенной нелинейностью и для решения нагруженных дифференциальных уравнений в частных производных, содержащих интеграл по пространственной переменной от p -й степени неизвестной функции при некоторых допущениях относительно p . Основную сложность в реализации метода представляют установление априорной оценки вида (11) и подбор констант, входящих в это и другие необходимые неравенства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 586 с.
2. Вишневский К.П. Переходные процессы в напорных системах водоподачи. М.: Агропромиздат, 1986. 135 с.
3. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012. 232 с.
4. Medeiros L. A. On the weak solutions of nonlinear partial differential equations // Anais da Academia Brasileira de Ciencias. 1981. V. 53. No. 1. P. 13–15.
5. Lourêdo A.T., Ferreira de Araújo M.A., Miranda M. M. On a nonlinear wave equation with boundary damping // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2014. V. 37. No. 9. P. 1278–1302.
6. Бозиев О.Л. Решение начально-краевой задачи для нелинейного гиперболического уравнения с помощью двойной редукции к нагруженным уравнениям // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2014. № 4(60). С. 7–13.
7. Бозиев О.Л. Применение нагруженных уравнений к приближенному решению дифференциальных уравнений в частных производных со степенной нелинейностью // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. 2015. № 1. С. 127–136.
8. Бозиев О.Л. Приближенное решение нагруженного гиперболического уравнения с однородными краевыми условиями // Вестник Южноуральского государственного университета. Серия: Математика, физика, механика. 2016. Т. 8. № 2. С. 14 – 18. DOI: <https://doi.org/10.14529/mmph160202>.
9. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.

Статья поступила 09.06.2017 г.

Boziev O.L. (2018) SOLUTION OF NONLINEAR HYPERBOLIC EQUATIONS BY AN APPROXIMATE ANALYTICAL METHOD. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 51. pp. 5–14

DOI 10.17223/19988621/51/1

In this paper, we propose a method for solving the mixed problem for a hyperbolic equation with power nonlinearity. The first step of the method is reduction to the problem for the loaded equation containing the integral of a natural degree of the modulus of the unknown function. This integral expresses the norm of the unknown function in the corresponding Lebesgue space. Selection of constants of an a priori estimate allows us to linearize the loaded equation. A formula

expressing the solution of the loaded equation by the solution of the ordinary differential equation associated with it is obtained. Approximation to the solution of the nonlinear equation is performed by means of an iterative process of solving a sequence of nonlinear problems.

Keywords: nonlinear partial differential equations, loaded partial differential equations, a priori estimates, approximate solutions.

AMS Mathematical Subject Classification: 35L20, 35L72.

BOZIEV Oleg Ludinovich (Candidate of Physics and Mathematics, associate professor of Kabardino-Balkarian State University; senior staff scientist of Institute of Computer Science and Problems of Regional Management of Kabardino-Balkarian Science Center of the Russian Academy of Sciences., Nalchik, Russian Federation)

E-mail: boziev@yandex.ru

REFERENCES

1. Lions J.L. (1969) *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaire*. Paris: Dunod, Gauthier-Villars.
2. Vishnevskii K.P. (1986) *Perekhodnye protsessy v napornykh sistemakh vodopodachi* [Transient processes in pressurized water systems]. Moscow: Agropromizdat.
3. Nakhushev A.M. (2012) *Nagruzhennye uravneniya i ikh primeneniye* [Loaded equations and their application]. Moscow: Nauka.
4. Medeiros L.A. (1981) On the weak solutions of nonlinear partial differential equations. *Anais da Academia Brasileira de Ciências*. 53(1). pp. 13–15.
5. Lourêdo A.T., Ferreira de Araújo M.A., Miranda M. M. (2014) On a nonlinear wave equation with boundary damping. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 37(9). pp. 1278–1302.
6. Boziev O.L. (2014) Reshenie nachalno-kraevoy zadachi dlya nelineynogo giperbolicheskogo uravneniya s pomoshch'yu dvoynoy reduksii k nagruzhennym uravneniyam [Solution of the initially-boundary problem for a nonlinear hyperbolic equation with the use of double reduction to loaded equations]. *Izvestiya Kabardino-Balkarskogo nauchnogo tsentra RAN*. 4. pp. 7–13.
7. Boziev O.L. (2015) Primeneniye nagruzhennykh uravneniy k priblizhennomu resheniyu differentsialnykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh so stepennoy nelineynost'yu [Application of loaded equations to approximate solutions of partial differential equations with the power nonlinearity]. *Vestnik TVGU. Ser. Prikl. Matem. – Herald of Tver State University. Ser. Appl. Math.* 1. pp. 127–136.
8. Boziev O.L. (2016) Priblizhonnnoe reshenie nagruzhennogo giperbolicheskogo uravneniya s odnorodnymi kraevymi usloviyami [An approximate solution of loaded hyperbolic equation with homogeneous boundary conditions]. *Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Un-ta. Ser. Matem. Mekh. Fiz.*, 8(2). pp. 14–18. DOI: <https://doi.org/10.14529/mmph160202>.
9. Demidovich B.P. (1967) *Leksii po matematicheskoy teorii ustoychivosti* [Lectures on the mathematical stability theory]. Moscow: Nauka.
10. Kamke E. (1971) *Spravochnik po obyknovennym differentsialnym uravneniyam* [Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen]. Moscow: Nauka.

Peter V. Danchev

A NOTE ON ESSENTIALLY INDECOMPOSABLE n -SUMMABLE ABELIAN p -GROUPS

For each natural n we prove that there exists an unbounded n -summable abelian p -group which is essentially indecomposable. This example parallels a well-known result of this kind established for separable abelian p -groups.

Keywords: *summable groups, essentially indecomposable groups, admissible Ulm functions, direct sums of countable groups.*

0. Introduction and Fundamentals

Without any exceptions, the term “group” will mean an abelian p -group, where p is a prime fixed for the duration of the paper. Our terminology and notation will be based upon [1]. In particular, if G is a group and α is an arbitrary ordinal, then $p^\alpha G = \{x \in G : ht_G(x) \geq \alpha\}$, and we shall say G is *separable* if $p^0 G = \{0\}$. Likewise, for every positive integer n , the symbol $G[p^n] = \{g \in G : p^n g = 0\}$ denotes the p^n -socle of G which can be viewed as a valuated group by consulting with [4]. About the notions of valuated p^n -socles, valuated groups and their closely related specifications, we refer the interested reader to [2] and [3].

- Mimicking [2], a group G is said to be *n -summable* if $G[p^n]$ decomposes as (is isometric to) the valuated direct sum of a collection of countable valuated groups (each of which will also be a valuated p^n -socle).

Naturally, a group G is n -summable if $G[p^n]$ is n -summable as a valuated p^n -socle. Note that an n -summable group has to be summable (since a countable valuated vector space is necessarily free), and so $p^{\omega_1} G = \{0\}$ (see, e.g., Theorem 84.3 of [1]). In [3] was constructed for any natural n an n -summable group G which need *not* be $n+1$ -summable such that $G/p^\alpha G$ is a direct sum of countable groups for all $\alpha < \omega_1$; thus this G is *not* a direct sum of countable groups.

- (Folklore) A group Z is said to be *essentially indecomposable* if whenever $Z \cong X \oplus Y$ for some groups X and Y , then either X or Y is bounded.

- Imitating [3], the function $f : \omega_1 \rightarrow C$ is called *n -realizable*, provided $f = f_V$ for some n -summable valuated p^n -socle V , where f_V designates the Ulm function of V . In particular, considering groups, $f = f_G$ for some n -summable group G , where $V = G[p^n]$.

- Imitating [3], the function $f : \omega_1 \rightarrow C$ is called *n -admissible*, provided it is n -closed and either uncountably unbounded or n -small and, in addition, for

every pair of countable ordinals $\beta < \gamma$ with limit γ , the inequality $\sum_{[\gamma+n-1, \gamma+\omega)} f \leq \left(\sum_{[\beta, \gamma)} f \right)^{\aleph_0}$ holds.

It can be proved that a function $f : \omega_1 \rightarrow C$ is n -admissible if, and only if, it is n -realizable (cf. [3]).

The motivation for writing this short article is to promote some new ideas concerning certain indecomposable properties of n -summable groups related to valuated groups and valuated p^n -socles (see, for more account, [4] and [5] too).

1. Examples and assertions

If A is any separable group, B is a basic subgroup of A and $G = A/B[p^n]$, then the purity of B in A implies that there is an isomorphism

$$G[p^n] \cong (A[p^n]/B[p^n]) \oplus (B[p^{2n}]/B[p^n]).$$

Because B is ω -dense in A , it follows that the first term in this sum is $p^\omega G$. Considering multiplication by $p^n : B \rightarrow p^n B$, it follows that the second term is isometric to $p_n B[p^n]$ using the regular height function. It follows that $G[p^n]$ is n -summable and hence G is n -summable appealing to [2]. Note also that the isomorphism $G/p^\omega G \cong p^n A$ holds.

An example of an essentially indecomposable separable group Z can be constructed using Corollary 76.4 of [1]. So, we come to the following:

Example 1.1 *There is an n -summable group G that is essentially indecomposable.*

Proof: If Z is a separable essentially indecomposable group and A is a separable group such that $p^n A \cong Z$, then let B be a basic subgroup of A and let $G = A/B[p^n]$, so that $G[p^n]$ is n -summable. If $G \cong X \oplus Y$, then

$$Z \cong p^n A \cong G/p^\omega G \cong (X/p^\omega X) + (Y/p^\omega Y).$$

Therefore, either $(X/p^\omega X)$ or else $(Y/p^\omega Y)$ is bounded, so that either X or Y is bounded, which implies that G is also essentially indecomposable. ■

In other words, a group can have only inessential decompositions and still have a p^n -socle which splits into an infinite number of countable valuated summands.

In spite of the parallel between direct sums of countable groups and ω_1 -bounded n -summable valuated p^n -socles, there are many n -summable groups that are not direct sums of countable groups. In fact, we have the following construction:

Example 1.2. Any n -summable group G is a summand of a group with an admissible Ulm function that is not a direct sum of countable groups.

Proof: We can construct a direct sum of countable groups H which is large enough so that the Ulm function of $T = G \oplus H$ is admissible. This means that there is a direct sum of countable groups T' such that T and T' have the same Ulm functions. Since both $T[p^n]$ and $T'[p^n]$ are n -summable, they are isometric. On the other hand, T is

not a direct sum of countable groups since this would imply that so is G – a contradiction. ■

Again, this shows that an n -summable group with the same p^n -socle as a direct sum of countable groups need not be a direct sum of countable groups. The next result characterizes the Ulm functions for which such a phenomenon can occur.

The following statement can also be deduced directly from results presented in [6], but we here give a more transparent proof, however.

Theorem 1.3. *Suppose $f : \omega_1 \rightarrow C$ is n -realizable. Then every n -summable group G with $f_G = f$ is a direct sum of countable groups if, and only if, $\sum_{[\omega+n-1, \omega_1)} f$ is countable.*

Proof: Suppose first that $\sum_{[\omega+n-1, \omega_1)} f$ is countable, and let H be $p^{\omega+n-1}$ -high in G . Since G is n -summable, by Theorem 3.5 of [2], H must be a direct sum of countable groups. Since, it follows from Wallace's theorem (see, for instance, proposition 1.1 of [6]) that G is a direct sum of countable groups.

Conversely, suppose $\sum_{[\omega+n-1, \omega_1)} f$ is uncountable; our aim is then to produce an n -summable group G with $f_G = f$ which fails to be a direct sum of countable groups. If f is not admissible, then any n -summable group G with $f_G = f$ will fail to be a direct sum of countable groups, so we may assume that f is admissible. In particular, we can conclude that $\sum_{[\omega+n-1, \omega_2)} f$ is uncountable, so there is an integer $m \geq n-1$ such that $f(\omega+m)$ is uncountable. In addition, the admissibility of f implies that for every $\beta < \omega$, $\sum_{(\beta, \omega)} f$ is uncountable, so there is an unbounded subset $S \subseteq \omega$ such that for all $\beta \in S$, $f(\beta)$ is infinite.

We define

$$h(\beta) = \begin{cases} 1, & \text{if } \beta \in S; \\ \aleph_1, & \text{if } \beta = \omega + m; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Since $\text{supp}(h) = S \cup \{\omega+m\} \subseteq I_n$, it is clear that h is n -admissible, so there is an n -summable group H with $f_H = h$. Note that h is not admissible, so that H is not a direct sum of countable groups.

Since f is n -realizable, there is an n -summable group G' with $f_{G'} = f$. If $G = G' \oplus H$, then G is n -summable, and since it is easy to check that $f = f + h$, it follows that $f_G = f_{G'} + f_H = f + h = f$. On the other hand, since H fails to be a direct sum of countable groups, G is not a direct sum of countable groups, either. ■

REFERENCES

1. Fuchs L. (1970) *Infinite Abelian Groups*. Vol. I, II. New York; London: Academic Press.
2. Danchev P.V., Keef P.W. (2010) n -Summable valued p^n -socles and primary abelian groups. *Commun. Algebra*. 38(9). pp. 3137–3153.
3. Keef P.W. (2011) Realization theorems for valued p^n -socles. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*. 126. pp.151–173.
4. Danchev P.V. (2012). Valuated p^n -socles and C_λ n -summable abelian p -groups. *Pioneer J. Math. and Math. Sci.* 6(2). pp. 233–249.

5. Danchev P.V. (2013) A note on $p^{\omega+n+2}$ -projective efi n -summable abelian p -groups. *Adv. Appl. Math. Sci.* 12(3). pp. 151–155.
6. Danchev P.V., Keef P.W. (2009) Generalized Wallace theorems. *Math. Scand.* 12(1). pp. 33–50.

Received: November 6, 2017.

Peter V. DANCHEV (Professor, Department of Mathematics,
Plovdiv University “P. Hilendarski”, Plovdiv 4000, Bulgaria)

E-mail: pvdanchev@yahoo.com

Данчев П.В. (2018) ЗАМЕЧАНИЕ О СУЩЕСТВЕННО НЕРАЗЛОЖИМЫХ N -СУММИРУЕМЫХ АБЕЛЕВЫХ P -ГРУППАХ. *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* № 51. С. 15–18

DOI 10.17223/19988621/51/2

Для каждого натурального n мы доказываем, что существует неограниченная n -суммируемая абелева p -группа, которая существенно неразложима. Этот пример параллелен известному аналогичному результату, установленному для сепарабельных абелевых p -групп.

Ключевые слова: суммируемые группы, существенно неразложимые группы, допустимые функции Ульма, прямые суммы счетных групп.

Danchev P.V. A NOTE ON ESSENTIALLY INDECOMPOSABLE N -SUMMABLE ABELIAN P -GROUPS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 51. pp. 15–18

AMS Mathematical Subject Classification: 20K10.

УДК 511.17
DOI 10.17223/19988621/51/3

MSC 11Y35, 05A15

В.М. Зюзьков

ВОКРУГ ТЕОРЕМЫ ЭЙЛЕРА О СУММАХ ДЕЛИТЕЛЕЙ

Работа относится к экспериментальной математике. Рассматриваются две задачи, которые решал Эйлер. В одной задаче подсчитывается число разбиений для натуральных чисел, решение другой задачи дает рекуррентную закономерность, связывающую суммы делителей натуральных чисел. Эйлер не имел определения формального степенного ряда и производящей функции, но тем не менее, используя индуктивные рассуждения, получил результаты, которые впоследствии были строго доказаны другими математиками. Показывается, как можно решить эти задачи с помощью аппарата производящих функций и вычислений в системе Mathematica. Во время решения этих задач Эйлер рассматривал две бесконечные последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} : 1, -1, -1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, \dots$ и $\{b_n\}_{n=0}^{\infty} : 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, \dots$. Автор получил новые результаты: «замкнутую форму» для этих последовательностей и производящую функцию для последовательности $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Ключевые слова: экспериментальная математика, теорема Эйлера о разбиениях, гипотеза Эйлера о суммах делителей, производящие функции, система Mathematica.

В настоящее время развивается экспериментальная математика: открытие новых математических закономерностей путем компьютерной обработки большого числа примеров. Такой подход не столь убедителен, как короткое доказательство, но может быть убедительнее длинного сложного доказательства и в некоторых случаях вполне приемлем. В прошлом данную концепцию отстаивали и Дьёрдь Пойа [1, 2], и Лакатос [3], убежденные сторонники эвристических методов и квазиэмпирической природы математики.

Экспериментальной математики посвящены книги [4, 5]. Методы экспериментальной математики в естественно-научных дисциплинах, в первую очередь в физике, применяются и обосновываются в книге «Новый вид науки» Стивена Вольфрама [6].

Компьютеры иногда позволяют получить неформальные аргументы в пользу того или иного предположения, а иногда, наоборот, опровергнуть казавшиеся правдоподобными гипотезы. Компьютерные вычисления также поставляют первичную информацию, позволяющую обнаруживать новые свойства изучаемых объектов и выдвинуть новые гипотезы.

Mathematica – одна из популярных систем компьютерной алгебры; используемый язык программирования носит название Wolfram [7, 8]. Применение Mathematica позволяет эффективно вычислять математические объекты, что проливает свет на используемые математические понятия. Причем использование Mathematica не требует глубоких знаний программирования.

Теория формальных рядов в полной общности описана в [9, с. 64–81]. Частный случай – множество формальных степенных рядов. *Формальным степенным ря-*

дом (от одной переменной) называется формальное выражение вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots,$$

где коэффициенты a_k принадлежат числовому кольцу или полю R .

Переменная x является формальной, и нас не интересует сходимость такого ряда. Вполне возможно, что, только подставив $x = 0$, в результате получим некоторое число.

Множество формальных степенных рядов, определяемое числовым кольцом или полем R , будем обозначать как

$$R[[x]] = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \mid a_k \in R \right\}.$$

Формальные степенные ряды являются обобщением многочленов от одной переменной, и поэтому в степенном ряду может быть и конечное число членов, т.е. только конечное число коэффициентов $a_k \neq 0$. И так же как и для многочленов, можно ввести на множестве $R[[x]]$ алгебраическую структуру коммутативного кольца с единицей.

Определим операции сложения и умножения формальных степенных рядов посредством равенств

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k &= \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k, \\ \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \right) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \text{ где } c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}. \end{aligned}$$

Таким образом, чтобы найти коэффициент c_n при x^n в произведении двух рядов, нам не надо рассматривать эти ряды полностью, достаточно взять первые $n + 1$ членов в каждом из них.

Во множестве $R[[x]]$ роль нуля выполняет ряд, все коэффициенты которого равны нулю, а роль единицы – ряд, в котором первый коэффициент равен 1, а остальные равны 0. Известно, что множество $R[[x]]$ с операциями сложения и умножения и элементами 0 и 1 является коммутативным кольцом, в котором элемент

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

обратим тогда и только тогда, когда $a_0 \neq 0$.

Например, формальные степенные ряды $1 - x - x^2$ и $\sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k$ являются взаимно обратными (F_k – k -е число Фибоначчи; $F_0 = F_1 = 1$, а для $k > 1$ имеем $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$).

Действительно, имеем

$$\begin{aligned} (1 - x - x^2) \sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k &= (1 - x - x^2)(F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + \dots) = \\ &= F_0 + (F_1 - F_0)x + (F_2 - F_1 + F_0)x^2 + \dots \end{aligned}$$

В силу начальных условий и рекуррентного соотношения для чисел Фибоначчи полученный ряд равен 1. В книге [10, с. 353–417] описана теория производя-

щих функций и множество примеров применения. По-видимому, все, что алгоритмизуемо в теории производящих функций, в частности разнообразные приемы преобразований производящих функций из указанной книги, реализовано в языке Wolfram.

Определение производящей функции. Пусть $a_0, a_1, a_2, \dots$ – произвольная бесконечная последовательность чисел (они могут быть натуральными, целыми, рациональными, вещественными или комплексными). *Производящей функцией* для этой последовательности будем называть формальный степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Производящая функция определяется и для конечной последовательности $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$. В этом случае в формальном степенном ряду все коэффициенты, начиная с a_{n+1} , полагают равным нулю.

Ранее мы получили равенство

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k.$$

Каков его смысл? Например, бессмысленно подставлять в него $x = 1$. Дело в том, что выражения

$$\frac{1}{1-x-x^2} \text{ и } \sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k$$

равны как элементы кольца формальных степенных рядов. И в соответствии с предыдущим определением производящая функция последовательности чисел Фибоначчи $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$ представляется как в виде формального степенного ряда, так и в виде функции $1/(1-x-x^2)$. Про последнее выражение говорят, что оно является производящей функцией, записанной в «замкнутой форме» (содержит только элементарные функции и не содержит бесконечные суммы).

Теория производящих функций дает аппарат для создания производящих функций в замкнутой форме для различных последовательностей. И возможно, поэтому производящие функции находят разнообразные применения, в первую очередь в комбинаторике и теории чисел.

Ранее было дано определение последовательности Фибоначчи, и для этой последовательности была найдена производящая функция. Но числа последовательности Фибоначчи в языке Wolfram нумеруются другим образом (здесь и далее символ “ $\Rightarrow$ ” предшествует вычисляемому выражению, а на следующей строке показано полученное значение):

$\Rightarrow \text{Fibonacci}[\text{Range}[0, 10]]$

$\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55\}$

В соответствии с этим определением требуется заново найти производящую функцию в замкнутой форме для последовательности Фибоначчи. Воспользуемся полученным ранее равенством:

$$\frac{1}{1-x-x^2} = 1x^0 + 1x^1 + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + \dots$$

Умножая обе части на x , получаем

$$\frac{x}{1-x-x^2} = 0x^0 + 1x^1 + 1x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + \dots$$

Таким образом, последовательность $\{\text{Fibonacci}[n] \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$ имеет производящую функцию $x/(1-x-x^2)$.

В языке Wolfram имеется возможность для последовательности (в общем случае бесконечной) получить производящую функцию в замкнутом виде. Основная функция для этой цели `GeneratingFunction[expr, n, x]`, где выражение *expr* представляет *n*-й член последовательности. Найдем производящую функцию для последовательности Фибоначчи:

$$\Rightarrow \text{GeneratingFunction}[\text{Fibonacci}[n], n, x]$$

$$= \frac{x}{-1+x+x^2}$$

Функция `Series[f, {x, x0, n}]` языка Wolfram создает конечный степенной ряд

$$\sum_{k=0}^n f^{(k)}(x_0) \frac{(x-x_0)^k}{k!},$$

где $f^{(k)}(x_0)$ – значение *k*-й производной функции *f* в точке *x₀*. Когда *f* является производящей функцией последовательности, то `Series` обычно вызывается в виде `Series[f, {x, 0, n}]`. Например, для производящей функции последовательности Фибоначчи получаем

$$\Rightarrow \text{Series}\left[-\frac{x}{-1+x+x^2}, \{x, 0, 10\}\right]$$

$$x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + 13x^7 + 21x^8 + 34x^9 + 55x^{10} + O[x]^{11}$$

Функция `SeriesCoefficient[series, n]` извлекает коэффициент при степени *n* из степенного ряда, созданного функцией `Series`:

$$\Rightarrow f10 = \text{Series}\left[-\frac{x}{-1+x+x^2}, \{x, 0, 10\}\right];$$

$$\Rightarrow \text{SeriesCoefficient}[f10, 10]$$

55

Список всех коэффициентов из нужного диапазона можно получить следующим образом:

$$\Rightarrow \text{SeriesCoefficient}[f10, \#] \& /@ \text{Range}[0, 10]$$

$$\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55\}$$

2. Разбиения

Разбиением натурального числа *n* называется всякая невозрастающая последовательность натуральных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m$, для которых

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = n.$$

Пусть p_n обозначает число разбиений для неотрицательного целого числа *n* (условимся считать, что $p_0 = 1$), тогда последовательность $p_0, p_1, p_2, \dots$ начинается с чисел 1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15,

Достаточно просто найти производящую функцию для последовательности p_n [11, с. 88].

Теорема 1 (Эйлер). Производящая функция для числа разбиения числа n имеет вид

$$P(x) = 1 / \prod_{n=0}^{\infty} (1 - x^{n+1}).$$

В языке *Wolfram* имеется функция `PartitionsP` для вычисления значений последовательности p_n :

$\Rightarrow$ `PartitionsP/@Range[0,10]`
 $\{1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42\}$

Mathematica знает, чему равна производящая функция для последовательности p_n , и выдает ее в «замкнутом» виде:

$\Rightarrow$ `GeneratingFunction[PartitionsP[n], n, x]`

$$\frac{1}{\text{QPochhammer}[x, x]}$$

Функция `QPochhammer[a, q]` дает значение « q -символа Похгаммера» $(a; q)_{\infty}$, который определяется как

$$(a; q)_{\infty} = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - aq^k).$$

Этот символ был введен вскоре после обычных гипергеометрических функций; q -функции долгое время изучались как теоретические обобщения гипергеометрических и других функций. Язык *Wolfram* впервые дает возможность полностью вычислить числовые q -функции и также совершить символьные преобразования с ними, что позволяет использовать q -функции в замкнутом виде для сумм, произведений, решений рекуррентных уравнений и т. д. [12].

Можно получить q -символ Похгаммера при упрощении формального произведения

$\Rightarrow$ `Simplify` $\left[\prod_{n=0}^{\infty} (1 - x^{n+1}) \right]$
`QPochhammer[x, x]`

Можно явно получить конечный степенной ряд, коэффициенты которого являются начальными элементами последовательности $p_0, p_1, p_2, \dots$:

$\Rightarrow$ `Series` $\left[\frac{1}{\text{QPochhammer}[x, x]}, \{x, 0, 9\} \right]$
 $1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 + 22x^8 + 30x^9 + O[x]^{10}$

3. Последовательность с производящей функцией `QPochhammer[x, x]`

Изучим сейчас последовательность $a_0, a_1, a_2, \dots$, для которой производящей функцией является `QPochhammer[x, x]`. Посмотрим на первые члены этой последовательности:

$\Rightarrow$ `SeriesCoefficient[QPochhammer[x, x], {x, 0, #}]& /@ Range[0, 51]`
 $\{1, -1, -1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1\}$

Впервые эту последовательность получил Эйлер [10, с. 117, 118], который вручную находил коэффициенты формального степенного ряда, получаемого в

результате бесконечного произведения

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) \dots$$

Сейчас это можно сделать быстрее:

$$\Rightarrow \text{Series} \left[\prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n), \{x, 0, 51\} \right]$$

$$1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+x^{51}+O[x]^{52}$$

Рассмотрение последнего ряда привело Эйлера к гипотезе, которая сейчас известна как

Теорема 2 (пентагональная теорема Эйлера).

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m (x^{m(3m-1)/2} + x^{m(3m+1)/2}).$$

Доказательство смотрите, например, в [13, с. 26; 11, с. 91, 92].

Найдем формулу для последовательности $a_0, a_1, a_2, \dots$ в замкнутом виде. Если $n = m(3m+1)/2$, то выразим m через n :

$$m = \frac{1}{6}(-1 - \sqrt{1+24n}) \text{ и } m = \frac{1}{6}(-1 + \sqrt{1+24n}).$$

Таким образом, если $1+24n$ – точный квадрат, то $a_n = \pm 1$, иначе $a_n = 0$. Отсюда получаем (при $m = \sqrt{1+24n}$) равенство

$$a_n = \begin{cases} (-1)^{(-m-1)/6}, & \text{если } m - \text{целое и } (-m-1) \bmod 6 = 0; \\ (-1)^{(-m-1)/6}, & \text{если } m - \text{целое и } (m-1) \bmod 6 = 0; \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Определим функцию произвольного натурального m :

$$\alpha(m) = \begin{cases} (-1)^{(m+1)/6}, & \text{если } m \bmod 6 = 5; \\ (-1)^{(m-1)/6}, & \text{если } m \bmod 6 = 1; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Если $m = \sqrt{1+24n}$ – целое число, то $a_n = \alpha(m)$.

Так как элементы последовательности $a_0, a_1, a_2, \dots$ являются только ± 1 или 0, то естественно предположить, что они суть значения некоторого символа Якоби для m . Для нечетных m в качестве простейших кандидатов можно взять $\left(\frac{m}{3}\right)$ или $\left(\frac{3}{m}\right)$. Проверка показывает, что $\left(\frac{m}{3}\right) \neq \alpha(m)$ в общем случае даже для нечетного m .

Но следующая проверка подтверждает предположение $\left(\frac{3}{m}\right) = \alpha(m)$ для первой тысячи нечетных натуральных чисел:

$$\Rightarrow \text{AllTrue}[(\text{JacobiSymbol}[3, \#] ==$$

$$\text{Piecewise}[\{\{(-1)^{(\# + 1)/6}, \text{Mod}[\#, 6] == 5\},$$

$$\{(-1)^{(\# - 1)/6}, \text{Mod}[\#, 6] == 1\}\}, 0]) \& /@$$

$$\text{Select}[\text{Range}[1000], \text{OddQ}],$$

$$\# \&]$$

True

Лемма. Для нечетных натуральных m выполнено равенство $\alpha(m) = \left(\frac{3}{m}\right)$.

Доказательство. Если m не кратно 3, то по квадратичному закону взаимности и по критерию Эйлера квадратичного вычета по простому модулю имеем

$$\left(\frac{3}{m}\right) = \left(\frac{m}{3}\right)(-1)^{\frac{(3-1)(m-1)}{4}} = \left(\frac{m}{3}\right)(-1)^{(m-1)/2} \equiv m^{(3-1)/2}(-1)^{(m-1)/2} \equiv m(-1)^{(m-1)/2} \pmod{3}.$$

Далее разберем два случая для m .

1. $m = 6k + 5$ (k – целое). В этом случае $(m-1)/2 = 3k + 2$ и поэтому

$$\left(\frac{3}{m}\right) \equiv (6k+5)(-1)^{3k+2} \equiv (-1)^{3k+3} \pmod{3}.$$

Величина $(-1)^{3k+3}$ для четного k равна -1 , а для нечетного k получаем 1 . Теперь найдем значения $\alpha(6k+5)$ для четного и нечетного k по отдельности. Если $k = 2t$ (t – целое), то имеем $\alpha(6(2t)+5) = (-1)^{(12t+5+1)/6} = -1$. Если $k = 2t + 1$, то $\alpha(6(2t+1)+5) = (-1)^{(12t+11+1)/6} = 1$. Независимо от четности k имеем $\left(\frac{3}{6k+5}\right) = \alpha(6k+5)$.

2. $m = 6k + 1$ (k – целое). В этом случае $(m-1)/2 = 3k$ и поэтому

$$\left(\frac{3}{m}\right) \equiv (6k+1)(-1)^{3k} \equiv (-1)^{3k} \pmod{3}.$$

Величина $(-1)^{3k}$ для четного k равна 1 , а для нечетного k получаем -1 . Теперь найдем значения $\alpha(6k+1)$ для четного и нечетного k по отдельности. Если $k = 2t$ (t – целое), то имеем $\alpha(6(2t)+1) = (-1)^{(12t)/6} = 1$. Если $k = 2t + 1$, то $\alpha(6(2t+1)+1) = (-1)^{(12t+7-1)/6} = -1$. Независимо от четности k имеем $\left(\frac{3}{6k+1}\right) = \alpha(6k+1)$.

Осталось рассмотреть ситуацию, когда m кратно 3. Но в этом случае $\left(\frac{3}{m}\right) = 0 = \alpha(m)$ по определению. ■

Теорема 3 (формула для последовательности $a_0, a_1, a_2, \dots$ в замкнутом виде). Для целого $n > 0$ положим $m = \sqrt{1+24n}$. Тогда элементы последовательности $a_0, a_1, a_2, \dots$ можно вычислить по правилу

$$a_n = \begin{cases} \left(\frac{12}{m}\right), & \text{если } m \text{ - целое число;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1)$$

Доказательство. Из леммы следует, что если m – нечетное целое число, то $a_n = \left(\frac{3}{m}\right)$.

Желательно было бы иметь такое x , чтобы $a_n = \left(\frac{x}{m}\right)$ для всех натуральных m . Для этого достаточно взять $x = 12$, тогда

$$\left(\frac{12}{m}\right) = \left(\frac{2}{m}\right)^2 \left(\frac{3}{m}\right)$$

и (1) справедливо, так как для нечетных m символ Якоби $\left(\frac{2}{m}\right) = \pm 1$, а для четных m выполнено $\left(\frac{2}{m}\right) = 0$. ■

4. Последовательность 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, ...

Эйлер также рассматривал последовательность $\{b_n \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$:

$$1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, \dots, \quad (2)$$

состоящую из положительных показателей степеней ненулевых членов ряда

$$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + x^{51} + \dots$$

Эта последовательность с добавленным числом 0 в качестве первого члена называется последовательностью *обобщенных пятиугольных чисел*.

Эйлер экспериментально обнаружил закономерность в построении последовательности (2). Далее цитируем Эйлера по книге [1, с. 114, 115].

«Закон чисел 1, 2, 5, 7, 12, 15, ...<...> станет ясен, если мы возьмем их разности:

Числа: 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, 57, 70, 77, 92, 100, ...

Разности: 1, 3, 2, 5, 3, 7, 4, 9, 5, 11, 6, 13, 7, 15, 8, ...

В самом деле, мы имеем здесь поочередно все целые числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... и нечетные числа и поэтому мы можем продолжать последовательность этих чисел сколь угодно далеко».

Слова Эйлера подсказывают, что члены последовательности (2) удовлетворяют следующему правилу:

$$b_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 0; \\ b_{n-1} + n + 1, & \text{если } n \text{ четно}; \\ b_{n-1} + (n+1)/2, & \text{если } n \text{ нечетно}. \end{cases} \quad (3)$$

На языке Wolfram рекурсивная программа с запоминанием уже вычисленных промежуточных значений выглядит следующим образом

$\Rightarrow b[0] = 1;$

$\Rightarrow b[n_?EvenQ] := b[n] = b[n-1] + n + 1$

$\Rightarrow b[n_?OddQ] := b[n] = b[n-1] + (n+1)/2$

Проверим

$\Rightarrow b[/math> /@ Range[0, 15]$

{1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, 57, 70, 77, 92, 100}

Найдем производящую функцию для последовательности b_n . Простое применение функции GeneratingFunction к $b[n]$ в системе Mathematica выдает результат невычисленным. Поэтому будем применять способ решения рекуррентных соотношений в четыре шага, изложенный в [10, с. 364–376].

Шаг 1 требует записать рекуррентное соотношение (3) в виде «одного уравнения» для последовательности b_n , т.е. нужна формула, не содержащая конструкций с перечислением случаев. Искомое уравнение имеет вид

$$b_n = b_{n-1} [n > 0] + (n+1)/2 [n \text{ нечетно}] + (n+1)[n > 0 \text{ и } n \text{ четно}] + [n = 0]. \quad (4)$$

Запись с квадратными скобками широко используется в [7] в соответствии с правилом:

Если S – некоторое утверждение, которое может быть истинно или ложно, квадратно-скобочное обозначение $[S]$ означает 1, если S истинно, и 0 в противном случае.

Поэтому в правой части (4) присутствует только 1, когда $n = 0$, а при $n > 0$ справа всегда присутствует b_{n-1} и еще одно слагаемое $(n+1)/2$ или $(n+1)$ в зависимости от четности числа n .

На шаге 2 умножаем обе части уравнения на x^n и просуммируем по всем n . В левой части получается сумма $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, которая равна производящей функции $B(x)$, а правую часть следует преобразовать с тем, чтобы она превратилась в какое-то другое выражение, включающее $B(x)$.

Слагаемое b_{n-1} [$n > 0$] преобразуется в $\sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} x^{n+1} = xB(x) = xB$, слагаемое [$n = 0$] становится 1. Слагаемое $(n+1)/2$ [n нечетно] преобразуется в $\sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)/2) x^n$ [n нечетно]. Из ряда $\sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)/2) x^n$ получаем с помощью Mathematica производящую функцию C1 в замкнутой форме:

$$\Rightarrow C1 = \text{GeneratingFunction}[(n+1)/2, n, x]$$

$$\frac{1}{2(-1+x)^2}$$

Но в ряде $\sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)/2) x^n$ должны присутствовать члены только с нечетными n . Есть общий метод извлечение членов с нечетными номерами $\{0, g_1, 0, g_3, 0, g_5, 0, \dots\}$ из любой последовательности $g_0, g_1, g_2, g_3, \dots$. Имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_{2n+1} x^{2n+1} = \frac{G(x) - G(-x)}{2},$$

где $G(x)$ – производящая функция последовательности $g_0, g_1, g_2, g_3, \dots$. В соответствии с этим преобразуем второе слагаемое в (4):

$$\Rightarrow \text{Simplify}[(C1 - (C1 /. x \rightarrow -x)) / 2]$$

$$\frac{x}{(-1+x^2)^2}$$

Третье слагаемое в (4) $(n+1)[n > 0 \text{ и } n \text{ четно}]$ преобразуем сначала в выражение

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n \text{ [} n \text{ четно]}.$$

Из ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$ получаем с помощью Mathematica производящую функцию C2 в замкнутой форме:

$$\Rightarrow C2 = \text{GeneratingFunction}[n+1, n, x]$$

$$\frac{1}{(-1+x)^2}$$

Также имеется общий метод извлечение членов с четными номерами $\{g_0, 0, g_2, 0, g_4, 0, \dots\}$ из любой последовательности $g_0, g_1, g_2, g_3, \dots$. Имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_{2n} x^{2n} = \frac{G(x) + G(-x)}{2}.$$

При извлечении из ряда членов с четными n , заметим, что поскольку член $1 \times x^0$ не нужен, то нужно отнять 1:

$$\Rightarrow \text{Simplify}[(C2 + (C2 /. x \rightarrow -x)) / 2] - 1$$

$$-1 + \frac{1+x^2}{(-1+x^2)^2}$$

Проверим, что действительно сейчас получили члены с ненулевыми четными степенями x :

$$\Rightarrow \text{Series}[\%, \{x, 0, 10\}]$$

$$3x^2 + 5x^4 + 7x^6 + 9x^8 + 11x^{10} + O[x]^{11}$$

Последнее слагаемое $[n = 0]$ в (4) дает просто 1. Суммируя все полученные выражения в правой части (4), получаем уравнение для производящей функции B :

$$B = xB + \frac{x}{(-1+x^2)^2} + \frac{1+x^2}{(-1+x^2)^2}.$$

Шаг 3. Решая уравнение, получаем для производящей функции $B(x)$ выражение в замкнутом виде.

Таким образом, выражение

$$B(x) = \frac{-1-x-x^2}{(-1+x)^3(1+x)^2}$$

является производящей функцией в замкнутом виде для последовательности Эйлера

$$1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, 57, 70, 77, 92, 100, \dots$$

На последнем, четвертом шаге, имея производящую функцию, в языке *Wolfram* легко получить выражение b_n в замкнутом виде:

$$\Rightarrow \text{SeriesCoefficient} \left[-\frac{1+x+x^2}{(-1+x)^3(1+x)^2}, \{x, 0, n\} \right]$$

$$\begin{cases} \frac{1}{16} (13 + 3(-1)^n + 2(9 + (-1)^n)n + 6n^2) & n \geq 0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

Определим b_n в замкнутом виде

$$\Rightarrow b[n_]:= \frac{1}{16} (13 + 3(-1)^n + 2(9 + (-1)^n)n + 6n^2) \quad (5)$$

Вычислим 20 первых членов последовательности

$$\Rightarrow b / @ \text{Range}[0, 19]$$

$$\{1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, 57, 70, 77, 92, 100, 117, 126, 145, 155\}$$

5. Гипотеза Эйлера о законе чисел, относящемся к суммам их делителей

Эйлер путем индуктивных рассуждений обнаружил удивительную рекуррентную закономерность, связывающую суммы делителей натуральных чисел. Начальное представление об этой связи дает следующая формула ($\sigma(n)$ обозначает сумму положительных делителей натурального числа n):

$$\begin{aligned} \sigma(n) = & \sigma(n-1) + \sigma(n-2) - \sigma(n-5) - \sigma(n-7) + \sigma(n-12) + \sigma(n-15) - \\ & - \sigma(n-22) - \sigma(n-26) + \sigma(n-35) + \sigma(n-40) - \sigma(n-51) - \sigma(n-57) + \\ & + \sigma(n-70) + \sigma(n-77) - \sigma(n-92) - \sigma(n-100) + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Как точно выглядит это выражение и как Эйлер пришел к своей догадке, все это хорошо изложено в [1, с. 111–127]. Там же имеется и библиографическая ссылка на оригинал. Важно следующее: в этом выражении встречаются последовательности (1) и (2). Члены последовательности (2) вычитаются из n в аргументах функции σ . Коэффициенты, стоящие перед σ в правой части выражения (6), совпадают с ненулевыми членами последовательности (1), умноженными на -1 .

Получим гипотезу Эйлера, используя систему Mathematica. Возьмем конечный ряд из 51 члена формального степенного ряда для последовательности (1). Производящая функция для последовательности (1) есть $QPochhammer[x, x]$.

$$\Rightarrow t1 = \text{Series}[QPochhammer[x, x], \{x, 0, 50\}]$$

$$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + O[x]^{51}$$

Продифференцируем этот ряд по x и результат умножим на $-x$:

$$\Rightarrow t2 = -x D[\text{Series}[QPochhammer[x, x], \{x, 0, 50\}], x]$$

$$x + 2x^2 - 5x^5 - 7x^7 + 12x^{12} + 15x^{15} - 22x^{22} - 26x^{26} + 35x^{35} + 40x^{40} + O[x]^{51}$$

Как видим, коэффициенты ряда $t2$ отличаются от соответствующих коэффициентов ряда $t1$ для члена x^n множителем $-n$. Это сохраняется и для рассмотренных больших n . Определим новую последовательность $c_n = -na_n$ для всех $n = 0, 1, 2, \dots$.

Теперь найдем частное двух рядов $t3 = t2/t1$, заметим, что мы учитываем в примере только степени, не превосходящие 50:

$$\Rightarrow t3 = t2/t1$$

$$x + 3x^2 + 4x^3 + 7x^4 + 6x^5 + 12x^6 + 8x^7 + 15x^8 + 13x^9 + 18x^{10} + 12x^{11} + 28x^{12} +$$

$$+ 14x^{13} + 24x^{14} + 24x^{15} + 31x^{16} + 18x^{17} + 39x^{18} + 20x^{19} + 42x^{20} + 32x^{21} + 36x^{22} +$$

$$+ 24x^{23} + 60x^{24} + 31x^{25} + 42x^{26} + 40x^{27} + 56x^{28} + 30x^{29} + 72x^{30} + 32x^{31} + 63x^{32} +$$

$$+ 48x^{33} + 54x^{34} + 48x^{35} + 91x^{36} + 38x^{37} + 60x^{38} + 56x^{39} + 90x^{40} + 42x^{41} + 96x^{42} +$$

$$+ 44x^{43} + 84x^{44} + 78x^{45} + 72x^{46} + 48x^{47} + + 124x^{48} + 57x^{49} + 93x^{50} + O[x]^{51}$$

Создадим список коэффициентов ряда:

$$\Rightarrow list = \text{SeriesCoefficient}[t3, \#] \& /@ \text{Range}[50]$$

$$\{1, 3, 4, 7, 6, 12, 8, 15, 13, 18, 12, 28, 14, 24, 24, 31, 18, 39, 20, 42, 32, 36, 24,$$

$$60, 31, 42, 40, 56, 30, 72, 32, 63, 48, 54, 48, 91, 38, 60, 56, 90, 42, 96, 44, 84,$$

$$78, 72, 48, 124, 57, 93\}$$

Проверим, что эти числа являются суммами делителей первых 50 натуральных чисел ($\text{DivisorSigma}[1, x]$ – встроенная функция в языке Wolfram для вычисления $\sigma(x)$):

$$\Rightarrow \text{AllTrue}[(list[[\#]] == \text{DivisorSigma}[1, \#]) \& /@ \text{Range}[50], \# \&]$$

$$\text{True}$$

Дополнительные проверки для конечных рядов $t1$ и $t2$ с большим количеством членов также показали, что $t3 = t2/t1$ есть конечный степенной ряд для соответствующей конечной последовательности $\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \dots, \sigma(m)$. Можно предположить, что частное рядов $t3 = t2/t1$, при расширении $t1$ и $t2$ до бесконечных, является формальным степенным рядом для последовательности $\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \dots$.

Если это так, то произведение формальных степенных рядов $t3$ и $t1$ дает формальный степенной ряд для последовательности $c_0, c_1, c_2, \dots$, которая является *сверткой* [10, с. 225] последовательностей $a_0, a_1, a_2, \dots$, и $0, \sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \dots$. Следовательно, для $n = 1, 2, 3, \dots$ имеем формулу

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k \sigma(n-k).$$

Отсюда получаем гипотезу Эйлера

$$\sigma(n) = na_n - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \sigma(n-k). \quad (7)$$

В соответствии с теоремой 3 члены последовательности a_n могут быть вычислены на языке *Wolfram* с помощью следующей функции:

$$\Rightarrow a[n_]:= \text{With}[\{m = \text{Sqrt}[24n + 1]\}, \text{If}[\text{IntegerQ}[m], \text{JacobiSymbol}[12, m], 0]]$$

Напишем программу для вычисления $-\sum_{k=1}^{n-1} a_k \sigma(n-k) + nc_n$ в символьном виде

$$\Rightarrow s0[n_]:= -\sum_{k=1}^{n-1} (a[k] \sigma[n-k]) + n a[n]$$

Посмотрим, как выглядит правая часть (7) для $n = 100$:

$$\Rightarrow s0[100]$$

$$-100 - \sigma(8) + \sigma(23) + \sigma(30) - \sigma(43) - \sigma(49) + \sigma(60) + \sigma(65) - \sigma(74) - \sigma(78) + \\ + \sigma(85) + \sigma(88) - \sigma(93) - \sigma(95) + \sigma(98) + \sigma(99)$$

Теперь определим функцию для численного вычисления правой части в (7) и проверим выполнения равенства для $n = 100$:

$$\Rightarrow s[n_]:= n a[n] + \sum_{k=1}^{n-1} a[k] \text{DivisorSigma}[1, n-k] \\ \Rightarrow \{\text{DivisorSigma}[1, 100], s[100]\} \\ \{217, 217\}$$

И наконец, проверим выполнения равенства (7) для всех $n \leq 10000$.

$$\Rightarrow \text{AllTrue}[(s[\#] == \text{DivisorSigma}[1, \#]) \& /@ \text{Range}[1000], \# \&]$$

True

Эйлер не смог доказать найденную им закономерность, она была доказана значительно позже.

6. Рекуррентная формула для числа разбиений

Из теоремы 1 следует, что

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n \right) = 1,$$

где $p(n)$ – количество разбиений числа n ; $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ – последовательность (1). Таким образом, произведение формальных степенных рядов дает единичный ряд, следовательно, свертка последовательностей $p(0), p(1), p(2), \dots$ и $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ дает последовательность $1, 0, 0, 0, \dots$. Поэтому для $n > 0$ получаем

$$\sum_{m=0}^n a_m p_{n-m} = 0.$$

Следовательно,

$$p_n = -\sum_{m=1}^n a_m p_{n-m}. \quad (8)$$

Напишем программу для вычисления правой части (8) в символьном виде:

$$\Rightarrow w0[n_]:= -\left(\sum_{m=1}^{n-1} a[m] p[n-m] + a[n] \right)$$

Посмотрим, как выглядит правая часть (8) для $n = 50$ и $n = 51$:

$$\Rightarrow w[50]$$

$$p[10] + p[15] - p[24] - p[28] + p[35] + p[38] - p[43] - p[48] + p[49]$$

$$\Rightarrow w[51]$$

$$-1 + p[11] + p[16] - p[25] - p[29] + p[36] + p[39] - p[44] - p[46] + p[49] + p[50]$$

Теперь определим функцию для численного вычисления правой части в (8) и проверим выполнения равенства (8) для $n = 1000$:

$$\Rightarrow w[n_]:= - \left(\sum_{m=1}^{n-1} a[m] \text{PartitionsP}[n-m] + a[n] \right)$$

$$\Rightarrow \{\text{PartitionsP}[1000], w[1000]\}$$

$$\{24061467864032622473692149727991,$$

$$24061467864032622473692149727991\}$$

И наконец, проверим выполнения равенства (8) для всех $n \leq 10000$.

$$\Rightarrow \text{AllTrue}[(w[\#] == \text{PartitionsP}[\#]) \& \text{/\@ Range}[1000], \# \&]$$

True

Формула (8) представляет собой весьма эффективный алгоритм для вычисления $p(n)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Поля Д. Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 1975. 464 с.
2. Поля Д. Математическое открытие: Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание. 3-е изд. М.: КомКнига, 2010. 448 с.
3. Лакатос И. Доказательства и опровержения: Как доказываются теоремы. 2-е изд. М.: Изд-во ЛКИ, 2010. 152 с.
4. Bailey D. Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century. Wellesley, MA: A.K. Peters, 2003.
5. Borwein J., Bailey D., Girgensohn R. Experimentation in Mathematics. Wellesley, MA: A.K. Peters, 2003. 358 p.
6. Wolfram S. A New Kind of Science. Champaign, Illinois: Wolfram Media, Inc., 2002. 1197 p. URL: <http://www.wolframscience.com/>
7. Wolfram Mathematica. URL: <http://www.wolfram.com/mathematica>
8. Зюзьков В.М. Начала компьютерной алгебры: учеб. пособие. Томск: Изд. Дом ТГУ, 2015. URL: <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000509029>
9. Бурбаки Н. Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы. М.: Мир, 1965. 300 с.
10. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. 2-е изд., испр. М.: Мир; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. 703 с.
11. Ландо С.К. Лекции о производящих функциях. 3-е изд., испр. М.: МЦНМО, 2007. 144 с.
12. Wolfram MathWorld: <http://mathworld.wolfram.com/q-PochhammerSymbol.html>
13. Эндрюс Г. Теория разбиений. М.: Наука, 1982. 256 с.

Статья поступила 30.10.2017 г.

Zyuz'kov V.M. (2018) AROUND EULER'S THEOREM ON SUMS OF DIVISORS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 51. pp. 19–32

DOI 10.17223/19988621/51/3

This work relates to experimental mathematics. Two problems solved by Euler are considered. In the first task, the number of partitions for natural numbers is counted; the solution of the second task gives the recursion regularity connecting the sums of dividers of natural numbers. Euler had no definition of the formal ascending power series and a generating function;

nevertheless, using the inductive reasonings, he obtained results which were rigorously proved later by other mathematicians. The paper shows how to solve these problems by means of the apparatus of generating functions and calculations in the Mathematica system. Solving of these tasks, Euler considered two infinite sequences, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} : 1, -1, -1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, \dots$ and $\{b_n\}_{n=0}^{\infty} : 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, \dots$. However, the author has obtained new results: a “closed form” for these sequences and a generating function for the sequence $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Keywords: experimental mathematics, Euler’s theorem of partitions, Euler’s hypothesis of the sums of dividers, generating functions, Mathematica system.

AMS Mathematical Subject Classification: 11Y35, 05A15.

ZYUZ'KOV Valentin Mikhailovich (Senior Researcher, Associate Professor of chair of Computational Mathematics and Computer Modeling, Tomsk State University, Professor of chair of computer systems in control and design of the Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: vmz@math.tsu.ru

REFERENCES

1. Polya G. (1954) *Mathematics and Plausible Reasoning. Vol II*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
2. Polya G. (1965) *Mathematical Discovery. On understanding, learning and teaching problem solving. Vol. II*. New York; London: John Wiley & Sons. inc.
3. Lakatos I. (1976) *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.
4. Bailey D. (2003) *Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century*. Wellesley, MA: A.K. Peters.
5. Borwein J., Bailey D., Girgensohn R. (2003) *Experimentation in Mathematics*. Wellesley, MA: A.K. Peters, 358 p.
6. Wolfram S. (2002) *A New Kind of Science*. Champaign, Illinois: Wolfram Media, Inc., 1197 p. URL: <http://www.wolframscience.com/>
7. *Wolfram Mathematica*. URL: <http://www.wolfram.com/mathematica>
8. Zyuz'kov V. M. (2015) *Nachala komp'yuternoy algebry* [Foundations of Computer Algebra]. Tomsk: Izdatel'skiy dom TGU. 128 p. URL: <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000509029>
9. Bourbaki N. (1981) *Elements of Mathematics. Algebra II. Chapters 4–7*. Springer-Verlag.
10. Graham R, Knuth D, Patashnik O. (2006) *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*. Addison-Wesley. 657 p.
11. Lando C.K. (2007) *Lektsii o proizvodnyashchikh funktsiyakh* [Lectures on generating functions]. Moscow: MTsNMO.
12. *Wolfram MathWorld*. URL: <http://mathworld.wolfram.com/q-PochhammerSymbol.html>
13. Andrews G. (1998) *The Theory of Partitions*. Cambridge University Press.

УДК 519.2
DOI 10.17223/19988621/51/4

MSC 90B22, 60G10, 60J10

М.А. Рачинская, М.А. Федоткин

ИССЛЕДОВАНИЕ УСЛОВИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА В СИСТЕМЕ КОНФЛИКТНОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ТРЕБОВАНИЙ

Исследуется модель системы, осуществляющей управление случайными конфликтными потоками и обслуживание их требований. Предполагается, что среди потоков выделены приоритетный поток и поток с большой интенсивностью. Определяются легко проверяемые необходимые и достаточные условия существования стационарного режима по отдельным потокам.

Ключевые слова: пороговый приоритет, многомерная управляемая цепь Маркова, стационарное распределение.

Постановка задачи

В настоящее время существует множество работ, изучающих системы массового обслуживания с различными входными потоками [1–3]. Многие подобные исследования имеют высокую прикладную ценность, поскольку связаны с реальными биологическими, социальными, логистическими, инженерными и техническими объектами (например, [4–6]). Конечной целью большинства таких исследований является оптимизация работы системы. В связи с этим изучаются различные характеристики и показатели качества ее функционирования [6]. Кроме того, ряд работ посвящен исследованию асимптотического поведения систем и получению предельных теорем [3–5]. Особенностью системы, исследуемой в данной работе, является специфическая модель входного потока, построенная в [7], и сложный алгоритм с обратной связью для управления потоками. При моделировании и изучении подобных сложных неклассических систем прибегают к кибернетическому подходу для выделения ключевых элементов системы. Имея математическую модель, можно получать необходимые и достаточные условия существования в системе стационарного режима, что позволяет сузить область поиска квазиоптимальных значений управляемых параметров [8]. Основной целью данного исследования является получение таких условий для системы массового обслуживания с разнородными входными потоками и адаптивным управляющим алгоритмом.

В работе [7] проведено исследование системы, на вход которой поступают $m \geq 2$ случайных независимых конфликтных потоков заявок (требований). Система при этом выполняет функции управления потоками и обслуживания их требований. При этом предполагалось, что потоки управляются циклическим алгоритмом. Такое управление применяется, как правило, если входные потоки системы можно считать однородными, т. е. предпочтение при обслуживании не должно отдаваться никакому из потоков. В данной работе рассматривается случай неоднородных входных потоков, что необходимо влечет за собой выбор адаптивного алгоритма управления. Неоднородность потоков может проявляться, например, в различной вероятностной структуре потоков, в существенно различной интенсивности заявок при схожей структуре, неодинаковом приоритете потоков и т. д.

В данной работе изучается система управления $m \geq 2$ независимыми конфликтными потоками Π_j , $1 \leq j \leq m$, и обслуживания их неоднородных заявок. Предполагается, что входные потоки формируются в схожих внешних средах и их можно аппроксимировать неординарными пуассоновскими потоками (НПП). Было показано [7], что НПП является адекватной моделью, например, для транспортного потока пачек на магистрали с затрудненным движением. Так, при плохих погодных и дорожных условиях выделяются быстрые и медленные машины. Неоднородность автомобилей приводит к образованию скоплений – транспортных пачек. Аналогично в рассматриваемой задаче полагается, что каждый поток Π_j можно аппроксимировать потоком групп со следующими параметрами: $\lambda_j > 0$ — интенсивность вызывающих моментов (поступления групп требований), p_j , q_j и $s_j = 1 - p_j - q_j$ — вероятности поступления группы из одного, двух или трех требований соответственно. В работе [7] найдены выражения для одномерных распределений НПП указанного типа. Вероятность $\varphi_j(n, t)$ того, что за промежуток времени $[0, t)$ по потоку Π_j (здесь и далее $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, если не указано иное) поступит ровно $n \in X = \{0, 1, \dots\}$ заявок

$$\varphi_j(n, t) = e^{-\lambda_j t} \sum_{u=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{v=0}^{\lfloor n-2u/3 \rfloor} p_j^{n-2u-3v} q_j^u s_j^v \frac{(\lambda_j t)^{n-u-2v}}{u!v!(n-2u-3v)!},$$

а производящая функция этого распределения для $|z| \leq 1$ имеет вид

$$\Psi_j(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_j(n, t) z^n = \exp\{\lambda_j t (s_j z^3 + q_j z^2 + p_j z - 1)\}.$$

При схожей структуре потоки различаются интенсивностью поступления заявок и их приоритетом. Выделяются малоинтенсивные потоки $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{m-1}$ и поток Π_m с большой интенсивностью. При этом поток Π_1 считается приоритетным.

В рассматриваемой системе обслуживание заявок производится без потерь. Поступая в систему и не получая обслуживание в тот же момент, заявки потока Π_j становятся в соответствующую очередь ожидания. Устройство, осуществляющее управление потоками и обслуживание требований, может находиться в одном из состояний множества $\Gamma = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \dots, \Gamma^{(2m+1)}\}$. В каждом из состояний вида $\Gamma^{(k)}$, $k \in \{1, 2, \dots, 2m+1\}$, устройство обслуживания находится в течение фиксированного промежутка времени длительностью T_k . При этом состояние вида $\Gamma^{(2j-1)}$, где $j \in \{1, 2, \dots, m-1\}$, выделено для осуществления обслуживания с интенсивностью $\mu_j > 0$ соответствующего потока Π_j . Поскольку входные потоки конфликтные, то никакие два потока не могут находиться на обслуживании одновременно, и интервалы обслуживания различных потоков должны быть разнесены во времени некоторым интервалом переналадки обслуживающего устройства (ОУ). В связи с этим, состояния вида $\Gamma^{(2j)}$, $j \in \{1, 2, \dots, m-1\}$, выделяются для безопасного дообслуживания потока Π_j . Для обслуживания потока Π_m выделены состояния $\Gamma^{(2m-1)}$ и $\Gamma^{(2m)}$. Интенсивность обслуживания в каждом из этих состояниях равна μ_m . Предполагается, что $T_{2m} < T_{2m-1}$. В состоянии $\Gamma^{(2m+1)}$ происходит переналадка после завершения обслуживания потока Π_m . Заметим, что все величины $l_j = [\mu_j T_{2j} - 1]$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, а также величина $l'_m = [\mu_m T_{2m}]$ характеризуют пропускную способность ОУ в соответствующем состоянии. В системе реализована экстремальная стратегия обслуживания [8]. Такая стратегия предполагает, что в состоянии обслуживания определенного потока из очереди ожидания выбирается как можно большее число ожидающих заявок, но не превышающее соответствующей пропу-

ской способности. По завершении промежутка пребывания ОУ в некотором состоянии происходит переключение состояния или принимается решение о продлении текущего состояния. Алгоритм смены состояний ОУ будет указан позднее.

Обозначим через $\tau_i, i = 0, 1, \dots$, моменты принятия решения о смене или продлении состояния ОУ. Такие моменты будут случайными, поскольку можно задать начальное распределение состояния ОУ и, кроме того, длительности $T_1, T_2, \dots, T_{2m+1}$, вообще говоря, различны. Временная ось делится такими моментами на промежутки вида $[\tau_i, \tau_{i+1}), i = 0, 1, \dots$. Введем следующие случайные величины и элементы, характеризующие систему на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$: $\Gamma_i \in \Gamma$ – состояние ОУ; $\eta_{j,i} \in X$ – количество требований, поступивших в систему по потоку Π_j ; $\xi_{j,i}$ – максимальное количество требований потока Π_j , которое может быть обслужено; $\xi'_{j,i}$ – количество требований потока Π_j , которое было реально обслужено. Здесь $\xi_{j,i} \in \{0, l_j\}$ и $\xi'_{j,i} \in Y_j = \{0, 1, \dots, l_j\}$ для любых $j \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ и $\xi_{m,i} \in \{0, l'_m, l_m\}$, $\xi'_{m,i} \in Y_m = \{0, 1, \dots, l_m\}$. Кроме того, пусть величина $\kappa_{j,i} \in X$ подсчитывает случайное количество требований потока Π_j , находящихся в очереди ожидания начала обслуживания в момент τ_i . Необходимо также ввести для любого потока Π_j величину $\xi'_{j,i-1} \in \{0, 1, \dots\}$ – количество требований потока Π_j , которое было реально обслужено в промежутке $[0, \tau_0)$. Теперь представим алгоритм смены состояний ОУ. Решение о последующем состоянии принимается согласно функционально заданному правилу

$$\Gamma_{i+1} = u(\Gamma_i, \kappa_{1,i}, \eta_{1,i}),$$

где управляющая функция $u(\Gamma^{(k)}, x_1, n)$ для $\Gamma^{(k)} \in \Gamma, x_1 \in X, n \in X$ задана поточечно:

$$\begin{aligned} u(\Gamma^{(k)}, x_1, n) &= \Gamma^{(k+1)} \text{ при } \Gamma^{(k)} \in \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \dots, \Gamma^{(2m-3)}, \Gamma^{(2m-1)}\}, \\ u(\Gamma^{(2m-2)}, x_1, n) &= \Gamma^{(2m-1)} \text{ при } x_1 + n < H_1, \\ u(\Gamma^{(2m-2)}, x_1, n) &= \Gamma^{(2m)} \text{ при } x_1 + n \geq H_1, \\ u(\Gamma^{(2m)}, x_1, n) &= \Gamma^{(2m)} \text{ при } x_1 + n < H_1, \\ u(\Gamma^{(2m)}, x_1, n) &= \Gamma^{(2m+1)} \text{ при } x_1 + n \geq H_1, \\ u(\Gamma^{(2m+1)}, x_1, n) &= \Gamma^{(1)}. \end{aligned}$$

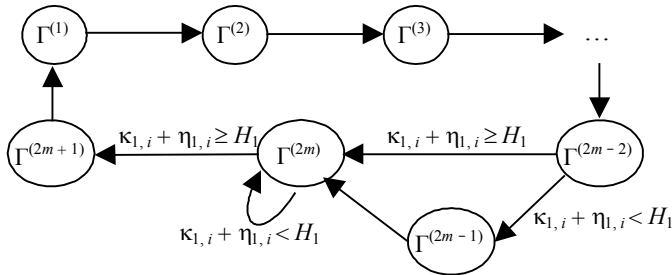


Рис. 1. Граф алгоритма переключения состояний устройства обслуживания
Fig. 1. Graph of the algorithm of switching the state of the service device

Особенности указанного алгоритма состоят в следующем. Во-первых, данный алгоритм реализует обратную связь по количеству заявок в очереди по приоритетному потоку. Во-вторых, устройство может продлевать обслуживание потока с большой интенсивностью. В-третьих, представленный алгоритм является алгоритмом с упреждением, так как в момент принятия решения о смене или продлении текущего состояния используется информация о будущем поступлении заявок в количестве $\eta_{i,j}$. Заметим также, что конфликт интересов между необходимостью выделять время, с одной стороны, для обслуживания потока с большой интенсивностью, а с другой – для приоритетного потока, устраняется с помощью введения пороговой величины $H_1 \in \{1, 2, \dots\}$. Так, переключение с обслуживания потока Π_m на обслуживание приоритетного потока Π_1 происходит только при достижении количеством заявок в очереди по потоку Π_1 заданной величины порога H_1 . Указанный алгоритм можно представить в виде графа, изображенного на рис. 1. Величины $\eta_{i,j}$ и $\xi_{j,i}$ заданы своими условными распределениями вероятностей вида $P(\eta_{i,j} = n \mid \Gamma_i = \Gamma^{(k)}) = \varphi_j(n, T_k)$ и $P(\xi_{j,i} = b \mid \Gamma_i = \Gamma^{(k)}) = \beta_j(b, \Gamma^{(k)})$, где функция $\beta_j(b, \Gamma^{(k)})$ задается поточечно (см. [9]). Более того, указанные величины будут условно независимы.

Модель функционирования системы

В работе [9] было предложено выбрать в качестве состояния системы в момент $\tau_i, i = 0, 1, \dots$, случайный вектор $\chi_i = (\Gamma_i, \kappa_{1,i}, \kappa_{m,i}, \xi'_{1,i-1}, \xi'_{m,i-1}) \in \Gamma \times X \times X \times Y_1 \times Y_m$. При таком подходе изучается динамика функционирования системы только по выделенным потокам Π_1 и Π_m . Аналогично можно исследовать работу системы по любому потоку $\Pi_j, j \in \{2, 3, \dots, m\}$, рассматривая в качестве состояния вектор $(\Gamma_i, \kappa_{1,i}, \kappa_{j,i}, \xi'_{1,i-1}, \xi'_{j,i-1})$. Для состояния системы χ_i в [9] обоснованы рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned}\Gamma_{i+1} &= u(\Gamma_i, \kappa_{1,i}, \eta_{1,i}), \\ \kappa_{1,i+1} &= \max\{0, \kappa_{1,i} + \eta_{1,i} - \xi_{1,i}\}, \quad \kappa_{m,i+1} = \max\{0, \kappa_{m,i} + \eta_{m,i} - \xi_{m,i}\}, \\ \xi'_{1,i} &= \min\{\kappa_{1,i} + \eta_{1,i}, \xi_{1,i}\}, \quad \xi'_{m,i} = \min\{\kappa_{m,i} + \eta_{m,i}, \xi_{m,i}\}\end{aligned}$$

и установлена следующая теорема:

Теорема 1. Векторная последовательность

$$\{(\Gamma_i, \kappa_{1,i}, \kappa_{m,i}, \xi'_{1,i-1}, \xi'_{m,i-1}); i = 0, 1, \dots\} \quad (2)$$

с заданным начальным распределением вектора $(\Gamma_0, \kappa_{1,0}, \kappa_{m,0}, \xi'_{1,-1}, \xi'_{m,-1})$ является многомерной управляемой однородной цепью Маркова.

Отметим здесь следующие результаты:

1. Произведена классификация состояний цепи Маркова (2) (см. [9]):
1) выделено незамкнутое множество D несущественных и минимальное замкнутое множество E сообщающихся существенных апериодических состояний;
2) показано, что любое состояние пространства $\Gamma \times X \times X \times Y_1 \times Y_m$ принадлежит множеству $D \cup E$.

2. Получены рекуррентные по $i, i \in \{0, 1, \dots\}$, соотношения для одномерных распределений

$$Q_i(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) = P(\Gamma_i = \Gamma^{(k)}, \kappa_{1,i} = x_1, \kappa_{m,i} = x_m, \xi'_{1,i-1} = y_1, \xi'_{m,i-1} = y_m)$$

(здесь и далее $\Gamma^{(k)} \in \Gamma, x_1, x_m \in X, y_1 \in Y_1, y_m \in Y_m$, если не указано иное) цепи Маркова (2) (см. [4]).

3. Получены рекуррентные по i , $i \in \{0, 1, \dots\}$, соотношения для производящих функций одномерных распределений вида

$$\Phi_i(\Gamma^{(k)}, z_1, z_m) = \sum_{y_1 \in Y_1} \sum_{y_m \in Y_m} \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) z_1^{x_1} z_m^{x_m}$$

за один шаг. На основании этих соотношений можно получить рекуррентные соотношения за любое количество шагов цепи (2). В частности, учитывая алгоритм (1) смены состояний ОУ, можно вернуться в любое из состояний множества $\Gamma \setminus \{\Gamma^{(2m-1)}\}$ минимум за $2m$ шагов, а в состояние $\Gamma^{(2m-1)}$ – за $2m+1$ шаг. В связи с этим введем следующие обозначения для длительностей возможных циклов:

$T = \sum_{k=1}^{2m+1} T_k - T_{2m-1}$ и $T^* = \sum_{k=1}^{2m+1} T_k$. В силу громоздкости полученные рекуррентные соотношения здесь приводить не будем.

В некоторых случаях при дальнейших исследованиях полезно будет рассматривать динамику функционирования системы, концентрируясь только на информации о приоритетном потоке Π_1 .

Лемма 1. Последовательность

$$\{\Gamma_i, \kappa_{1,i}, \xi'_{1,i-1}\}; i = 0, 1, \dots\} \quad (3)$$

трехмерных случайных векторов с заданным начальным распределением вектора $(\Gamma_0, \kappa_{1,0}, \xi'_{1,-1})$ является многомерной управляемой однородной цепью Маркова.

Условия существования стационарного распределения цепи Маркова

Имеют место следующие утверждения.

Лемма 2. При любом начальном распределении цепи (2) либо для каждого $(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in D \cup E$ выполняется предельное равенство $\lim_{i \rightarrow \infty} Q_i(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) = 0$ и стационарного распределения не существует, либо существуют пределы $\lim_{i \rightarrow \infty} Q_i(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) = Q(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m)$ такие, что

$$Q(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) > 0 \text{ для } (\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in E,$$

$$Q(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) = 0 \text{ для } (\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in D,$$

$$\sum_{(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in D \cup E} Q(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) = 1,$$

и стационарное распределение существует и единственно.

Доказательство. Согласно рекуррентным соотношениям из теоремы 3 в работе [9] вероятность

$$P_0^1(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) = P(\chi_1 \in E \mid \chi_0 = (\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m))$$

того, что цепь Маркова, отправляясь из произвольного несущественного состояния $(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in D$, перейдет за один шаг в какое-либо состояние множества E , положительна. Более того, для каждого несущественного состояния $(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in D$ можно показать справедливость оценки снизу

$$P_0^1(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) > \min\{\varphi_1(H_1, T_1) \varphi_m(0, T_1), \varphi_1(H_1, T_{2m+1}) \varphi_m(0, T_{2m+1})\} > 0. \quad (4)$$

Для любого несущественного состояния $(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in D$ обозначим через $P_0^*(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m)$ вероятность того, что цепь Маркова, отправляясь из него, когда-либо попадет в множество E :

$$P_0^*(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\chi_n \in E, \chi_i \in D, i=0, 1, \dots, n-1 \mid \chi_0 = (\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m)).$$

Тогда, согласно [10, с. 392, (8.6)], введенные вероятности удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\begin{aligned} P_0^*(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) &= P_0^1(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) + \\ &+ \sum_{(\Gamma^{(k')}, x_1', x_m', y_1', y_m') \in D} P_0^*(\Gamma^{(k')}, x_1', x_m', y_1', y_m') \times \\ &\times P(\chi_1 = (\Gamma^{(k')}, x_1', x_m', y_1', y_m') | \chi_0 = (\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m)). \end{aligned} \quad (5)$$

Отсюда, согласно оценке (4), для любого $(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in D$ получим

$$\begin{aligned} \sum_{(\Gamma^{(k')}, x_1', x_m', y_1', y_m') \in D} P(\chi_1 = (\Gamma^{(k')}, x_1', x_m', y_1', y_m') | \chi_0 = (\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m)) &= \\ &= 1 - P_0^1(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) < \\ < 1 - \min\{\varphi_1(H_1, T_1), \varphi_1(H_1, T_{2m+1})\} < 1. \end{aligned}$$

В таком случае система (5) будет являться вполне регулярной по определению и согласно замечанию 1 к теореме Па [11, с. 39] система будет иметь единственное ограниченное решение. Можно легко проверить, что таким решением является $P_0^*(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) = 1$ для любого $(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in D$. Таким образом, цепь с вероятностью единица покинет множество D несущественных состояний. Выбирая теперь начальное распределение лишь на замкнутом множестве E существенных состояний, получим неприводимую непериодическую цепь Маркова. Отсюда, используя эргодическую теорему [10, с. 384], получаем справедливость утверждения леммы.

Можно также показать, что если цепь (2) находилась в начальный момент в одном из состояний множества D , то самое большее за 3 шага она покинет это множество и больше в него не вернется. Таким образом, далее целесообразно выбирать начальное распределение цепи только на множестве E .

Теорема 1. Если параметры системы удовлетворяют неравенству $\lambda_1 T(3s_1 + 2p_1 + p_1) - l_1 \geq 0$, то стационарного распределения цепи (2) не существует.

Доказательство. Рассмотрим в точке $z_m = 1$ одно из полученных рекуррентных соотношений для производящих функций за цикл длительностью T из $2m$ шагов:

$$\begin{aligned} \Phi_{2m(i+1)}(\Gamma^{(1)}, z_1, 1) &= z_1^{-l_1} \Psi_1(T, z_1) \Phi_{2mi}(\Gamma^{(1)}, z_1, 1) - \\ &- \Psi_1(T_{2m+1}, z_1) \sum_{x_1=0}^{H_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1, T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) - \\ &- \Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}, z_1) \sum_{x_1=0}^{H_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1, T_{2m-2}) z_1^{x_1} \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) + \\ &+ \Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}, z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \Psi_1(T_{2m-1}, z_1) \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \quad (6) \\ &+ \Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}, z_1) \sum_{x_1=0}^{H_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1, T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\ &+ \Psi_1(T - T_1, z_1) \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1, T_1) \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2mi}(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) (1 - z_1^{x_1 - l_1}). \end{aligned}$$

Введем обозначение $g_1(z) = z^{-l_1} \Psi_1(T, z) = z^{-l_1} \exp\{\lambda_1 T(s_1 z^3 + q_1 z^2 + p_1 z - 1)\}$ и перейдем к пределу при $i \rightarrow \infty$ в соотношении (6), а также в рекуррентном соотношении для вероятности $Q_{i+1}(\Gamma^{(2m-1)}, x_1, x_m, 0, 0)$ из [9]:

$$\begin{aligned} \Phi(\Gamma^{(1)}, z_1, 1)(1 - g_1(z_1)) &= \Psi_1(T_{2m+1}, z_1)(\Psi_1(T_{2m}, z_1) - 1) \times \\ &\times \sum_{x_1=0}^{H_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1, T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\ &+ \Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}, z_1) \sum_{x_1=0}^{H_1-1} (\Psi_1(T_{2m-1}, z_1) - 1) \sum_{x_m=0}^{\infty} Q(\Gamma^{(2m-1)}, x_1, x_m, 0, 0) z_1^{x_1} + \\ &+ \Psi_1(T - T_1, z_1) \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1, T_1) \sum_{v_m=0}^{\infty} Q(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0)(1 - z_1^{x_1-l_1}). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь также был использован тот факт, что состояния вида $(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0)$ при $v_1 \in \{H_1, H_1+1, \dots\}$, $v_m \in X$ принадлежат множеству D . Следовательно, соответствующие предельные вероятности $Q(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0)$ согласно лемме 2 будут равны нулю.

Рассмотрим сначала случай $\lambda_1 T(3s_1 + 2q_1 + p_1) > l_1$. Заметим, что в точке $z_1 = 1$ верно $g_1(1) = 1$ и $g_1'(z_1)|_{z_1=1} = -l_1 + \lambda_1 T(3s_1 + 2q_1 + p_1) > 0$, т. е. найдется точка $z^* \in (0, 1)$ такая, что для любых $z^* \leq |z_1| < 1$ выполняется неравенство $0 < g_1(z_1) < 1$. Тогда левая часть соотношения (7) положительна в области $z^* \leq |z_1| < 1$. В свою очередь, в указанной области для действительных z_1 и любых $t \geq 0$ будет справедливо $\Psi_1(t, z_1) = \sum_{x=0}^{\infty} \varphi_1(t, x) z_1^x \leq \sum_{x=0}^{\infty} \varphi_1(t, x) = 1$, поэтому $\Psi_1(T_{2m}, z_1) - 1 < 0$ и $\Psi_1(T_{2m-1}, z_1) - 1 < 0$. Кроме того, в области $z^* \leq |z_1| < 1$ для $x_1 < l_1$ выполняется неравенство $1 - z_1^{x_1-l_1} < 0$. Таким образом, правая часть соотношения (7) становится отрицательной, в то время как левая его часть положительна. Противоречие разрешается, только если все стационарные вероятности в правой части равенства (7) равны нулю. Тогда согласно лемме 2 стационарного распределения цепи Маркова при $\lambda_1 T(3s_1 + 2q_1 + p_1) > l_1$ не существует.

Теперь обратимся к случаю $\lambda_1 T(3s_1 + 2q_1 + p_1) = l_1$. Разложим функции $g_1(z_1)$, $z_1^{x_1}$, $z_1^{x_1-l_1}$ и $\Psi_1(t, z_1)$ при различных значениях t в ряд Тейлора в левой окрестности точки $z_1 = 1$. Результат разложения подставим в соотношение (7), сгруппируем слагаемые и получим

$$\begin{aligned} &\Phi(\Gamma^{(1)}, z_1, 1)(l_1 - \lambda_1 T(3s_1 + 2q_1 + p_1))(z_1 - 1) = \\ &= \lambda_1 T_{2m}(3s_1 + 2q_1 + p_1)(z_1 - 1) \sum_{x_1=0}^{H_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1, T_{2m}) \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\ &+ \sum_{x_1=0}^{H_1-1} \lambda_1 T_{2m-1}(3s_1 + 2q_1 + p_1)(z_1 - 1) \sum_{x_m=0}^{\infty} Q(\Gamma^{(2m-1)}, x_1, x_m, 0, 0) + \\ &+ \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1, T_1) \sum_{v_m=0}^{\infty} Q(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0)(l_1 - x_1)(z_1 - 1) + o(z_1 - 1). \end{aligned}$$

Разделив теперь обе части полученного соотношения на $(z_1 - 1)$ и перейдя к пределу $z_1 \rightarrow 1$, получим при $\lambda_1 T(3s_1 + 2q_1 + p_1) = l_1$ равенство

$$\begin{aligned}
0 = & \lambda_1 T_{2m} (3s_1 + 2q_1 + p_1) \sum_{x_1=0}^{H_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1, T_{2m}) \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
& + \sum_{x_1=0}^{H_1-1} \lambda_1 T_{2m-1} (3s_1 + 2q_1 + p_1) \sum_{x_m=0}^{\infty} Q(\Gamma^{(2m-1)}, x_1, x_m, 0, 0) + \\
& + \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1, T_1) \sum_{v_m=0}^{\infty} Q(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) (l_1 - x_1).
\end{aligned}$$

Отсюда вновь заключаем, что стационарные вероятности в правой части равны нулю и согласно лемме 2 стационарного распределения цепи Маркова при $\lambda_1 T(3s_1 + 2q_1 + p_1) = l_1$ не существует. Теорема доказана.

Итак, необходимое условие существования стационарного режима имеет вид $\lambda_1 T(3s_1 + 2p_1) - l_1 < 0$.

Теорема 2. Если параметры системы удовлетворяют неравенствам $\lambda_m T_{2m} (3s_m + 2q_m + p_m) - l'_m > 0$ и $\lambda_m T_{2m-1} (3s_m + 2q_m + p_m) - l_m > 0$, то стационарного распределения цепи (2) не существует.

Доказательство. Рассмотрим в точке $z_1 = 1$ одно из полученных рекуррентных соотношений для производящих функций за цикл длительностью T . После перехода к пределу при $i \rightarrow \infty$ получим соотношение вида

$$\Phi(\Gamma^{(2)}, 1, z_m)(1 - g_m(z_m)) = F_1^1(z_m) + F_2^1(z_m) + F_3^1(z_m) + F_4^1(z_m) + F_5^1(z_m), \quad (8)$$

где $g_m(z) = z^{-l'_m} \Psi_m(T, z) = z^{-l'_m} \exp\{\lambda_m T(s_m z^3 + q_m z^2 + p_m z - 1)\}$ и введены следующие функции:

$$\begin{aligned}
F_1^1(z_m) = & -\Psi_m(T_1 + T_{2m+1}, z_m) \sum_{x_1=0}^{H_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1, T_{2m}) \times \\
& \times \sum_{v_m=0}^{\infty} \Psi_m(T_{2m}, z_m) z_m^{v_m - l'_m} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m), \\
F_2^1(z_m) = & \Psi_m(T_1 + T_{2m+1}, z_m) \sum_{x_1=H_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1, T_{2m}) \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m, T_{2m}) \times \\
& \times (1 - z_m^{y_m - l'_m}) \sum_{w_m=0}^{l_m} Q(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m), \\
F_3^1(z_m) = & -z_m^{-l'_m} \Psi_m(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}, z_m) \sum_{x_1=0}^{H_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1, T_{2m-2}) \times \\
& \times \sum_{v_m=0}^{\infty} \Psi_m(T_{2m-2}, z_m) Q(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0_m) z_m^{v_m}, \\
F_4^1(z_m) = & z_m^{-l'_m} \Psi_m(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}, z_m) \times \\
& \times \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m, T_{2m-1}) Q(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0_m) + \\
& + z_m^{-l'_m} \Psi_m(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}, z_m) z_m^{-l_m} \times \\
& \times \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=l_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m, T_{2m-1}) Q(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0_m) z_m^{x_m},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_5^1(z_m) &= z_m^{-l'_m} \Psi_m(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}, z_m) \times \\
&\times \sum_{x_1=0}^{H_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1, T_{2m}) \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m, T_{2m}) \times \\
&\times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + z_m^{-l'_m} \Psi_m(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}, z_m) \times \\
&\times \sum_{x_1=0}^{H_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1, T_{2m}) \sum_{x_m=l'_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m, T_{2m}) z_m^{x_m - l'_m} \times \\
&\times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m).
\end{aligned}$$

Заметим, что $g_m(1) = 1$ и $g'_m(z_m)|_{z_m=1} > -l'_m + \lambda_m T_{2m}(3s_m + 2q_m + p_m) > 0$. Тогда существует точка $z_m^* \in (0, 1)$, такая, что $0 < g_m(z_m) < 1$ для любых $z_m \in [z_m^*, 1)$ и левая часть равенства (8) положительна в области $[z_m^*, 1)$. Очевидно также, что в этой области $F_2^1(z_m) < 0$ и справедлива оценка

$$\begin{aligned}
F_4^1(z_m) &< z_m^{-l'_m} \Psi_m(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}, z_m) \times \\
&\times \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{y_m=0}^{l_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m, T_{2m-1}) Q(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0_m) z_m^{y_m - l_m} + \\
&+ z_m^{-l'_m} \Psi_m(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}, z_m) \times \\
&\times \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=l_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m, T_{2m-1}) Q(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0_m) z_m^{x_m - l_m} = \\
&= z_m^{-l'_m} \Psi_m(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}, z_m) \times \\
&\times \sum_{v_1=0}^{H_1-1} \sum_{v_m=0}^{\infty} \Psi_m(T_{2m-1}, z_m) Q(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0_m) z_m^{v_m - l_m}.
\end{aligned}$$

Здесь последнее равенство возможно в силу несущественности состояний вида $(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0)$ при любых $v_1 \in \{H_1, H_1 + 1, \dots\}$ и $v_m \in X$. Теперь вновь применим полученное из [9] предельное соотношение для вероятностей вида $Q_{i+1}(\Gamma^{(2m-1)}, x_1, x_m, 0, 0)$ при $x_1 \in \{0, 1, \dots, H_1 - 1\}$ и $x_m \in X$ и получим

$$\begin{aligned}
F_3^1(z_m) &= -z_m^{-l'_m} \Psi_m(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}, z_m) \times \\
&\times \sum_{x_1=0}^{H_1-1} \sum_{x_m=0}^{\infty} Q(\Gamma^{(2m-1)}, x_1, x_m, 0, 0_m) z_m^{x_m},
\end{aligned}$$

следовательно, верно неравенство

$$\begin{aligned}
F_3^1(z_m) + F_4^1(z_m) &< -z_m^{-l'_m} \Psi_m(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}, z_m) \times \\
&\times (z_m^{-l_m} \Psi_m(T_{2m-1}, z_m) - 1) \sum_{v_1=0}^{H_1-1} \sum_{v_m=0}^{\infty} Q(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0_m) z_m^{v_m}.
\end{aligned}$$

Теперь заметим, что в точке $z_m = 1$ имеют место равенство

$$(z_m^{-l_m} \Psi_m(T_{2m-1}, z_m))|_{z_m=1} = 1$$

и оценка

$$\left. \frac{d}{dz} (z_m^{-l_m} \Psi_m(T_{2m-1}, z_m)) \right|_{z_m=1} = -l_m + \lambda_m T_{2m-1} (3s_m + 2q_m + p_m) > 0,$$

поэтому найдется область $[z_m^{**}, 1) \subseteq [z_m^*, 1)$, такая, что в любой точке $z \in [z_m^{**}, 1)$ выполняется $z_m^{-l_m} \Psi_m(T_{2m-1}, z_m) < 1$ и, следовательно, $F_3^1(z_m) + F_4^1(z_m) < 0$.

Аналогичным образом в области $[z_m^{**}, 1)$ получим оценку

$$F_5^1(z_m) < z_m^{-l'_m} \Psi_m(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}, z_m) \sum_{x_1=0}^{H_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1, T_{2m}) \times \\ \times \sum_{v_m=0}^{\infty} \Psi_m(T_{2m}, z_m) z_m^{v_m - l'_m} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m).$$

Отсюда следует неравенство

$$F_1^1(z_m) + F_5^1(z_m) < z_m^{-l'_m} \Psi_m(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}, z_m) \times \\ \times (z_m^{-l'_m} \Psi_m(T_{2m}, z_m) - 1) \sum_{x_1=0}^{H_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1, T_{2m}) \times \\ \times \sum_{v_m=0}^{\infty} \Psi_m(T_{2m}, z_m) z_m^{v_m - l'_m} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m),$$

и, подобно сделанным ранее заключениям относительно суммы функций $F_3^1(z_m) + F_4^1(z_m)$, найдется область $[z_m^{***}, 1) \subseteq [z_m^{**}, 1)$, такая, что в любой точке из этой области выполняется $z_m^{-l'_m} \Psi_m(T_{2m}, z_m) < 1$, т. е. $F_1^1(z_m) + F_5^1(z_m) < 0$. Таким образом, существует область $[z_m^{***}, 1)$, в которой одновременно левая часть соотношения (8) положительна, а правая – отрицательна. Отсюда заключаем, что при выполнении условий теоремы стационарного распределения цепи Маркова не существует.

Работая с соотношениями для производящих функций за цикл длительностью T^* аналогично двум доказанным выше теоремам можно установить справедливость следующего утверждения.

Теорема 3. Если параметры системы удовлетворяют неравенствам

$$\lambda_m (T^* - T_{2m}) (3s_m + 2q_m + p_m) - l_m < 0$$

и

$$\lambda_m T^* (3s_m + 2q_m + p_m) - l_m - l'_m > 0,$$

то стационарного распределения цепи (2) не существует.

Также установлено достаточное условие существования стационарного режима по потоку Π_1 :

Теорема 4. Для существования стационарного распределения цепи Маркова (3) достаточно выполнения условия $\lambda_1 T (3s_1 + 2p_1 + p_1) - l_1 < 0$.

Доказательство. Воспользуемся соотношением (6) для получения оценки

$$|\Phi_{2m(i+1)}(\Gamma^{(1)}, z_1, 1)| \leq |g_1(z_1)| \times |\Phi_{2mi}(\Gamma^{(1)}, z_1, 1)| + F_1^2(z_1) + F_2^2(z_1), \quad (9)$$

где

$$F_1^2(z_1) = \Psi_1(T_{2m+1}, z_1) \sum_{x_1=0}^{H_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1, T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\ \times \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\ + \Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}, z_1) \sum_{x_1=0}^{H_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1, T_{2m-2}) z_1^{x_1} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) + \\
& + \Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}, z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \Psi_1(T_{2m-1}, z_1) \times \\
& \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\
& + \Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}, z_1) \sum_{x_1=0}^{H_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1, T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\
& \times \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m), \\
F_2^2(z_1) &= \Psi_1(T - T_1, z_1) \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1, T_1) \times \\
& \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2mi}(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) |1 - z_1^{x_1-l_1}|.
\end{aligned}$$

Заметим, что $g_1(1) = 1$ и при выполнении условий теоремы

$$g_1'(z_1) \Big|_{z_1=1} = -l_1 + \lambda_1 T(3s_1 + 2q_1 + p_1) < 0.$$

Следовательно, существует точка $\hat{z}_1 > 1$, такая, что для любых $z_1 \in (1, \hat{z}_1]$ выполняется $0 < g_1(z_1) < 1$.

Учитывая возрастание функции $\Psi_1(t, z_1)$ при фиксированном t в области $z_1 \in (1, \hat{z}_1]$ и несущественность состояний вида $(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0)$ при $v_1 \in \{H_1, H_1+1, \dots\}$, $v_m \in X$, получим, что в указанной области справедливы следующие преобразования:

$$\begin{aligned}
F_1^2(z_1) &\leq \hat{z}_1^{H_1-1} \Psi_1(T_{2m+1}, \hat{z}_1) \sum_{x_1=0}^{H_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1, T_{2m}) \times \\
&\times \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
&+ \hat{z}_1^{H_1-1} \Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}, \hat{z}_1) \sum_{x_1=0}^{H_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1, T_{2m-2}) \times \\
&\times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) + \\
&+ \hat{z}_1^{H_1-1} \Psi_1(T_{2m-1} + T_{2m} + T_{2m+1}, \hat{z}_1) \times \\
&\times \sum_{v_1=0}^{H_1-1} \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) + \\
&+ \hat{z}_1^{H_1-1} \Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}, \hat{z}_1) \sum_{x_1=0}^{H_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1, T_{2m}) \times \\
&\times \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \hat{z}_1^{H_1-1} \Psi_1(T_{2m+1}, \hat{z}_1) \sum_{v_1=0}^{H_1-1} \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
&+ \hat{z}_1^{H_1-1} \Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}, \hat{z}_1) \sum_{v_1=0}^{H_1-1} \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) + \\
&\quad + \hat{z}_1^{H_1-1} \Psi_1(T_{2m-1} + T_{2m} + T_{2m+1}, \hat{z}_1) \times \\
&\quad \times \sum_{v_1=0}^{H_1-1} \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) + \\
&+ \hat{z}_1^{H_1-1} \Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}, \hat{z}_1) \sum_{v_1=0}^{H_1-1} \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) = \\
&= \hat{z}_1^{H_1-1} \Psi_1(T_{2m+1}, \hat{z}_1) P(\Gamma_{2m(i+1)-2} = \Gamma^{(2m)}, \kappa_{1,2m(i+1)-2} < H_1, \xi'_{1,2m(i+1)-2} = 0) + \\
&\quad + \hat{z}_1^{H_1-1} \Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}, \hat{z}_1) \times \\
&\quad \times P(\Gamma_{2m(i+1)-3} = \Gamma^{(2m-2)}, \kappa_{1,2m(i+1)-3} < H_1, \xi'_{1,2m(i+1)-3} = 0, \xi'_{m,2m(i+1)-3} = 0) + \\
&\quad + \hat{z}_1^{H_1-1} \Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1} + T_{2m-1}, \hat{z}_1) \times \\
&\quad \times P(\Gamma_{2m(i+1)-3} = \Gamma^{(2m-1)}, \kappa_{1,2m(i+1)-3} < H_1, \xi'_{1,2m(i+1)-3} = 0, \xi'_{m,2m(i+1)-3} = 0) + \\
&\quad + \hat{z}_1^{H_1-1} \Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}, \hat{z}_1) \times \\
&\quad \times P(\Gamma_{2m(i+1)-3} = \Gamma^{(2m)}, \kappa_{1,2m(i+1)-3} < H_1, \xi'_{1,2m(i+1)-3} = 0) \leq \\
&\leq \hat{z}_1^{H_1-1} \Psi_1(T_{2m+1}, \hat{z}_1) \times [1 + \Psi_1(T_{2m}, \hat{z}_1)(2 + \Psi_1(T_{2m-1}, \hat{z}_1))] = C_1.
\end{aligned}$$

Кроме того, при $z_1 \in (1, \hat{z}_1]$ справедлива также оценка

$$\begin{aligned}
F_2^2(z_1) &\leq \Psi_1(T - T_1, \hat{z}_1) \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1, T_1) \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2mi}(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) < \\
&< \Psi_1(T - T_1, \hat{z}_1) \sum_{v_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2mi}(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) = \\
&= \Psi_1(T - T_1, \hat{z}_1) \times P(\Gamma_{2mi} = \Gamma^{(1)}, \kappa_{1,2mi} < l_1, \xi'_{1,2mi} = 0, \xi'_{m,2mi} = 0) \leq \\
&\leq \Psi_1(T - T_1, \hat{z}_1) = C_2.
\end{aligned}$$

Таким образом, из неравенства (9) получаем соотношение

$$|\Phi_{2m(i+1)}(\Gamma^{(1)}, z_1, 1)| \leq |g_1(z_1)| \times |\Phi_{2mi}(\Gamma^{(1)}, z_1, 1)| + C_1 + C_2.$$

Рассмотрим теперь сжимающее отображение вида

$$|\tilde{\Phi}_{2m(i+1)}(\Gamma^{(1)}, z_1, 1)| = |g_1(z_1)| \times |\tilde{\Phi}_{2mi}(\Gamma^{(1)}, z_1, 1)| + C_1 + C_2 \quad (10)$$

и положим $\tilde{\Phi}_0(\Gamma^{(1)}, z_1, 1) = \Phi_0(\Gamma^{(1)}, z_1, 1) < +\infty$, при этом оценки $\Phi_0(\Gamma^{(1)}, z_1, 1) < +\infty$ можно достичь за счет выбора подходящего начального распределения цепи Маркова (2). Тогда итеративная процедура (10) сходится в области $z_1 \in (1, \hat{z}_1]$, поскольку $|g_1(z_1)| < 1$, и, следовательно, функции $\tilde{\Phi}_{2mi}(\Gamma^{(1)}, z_1, 1)$ ограничены сверху некоторой константой. В свою очередь, функции $\Phi_{2mi}(\Gamma^{(1)}, z_1, 1)$ также будут ограничены, поскольку последовательность $\{\tilde{\Phi}_{2mi}(\Gamma^{(1)}, z_1, 1); i = 0, 1, \dots\}$ мажориру-

ет последовательность $\{\Phi_{2mi}(\Gamma^{(1)}, z_1, 1); i = 0, 1, \dots\}$. Функции $\Phi_{2mi}(\Gamma^{(1)}, z_1, 1)$ являются аналитическими в области $z_1 \in (1, \hat{z}_1]$, значит, имеют ограниченные производные, т. е. $\frac{d}{dz_1} \Phi_{2mi}(\Gamma^{(1)}, z_1, 1) \leq L_1$. Аналогичными рассуждениями получим

оценку вида $\frac{d}{dz_1} \Phi_{2mi}(\Gamma^{(k)}, z_1, 1) \leq L_k$ при любых $k \in \{2, 3, \dots, 2m+1\}$. Отсюда следует, что справедлива оценка для среднего количества заявок потока Π_1 , ожидающих начала обслуживания:

$$M \kappa_{1,2mi} = \sum_{k=1}^{2m+1} \frac{d}{dz_1} \Phi_{2mi}(\Gamma^{(k)}, z_1, 1) \Big|_{z_1=1} \leq \sum_{k=1}^{2m+1} L_k.$$

Предположим теперь, что при выполнении неравенства $\lambda_1 T(3s_1 + 2p_1 + p_1) - l_1 < 0$ стационарного распределения цепи Маркова (3) не существует. В этом случае для цепи Маркова (3) можно установить справедливость утверждения, аналогичного сформулированному в лемме 2. Тогда $\lim_{i \rightarrow \infty} Q_i(\Gamma^{(k)}, x_1, y_1) = 0$ при любых $\Gamma^{(k)} \in \Gamma$, $x_1 \in X$, $y_1 \in Y_1$ и справедливы преобразования

$$\begin{aligned} M \kappa_{1,2mi} &= \sum_{x_1=0}^{\infty} x_1 \sum_{k=1}^{2m+1} \sum_{y_1=1}^{l_1} Q_{2mi}(\Gamma^{(k)}, x_1, y_1) = \\ &= \sum_{x_1=0}^{\tilde{X}-1} x_1 \sum_{k=1}^{2m+1} \sum_{y_1=1}^{l_1} Q_{2mi}(\Gamma^{(k)}, x_1, y_1) + \sum_{x_1=\tilde{X}}^{\infty} x_1 \sum_{k=1}^{2m+1} \sum_{y_1=1}^{l_1} Q_{2mi}(\Gamma^{(k)}, x_1, y_1) \geq \\ &\geq \tilde{X} \sum_{x_1=\tilde{X}}^{\infty} \sum_{k=1}^{2m+1} \sum_{y_1=1}^{l_1} Q_{2mi}(\Gamma^{(k)}, x_1, y_1) = \\ &= \tilde{X} (1 - \sum_{x_1=0}^{\tilde{X}-1} \sum_{k=1}^{2m+1} \sum_{y_1=1}^{l_1} Q_{2mi}(\Gamma^{(k)}, x_1, y_1)). \end{aligned}$$

Поскольку $\lim_{i \rightarrow \infty} Q_i(\Gamma^{(k)}, x_1, y_1) = 0$, то для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ и любого сколь угодно большого натурального $\tilde{X}$ найдется такой индекс $I(\varepsilon, \tilde{X})$, что для любого $i > I(\varepsilon, \tilde{X})$ будет выполняться $M \kappa_{1,2mi} \geq \tilde{X}(1 - \varepsilon)$. Итак, при отсутствии стационарного распределения получаем противоречие: с одной стороны, средняя величина очереди $M \kappa_{1,2mi}$ ограничена сверху, а с другой стороны, она неограничена. Следовательно, предположение об отсутствии стационарного распределения цепи (3) неверно и выполнения условия $\lambda_1 T(3s_1 + 2p_1 + p_1) - l_1 < 0$ достаточно для существования стационарного режима в системе по потоку Π_1 .

Заключение

Рассмотрена неклассическая система массового обслуживания с разнородными по интенсивности и приоритету конфликтными неординарными входными потоками. Управление потоками происходит адаптивным алгоритмом управления с обратной связью, переналадками, упреждением и возможностью продления обслуживания. Построена математическая модель системы в виде многомерной управляемой цепи Маркова. Получен критерий существования стационарного режима в системе по высокоприоритетному потоку с низкой интенсивностью, а

также необходимые условия существования стационарного режима в системе в целом. Дальнейшие исследования связаны, во-первых, с получением дополнительных условий существования стационарного режима, а во-вторых, с построением и исследованием имитационной модели системы и дальнейшим поиском квазиоптимального управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lucantoni D.* Further transient analysis of the BMAP/G/1 Queue // *Communications in Statistics. Stochastic Models.* 1998. V. 14. No. 1–2. P. 461–478. DOI: 10.1080/15326349808807482.
2. *Леонтьев Н.Д., Ушаков В.Г.* Анализ систем обслуживания с входящим потоком авторегрессионного типа // *Информатика и ее применения.* 2014. Т. 8. № 3. С. 39–44. DOI: 10.14357/19922264140305.
3. *Ushakov A.V., Ushakov V.G.* Limiting expectation time distribution for a critical load in a system with relative priority // *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics.* 2013. V. 37. No. 1. P. 42–48. DOI: 10.3103/S0278641912040073.
4. *Afanasyeva L., Bashtova E., Bulinskaya E.* Limit theorems for semi-Markov queues and their applications // *Communications in Statistics – Simulation and Computation.* 2012. V. 41. No. 6. P. 688–709. DOI: 10.1080/03610918.2012.625255.
5. *Afanasyeva L., Bulinskaya E.* Asymptotic analysis of traffic lights performance under heavy traffic assumption // *Methodology and Computing in Applied Probability.* 2013. V. 15. No. 4. P. 935–950. DOI: 10.1007/s11009-012-9291-x.
6. *Rykov V., Efrosinin D.* On optimal control of systems on their life time // *Recent Advances in System Reliability.* Springer Series in Reliability Engineering. 2012. V. 51. P. 307–319. DOI: 10.1007/978-1-4471-2207-4_22.
7. *Fedotkin M., Rachinskaya M.* Parameters Estimator of the Probabilistic Model of Moving Batches Traffic Flow // *Distributed Computer and Communication Networks. Ser. Communications in Computer and Information Science.* 2014. V. 279. P. 154–168. DOI: 10.1007/978-3-319-05209-0.
8. *Федоткин М.А., Рачинская М.А.* Имитационная модель циклического управления конфликтными неординарными пуассоновскими потоками // *Вестник Волжской государственной академии водного транспорта.* 2016. № 47. С. 43–51.
9. *Федоткин М.А., Рачинская М.А.* Модель функционирования системы управления и обслуживания потоков разной интенсивности и приоритетности // *Вестник Волжской государственной академии водного транспорта.* 2016. № 48. С. 62–69.
10. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. I. М.: Мир, 1967.
11. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.

Статья поступила 07.02.2017 г.

Rachinskaya M.A., Fedotkin M.A. (2018) INVESTIGATION OF THE STATIONARY MODE EXISTENCE IN A SYSTEM OF CONFLICT SERVICE OF NON-HOMOGENEOUS DEMANDS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 51. pp. 33–47

DOI 10.17223/19988621/51/4

This paper studies a nonclassical system which controls several independent conflicting flows and provides service for requests of these flows. It is supposed that there is one high-priority input flow and one high-intensity flow. The input flows can be approximated with a nonordinary Poisson flow. The system includes a service device that provides for each flow a service period and a readjusting period for safe switching between conflicting flows. It is also possible to prolong service for the high-intensity flow until a number of waiting requests in a high-priority flow queue reaches a certain threshold.

The most meaningful characteristics of the system are stated. A mathematical probabilistic model for the system is constructed in the form of a multidimensional homogeneous controllable Markovian chain. The paper determines necessary conditions for the existence of a stationary mode in the system. A sufficient condition for existence of a stationary mode for the high-priority flow is proved as well. All the found conditions can be easily checked in real systems since they deal only with system parameters such as intensities of the input flows, intensities of service, and time periods of the service device states.

Keywords: priority with threshold, multidimensional controllable Markovian chain, stationary distribution.

AMS Mathematical Subject Classification: 90B22, 60G10, 60J10

RACHINSKAYA Maria Anatolyevna (Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod, Russian Federation)

E-mail: rachinskaya.maria@gmail.com

FEDOTKIN Michael Andreevich (Doctor of Physics and Mathematics, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod, Russian Federation)

E-mail: fma5@rambler.ru

REFERENCES

1. Lucantoni D.(1998) Further transient analysis of the BMAP/G/1 Queue. *Communications in Statistics. Stochastic Models*. 14(1–2). pp. 461–478. DOI: 10.1080/15326349808807482.
2. Leontyev N.D., Ushakov V.G. (2014) Analiz sistem obsluzhivaniya s vkhodyashchim potokom avtoregressionnogo tipa [Analysis of a queueing system with autoregressive arrivals]. *Informatics and Applications*. 8(3). pp. 39–44. DOI: 10.14357/19922264140305.
3. Ushakov A.V., Ushakov V.G. (2013) Limiting expectation time distribution for a critical load in a system with relative priority. *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*. 37(1). pp. 42–48. DOI: 10.3103/S0278641912040073.
4. Afanasyeva L., Bashtova E., Bulinskaya E. (2012) Limit Theorems for Semi-Markov Queues and Their Applications. *Communications in Statistics – Simulation and Computation*. 41(6). pp. 688–709. DOI: 10.1080/03610918.2012.625255.
5. Afanasyeva L., Bulinskaya E. (2013) Asymptotic Analysis of Traffic Lights Performance Under Heavy Traffic Assumption. *Methodology and Computing in Applied Probability*. 15(4). pp. 935–950. DOI: 10.1007/s11009-012-9291-x.
6. Rykov V., Efrosinin D. (2012) On Optimal Control of Systems on Their Life Time. *Recent Advances in System Reliability. Springer Series in Reliability Engineering*. 51. pp. 307–319. DOI: 10.1007/978-1-4471-2207-4_22.
7. Fedotkin M., Rachinskaya M. (2014) Parameters Estimator of the Probabilistic Model of Moving Batches Traffic Flow. *Distributed Computer and Communication Networks. Ser. Communications in Computer and Information Science*. 279. pp. 154–168. DOI: 10.1007/978-3-319-05209-0.
8. Fedotkin M.A., Rachinskaya M.A. (2016) Imitatsionnaya model' tsiklicheskogo upravleniya konfliktnymi neordinarnymi puassonovskimi potokami [Simulation model of cyclic control for conflicting non-ordinary Poisson flows]. *Bulletin of the Volga State Academy of Water Transport*. 47. pp. 43–51.
9. Fedotkin M.A., Rachinskaya M.A. Model' funktsionirovaniya sistemy upravleniya i obsluzhivaniya potokov raznoy intensivnosti i prioritnosti [The functioning model of a control and service system for flows with different intensity and priority]. *Bulletin of the Volga State Academy of Water Transport*. 2016. 48. pp. 62–69.
10. Feller W. (1966) *An introduction to probability theory and its applications*. V. I. New York: John Wiley & Sons, Inc.
11. Kantorovich L.V., Krylov V.I. (1958) *Approximate methods of higher analysis*. New York: Interscience.

УДК 519.81, 519.21
DOI 10.17223/19988621/51/5

MSC 60H10, 60G44, 60J65

А.А. Шишкова

РАСЧЕТ АЗИАТСКИХ ОПЦИОНОВ ДЛЯ МОДЕЛИ БЛЭКА – ШОУЛСА¹

Рассматривается одна из фундаментальных задач финансовой математики – распределение ресурсов между финансовыми активами с целью обеспечения достаточных выплат. Предлагаются формулы для вычисления стоимости азиатского опциона и построения хеджирующей стратегии при заданных параметрах модели Блэка – Шоулса в непрерывном времени с двумя финансовыми активами.

Ключевые слова: *мартингал, стохастический интеграл, хеджирующая стратегия, азиатский опцион, модель Блэка – Шоулса.*

1. Введение

Основным вопросом математической экономики является вопрос потребления и инвестирования. В современной финансовой индустрии такие проблемы представляют наибольший интерес для инвесторов, продающих финансовые активы своим клиентам, которые имеют право на определенную оплату в течение срока инвестиционного контракта и ожидают получить максимальную отдачу в момент его погашения.

Исторически первой работой в теории финансов в направлении условий неопределенности стала диссертация Л. Башелье «Теория спекуляций» [1], которая была опубликована в 1900 году. В диссертации броуновское движение было использовано для расчета цен опционов. Эта работа стала первой публикацией, посвященной использованию математической техники в финансовой науке.

В современной теории и практике опционов знаменательную роль играют работы Ф. Блэка и М. Шоулса «Расчет цены опционов и обязательства корпораций» [2] и Р. Мертона «Теория расчета рациональной цены опциона» [3]. В этих статьях авторы предложили формулы для вычисления стоимости опционов и других производных инструментов, которые оказали огромное влияние на развитие теории и практики финансов. Доказательство формулы Блэка – Шоулса привело к повышенному интересу к производным инструментам и взрывному росту опционной торговли.

Работать в этом направлении продолжили Кокс, Росс и Рубинштейн. В [4] авторы предложили рассмотреть простую модель для ценообразования опционов в дискретном времени. Эта модель в предельном случае содержит полученную ранее модель Блэка – Шоулса, но в отличие от нее получена гораздо более простыми методами. Модель Кокса – Росса – Рубинштейна дает эффективный численный метод оценивания опционов. Подробно обсуждаются опционы на обыкновенные акции в [5].

¹ Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ, проект № 2.3208.2017/4.6.

Со временем передовые вероятностные методы оказали значительное влияние на область финансов. И наоборот, финансовые вопросы стимулировали новые направления исследований в области теории вероятностей. К таким работам можно отнести статью Фоллмера [6], в которой рассмотрены основы теории арбитражного ценообразования с акцентом на неполные рынки и на различные роли, которые играют вероятностная мера «в реальном времени» и ее эквивалентные мартингальные меры. «Мартингальную» теорию расчета справедливой стоимости опционов, хеджирующих стратегий, рациональных моментов исполнения опционов привели в своих работах А.Н. Ширяев и Ю.М. Кабанов [7, 8]. Здесь авторы изложили основные понятия, постановки задач и результаты финансовой математики, которые относятся к расчетам опционов американского и европейского типов, предполагая, что контракты заключаются на дискретном и непрерывном (B,S) – рынках. Во второй работе предполагается, что безрисковый банковский счет эволюционирует по формуле «сложных процентов», а цена рискованной акции управляется геометрическим броуновским движением. Широкое распространение в финансовой математике получила «диффузионная» модель (B,S) -рынка с постоянной волатильностью. Именно с этой моделью связаны известные результаты Блэка – Шоулса, Мертона, Харрисона и Крепса [9], Харрисона и Плиски [10], Каратцаса и Шрива [11]. С.М. Пергаменщиков [12] в своей работе также использовал (B,S) -модель финансового рынка с постоянной волатильностью в задаче ценообразования опционов при наличии транзакционных издержек. Было установлено, что предельное распределение терминального значения портфеля для стратегии Леланда является смешанным гауссовским распределением.

Позже Пергаменщиков и Берджан [13] исследовали задачу оптимального инвестирования и потребления для финансового рынка Блэка – Шоулса со стохастической волатильностью. Используя представление Фейнмана – Каца, авторы доказывают единственность и гладкость решения уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана, которое представляет собой нелинейное уравнение в частных производных второго порядка. Кроме того, показано, что оптимальная скорость сходимости итерационных числовых схем как для функции стоимости, так и для оптимального портфеля является супергеометрической, то есть более быстрой, чем любая геометрическая.

На основании вышесказанного стоит отметить, что задача ценообразования опционов и построения хеджирующих стратегий является хорошо изученной для опционов американского и европейского стилей. К сожалению, эта техника не развита для так называемых «экзотических» опционов, в том числе для опционов азиатского типа. В данной работе рассматривается задача построения хеджирующей стратегии для азиатского опциона. При решении этой задачи исследован метод построения представления квадратично интегрируемых мартингалов по винеровским процессам и найдены квадратические представления для мартингалов, порожденных функциями от интегралов по геометрическим броуновским движениям (п. 3). Основным результатом работы являются полученные в п. 3 формулы для вычисления стоимости опциона и хеджирующей стратегии. В п. 4 найдена плотность экспоненциальной случайной величины с использованием специального процесса – броуновского моста. Доказано, что полученная плотность является непрерывно дифференцируемой по первой переменной функцией. В п. 6 приведены результаты численного моделирования Монте-Карло для конкретной финансовой модели.

2. Постановка задачи

При построении математических моделей динамики финансовых показателей оказываются полезными различные классы случайных процессов с дискретным и непрерывным временем. При описании случайных процессов, как правило, отталкиваются от их разложения Дуба или Дуба – Мейера на предсказуемую и мартингальную составляющие [14]. Это объясняет, почему теория мартингалов является естественным и полезным математическим аппаратом в финансовой математике и инженерии.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, (F_t^W)_{0 \leq t \leq T}, P)$ – стохастический базис с естественной фильтрацией $F_t^W = \sigma\{W_s, s \leq t\}$, порожденной винеровским процессом.

Предположим, что на финансовом рынке динамика цен безрискового актива $B = (B_t)_{0 \leq t \leq T}$ и рискованного актива $S = (S_t)_{0 \leq t \leq T}$ задается (B, S) – моделью Блэка – Шоулса вида

$$\begin{cases} B_t = 1, \\ dS_t = \sigma S_t dW_t, \quad S_0 > 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $\sigma > 0$ – волатильность. Определим азиатский опцион купли, который предъявляется к исполнению в заранее определенный момент времени T и задается платежной функцией

$$f_T = \left(\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K \right)_+, \quad (2)$$

где $(x)_+ = \max(x, 0)$ и $K > 0$ – фиксированная постоянная (цена страйк).

Напомним некоторые определения, которые понадобятся для решения задачи хеджирования.

Определение 1. *Портфелем (стратегией) назовем согласованный с фильтрацией случайный процесс $\Pi: \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\Pi = (\Pi_t)_{0 \leq t \leq T} = (\beta_t, \gamma_t)_{0 \leq t \leq T}$, где β_t – количество безрисковых активов и γ_t – количество рискованых.*

Стоимость этого портфеля в момент времени t определяется следующим образом:

$$X_t^\Pi = \beta_t B_t + \gamma_t S_t.$$

Определение 2. *Говорят, что для данного $x > 0$ и f_T – платежной функции, самофинансируемая стратегия называется (x, f_T) -хеджем, если*

$$\forall \omega \in \Omega, X_0^\Pi = x, X_T^\Pi \geq f_T \quad \text{п.н.}$$

Определение 3. *Величина $C_0 = \inf \{x > 0: \Pi(x, f_T) \neq \emptyset\}$ называется инвестиционной (справедливой) стоимостью опциона, гарантирующей в момент T получение капитала, не меньшего f_T .*

3. Построение хеджирующей стратегии и вычисление стоимости азиатского опциона

Для того чтобы построить хеджирующую стратегию в случае модели (1) для опциона с платежной функцией (2) применим теорему 3 (см. п. 7) к мартингалу

$$M_t = \mathbf{E}(f_T | F_t^W). \quad (3)$$

Требуется найти согласованный с фильтрацией $(F_t^W)_{0 \leq t \leq T}$ квадратично интегрируемый процесс $(\alpha_t)_{0 \leq t \leq T}$, такой, что для всех $t \in [0, T]$

$$M_t = M_0 + \int_0^t \alpha_s dW_s.$$

Заметим, что в этом случае $M_0 = \mathbf{E}f_T$ определяет стоимость опциона. Тогда стратегия $\Pi = (\beta_t, \gamma_t)_{0 \leq t \leq T}$ будет строиться по следующим формулам:

$$\beta_t = \mathbf{E}f_T + \int_0^t \alpha_s dW_s - \gamma_t S_t, \quad \gamma_t = \alpha_t / \sigma S_t. \quad (4)$$

где
$$\alpha_t = \frac{d}{dt} \langle M, W \rangle_t.$$

В нашем случае

$$M_t = \mathbf{E}(f_T | F_t^W) = \mathbf{E} \left(\left(\frac{1}{T} \int_0^T S_v dv - K \right)_+ | F_t^W \right), \quad (5)$$

Используя формулу Ито [14] для рискового актива $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$ в модели (1) имеем для всех $v \in [0, T]$

$$S_v = S_0 \exp \{ \sigma W_v - \sigma^2 v / 2 \}.$$

При $v \geq t$ имеем, что $S_v = S_t \exp \{ \sigma (W_v - W_t) - \sigma^2 (v - t) / 2 \}$. Это значит, что мы можем представить интеграл в (5) как

$$\frac{1}{T} \int_0^T S_v dv = \frac{\xi_t + S_t \eta_t}{T},$$

где
$$\xi_t = \int_0^t S_v dv, \quad \eta_t = \int_t^T \exp \{ \sigma (W_v - W_t) - \sigma^2 (v - t) / 2 \} dv.$$

Заметим, что ξ_t измерима относительно F_t^W , а η_t не зависит от F_t^W . Следовательно,

$$M_t = G(t, \xi_t, S_t), \quad (6)$$

где
$$G(t, x, y) = \mathbf{E} \left(\frac{x + y \eta_t}{T} - K \right)_+.$$

Теорема 1. Функция $G(t, x, y)$ имеет непрерывные производные

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t, x, y), \quad \frac{\partial}{\partial x} G(t, x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} G(t, x, y), \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} G(t, x, y).$$

Теорема доказана в п. 5.

Поскольку для любого $t > 0$ процесс $(W_{t+v} - W_t)_{v \geq 0}$ является винеровским, то распределение случайной величины η_t совпадает с распределением случайной величины

$$\eta_v^* = \int_0^v \exp\{\sigma W_u - \sigma^2 u/2\} du, \quad (7)$$

где $v = T - t$. Поэтому

$$G(t, x, y) = E \left(\frac{x + y \eta_v^*}{T} - K \right)_+. \quad (8)$$

Принимая во внимание теорему 1 и применяя формулу Ито к функции (8), получаем для $M_t = G(t, \xi_t, S_t)$

$$M_t = M_0 + \int_0^t \left(G'_t(v, \xi_v, S_v) + G'_x(v, \xi_v, S_v) S_v + \frac{\sigma^2 S_v^2}{2} G''_{yy}(v, \xi_v, S_v) \right) dv + \sigma M_t^*, \quad (9)$$

где $M_t^* = \int_0^t G'_y(v, \xi_v, S_v) S_v dW_v$ и $G'_t = \partial G / \partial t$ и другие частные производные аналогично.

Квадратическую характеристику можно вычислить по следующей формуле:

$$\begin{aligned} \langle M, W \rangle_t &= \sigma P - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n E \left(\left(M_{t_j}^* - M_{t_{j-1}}^* \right) (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) \middle| \mathcal{F}_{t_{j-1}} \right) = \\ &= \sigma \langle M^*, W \rangle_t = \sigma \int_0^t G'_y(v, \xi_v, S_v) S_v dv. \end{aligned}$$

Отсюда находим формулу для вычисления коэффициентов мартингального представления (см. п.7, форм. (31)):

$$\alpha_t = \sigma G'_y(t, \xi_t, S_t) S_t. \quad (10)$$

Далее, используя (10) в (4), получаем хеджирующую стратегию

$$(\Pi_t)_{0 \leq t \leq T} = (\beta_t, \gamma_t)_{0 \leq t \leq T}.$$

4. Вероятностные свойства случайной величины η_v^*

Для изучения функции (8) нам потребуется исследовать распределение случайной величины (7). Для этого введем сначала броуновский мост.

Определение 4. Выходящий из нуля и приходящий в a броуновский мост $(B_t^a)_{0 \leq t \leq T}$ — это гауссовский процесс, такой, что

$$B_t^a = W_t - \frac{t}{T} W_T + \frac{t}{T} a, \quad \text{где } a \in \mathbb{R} \text{ произвольная константа.}$$

С помощью этого процесса вычисляют условные распределения при фиксированном конечном значении винеровского процесса, т.е. для любой функции $L: C[0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ и для любого борелевского множества Γ

$$P(L((W_t)_{0 \leq t \leq T}) \in \Gamma \mid W_t = a) = P(L(B_t^a)_{0 \leq t \leq T} \in \Gamma).$$

Предложение 1. Для любого $0 \leq t < T$ случайная величина η_v^* имеет плотность.

Доказательство. Пусть Q – некоторая ограниченная функция $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. В нашем случае

$$\mathbf{E}Q(\eta_v^*) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(Q(\eta_v^*) | W_T)) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{E}(Q(\eta_v^*) | W_T = a) \varphi(a) da = \mathbf{E} \int_{\mathbb{R}} (Q(F(t, a)) \varphi(a) da,$$

где
$$F(t, a) = \int_0^v \exp\{\sigma \tilde{B}_u + \sigma_1 u a\} du, \quad \sigma_1 = \frac{\sigma}{T}, \quad \tilde{B}_u = W_u - \frac{u}{T} W_T - \frac{\sigma^2 u}{2}.$$

Далее сделаем замену переменной $z = F(t, a)$, т.е. введем функцию $a = a(t, z)$ как

$$z = F(t, a(t, z)). \quad (11)$$

Отсюда получаем, что

$$a'_z(t, z) = \frac{1}{K(t, a(t, z))},$$

где
$$K(t, a) = F'_a(t, a) = \sigma_1 \int_0^v u \exp\{\sigma \tilde{B}_u + \sigma_1 u a\} du. \quad (12)$$

Тогда
$$\mathbf{E}Q(\eta_v^*) = \int_0^\infty Q(z) q(t, z) dz,$$

где
$$q(t, z) = \mathbf{E} \frac{\varphi(a)}{K(t, a)}, \quad \varphi(\cdot) \sim N(0, T).$$

Таким образом, плотность для случайной величины η_v^* имеет вид

$$q(t, z) = \mathbf{E}L(t, a(t, z)), \quad L(t, a) = \frac{\varphi(a)}{K(t, a)}. \quad (13)$$

Предложение 1 доказано.

Плотность $q(t, z)$ обладает следующим свойством.

Предложение 2. Пусть $q(t, z)$ – плотность случайной величины

$$\eta_v^* = \int_0^v \exp\{\sigma W_u - \sigma^2 u / 2\} du,$$

определенная в (12). Тогда для любых $z > 0$ и $0 \leq t \leq T_1 < T$ существует непрерывная производная $\frac{\partial q}{\partial t}$, такая, что для $0 \leq z \leq 2(\max(1, T))^2 := z_0$

$$\sup_{0 \leq t \leq T_1} \left| \frac{\partial}{\partial t} q(t, z) \right| \leq c_1, \quad (14)$$

где c_1 и ε положительные константы, а для $z > z_0$

$$\sup_{0 \leq t \leq T_1} \left| \frac{\partial}{\partial t} q(t, z) \right| \leq c_1 \exp\{-\varepsilon(\ln z)^2\}. \quad (15)$$

Доказательство. Заметим, что

$$\frac{\partial L(t, a)}{\partial t} = \dot{L}_a(t, a) a'_t + \dot{L}_t(t, a),$$

где $a = a(t, z)$. Принимая во внимание (11), получаем выражения

$$\dot{L}_a(t, a) = \frac{\varphi'(a)}{K(t, a)} - \frac{\varphi(a) K'_a(t, a)}{K^2(t, a)}, \quad \dot{L}_t(t, a) = -\frac{\varphi(a)}{K^2(t, a)} K'_t(t, a),$$

$$\text{и} \quad a'_t(t, z) = -\frac{F'_t(t, a)}{K(t, a)}, \quad K'_a(t, a) = \sigma_1^2 \int_0^v u^2 \exp\{\sigma \tilde{B}_u + \sigma_1 u a\} du, \quad (16)$$

Тогда имеем

$$\frac{\partial L(t, a)}{\partial t} = \frac{F'_t(t, a)}{K^2(t, a)} \left(\frac{\varphi(a) K'_a(t, a)}{K(t, a)} - \varphi'(a) \right) - \frac{\varphi(a) K'_t(t, a)}{K^2(t, a)}. \quad (17)$$

Проводя необходимые вычисления, получим следующую оценку:

$$\left| \frac{\partial L(t, a)}{\partial t} \right| \leq \frac{\varphi(a) \exp\{\sigma \tilde{B}_{T-t} + \sigma_1 a(T-t)\} \left(\frac{2(T-t)}{\sigma_1 \sqrt{2\pi T}} + \frac{|a|}{\sigma_1^2 \sqrt{2\pi T^3}} \right)}{\left(\int_0^v u \exp\{\sigma \tilde{B}_u + \sigma_1 u a\} du \right)^2}.$$

Заметим, что для $0 \leq u \leq T$

$$-2W_T^* - \frac{\sigma^2}{2} T \leq \tilde{B}_u \leq 2W_T^*,$$

где $W_T^* = \sup_{0 \leq t \leq T} |W_t|$. Следовательно, для некоторых констант справедлива оценка

$$\left| \frac{\partial L(t, a)}{\partial t} \right| \leq c_1 \exp\{c W_T^*\} \exp\left\{b |a| - \frac{a^2}{T}\right\} (d + g |a|), \quad (18)$$

$$\text{где} \quad c_1 = \frac{4 \exp\left\{-T \frac{\sigma^3}{2}\right\}}{(T - T_1)^4}, \quad c = \sigma(5 + T), \quad b = (T - 2)\sigma_1, \quad d = \frac{2T}{\sigma_1}, \quad g = \frac{1}{\sigma_1^2 T}.$$

Поэтому для некоторых $c^* > 0$ и $\varepsilon_1 > 0$

$$\left| \frac{\partial L(t, a)}{\partial t} \right| \leq c^* \exp\{c W_T^*\} e^{-\varepsilon_1 a^2}. \quad (19)$$

Положим $\tilde{L}(t, z) = L(t, a(t, z))$. Следовательно, в силу леммы 1

$$\mathbf{E} \sup_{z \in \mathbb{R}_+} \sup_{0 \leq t \leq T_1} \left| \frac{\partial \tilde{L}(t, z)}{\partial t} \right| \leq c_3 \quad (20)$$

Покажем теперь, что

$$q_t(t, z) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\tilde{L}(t, z)) = \mathbf{E} \frac{\partial \tilde{L}(t, z)}{\partial t}. \quad (21)$$

Пусть
$$\xi_{\Delta}(z) = \frac{\tilde{L}(t+\Delta, z) - \tilde{L}(t, z)}{\Delta}.$$

Тогда
$$\frac{q(t+\Delta, z) - q(t, z)}{\Delta} = \mathbf{E} \xi_{\Delta}(z).$$

По определению производной получаем

$$\xi_{\Delta}(z) \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \tilde{L}(t, z) \quad \text{п.н.}$$

Кроме того, для любого $\Delta > 0$

$$|\xi_{\Delta}(z)| = \left| \frac{1}{\Delta} \int_t^{t+\Delta} \frac{\partial}{\partial v} \tilde{L}(v, z) dv \right| \leq \sup_{z \in \mathbb{R}_+} \sup_{0 \leq t \leq T_1} \left| \frac{\partial}{\partial t} \tilde{L}(t, z) \right| := \xi^*(z).$$

Из (20) получаем, что

$$\mathbf{E} \xi^*(z) < \infty.$$

Следовательно, по теореме Лебега о предельном переходе

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \mathbf{E} \xi_{\Delta} = \mathbf{E} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \xi_{\Delta} = \mathbf{E} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{L}(t, z),$$

т.е. получаем (21). Далее из (19) находим, что

$$|q'_t(t, z)| \leq \mathbf{E} \left| \frac{\partial}{\partial t} \tilde{L}(t, z) \right| \leq c^* \mathbf{E} e^{c W_T^* - \varepsilon_1 a^2}. \quad (22)$$

Если $0 \leq z \leq z_0$, то в силу леммы 1 имеем

$$|q'_t(t, z)| \leq c^* \mathbf{E} e^{c W_T^*} < \infty,$$

и получаем (14).

Пусть теперь $z > z_0$. Тогда из (11) вытекает, что

$$\begin{aligned} e^{\ln z} &= \int_0^v \exp \{ \sigma \tilde{B}_u + \sigma_1 u a \} du \leq T \exp \{ 2\sigma W_T^* + \sigma_1 T |a| \} = \\ &= \exp \{ 2\sigma W_T^* + \sigma_1 T |a| + \ln \max(1, T) \}. \end{aligned} \quad (23)$$

Следовательно,

$$\ln z \leq 2\sigma W_T^* + \sigma_1 T |a(t, z)| + \ln \max(1, T).$$

Определим множество

$$\Gamma = \left\{ W_T^* \leq \frac{\ln z}{4\sigma} \right\}.$$

Из (23) вытекает, что на этом множестве

$$|a(t, z)| \geq l(z),$$

где

$$l(z) = \left(\frac{\ln z}{2} - \ln \max(1, T) \right) \frac{1}{\sigma_1 T} = \frac{1}{2\sigma} \ln \frac{z}{(\max(1, T))^2} > 0.$$

Поэтому, в силу леммы 1

$$\mathbf{E} \exp \{cW_T^* - \varepsilon_1 a^2\} = \mathbf{E} \exp \{cW_T^* - \varepsilon_1 a^2\} \chi_{\Gamma} + \mathbf{E} \exp \{cW_T^* - \varepsilon_1 a^2\} \chi_{\Gamma^c} \leq c_1 + J,$$

где $J = \mathbf{E} e^{cW_T^*} \chi_{\Gamma^c}$. По неравенству Коши – Буняковского, а затем по лемме 1 оценим

$$\mathbf{E} e^{cW_T^*} \chi_{\Gamma^c} \leq \left(\mathbf{E} e^{cW_T^*} \right)^{1/2} \left(\mathbf{E} \chi_{\Gamma^c} \right)^{1/2} \leq c \left[\mathbf{P} \left(W_T^* > \frac{\ln z}{4\sigma} \right) \right]^{1/2}.$$

Вероятность оценим по неравенству Чебышева, т.е. для $0 < \varepsilon < \frac{1}{2T}$

$$\mathbf{P} \left(W_T^* > \frac{\ln z}{4\sigma} \right) = \mathbf{P} \left(e^{\varepsilon (W_T^*)^2} > e^{\varepsilon \frac{(\ln z)^2}{16\sigma^2}} \right) \leq e^{-\varepsilon \frac{(\ln z)^2}{16\sigma^2}} \mathbf{E} e^{\varepsilon (W_T^*)^2} \leq c e^{-\varepsilon \frac{(\ln z)^2}{16\sigma^2}}.$$

Последнее неравенство справедливо в силу леммы 2. Таким образом, имеем

$$J \leq c_2 \exp \left\{ -\frac{\varepsilon}{32\sigma^2} (\ln z)^2 \right\} = c_2 \exp \left\{ -\varepsilon_2 (\ln z)^2 \right\}.$$

Заметим, что $\exists \varepsilon_2 > 0$ такое, что

$$l(z) \geq \varepsilon_2 (\ln z).$$

Следовательно

$$\mathbf{E} \exp \{cW_T^* - \varepsilon_1 a^2\} \leq c_1 e^{-\varepsilon_1 c_2^2 (\ln z)^2} + c_2 e^{-\varepsilon_2 (\ln z)^2} \leq c \exp \left\{ -\varepsilon (\ln z)^2 \right\}.$$

Отметим, что функция $L'_t(t, a)$ непрерывна, поскольку является суперпозицией непрерывных функций. Очевидно, что $F'_t(t, a)$, $K'_t(t, a)$, $\varphi'_a(a)$ и $\varphi(a)$ непрерывны в силу их определения. Из (12) и (16) непосредственно следует их непрерывность. Следовательно, функция $q'_t(t, z)$ является непрерывной по t и по z . Аналогично устанавливается непрерывность $q(t, z)$ по z .

Предложение 2 доказано.

5. Доказательство теоремы 1

Запишем функцию $G(t, x, y)$ в следующем виде:

$$G(t, x, y) = \frac{1}{T} \int_0^\infty (x + yz - K_1)_+ q(t, z) dz, \quad K_1 = KT. \quad (24)$$

Если $0 \leq x \leq K_1$, то

$$G(t, x, y) = \frac{1}{T} \int_{b(x, y)}^\infty (x + yz - K_1) q(t, z) dz, \quad b(x, y) = \frac{K_1 - x}{y}.$$

Тогда

$$G'_x(t, x, y) = -\frac{1}{T} (x + yb(x, y) - K_1) q(t, b(x, y)) b'_x(x, y) + \frac{1}{T} \int_{b(x, y)}^\infty q(t, z) dz.$$

Первое слагаемое обращается в ноль после подстановки $b(x, y) = \frac{K_1 - x}{y}$, поэтому имеем

$$G'_x(t, x, y) = \frac{1}{T} \int_{b(x, y)}^{\infty} q(t, z) dz, \quad G'_y(t, x, y) = \frac{1}{T} \int_{b(x, y)}^{\infty} zq(t, z) dz, \\ G''_{yy}(t, x, y) = \frac{1}{T} b(x, y) q(t, b(x, y)) \frac{(K_1 - x)}{y^2}.$$

Если $x \geq K_1$, то

$$G'_x(t, x, y) = \frac{1}{T}, \quad G'_y(t, x, y) = \frac{1}{T} \int_0^{\infty} zq(t, z) dz, \quad G''_{yy}(t, x, y) = 0.$$

Очевидно, что функции $G'_x(t, x, y), G'_y(t, x, y), G''_{yy}(t, x, y)$ являются непрерывными.

Рассмотрим производную $G'_t(t, x, y)$.

$$\frac{G(t + \Delta, x, y) - G(t, x, y)}{\Delta} = \frac{1}{T} \int_0^{\infty} (x + yz - K_1)_+ \eta_{\Delta}(z) dz,$$

где
$$\eta_{\Delta}(z) = \frac{q(t + \Delta, z) - q(t, z)}{\Delta} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} q(t, z).$$

Заметим, что с учетом предложения 2

$$|\eta_{\Delta}(z)| = \frac{1}{\Delta} \left| \int_t^{t+\Delta} \frac{\partial q(u, z)}{\partial t} du \right| \leq \frac{1}{\Delta} \int_t^{t+\Delta} \left| \frac{\partial q(u, z)}{\partial t} \right| du \leq b(z),$$

где
$$b(z) = c_1 \chi_{\{z \leq z_0\}} + c_1 \exp\{-\varepsilon (\ln z)^2\} \chi_{\{z > z_0\}}.$$

Тогда

$$\int_0^{\infty} (x + yz - K_1)_+ b(z) dz \leq \int_0^{\infty} (|x| + |y| |z| + |K_1|) b(z) dz < \infty.$$

Следовательно, по теореме Лебега

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t, x, y) = \frac{1}{T} \int_0^{\infty} (x + yz - K_1)_+ \lim_{\Delta \rightarrow 0} \eta_{\Delta}(z) dz = \frac{1}{T} \int_0^{\infty} (x + yz - K_1)_+ \frac{\partial}{\partial t} q(t, z) dz.$$

Из предложения 2 следует непрерывность производной $\frac{\partial}{\partial t} G(t, x, y)$. Теорема доказана.

6. Численное моделирование полученных результатов

Начнем с вычисления стоимости опциона, которая, как было показано ранее, равна

$$C_0 = Ef_T = E\left(\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K\right)_+ = E\left(\frac{1}{T} \int_0^T S_0 \exp\{\sigma W_t - t\sigma^2/2\} dt - K\right)_+.$$

Математическое ожидание будем вычислять по методу Монте-Карло, тогда получим выражение

$$E\left(\frac{1}{T} \int_0^T S_0 \exp\{\sigma W_t - t\sigma^2/2\} dt - K\right)_+ = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \left(\frac{1}{T} \int_0^T S_0 \exp\{\sigma W_t - t\sigma^2/2\} dt - K\right)_+.$$

Таким образом, чтобы вычислить это математическое ожидание, моделируем L раз случайную функцию $\left(\frac{1}{T} \int_0^T S_0 \exp\{\sigma W_t - t\sigma^2/2\} dt - K\right)_+.$

Остановимся подробнее на вычислении интеграла

$$\frac{1}{T} \int_0^T S_0 \exp\{\sigma W_t - t\sigma^2/2\} dt. \quad (25)$$

Для этого воспользуемся квадратурной формулой прямоугольников. Чтобы применить эту формулу, сначала указываем число разбиений N и шаг по времени

$h = \frac{T}{N}$, то есть дискретизируем время. Затем моделируем винеровский процесс следующим образом. Моделируем N независимых гауссовских случайных величин $(\theta_k)_{1 \leq k \leq N}$ с параметрами $(0,1)$. Так как приращения винеровского процесса также распределены нормально с нулевым средним и дисперсией, равной длине приращения, то в рассматриваемом случае – это шаг h . Значит, на каждом шаге винеровский процесс определяется выражением вида

$$W_k(t) = W_{k-1}(t) + \frac{t}{N} \cdot \theta_k, \quad 1 \leq k \leq N. \quad (26)$$

Тогда интеграл (25) будет равен

$$\frac{S_0}{T} \int_0^T \exp\{\sigma W_t - t\sigma^2/2\} dt = \frac{S_0}{T} \sum_{k=1}^N h \exp\{\sigma W_k(T) - t_k \sigma^2/2\}, \quad 1 \leq k \leq N. \quad (27)$$

Следовательно, стоимость опциона вычисляется по формуле

$$C_0 = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \left(\frac{S_0}{T} \sum_{k=1}^N h \exp\{\sigma W_k(T) - t_k \sigma^2/2\} \right)_+.$$

Для построения хеджирующей стратегии (формирования портфеля) необходимо вычислить коэффициенты $(\alpha_t)_{0 \leq t \leq T}$ по формуле (10). Сначала вычислим функцию $G(t, x, y)$, для этого моделируем L случайных величин $\widetilde{\eta}_t^j$, которые определяются формулой (7). Получаем вычислительную формулу

$$\widetilde{\eta}_t = \frac{T-t}{N} \sum_{k=1}^N \exp\left\{\sigma W_k(T-t) - \sigma^2 \frac{(T-t)k}{2N}\right\}. \quad (28)$$

Тогда для функции $G(t, x, y)$ получаем выражение

$$G(t, x, y) = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \left(x + y \widetilde{\eta}_t^j - K \right)_+ . \quad (29)$$

Для вычисления частной производной $G'_y(t, x, y)$ воспользуемся следующей формулой:

$$\frac{\partial}{\partial y} G(t, x, y) = \frac{G(t, x, y + \delta) - G(t, x, y)}{\delta}, \quad \delta = 0,001. \quad (30)$$

Прежде чем приступить к вычислению коэффициентов $(\alpha_t)_{0 \leq t \leq T}$, запишем расчетные формулы для $(\xi_t)_{0 \leq t \leq T}$ и $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$

$$\xi_t = \frac{S_0 t}{TN} \sum_{k=1}^N \exp \left\{ \sigma W_k(t) - \sigma^2 \frac{tk}{2N} \right\} \text{ и } S_t = S_0 \exp \left\{ \sigma W_t - \sigma^2 \frac{t}{2} \right\}.$$

Далее применяя формулы (29) и (30) уже к функции $G(t, \xi_t, S_t)$, находим коэффициенты $(\alpha_t)_{0 \leq t \leq T}$ и строим стратегию $\Pi = (\beta_t, \gamma_t)_{0 \leq t \leq T}$ по формулам (4).

Численное моделирование проводится в среде SciLab. По полученным результатам построен график.

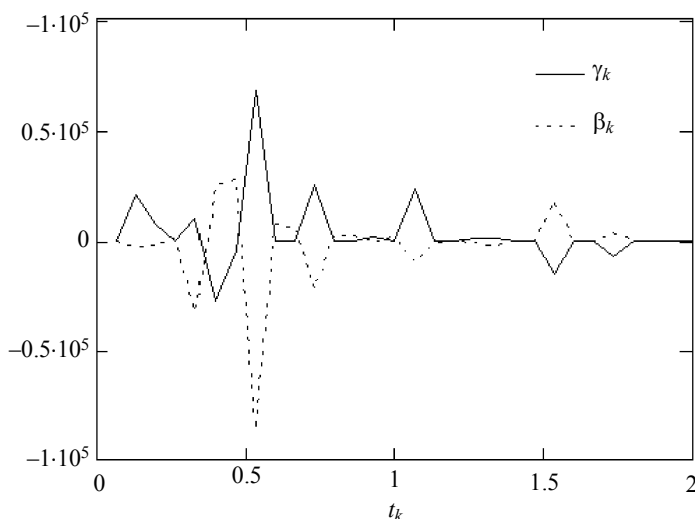


Рис. 1. График хеджирующей стратегии $\Pi_t = (\beta_t, \gamma_t)_{0 \leq t \leq 2}$

Fig. 1. Graph of the hedging strategy $\Pi_t = (\beta_t, \gamma_t)_{0 \leq t \leq 2}$

7. Приложение

7.1. Мартингальное представление

Введем в рассмотрение $\mathbf{M}_t$ – класс квадратично интегрируемых мартингалов. Справедлива следующая теорема [14].

Теорема 3 (О представлении квадратично интегрируемых мартингалов). Пусть $X = (x_t, F_t^W)_{0 \leq t \leq T} \in \mathbf{M}_t$ и $W = (W_t, F_t^W)_{0 \leq t \leq T}$ – винеровский процесс относительно естественной фильтрации. Предположим, что семейство σ -алгебр $(F_t^W)_{0 \leq t \leq T}$ непрерывно справа. Тогда найдется случайный процесс $(\alpha(t, \omega), F_t^W)_{0 \leq t \leq T}$ с $E \int_0^T \alpha^2(t, \omega) dt < \infty$ такой, что для всех $0 \leq t \leq T$

$$x_t = x_0 + \int_0^t \alpha(s, \omega) dW_s$$

$$\text{и} \quad \langle x, W \rangle_t = \int_0^t \alpha(s, \omega) ds. \quad (31)$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$ – взаимная квадратическая характеристика процессов.

7.2. Экспоненциальные моменты винеровского процесса

Лемма 1. Для любого $N > 0$

$$E \left(\exp \{ NW_T^* \} \right) < \infty. \quad (32)$$

Доказательство. Представим экспоненту в виде ряда Тейлора и получим следующее выражение:

$$E \exp \{ NW_T^* \} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} N^m \frac{E(W_T^*)^m}{m!}. \quad (33)$$

Очевидно, что $E(W_T^*)^m \leq \left(E(W_T^*)^{2m} \right)^{\frac{1}{2}}, \forall m \geq 1$. Далее воспользуемся следующим неравенством (см. [14]):

$$E(\sup X_t)^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p E(X_t)^p,$$

где X_t – неотрицательный субмартингал, $1 < p < \infty$.

Тогда, учитывая, что $W_T \sim N(0, T)$

$$E(W_T^*)^{2m} \leq \left(\frac{2m}{2m-1} \right)^{2m} E(W_T^*)^{2m} \leq c_2^* (2m-1)!! T^m \leq c_2^* 2^m m! T^m, \quad (34)$$

$$\text{где} \quad c_2^* = \sup_{m \geq 1} \left(\frac{2m}{2m-1} \right)^{2m}.$$

Тогда выражение (33) можно оценить следующим образом:

$$1 + \sum_{m=1}^{\infty} N^m \frac{\mathbf{E}(W_T^*)^m}{m!} \leq 1 + \sum_{m=1}^{\infty} N^m \frac{\left(\mathbf{E}(W_T^*)^{2m}\right)^{\frac{1}{2}}}{m!} \leq 1 + \sum_{m=1}^{\infty} N^m \frac{(e(2T)^m m!)^{\frac{1}{2}}}{m!} =$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m!}} e^{\frac{1}{2}} (2T)^{\frac{m}{2}} N^m < \infty.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Для любого $0 < \varepsilon < \frac{1}{2T}$

$$\mathbf{E}\left(\exp\left\{\varepsilon(W_T^*)^2\right\}\right) < \infty.$$

Доказательство. Принимая во внимание (34), имеем

$$\mathbf{E} \exp\left\{\varepsilon(W_T^*)^2\right\} 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \frac{\mathbf{E}(W_T^*)^{2m}}{m!} \leq 1 + c_2^* \sum_{m=1}^{\infty} (2\varepsilon T)^m < \infty.$$

Лемма 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bachelier L.* Théorie de la speculation // Ann. École Norm. Sup. 1900. V. 17. P. 21–86 (Reprinted in Cootner, ed., 1967. The Random Character of Stock Market Prices. MIT Press, Cambridge, Mass., p. 17–78).
2. *Black F.* The pricing of options and corporate liabilities // J. of Political Economy. 1973. No. 81(3).
3. *Merton R.* Theory of rational option pricing // Bell J. Economics and Management Science. 1973. No. 4(1).
4. *Cox J.C., Ross R.A., Rubinstein M.* Option pricing: a simplified approach // J. Financial Economics. 1979. V. 7 (Sept). P. 229–263.
5. *Cox J.C., Rubinstein M.* Options Markets. Englewood Cliffs N.J., Prentice – Hall, 1985. 498 p.
6. *Follmer H.* Probabilistic aspects of options. Preprint. Helsinki Univ., 1990, January. 34 p.
7. *Ширяев А.Н., Кабанов Ю.М., Крамков Д.О., Мельников А.В.* К теории расчетов опционов Европейского и Американского типов. I. Дискретное время // Теория вероятностей и её применение. 1994. Т. 39. Вып. 1. С. 23–79.
8. *Ширяев А.Н., Кабанов Ю.М., Крамков Д.О., Мельников А.В.* К теории расчетов опционов Европейского и Американского типов. II. Непрерывное время // Теория вероятностей и её применение. 1994. Т. 39. Вып. 1. С. 80–129.
9. *Harrison J.M., Kreps D.M.* Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets // Journal of Economic Theory. 1979. V. 20. P. 381–408.
10. *Harrison J.M., Pliska S.R.* Martingales, stochastic integrals and continuous trading // Stoch. Processes Appl. 1981. V. 11. No. 3. P. 215–260.
11. *Karatzas I., Shreve S.E.* Brownian Motion and Stochastic Calculus. Springer – Verlag, 1988. 470 p.
12. *Pergamenchikov S.* Limit theorem for Leland’s strategy // The Annals of Appl. Prob. 2003. V. 13. No. 3. P. 1099–1118.
13. *Pergamenchikov S., Berdjane B.* Optimal consumption and investment for markets with random coefficient // Finance and Stochastic. Springer, 2013. V. 17. P. 419–446.
14. *Литцер П.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1979.
15. *Janvresse E., Pergamenchikov S., Raynaud de Fitte P.* Mathematiques pour la finance et l’assurance. Rouen: l’Univ. de Rouen, 2008.

Статья поступила 17.05.2017 г.

Shishkova A.A. (2018) CALCULATION OF ASIAN OPTIONS FOR THE BLACK-SCHOLES MODEL. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 51. pp. 48–63

DOI 10.17223/19988621/51/5

Keywords: martingale, stochastic integral, financial strategy, Wiener process, hedging, option value.

AMS Mathematical Subject Classification: 60H10, 60G44, 60J65

The paper deals with one of fundamental problems of financial mathematics, namely, allocation of resources between financial assets to ensure sufficient payments.

When constructing mathematical models of the dynamics of financial indicators, various classes of random processes with discrete and continuous time are used. Therefore, the theory of martingales is a natural and useful mathematical tool in financial mathematics and engineering. In this paper, the Black-Scholes model is considered in continuous time with two financial assets

$$\begin{cases} B_t = 1, \\ dS_t = \sigma S_t dW_t, S_0 > 0. \end{cases}$$

The representation Theorem 1 of square integrable martingales is studied to calculate coefficients of the martingale representation. These coefficients allow further redistribution of the securities portfolio to obtain the greatest profit.

Theorem 1. Let $X = (x_t, F_t)_{0 \leq t \leq T} \in M_t$ and $W = (W_t, F_t)_{0 \leq t \leq T}$ be a Wiener process with respect to the natural filtration. Assume that a family of σ -algebras $(F_t)_{0 \leq t \leq T}$ is right continuous. Then there exists a stochastic process $(\alpha(t, \omega), F_t)_{0 \leq t \leq T}$ with $E \int_0^T \alpha^2(t, \omega) dt < \infty$ such that for all $0 \leq t \leq T$,

$$x_t = x_0 + \int_0^t \alpha(s, \omega) dW_s. \quad (1)$$

$$\langle x, W \rangle_t = \int_0^t \alpha(s, \omega) ds. \quad (2)$$

Here, $\langle \bullet, \bullet \rangle_t$ is a mutual quadratic characteristic of processes.

The practical result of the research is the solution of the problem of constructing a hedging strategy. The option was used as the main financial instrument.

To construct a hedging strategy in the case of the model under consideration, we apply Theorem 1 to the martingale

$$M_t = E(f_T | F_t),$$

where $f_T = \left(\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K \right)_+$ is the payment function.

We found a quadratically integrable process $(\alpha_t)_{0 \leq t \leq T}$ adapted with the filtration $(F_t)_{0 \leq t \leq T}$ such that for all $t \in [0, T]$

$$M_t = M_0 + \int_0^t \alpha_s dW_s.$$

The strategy $\Pi = (\beta_t, \gamma_t)$ is calculated by the formulas

$$\beta_t = E f_t + \int_0^t \alpha_s dW_s - \gamma_t S_t, \quad \gamma_t = \alpha_t / \sigma S_t.$$

SHISHKOVA Alena Andreevna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: Shishkova@sibmail.com

REFERENCES

1. Bachelier L. (1900) Théorie de la speculation. *Ann. École Norm. Sup.* 17. pp. 21–86 (Reprinted in Cootner, ed., 1967. The Random Character of Stock Market Prices. MIT Press, Cambridge, Mass. pp. 17–78).
2. Black F. (1973) The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*. 81(3).
3. Merton R. (1973) Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*. 4(1).
4. Cox J.C., Ross R.A., Rubinstein M. (1979) Option pricing: a simplified approach. *Journal of Financial Economics*. 7. pp. 229–263.
5. Cox J.C., Rubinstein M. (1985) *Options Markets*. Englewood Cliffs N.J, Prentice – Hall.
6. Follmer H. (1990) Probabilistic aspects of options. *Preprint. Helsinki Univ.* January. 34 p.
7. Shiryaev A.N., Kabanov Yu.M., Kramkov D.O. and Mel'nikov A.V.. (1995) Toward the theory of pricing of options of both European and American Types. I Discrete time. *Theory Probab. Appl.* 39(1). pp.14–60. DOI 10.1137/1139002.
8. Shiryaev A.N., Kabanov Yu.M., Kramkov D.O. and Mel'nikov A.V. (1995) Toward the theory of pricing of options of both European and American Types. II Continuous time. *Theory Probab. Appl.* 39(1). pp.61–102. DOI 10.1127/1139003.
9. Harrison J.M., Kreps D.M. (1979) Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic Theory*. 20. pp. 381–408.
10. Harrison J.M., Pliska S.R.(1981) Martingales, stochastic integrals and continuous trading. *Stoch. Processes Appl.* 11(3). pp. 215–260.
11. Karatzas I., Shreve S.E. (1988) *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer – Verlag.
12. Pergamenchtchikov S. (2003) Limit theorem for Leland's strategy. *The Annals of Appl. Prob.* 13(3). pp.1099–1118.
13. Pergamenchtchikov S., Berdjane B. (2013) Optimal consumption and investment for markets with random coefficient. *Finance and Stochastic*. 17. pp. 419–446. DOI 10.1007/s00780.
14. Liptser R.S. and Shiryaev A.N. (2001) *Statistics of random processes*. 2nd rev. and exp. ed. Springer – Verlag, Berlin.
15. Janvresse E., Pergamenchtchikov S., Raynaud P. de Fitte (2008) *Mathématiques pour la finance et l'assurance*. Rouen: l'Univ. de Rouen.

МЕХАНИКА

УДК 620.22-419.8:669.295:536

DOI 10.17223/19988621/51/6

М.А. Анисимова, А.Г. Князева, И.Б. Севостьянов

ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНЫХ ТЕПЛОВЫХ СВОЙСТВ
КОМПОЗИТОВ НА ОСНОВЕ ТИТАНА¹

Дана оценка эффективных свойств композитов на основе титана. В качестве наполнителей выбраны частицы TiC , Ti_5Si_3 и TiB_2 . Для расчета использовался метод гомогенизации Максвелла в терминах тензоров вклада. Проанализировано возможное изменение эффективной теплопроводности и эффективного коэффициента теплового расширения композитов при увеличении объемной доли включений. Проведено сравнение результатов с экспериментальными данными.

Ключевые слова: эффективные свойства, композит на основе титана, теплопроводность, коэффициент теплового расширения, тензор вклада, метод гомогенизации Максвелла.

В последнее время научный интерес к композитам на основе титана увеличился. Сегодня титан и его сплавы используются в аэрокосмической промышленности, архитектуре, химической обработке, медицине, энергетике, морской сфере, спорте, отдыхе и транспорте. Это широкое применение объясняется его уникальными свойствами, такими, как высокая прочность, низкая плотность, хорошие высокотемпературные свойства, биосовместимость и благоприятная коррозионная стойкость [1]. В то же время основными недостатками этого материала являются отсутствие износостойкости и восприимчивость к истиранию, что создает проблемы на некоторых этапах его изготовления и в некоторых технологических применениях [2]. Для улучшения поверхностных свойств титана и титановых сплавов широко используются различные виды модификации поверхностей. Среди них нанесение керамических или интерметаллических армированных композиционных покрытий с металлической матрицей. Например, композитное покрытие с включениями TiC , нанесенное на титановую подложку, значительно увеличивает сопротивление износу и химическую стабильность [3, 4]. Карбид TiC и борид TiB титана привлекли интерес благодаря своей превосходной термической стабильности и коэффициенту теплового расширения (КТР), близкому к КТР титановой матрицы [5]. Частицы Ti_5Si_3 также могут быть использованы для эффективного повышения прочности и пластичности композита на основе титана [6]. Подобные покрытия создают, например, электронно-лучевой наплавкой при добавлении в наплавочные смеси композитных порошков, синтезированных горением [7]. Существует много исследований механических свойств и структур таких композитов, например в работах [4–9]. Модификация поверхности и/или нанесе-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке фонда РНФ, грант № 17-19-01425.

ние покрытий оказывают влияние и на термические свойства полученного композита, которые также важны для работы в экстремальных условиях. Тем не менее целенаправленных исследований коэффициента теплопроводности и КТР таких композитов явно недостаточно.

В настоящей работе рассматриваются композиты на основе титана с добавлением карбидов, боридов и силицидов титана в предположении идеального контакта между частицами и матрицей. Исследуются зависимости коэффициента теплопроводности (ТП) и коэффициента теплового расширения композитов от концентрации включений. Расчет осуществлен на основе схемы усреднения Максвелла в терминах тензоров вклада [10].

Микроструктура и свойства

При расчете эффективных тепловых свойств композит рассматриваем как металлическую матрицу, содержащую сферические частицы. Типичная микроструктура композита на основе металла, армированного частицами, может быть представлена как изотропная. Свойства, необходимые для расчетов, представлены в таблице.

Свойства материалов [1, 11, 12]

Свойства	Ti	TiC	Ti ₅ Si ₃	TiB ₂
КТР, К ⁻¹	(8.9–10.4)·10 ⁻⁶	7.4·10 ⁻⁶	7.3·10 ⁻⁶	6.4–7·10 ⁻⁶
Объемный модуль, ГПа	103.7	272	110	226
Модуль Юнга, ГПа	112	460	156	529
Коэффициент Пуассона	0.32	0.19	-	0.11
Теплопроводность, Вт/(м·К)	15.5–20	34–39	45.9	60–120

В первом приближении полагаем, что контакт между частицами и матрицей – идеальный, а переходного слоя нет. В литературе для расчета эффективных свойств таких композитов используют разные подходы и приближения. Например, в работе [13] для расчета эффективных свойств композитов с шаровыми включениями используется метод самосогласования, который учитывает взаимодействие отдельно взятого элемента неоднородности с однородной изотропной средой. Расчет эффективного значения модуля объемного сжатия в сравнении с известными моделями Фойгта – Рейсса, и Хашина – Штрикмана представлены в работе [14]. Авторы работ [15, 16] используют многоуровневый подход для прогнозирования эффективных механических свойств композитных материалов, в котором используются три уровня моделирования: уровень компонентов композита (микроуровень), уровень структуры армирования (мезоуровень) и уровень эффективных свойств (макроуровень). В работе [17] рассмотрены несколько вариантов расчета коэффициента теплопроводности, в одном из которых используется классическая теория смеси:

$$k = \frac{k^0 V^0 + k^1 V^1}{V^0 + V^1},$$

где k^1 и k^2 – коэффициенты теплопроводности матрицы и включения объемами V^0 и V^1 соответственно.

В настоящей работе воспользуемся методом [10].

Метод исследования

Тензор вклада

Тензоры вклада свойств используются в рамках метода гомогенизации для описания вклада одной неоднородности в представляющее интерес свойство – это может быть эластичная податливость или жесткость, тепло- или электропроводность, или коэффициент теплового расширения [18].

Рассмотрим однородный матричный материал (с объемными и сдвиговыми модулями упругости K^0 и G^0 , коэффициентом теплового расширения α^0 и теплопроводностью k^0), содержащий неоднородности объема V^1 (с объемными и сдвиговыми модулями K^1 и G^1 , коэффициентом теплового расширения α^1 и теплопроводностью k^1).

В задаче теплопроводности ключевой величиной является тензор вклада проводимости, который дает дополнительный тепловой поток, с одной стороны, создаваемый введением неоднородности в материал, подвергнутый действию, с другой стороны, однородного поля температурного градиента. Предположим, что основной материал объема V с изотропной теплопроводностью k^0 содержит изолированную неоднородность объема V^1 с изотропной теплопроводностью k^1 . Принимая линейную зависимость между градиентом температуры ∇T и вектором потока тепла $\mathbf{q}$ в представительном объеме (обычный закон Фурье) для обоих составляющих, изменение $\mathbf{q}$ в ответ на наличие неоднородности определим по формуле

$$\Delta \mathbf{q} = \frac{V^1}{V} \mathbf{K} (\nabla T),$$

где симметричный тензор второго ранга $\mathbf{K}$ является тензором вклада проводимости неоднородности.

Тензор сферической неоднородности имеет вид

$$\mathbf{K} = 3 \frac{k^0 (k^1 - k^0)}{2k^0 + k^1} \mathbf{I},$$

где $\mathbf{I}$ – единичный тензор второго ранга.

При расчете коэффициента теплового расширения и определении тензора вклада теплового расширения для изотропного материала, рассматриваемого в настоящей работе, более удобно рассчитать общее тепловое расширение по формуле Левина [19]

$$\alpha^{\text{eff}} - \langle \alpha \rangle = (\alpha^0 - \alpha^1) \left(\frac{1}{K^0} - \frac{1}{K^1} \right)^{-1} \left(\frac{1}{K^{\text{eff}}} - \left\langle \frac{1}{K} \right\rangle \right), \quad (1)$$

где угловые скобки означают усреднение по объему. Чтобы вычислить эффективный объемный модуль, нам нужно использовать тензор вклада податливости неоднородности – тензор четвертого ранга $\mathbf{H}$, который описывает дополнительную нагрузку на представительный объем из-за присутствия этой неоднородности:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{V^1}{V} \mathbf{H} : \boldsymbol{\sigma}^\infty$$

или в индексной записи

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \frac{V^1}{V} H_{ijkl} \sigma_{kl}^\infty,$$

где σ_{kl}^{∞} – напряжение вследствие дальнодействующих полей, которое считается равномерным внутри объема V при отсутствии неоднородности. Для сферической неоднородности ее тензор вклада податливости имеет следующий вид [18]:

$$\mathbf{H} = \frac{3(1-\nu^0)}{2} \left[H^G \left(\mathbf{J} - \frac{1}{3} \mathbf{II} \right) + H^K \left(\frac{1}{3} \mathbf{II} \right) \right], \quad (2)$$

где ν^0 – коэффициент Пуассона материала матрицы. Два члена в скобках представляют собой девиаторную и гидростатическую части дополнительной деформации из-за неоднородности:

$$H^G = \frac{5}{G^0} \frac{G^0 - G^1}{2G^1(4-5\nu^0) + G^0(7-5\nu^0)}, \quad H^K = \frac{2}{3K^0} \frac{K^0 - K^1}{K^1(1+\nu^0) + 2K^0(1-2\nu^0)}. \quad (3)$$

Схема гомогенизации Максвелла

Согласно идее Максвелла, мы оцениваем поля в дальних точках двумя разными способами и приравниваем результаты. Во-первых, мы оцениваем это поле как генерируемое гомогенизированной областью Ω , обладающей (пока неизвестными) эффективными свойствами. Во-вторых, мы рассматриваем сумму дальних полей, порожденных всеми индивидуальными неоднородностями внутри области Ω (считаем их невзаимодействующими). Приравнение двух величин дает искомое эффективное свойство [20]. Для задачи о теплопроводности результат имеет следующий вид:

$$\mathbf{k}^{\text{eff}} = \mathbf{k}^0 + \left\{ \left[\frac{1}{V^{\Omega}} \sum_i V_i \mathbf{K}_i \right]^{-1} - \mathbf{P}^{\Omega} \right\}^{-1},$$

где $\mathbf{P}^{\Omega}$ является тензором Хилла второго ранга для области Ω [21]. Для изотропно-го композита получаем

$$P_{ij}^{\Omega} = \frac{1}{3k^0} \delta_{ij}, \quad \frac{1}{V^{\Omega}} \sum_i V_i \mathbf{K}_i = k^0 \mathbf{AI},$$

где параметр A зависит от формы и свойств индивидуальных включений. Таким образом

$$k^{\text{eff}} = k^0 + k^0 \left(\frac{3A}{3-A} \right), \quad A = 3 \frac{(k^1 - k^0)}{2k^0 + k^1} \phi,$$

где ϕ – объемная доля неоднородностей.

При расчете упругих свойств (необходимых для расчета эффективного коэффициента теплового расширения по формуле Левина (1)) дальние поля могут быть выражены в терминах тензора вклада податливости $\mathbf{H}^{\text{eff}}$ области Ω и $\mathbf{H}$ -тензоров отдельных неоднородностей. Приравнявая две величины, получаем

$$\frac{V^{\Omega}}{V} \mathbf{H}^{\text{eff}} = \frac{1}{V} \sum_i V_i \mathbf{H}_i.$$

Правая часть уравнения известна, однако левая часть, помимо того, что зависит от эффективных свойств, также зависит от формы Ω . Это ведет к следующему выра-

жению для общей упругой податливости [20]:

$$\mathbf{S}^{\text{eff}} = \mathbf{S}^0 + \left\{ \left[\frac{1}{V^{\Omega}} \sum_i V_i \mathbf{H}_i \right]^{-1} - \mathbf{Q}^{\Omega} \right\}^{-1},$$

где $\mathbf{Q}^{\Omega}$ является тензором четвертого ранга, который зависит от формы области Ω (Тензор Хилла для области Ω). Для случайного распределения неоднородностей

$$\frac{1}{V^{\Omega}} \sum_i V_i \mathbf{H}_i = B \left(\frac{1}{3} \mathbf{II} \right) + C \left(\mathbf{J} - \frac{1}{3} \mathbf{II} \right),$$

где параметры B и C зависят от формы отдельных включений. Область Ω имеет сферическую форму [22], тогда тензор $\mathbf{Q}^{\Omega}$ имеет вид

$$\mathbf{Q}^{\Omega} = 3K^0 \Psi^K \left(\frac{1}{3} \mathbf{II} \right) + 2G^0 \Psi^G \left(\mathbf{J} - \frac{1}{3} \mathbf{II} \right) \quad (6)$$

где коэффициенты Ψ^K и Ψ^G зависят от коэффициента Пуассона матрицы следующим образом:

$$\Psi^K = \frac{2}{3} \frac{1-2\nu^0}{1-\nu^0}, \quad \Psi^G = \frac{1}{15} \frac{7-5\nu^0}{1-\nu^0}$$

С другой стороны, изотропный эффективный тензор податливости можно определить из равенства

$$\mathbf{S}^{\text{eff}} = \frac{1}{3K^{\text{eff}}} \left(\frac{1}{3} \mathbf{II} \right) + \frac{1}{2G^{\text{eff}}} \left(\mathbf{J} - \frac{1}{3} \mathbf{II} \right), \quad (7)$$

Исходя из равенств (4) и (7), мы приходим к следующему соотношению для эффективного объемного модуля:

$$\frac{K_{\text{eff}}}{K_0} = \frac{1 - B\Psi_K}{1 + B[1 - \Psi_K]}. \quad (8)$$

Найденный таким образом K^{eff} будет использован далее для оценки α^{eff} .

Для определения параметра B воспользуемся формулой для тензора вклада податливости для сферической неоднородности (2):

$$\frac{1}{V^{\Omega}} \sum_i V_i \mathbf{H}_i = \phi \frac{3(1-\nu^0)}{2} \left[H^G \left(\mathbf{J} - \frac{1}{3} \mathbf{II} \right) + H^K \left(\frac{1}{3} \mathbf{II} \right) \right],$$

что приведет выражение для эффективного объемного модуля (8) к следующему виду:

$$K_{\text{eff}} = K_0 \frac{(K^0 + \xi K^1) - \phi(K^0 - K^1)}{(K^0 + \xi K^1) + \phi\xi(K^0 - K^1)}, \quad \xi = \frac{(1+\nu^0)}{2(1-2\nu^0)}$$

Теперь можем вычислить эффективный коэффициент теплового расширения, используя формулу Левина. Ее удобно переписать следующим образом:

$$\alpha^{\text{eff}} = \alpha^0 - (\alpha^0 - \alpha^1) \left(\frac{1}{K^{\text{eff}}} - \frac{1}{K^0} \right) \left(\frac{1}{K^1} - \frac{1}{K^0} \right)^{-1}.$$

Анализ результатов

Рис. 1 иллюстрирует изменение эффективной теплопроводности и коэффициента теплового расширения композита, рассчитанных разными методами, по сравнению со свойствами материала матрицы при увеличении концентрации включений разных видов. Наибольший рост коэффициента теплопроводности дают включения диборида титана. Эти же частицы приводят к максимальному уменьшению КТР.

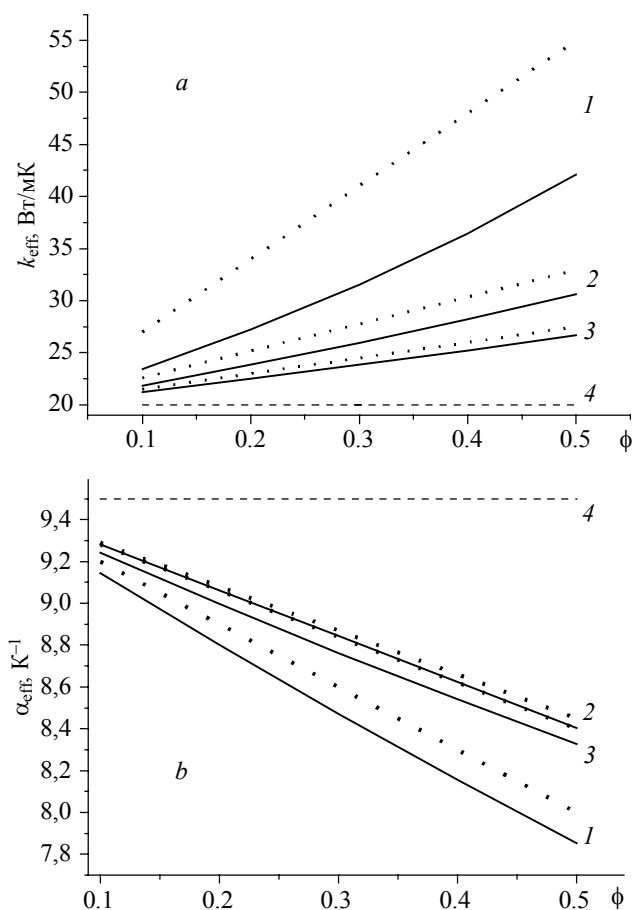


Рис. 1. Зависимость эффективной теплопроводности (а) и эффективного коэффициента теплового расширения (б) от объемной доли частиц 1 – TiB₂, 2 – Ti₅Si₃, 3 – TiC, в сравнении со свойствами чистого титана 4. Сплошными линиями – метод Максвелла, пунктирными – метод смеси

Fig. 1. Dependence of (a) effective thermal conductivity and (b) effective thermal expansion coefficient on the volume fraction of particles 1, TiB₂; 2, Ti₅Si₃; and 3, TiC in comparison with the thermal properties of 4, pure titanium. The solid lines indicate the Maxwell method; the dotted lines, the mixture method

Однако заметно различие между теплопроводностью композитов при добавлении TiC и Ti_5Si_3 при практически одинаковых значениях коэффициента теплового расширения. Сравнение расчета с имеющимися в литературе экспериментальными данными [23] показано на рис. 2.

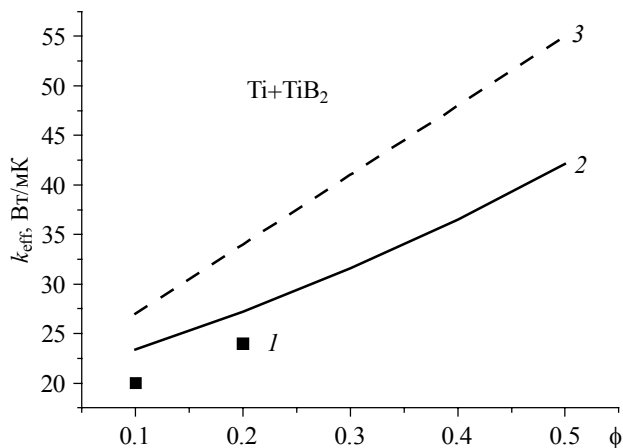


Рис. 2. Зависимость эффективной теплопроводности, рассчитанной по методу Максвелла (2) и по методу смеси (3) от объемной доли частиц в сравнении с экспериментальными данными [23] (1)

Fig. 2. Dependence of the effective thermal conductivity on the volume fraction of particles in comparison with experimental data [23] 1: calculations by the Maxwell method 2 and by the mixture method 3

Однако при синтезе композитов методом СВС их фазовый состав не соответствует тому, что ожидается из диаграмм состояния [7]. Свойства композитов с фазами нестехиометрического состава требуют отдельного рассмотрения.

Заключение

Таким образом, в работе дана оценка эффективных коэффициентов теплопроводности и коэффициентов теплового расширения композитов на основе титана. Показано, что наибольшие изменения в свойствах наблюдаются в композитах с включениями диборида титана. Продемонстрировано, что разные методы дают близкие результаты, и расчеты по методу Максвелла качественно согласуются с экспериментом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Titanium and titanium alloys. Fundamentals and Applications* / ed. C. Leyens, M. Peters. Weinheim: Wiley-VCH Verlag GmbH, 2003. 532 p. ISBN: 3-527-30534-3.
2. Miller P.D., Holladay J.W. Friction and wear properties of titanium // *Wear*. 1958. V. 2. Iss. 2. P. 133–140. DOI: 10.1016/0043-1648(58)90428-9.
3. Rasool G., Mridha S., Stack M.M. Mapping wear mechanisms of TiC/Ti composite coatings // *Wear*. 2015. V. 328–329. P. 498–508. DOI: 10.1016/j.wear.2015.03.022.

4. Monfared A., Kokabi A.H., Asgari S. Microstructural studies and wear assessments of Ti/TiC surface composite coatings on commercial pure Ti produced by titanium cored wires and TIG process // *Materials Chemistry and Physics*. 2013. V. 137. Iss. 3. P. 959–966. DOI: 10.1016/j.matchemphys.2012.11.009.
5. Shufeng Li, Katsuyoshi Kondoh, Hisashi Imai, BiaoChen, Lei Jia, Junko Umeda. Microstructure and mechanical properties of P/M titanium matrix composites reinforced by in-situ synthesized TiC–TiB // *Materials Science & Engineering A*. 2015. V. 628. P. 75–83. DOI: 10.1016/j.msea.2015.01.033.
6. Nuo Li, Chunxiang Cui, Shuangjin Liu, Shuiqing Liu, Sen Cui and Qian Wang. Microstructure and mechanical properties of Ti_6Al_4V alloy modified and reinforced by in situ Ti_5Si_3/Ti composite ribbon inoculants // *Metals*. 2017. V. 7. P. 267. DOI: 10.3390/met7070267.
7. Прибытков Г.А., Кринецын М.Г., Коржова В.В. Исследование продуктов СВ-синтеза в порошковых смесях титана и углерода, содержащих избыток титана // *Перспективные материалы*. 2016. № 5. С. 59–68.
8. Gülsoy H.O., Gunay V., Baykara T. Influence of TiC, TiN and TiC(N) additions on sintering and mechanical properties of injection moulded titanium based metal matrix composites // *Powder Metallurgy*. V. 58. 2015. Iss. 1. P. 30–35. DOI: 10.1179/1743290114Y.0000000096.
9. Krinitcyn M.G., Korosteleva E.N., Pribytkov G.A. Structure of Ti – TiC cathodes // *Proceedings of 2014 International Conference on Mechanical Engineering, Automation and Control Systems, MEACS 2014* [6986941]. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2014. DOI: 10.1109/MEACS.2014.6986941.
10. Anisimova M., Knyazeva A., Sevostyjanov I. Effective thermal properties of an aluminum matrix composite with coated diamond inhomogeneities // *International Journal of Engineering Science*. 2016. V. 106. P. 142–154. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2016.05.010.
11. Ravi Chandran K.S., Panda K.B., Sahay S.S. TiB_w -reinforced Ti composites processing, properties, application prospects and research needs // *J. Miner. Met. Mater. Soc.* 2004. V. 56. P. 42–48.
12. Frommeyer G., Rosenkranz R. Structures and properties of the refractory silicides Ti_5Si_3 and $TiSi_2$ and Ti-Si(Al) eutectic alloys // *Metallic Materials with High Structural Efficiency*. P. 287–308. DOI: 10.1007/1-4020-2112-7_30.
13. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Оценка упругих свойств композита с анизотропными шаровыми включениями // *Наука и Образование: Научное издание*. 2014. № 8. С. 237–255. DOI: 10.7463/0814.0720691.
14. Каракулов В.В., Смолин И.Ю., Скрипняк В.А. Численная методика прогнозирования эффективных механических свойств стохастических композитов при ударно-волновом нагружении с учётом эволюции структуры // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2013. № 4(24). С. 70–77.
15. Советова Ю.В., Сидоренко Ю.Н., Скрипняк В.А. Многоуровневый подход к определению эффективных свойств композита с учетом повреждаемости // *Физ. мезомех.* 2013. Т. 16. № 5. С. 59–65.
16. Советова Ю.В., Сидоренко Ю.Н., Скрипняк В.А. Многоуровневый подход к исследованию влияния объемного соотношения компонентов волокнистого однонаправленного углепластика на его механические характеристики // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2014. № 2(28). С. 77–89.
17. Люшкин П.А., Люшкин Б.А., Матолыгина Н.Ю., Панин С.В. Определение эффективных теплофизических характеристик композиционного материала // *Физ. мезомех.* 2008. Т. 11. № 5. С. 103–110.
18. Sevostianov I., Kachanov M. Connections between elastic and conductive properties of heterogeneous materials // *Advances in Applied Mechanics* 42, (E. van der Giessen and H. Aref, Eds.). Academic Press, 2009. P. 69–252.
19. Levin V.M. On the coefficients of thermal expansion of heterogeneous material // *Mechanics of Solids*. 1967. No. 2. P. 58–61.
20. Sevostianov I. and Giraud A. Generalization of Maxwell homogenization scheme for elastic material containing inhomogeneities of diverse shape // *Int. J. Engineering Science*. 2013. V. 64. P. 23–36. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2012.12.004.

21. Markov K.Z. Elementary micromechanics of heterogeneous media // Markov K.Z., Preziosi L. (Eds.) *Heterogeneous Media: Micromechanics Modeling Methods and Simulations*. Boston: Birkhauser, 2000. P. 1–162.
22. Sevostianov I. On the shape of effective inclusion in the Maxwell homogenization scheme for anisotropic elastic composites // *Mechanics of Materials*. 2014. V. 75. P. 45–59. DOI: 10.1016/j.mechmat.2014.03.003.
23. Turner S.P., Taylor R., Gordon F.H., Clyne T.W. Thermal Properties of Ti-SiC- and Ti-TiB₂- Reinforced Composites // *Int. J. Thermophysics*. V. 17. No. 1. 1996. P. 239–252.

Статья поступила 01.12.2017 г.

Anisimova M.A., Knyazeva A.G., Sevost'yanov I. (2018) EVALUATION OF EFFECTIVE THERMAL PROPERTIES OF TITANIUM-BASED COMPOSITES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 51. pp. 64–74

DOI 10.17223/19988621/51/6

Keywords: effective properties, titanium-based composite, thermal conductivity, coefficient of thermal expansion, contribution tensor, Maxwell's homogenization scheme

Nowadays, composite materials based on titanium are widely used in producing critical parts for aviation and space technology. High operating loads, together with thermal stresses, restrict the reliability of parts and require creating new materials with suitable properties. Variation in properties can be achieved by adding particles of refractory compounds, such as borides, carbides, and silicides. These additions affect not only mechanical, but also thermal properties of the resulting composite, which are important for operation under extreme conditions.

In this work, effective properties of composites based on titanium and reinforced by TiC, Ti₅Si₃, and TiB₂ inclusions were evaluated. The calculations were implemented using Maxwell's homogenization scheme in terms of the contribution tensor of inhomogeneity. The changes in the effective thermal conductivity and effective coefficient of thermal expansion of the composites are analyzed in the case of the increasing volume fraction of inclusions for two computational methods: the Maxwell method and the mixture method. The obtained results are compared with experimental data.

ANISIMOVA Mariya Aleksandrovna (Institute of Strength Physics and Materials Science of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, School of Advanced Manufacturing Technologies, National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: anisimova_mawa@mail.ru

KNYAZEVA Anna Georgievna (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Strength Physics and Materials Science of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, School of Advanced Manufacturing Technologies, National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: anna-knyazeva@mail.ru

SEVOST'YANOV Igor' (Candidate of Physics and Mathematics, Department of Mechanical and Aerospace Engineering, New Mexico State University, USA)

E-mail: igor@nmsu.edu

REFERENCES

1. Leyens C., Peters M. (2003) *Titanium and Titanium Alloys. Fundamentals and Applications*. Weinheim: Wiley-VCH Verlag GmbH.
2. Miller P.D., Holladay J.W. (1958) Friction and wear properties of titanium. *Wear*. 2(2). pp. 133–140. DOI: 10.1016/0043-1648(58)90428-9.
3. Rasool G., Mridha S., Stack M.M. (2015) Mapping wear mechanisms of TiC/Ti composite coatings. *Wear*. 328–329. pp. 498–508. DOI: 10.1016/j.wear.2015.03.022.
4. Monfared A., Kokabi A.H., Asgari S. (2013) Microstructural studies and wear assessments of Ti/TiC surface composite coatings on commercial pure Ti produced by titanium cored wires and TIG process. *Materials Chemistry and Physics*. 137(3). pp. 959–966. DOI: 10.1016/j.matchemphys.2012.11.009.
5. Li Sh., Kondoh K., Imai H., Chen B., Jia L., Umeda J. (2015) Microstructure and mechanical properties of P/M titanium matrix composites reinforced by in-situ synthesized TiC–TiB. *Materials Science and Engineering: A*. 628. pp. 75–83. DOI: 10.1016/j.msea.2015.01.033.
6. Li N., Cui Ch., Liu Sh., Liu Sh., Cui S., Wang Q. (2017) Microstructure and mechanical properties of Ti₆Al₄V alloy modified and reinforced by in situ Ti₅Si₃/Ti composite ribbon inoculants. *Metals*. 7(7). p. 267. DOI: 10.3390/met7070267.
7. Pribytkov G., Korzhova V., Krinitsyn M. (2016) Issledovanie produktov SV-sinteza v poroshkovykh smesyakh titana i ugleroda, sodержashchikh izbytok titana [Composite powders TiC–Ti binder for cladding and spraying of the coatings]. *Perspektivnye materialy*. 5. pp. 59–68.
8. Gülsoy H.O., Gunay V., Baykara T. (2015) Influence of TiC, TiN and TiC(N) additions on sintering and mechanical properties of injection molded titanium based metal matrix composites. *Powder Metallurgy*. 58(1). pp. 30–35. DOI: 10.1179/1743290114Y.0000000096.
9. Krinitsyn M.G., Korosteleva E.N., Pribytkov G.A. (2014). Structure of Ti–TiC cathodes. *Proceedings of 2014 International Conference on Mechanical Engineering, Automation and Control Systems*. DOI: 10.1109/MEACS.2014.6986941.
10. Anisimova M., Knyazeva A., Sevost'yanov I. (2016) Effective thermal properties of an aluminum matrix composite with coated diamond inhomogeneities. *International Journal of Engineering Science*. 106. pp. 142–154. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2016.05.010.
11. Ravi Chandran K.S., Panda K.B., Sahay S.S. (2004) TiB_w-reinforced Ti composites: processing, properties, application prospects, and research needs. *J. Miner. Met. Mater. Soc.* 56(5). pp. 42–48. DOI: 10.1007/s11837-004-0127-1.
12. Frommeyer G., Rosenkranz R. Structures and properties of the refractory silicides Ti₅Si₃ and TiSi₂, and Ti–Si–(Al) eutectic alloys. *Metallic Materials with High Structural Efficiency*. pp. 287–308. DOI: 10.1007/1-4020-2112-7_30.
13. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. (2014) Estimating of the elastic properties of the composite with anisotropic ball inclusions. *Science and Education: Scientific Publication*. 8. pp. 237–255. DOI: 10.7463/0814.0720691.
14. Karakulov V.V., Smolin I.Yu., Skripnyak V.A. (2013) Chislennaya metodika prognozirovaniya effektivnykh mekhanicheskikh svoystv stokhasticheskikh kompozitov pri udarnovolnovom nagruzhении s uchetom evolyutsii struktury [Numerical procedure of forecasting effective mechanical properties of stochastic composites under shock-wave loading with allowance for the structure evolution]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(24). pp. 70–77.
15. Sovetova Yu.V., Sidorenko Yu.N., Skripnyak V.A. (2013) Multiscale approach to estimation of effective properties of a composite with regard to its damaging. *Physical Mesomechanics*. 16(5). pp. 59–65.
16. Sovetova Yu.V., Sidorenko Yu.N., Skripnyak V.A. (2014) Mnogourovnevnyy podkhod k issledovaniyu vliyaniya ob"emnogo sootnosheniya komponentov voloknistogo odnonapravlenного ugleplastika na ego mekhanicheskie kharakteristiki [The multilevel approach to studying the influence of the volumetric ratio in components of unidirectional carbon fiber composite on its mechanical properties]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta*.

- Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 2(28). pp. 77–89
17. Lyukshin P.A., Lyukshin B.A., Matolygina N.Yu., Panin S.V. (2008) Determination of effective thermophysical characteristics of a composite material. *Physical Mesomechanics* 11(5). pp. 103–110.
 18. Sevostianov I., Kachanov M. (2009) Connections between elastic and conductive properties of heterogeneous materials. *Advances in Applied Mechanics.* 42. pp. 69–252. DOI: 10.1016/S0065-2156(08)00002-1.
 19. Levin V.M. (1967) On the coefficients of thermal expansion of heterogeneous material. *Mechanics of Solids.* 2. pp. 58–61.
 20. Sevostianov I., Giraud A. (2013) Generalization of Maxwell homogenization scheme for elastic material containing inhomogeneities of diverse shape. *International Journal of Engineering Science.* 64. pp. 23–36. DOI:10.1016/j.ijengsci.2012.12.004.
 21. Markov K.Z., Preziosi L. (2000) *Heterogeneous Media: Micromechanics Modeling Methods and Simulations.* Boston: Birkhauser.
 22. Sevostianov, I. (2014) On the shape of effective inclusion in the Maxwell homogenization scheme for anisotropic elastic composites. *Mechanics of Materials.* 75. pp. 45–59. DOI: 10.1016/j.mechmat.2014.03.003.
 23. Turner S.P., Taylor R., Gordon F.H., Clyne T.W. (1996) Thermal properties of Ti-SiC- and Ti-TiB₂-reinforced composites. *International Journal of Thermophysics.* 17(1). pp. 239–252. DOI: 10.1007/BF01448226.

УДК 532.59
DOI 10.17223/19988621/51/7

А.Ю. Боталов, С.П. Родионов

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ЖИДКОГО НАПОЛНИТЕЛЯ НА СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО ОДНУ СТЕПЕНЬ СВОБОДЫ

Рассматриваются свободные колебания твердого тела с одной степенью свободы, имеющего полость прямоугольной формы, частично заполненную вязкой жидкостью. В полости располагаются вставки в виде горизонтальных и вертикальных непроницаемых перегородок, и вертикальных решеток. Исследуется влияние движения жидкости в полости на скорость диссипации энергии колебаний твердого тела при различных положениях вставок.

Ключевые слова: емкость с жидкостью, свободные колебания, волновое движение жидкости, обтекание решеток.

Задачи динамики тел с полостями, частично заполненными жидкостью, имеют важное теоретическое и практическое значение. Одним из ключевых приложений данных задач является разработка эффективного демпфера вибраций различных конструкций: высотных зданий при ветровой нагрузке, нефтяных платформ. В качестве такого эффективного демпфера могут использоваться резервуары, частично заполненные жидкостью, с частотой собственных колебаний жидкости, согласующейся с собственной частотой колебания конструкции (TLD – Tuned Liquid Damper). При этом жидкость воздействует на конструкцию с силой, находящейся в противофазе к внешней нагрузке [1]. В настоящее время основное внимание уделяется исследованию демпферов с малым заполнением сосуда, когда становятся применимы уравнения мелкой воды [2, 3]. В результате проведенных численных и экспериментальных исследований были построены полуаналитические модели поведения демпферов, учитывающие влияние обрушения поверхностных волн [2], вставок в сосуде [3, 4], сложной геометрии дна сосуда [5] и др. В частности, было показано, что для случая малого заполнения применение V-образной формы дна [5] и наклонных решеток [4] приводит к интенсификации диссипативных процессов в жидкости и уменьшению амплитуды колебания жидкости.

В случае глубокого заполнения сосуда используют уравнения потенциального течения жидкости [6, 7], однако при наличии решеток и перегородок для моделирования демпферов необходимо использовать полную систему уравнений Навье – Стокса [8].

В данной работе представлены результаты численного исследования влияния прямоугольной полости, частично заполненной жидкостью, на прямолинейные свободные колебания твердого тела, проведенного в нелинейной постановке в случае глубокого заполнения сосуда.

Постановка задачи

Пусть тело имеет полость в форме параллелепипеда, частично заполненную вязкой несжимаемой жидкостью с физическими свойствами воды, и совершает прямолинейные свободные колебания под действием линейной возвращающей силы: $F_k = -Kx_S$. Также на тело действует сила трения: $F_c = -C\dot{x}_S$. Пренебрегая влиянием стенок полости, нормаль которых перпендикулярна плоскости движения тела, рассмотрим задачу в плоской постановке. Полость имеет размеры $L \times H$ и заполнена до глубины h . Массы тела и жидкости на единицу длины равны M и m соответственно (рис. 1).

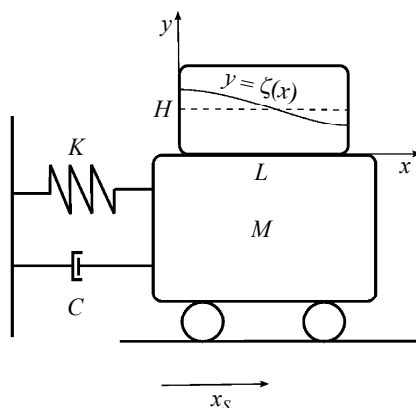


Рис. 1. Схема конструкции
Fig. 1. Schematic construction

Математическая постановка задачи

Уравнения, описывающие динамику системы «тело+жидкость», записанные для случая $\rho = \text{const}$, имеют вид

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0; \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} - \rho \ddot{x}_S \mathbf{i}, \quad (2)$$

$$\ddot{x}_S + 2\delta_S \omega_0 \dot{x}_S + \omega_0^2 x_S = -\frac{\rho}{m+M} \frac{d}{dt} \int_0^L \int_0^{\zeta(x)} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{i}) dV. \quad (3)$$

Начальные условия:

$$t = 0: x_S = x_0 \neq 0, \dot{x}_S = 0, u = v = 0. \quad (4)$$

Граничные условия:

$$\begin{cases} x = 0, L: & u = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ y = 0: & u = v = 0, \\ y = \zeta(x, t): & \frac{\partial \zeta}{\partial t} = v - u \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \begin{cases} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{s} = 0, \end{cases} \end{cases} \quad (5)$$

где $\omega_0^2 = K/(M+m)gL$, $\delta_S = C/\sqrt{(M+m)K}$, $y = \zeta(x,t)$ – уравнение свободной поверхности, $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ – вектор скорости, $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ – единичные векторы в направлении осей x и y . $\mathbf{P}$ – тензор напряжений с компонентами $-p\delta_{ij} + \mu(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i)$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{s}$ – соответственно нормальный и касательный единичные векторы к свободной поверхности. В данной модели пренебрегаем влиянием сил поверхностного натяжения, что оправдано применением на практике сосудов больших размеров.

Система (1) – (6) приводится к безразмерному виду при использовании следующих безразмерных переменных:

$$\tau = t\sqrt{\frac{g}{L}}, \mathbf{U} = \mathbf{u}\sqrt{\frac{1}{gL}}, P = \frac{p}{\rho gL}, X = \frac{x}{L}, Y = \frac{y}{L}, X_S = \frac{x_S}{x_0}.$$

При этом в безразмерную систему входят безразмерные параметры:

$$\text{Re}_g = \frac{\rho L^{3/2} \sqrt{g}}{\mu}, \tilde{h} = \frac{h}{L}, \tilde{m} = \frac{m}{M}, \Omega = \frac{\omega_0}{\omega_f}, \varepsilon = \frac{x_0}{L}, \delta_S,$$

где ω_f – частота первой моды колебания жидкости.

В расчетах безразмерные параметры задачи принимают следующие значения:

$$\text{Re}_g = 3 \cdot 10^6; \delta_S = 0.01; \tilde{h} = 0.5; \tilde{m} = 0.01; \Omega = 1; 0.001 \leq \varepsilon \leq 0.01. \quad (6)$$

В полости располагаются вставки в виде горизонтальных перегородок и вертикальных перегородок и решеток (рис. 2). Параметры вставок (d и S_n) изменяются в следующих диапазонах: для сплошных перегородок: $0.5 \leq d/h \leq 0.9$, для решеток: $0.3 \leq S_n \leq 0.7$, где $S_n = d_S/d_S + d_l$ – относительная высота пластин решеток. Безразмерное расстояние между решетками и перегородками полагается равным 0.2, а их безразмерная толщина – 0.01.

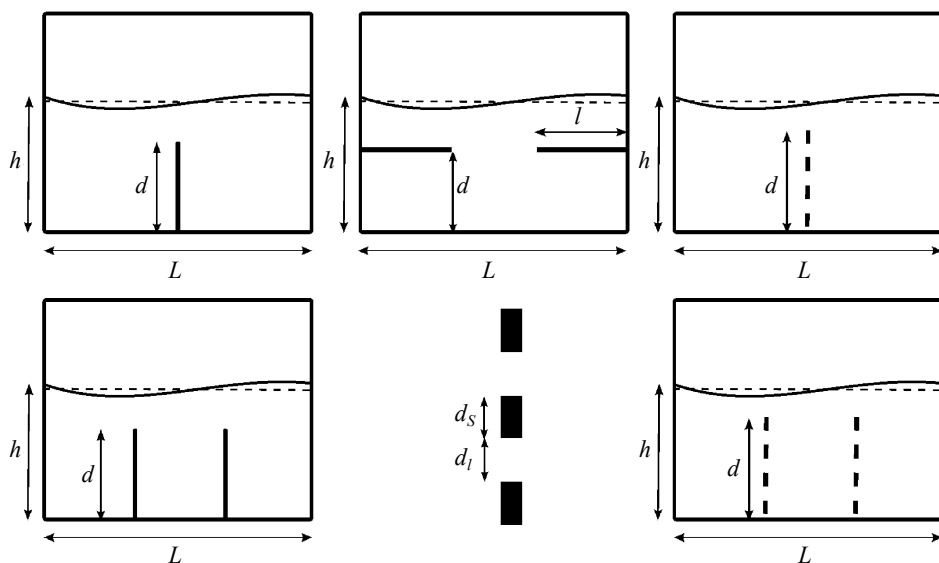


Рис. 2. Расположение перегородок в сосуде

Fig. 2. Arrangement of baffle plates in the tank

Процедура численного решения

Решение гидродинамической части данной задачи (уравнения (1) – (3)) проводилось методом контрольного объема (КО) с использованием подхода Эйлера – Лагранжа (ALE) и алгоритма SIMPLER, реализованного на подвижной криволинейной сетке. Особенностью данного метода является перестроение расчетной сетки на каждом шаге по времени в соответствии с формой свободной поверхности, которая определяется из кинематического граничного условия. Данная методика решения описана в работе [9], при этом дискретизация уравнений (1) – (3) в области, границы которой изменяются с течением времени, проводится согласно [10].

В расчетах применяются ортогональные к свободной границе сетки, для построения которых используется метод, основанный на решении эллиптических уравнений [11]. В данном методе координаты узлов расчетной сетки удовлетворяют уравнениям Пуассона. Для моделирования твердых вставок (перегородок и решеток) применяется метод, описанный в [12], который заключается в блокировании контрольных объемов (КО), приходящихся на вставки. Число контрольных объемов 200×100 , причем увеличение количества КО в два раза приводит к изменению максимальной высоты свободной поверхности на величину, не превышающую 5 %. Ограничения, накладываемые подвижностью сетки на временной шаг, представлены в работе [9]. Решение уравнения колебания тела (4) проводится BDF (Backward Differentiation Formula)-методом 2-го порядка точности.

Результаты расчетов

Наличие вставок в полости приводит к возникновению вихревого течения, причем тип вставок влияет на структуру данного течения. В работе [13] рассмотрен случай размещения в полости вертикальных перегородок. Показано, что при движении полости по гармоническому закону происходит периодический отрыв вихрей от перегородок, а при размещении нескольких перегородок отрывающиеся вихри начинают взаимодействовать в области между перегородками, что приводит к интенсификации диссипативных процессов в жидкости. В случае размещения в сосуде двух решеток за ними образуются две серии вихрей (рис. 3), которые также отрываются от вставок и взаимодействуют друг с другом. При уменьшении

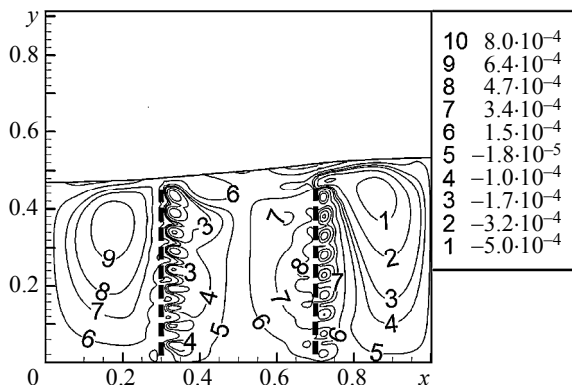


Рис. 3. Изолинии функции тока в сосуде, безразмерное расстояние между решетками 0.4

Fig. 3. Isolines of the stream function in the tank. The dimensionless distance between screens is of 0.4

расстояния между решетками повышается степень их взаимодействия, что приводит к интенсификации диссипативных процессов до тех пор, пока масштаб вихрей, определяемый расстоянием между решетками не станет меньше определенного значения. Выбранное в работе значение безразмерного расстояния между решетками, равное 0.2, близко к такому значению.

Колебание сосуда, частично заполненного жидкостью, в турбулентном приближении

Во всех вышеперечисленных работах по численному исследованию данной задачи авторы используют предположение о ламинарности потока, однако сложное вихревое течение жидкости приводит к возможности перехода течения от ламинарной формы в турбулентную и необходимости использования мелких пространственных шагов в областях около решеток. Был проведен расчет колебаний сосуда, частично заполненного жидкостью, содержащего две решетки с использованием стандартной k - ε -модели и SST- k - ω -модели при помощи пакета OpenFOAM [14].

При расчете с применением SST- k - ω -модели была использована расчетная сетка, содержащая 160 000 контрольных объемов с измельчением вокруг решеток, обеспечивающим разрешение вязкого подслоя. В качестве граничных условий задавались: на границах решеток для k , ω и осредненной скорости течения жидкости задавались нулевые значения; на границах полости – для k и ω использовались пристеночные функции, для осредненной скорости течения жидкости принимались условия прилипания.

При использовании k - ε -модели использовалась расчетная сетка, содержащая 80 000 контрольных объемов с крупными ячейками около решеток. На границах полости и решеток для k и ε использовались пристеночные функции, для осредненной скорости течения жидкости принимались условия прилипания.

В начальный момент времени жидкость покоилась, поэтому в каждой точке расчетной области скорость жидкости и ее турбулентные характеристики полагались равными нулю.

Для проверки правильности расчета течения жидкости в колеблющемся сосуде с решетками в турбулентном приближении была рассмотрена задача о колебании сосуда по гармоническому закону: $x_s = A \sin(\omega t)$. Параметры задачи задавались в соответствии с работами [3] и [15]: $L = 0.966$ м, $h = 0.119$ м, $d_s = 5$ мм, 19 мм, 25 мм, $0.003 < A < 0.01$ м, $\omega = \omega_f$, $S_n = 0.42$.

На рис. 4 представлено сравнение расчетов с экспериментальными данными среднего за период коэффициента потерь давления [3] в зависимости от числа Келегана – Карпентера ($KC = \frac{2\pi U_m}{\omega d_s}$) [16]. В соответствии с работой [3] средний ко-

эффициент потерь давления вычисляется по формуле

$$C_l = -\frac{3}{4} S_n \int_0^{2\pi} \frac{F \cos \theta}{\rho U_m^2 d_s} d\theta,$$

Здесь ρ – плотность жидкости, F – сила, действующая на решетку со стороны жидкости, $\theta = \omega t$, $U_m = \frac{\zeta \omega L}{\pi h} \sin\left(\frac{\pi}{L} x_m\right)$, ζ – амплитуда колебания свободной по-

верхности, x_m – координата расположения решетки. Из данного рисунка видно, что результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментом, причем, как и следовало ожидать, использование SST- k - ω -модели приводит к лучшему совпадению по сравнению с k - ϵ .

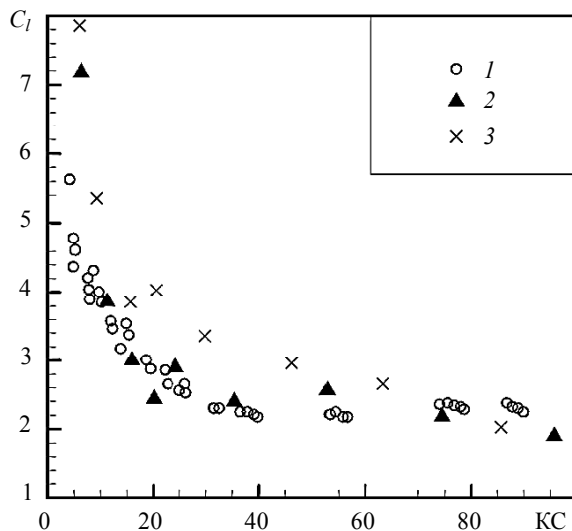


Рис. 4. Зависимость среднего за период коэффициента сопротивления решеток от числа Келегана – Карпентера, 1 – эксперимент; 2 – SST- k - ω -модель турбулентности; 3 – стандартная k - ϵ -модель турбулентности

Fig. 4. The period average resistance coefficient of baffles as a function of the Keulegan–Carpenter number: 1, experimental data; 2, SST k - ω turbulence model; and 3, k - ϵ turbulence model

Модель SST- k - ω была применена для расчета первоначальной задачи: движение тела с полостью, частично заполненной жидкостью, в которой расположены две решетки. Параметры данной задачи равны значениям (6) при $\epsilon = 0.01$ (максимальное значение, выбранное в работе) и $S_n = 0.4$. Было проведено сравнение результатов с применением ламинарной и турбулентной SST- k - ω -модели.

На рис. 5 изображена зависимость положения тела (X_s) и нормированной полной энергии системы (E) от времени, где

$$E = \left[\int (U + \epsilon \dot{X}_s)^2 dV + \int (\zeta - \tilde{h})^2 dX + \tilde{h} \epsilon^2 \frac{1 + \tilde{m}}{\tilde{m}} \omega_0^2 X_s^2 \right] / \left(\tilde{h} \epsilon^2 \frac{1 + \tilde{m}}{\tilde{m}} \omega_0^2 x_0^2 \right). \quad (7)$$

Как видно из данного рисунка, использование модели турбулентности не приводит к заметному изменению амплитуды колебания тела и поведению относительной полной энергии системы по сравнению с ламинарным случаем. Таким образом, при рассматриваемых параметрах эффекты турбулентности оказывают малое влияние на поведение интегральных характеристик (траектория колебаний тела, полная энергия системы). Из данного факта следует справедливость получаемых в работе выводов о поведении тела с сосудом, имеющим решетки и частично заполненным жидкостью, при рассмотрении ламинарной модели течения.

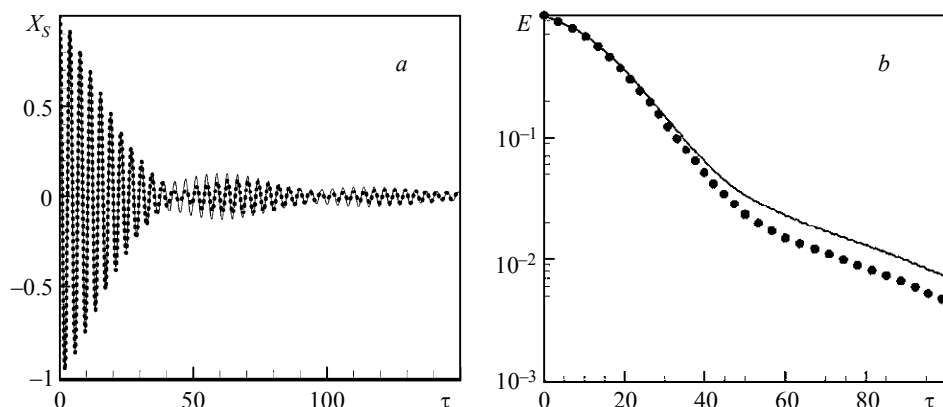


Рис. 5. Сравнение расчетов ламинарной и турбулентной модели при $\varepsilon = 0.005$ и $S_n = 0.4$: *a* – зависимость положения тела от времени; *b* – зависимость относительной полной энергии от времени. Линия – SST- $k-\omega$ -модель турбулентности. Точки – модель ламинарного течения

Fig. 5. Comparison of calculated results for the laminar and turbulent models at $\varepsilon = 0.005$ and $S_n = 0.4$: (a) time history of the body displacement and (b) relative total energy of the system as a function of time. The solid line indicates the SST $k-\omega$ turbulence model; the dotted line, the laminar model

Справедливость данного вывода подкрепляется также опытом исследователей, использующих ламинарную модель потока, часть работ которых процитирована выше.

Колебание тела с полостью, частично заполненной жидкостью, в ламинарном приближении

Рассмотрим свободные колебания тела с полостью, частично заполненной жидкостью. При заданных значениях параметров наличие полости с жидкостью приводит к сильным биениям колебаний тела. Это связано с тем, что энергия колебаний тела, переходящая в жидкость, не успевает диссипировать и переходит обратно в движение тела. Как отмечено выше, интенсифицировать диссипативные процессы в жидкости можно путем размещения в полости различных конфигураций вставок: вертикальных и горизонтальных перегородок, вертикальных решеток. На рис. 6 показана зависимость положения тела от времени для случаев колебания тела без полости с жидкостью и с полостью с жидкостью, в том числе для случая полости, в которой размещена вертикальная перегородка высотой $d/h = 0.7$. Видно, что размещение перегородки приводит к уменьшению амплитуды колебания твердого тела.

Скорость диссипации энергии колебаний твердого тела зависит от высоты и количества перегородок немонотонно. Так, в случае, когда диссипация энергии движения жидкости мала, например, когда в полости отсутствуют вставки, наблюдаются сильные биения, а при размещении вставок уменьшается амплитуда колебания свободной поверхности и снижается влияние полости на колебания тела. На рис. 7 показано изменение с течением времени полной энергии системы «тело+жидкость» (8), отнесенной к ее начальному значению, при размещении в полости вертикальных и горизонтальных перегородок и решеток. Параметры дан-

ных вставок соответствуют случаям максимальной диссипации энергии среди рассмотренных случаев для каждого типа вставок. Как видно из данного рисунка, наличие в полости двух решеток приводит к тому, что скорость диссипации энергии колебаний тела максимальна среди рассмотренных случаев. Это связано как раз с тем, что в случае наличия решеток возникают мелкомасштабные вихри, в которых происходит диссипация энергии движения жидкости. Также из этого рисунка можно сделать вывод о том, что скорость диссипации энергии системы слабо зависит от числа перегородок, но сильно зависит от вида перегородок (сплошные перегородки или решетки).

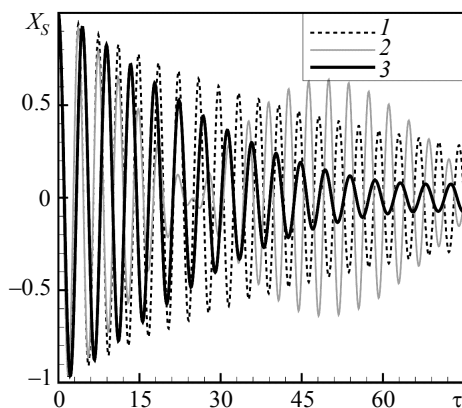


Рис. 6. Зависимость положения тела от времени при $\epsilon = 0.005$, 1 – без сосуда с жидкостью, 2 – с сосудом с жидкостью, 3 – с сосудом, в котором расположена перегородка ($d/h = 0.7$)

Fig. 6. Time history of the body displacement at $\epsilon = 0.005$: 1, without a tank containing a fluid; 2, with a tank containing a fluid; and 3, with a tank equipped with a baffle ($d/h = 0.7$)

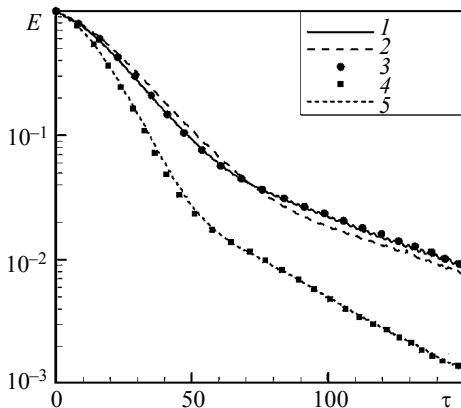


Рис. 7. Зависимость нормированной полной энергии системы от времени: 1 – одна перегородка ($d/h = 0.7$), 2 – две перегородки ($d = 0.7$), 3 – две горизонтальные перегородки ($d = 0.7$), 4 – две решетки, 5 – три решетки, $\epsilon = 0.005$

Fig. 7. Normalized total energy of the system as a function of time: 1, one baffle ($d/h = 0.7$); 2, two baffles ($d = 0.7$); 3, two horizontal baffles ($d = 0.7$); 4, two screens; and 5, three screens at $\epsilon = 0.005$

Поскольку рассматриваемая система уравнений является нелинейной, то относительная высота пластин решеток (S_n), при которых диссипация энергии максимальна, зависит от начального отклонения полости (ϵ). Так, из рис. 8, *a* видно, что при $\epsilon = 0.001$ быстрее всего уменьшается энергия колебаний в случае наличия двух решеток с $0.6 < S_n < 0.7$. При увеличении ϵ относительная высота пластин, при которой диссипация энергии происходит наиболее интенсивно, уменьшается: при $\epsilon = 0.01$ (рис. 8, *b*) – $0.4 < S_n < 0.5$. Стоит отметить, что данные выводы справедливы при малых значениях τ ($\tau < 70$), однако, именно в ранние моменты времени диссипирует основная часть энергии системы, так что при $\tau > 70$ в системе остается порядка 1 % от начальной полной энергии. Таким образом, относительная высота пластин решеток, при которой диссипация энергии колебаний тела жидкостью максимальна, зависит от амплитуды колебания тела. Это позволяет, например, путем изменения угла наклона пластин подстраивать демпфер под конкретную амплитуду колебания тела.

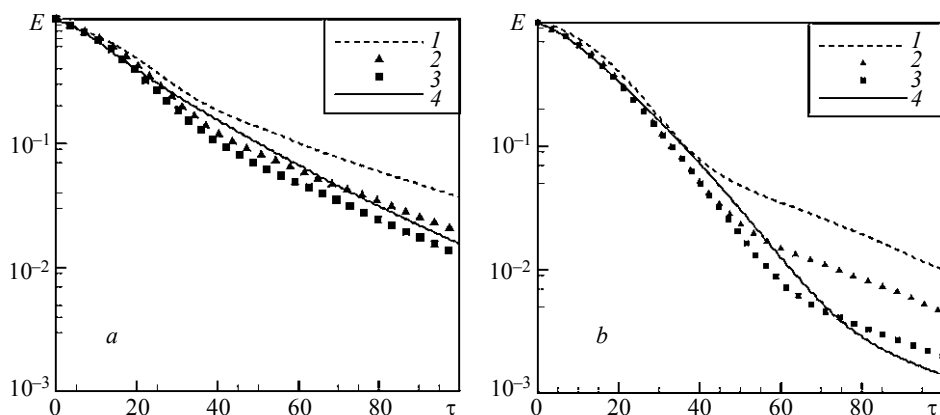


Рис. 8. Зависимость нормированной полной энергии системы от времени при размещении в полости двух решеток: *a* – $\varepsilon = 0.001$, $1 - S_n = 0.5$, $2 - S_n = 0.6$, $3 - S_n = 0.7$, $4 - S_n = 0.8$; *b* – $\varepsilon = 0.01$, $1 - S_n = 0.3$, $2 - S_n = 0.4$, $3 - S_n = 0.5$, $4 - S_n = 0.6$

Fig. 8. Time history of the normalized total energy of the system with two screens arranged in the cavity: (*a*) $\varepsilon = 0.001$; $1, S_n = 0.5$; $2, S_n = 0.6$; $3, S_n = 0.7$; and $4, S_n = 0.8$; (*b*) $\varepsilon = 0.01$; $1, S_n = 0.3$; $2, S_n = 0.4$; $3, S_n = 0.5$; and $4, S_n = 0.6$

Выводы

В результате проведенного исследования влияния жидкого наполнителя на свободные колебания тела с одной степенью свободы сформулированы следующие выводы:

- Несмотря на наличие сложного вихревого течения жидкости в полости, расчет на грубой сетке с применением ламинарной модели позволяет с достаточной для практики точностью предсказывать колебания тел с полостью, что позволяет существенно уменьшить время получения результата.
- Скорость диссипации энергии колебаний тела с полостью, частично заполненной жидкостью, слабо зависит от количества перегородок и наибольшая среди рассмотренных случаев при размещении двух вертикальных решеток. Относительная высота пластин решеток S_n , при которой скорость диссипации энергии колебаний тела максимальна, зависит от величины начального отклонения ε . Так, при $\varepsilon = 0.001$ $0.6 < S_n < 0.7$, при $\varepsilon = 0.005$ $S_n \approx 0.5$ и при $\varepsilon = 0.01$ $0.4 < S_n < 0.5$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fujii K., Tamura Y., Sato T., Wakahara T. Wind-induced vibration of tower and practical applications of tuned sloshing damper // J. Wind Eng. Ind. Aerodyn. 1990. V. 33. P. 263–272.
2. Sun L. M., Fujino Y., Pacheco B. M., Chaiseri P. Modeling of tuned liquid damper (TLD) // J. Wind Eng. Ind. Aerodyn. 1992. V. 43(1-3). P. 1883–1894.
3. Tait M.J., El Damatty A.A., Isyumov N., Siddique M.R. Numerical flow models to simulate tuned liquid dampers: fluid modelling (TLD) with slat screen // J. Fluids and Structures. 2005. V. 20(8). P. 1007–1023. DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2005.04004.
4. Cassolato M.R., Love J.S., Tait M.J. Modeling of a tuned liquid damper with inclined damping screens // Struct. Control Health Monit. 2011. V. 18. P. 674–681. DOI: 10.1002/stc.
5. Gardarsson S., Yeh H., Reed D. Behavior of sloped-bottom tuned liquid dampers // J. Eng. Mech. 2001. V. 127. P. 266–271.
6. Kaneko S., Yoshida O. Modeling of deepwater-type rectangular tuned liquid damper with submerged nets // J. Pressure Vessel Technology. 1999. V. 121. P. 413–422.

7. Frandsen J.B. Numerical predictions of tuned liquid tank structural systems // Journal of Fluids and Structures. 2005. V. 20. P. 309–329. Doi: 10.1016/j.jfluidstructs.2004.10.003.
8. Maravani M., Hamed M. S. Numerical modeling of sloshing motion in a tuned liquid damper outfitted with a submerged slat screen // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2011. V. 65. P. 834–855. DOI: 10.1002/flid.2216
9. Hodges B. R., Street R. L. On simulation of turbulent nonlinear free-surface flows // J. Comput. Phys. 1999. V. 151. P. 425–457.
10. Кудинов П.И. Метод расчета процессов гидродинамики и теплообмена в неортогональных криволинейных координатах // Вестник Днепропетровского университета. Серия Механика. 1998. Т. 1(1). С. 117–124.
11. Thompson J. F., Warsi Z.U.A., Mastin Wayne C. Numerical Grid Generation: Foundations and Applications. N.Y.: Elsevier, 1985. 483 p.
12. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
13. Wu C.H., Faltinsen O.M., Chen B.F. Numerical study of sloshing liquid in tanks with baffles by time-independent finite difference and fictitious cell method // Computers & Fluids. 2012. V. 63. P. 9–26. DOI: 10.1016/j.compfluid.2012.02.018.
14. Moukalled F., Mangani L., Darwish M. The finite volume method in computational fluid dynamics: an advanced introduction with OpenFOAM and Matlab. Switzerland: Springer International Publishing, 2015. 791 p.
15. Hamelin J.A., Love J.S., Tait M.J., Wilson J.C. Tuned liquid dampers with a Keulegan – Carpenter number-dependent screen drag coefficient // Journal of Fluids and Structure. 2013. V. 43. P. 271–286. DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2013.09.006
16. Keulegan G.H., Carpenter L.H. Forces on cylinders and plates in an oscillating fluid // J. Research of NIST. 1958. V.60. No. 5. P. 423–440.

Статья поступила 22.02.2017 г.

Botalov A.Yu, Rodionov S.P. (2018) NUMERICAL INVESTIGATION OF THE EFFECT OF LIQUID FILLING ON FREE OSCILLATIONS OF ONE-DEGREE-OF-FREEDOM BODY. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 51. pp. 75–85

DOI 10.17223/19988621/51/7

Keywords: tank with fluid, free oscillations, wave motion of fluid, flow around screens.

In this work, free oscillations of a one-degree-of-freedom solid body containing a rectangular cavity partially filled with a viscous fluid are considered. The horizontal and vertical baffles, as well as vertical screens, were arranged in the cavity. The effect of a fluid flow on the rate of damping of the solid body oscillations at different positions of insertions in the cavity was studied. The cases of both laminar and turbulent flow of the fluid in the cavity were considered. It has been found that the use of the laminar flow model and coarse mesh provides a reasonably accurate description of the motion of a body with a cavity. Moreover, in this case, the computational time is significantly less than that for the turbulent flow model. It has been shown that the oscillation damping rate for a body with a cavity partially filled with a viscous fluid reached the highest value if the cavity contains two vertical screens. Nevertheless, the number of impermeable baffles did not significantly affect the rate of oscillation damping.

BOTALOV Andrey Yur'evich (Candidat of Physics and Mathematics, Tyumen Branch of the Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Tyumen, Russian Federation).

RODIONOV Sergey Petrovich (Doctor of Physics and Mathematics, Tyumen Branch of the Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Tyumen, Russian Federation).

REFERENCES

1. Fujii K., Tamura Y., Sato T., Wakahara T. (1990) Wind-induced vibration of tower and practical applications of tuned sloshing damper. *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.* 33. pp. 263–272. DOI: 10.1016/0167-6105(90)90042-B.
2. Sun L.M., Fujino Y., Pacheco B.M., Chaiseri P. (1992) Modeling of tuned liquid damper (TLD). *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.* 43(1-3). pp. 1883–1894. DOI: 10.1016/0167-6105(92)90609-E.
3. Tait M.J., El Damatty A.A., Isyumov N., Siddique M.R. (2005) Numerical flow models to simulate tuned liquid dampers: fluid modelling (TLD) with slat screen. *Journal of Fluids and Structures.* 20(8). pp. 1007–1023. DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2005.04004.
4. Cassolato M.R., Love J.S., Tait M.J. (2011) Modeling of a tuned liquid damper with inclined damping screens. *Struct. Control Health Monit.* 18. pp. 674–681. DOI: 10.1002/stc.397.
5. Gardarsson S., Yeh H., Reed D. (2001) Behavior of sloped-bottom tuned liquid dampers. *J. Eng. Mech.* 127. pp. 266–271. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(2001)127:3(266).
6. Kaneko S., Yoshida O. (1999) Modeling of deepwater-type rectangular tuned liquid damper with submerged nets. *Journal of Pressure Vessel Technology.* 121. pp. 413–422. DOI: 10.1115/1.2883724.
7. Frandsen J.B. (2005) Numerical predictions of tuned liquid tank structural systems. *Journal of Fluids and Structures.* 20. pp. 309–329. DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2004.10.003.
8. Maravani M., Hamed M.S. (2011) Numerical modeling of sloshing motion in a tuned liquid damper outfitted with a submerged slat screen. *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* 65. pp. 834–855. DOI: 10.1002/fld.2216.
9. Hodges B.R., Street R.L. (1999) On simulation of turbulent nonlinear free-surface flows. *J. Comput. Phys.* 151. pp. 425–457. DOI: 10.1006/jcph.1998.6166.
10. Kudinov P.I. (1998) Metod rascheta protsessov gidrodinamiki i teploobmena v neortogonalnykh krivolinyenykh koordinatakh [Method for calculating the processes of hydrodynamics and heat transfer in non-orthogonal curvilinear coordinates]. *Visnyk Dnipropetrovs'kogo universytetu. Mekhanika – Bulletin of Dnipropetrovsk university. Mechanics.* 1(1). pp. 117–124.
11. Thompson J.F., Warsi Z.U.A., Mastin W.C. (1985) *Numerical Grid Generation: Foundations and Applications.* New York: Elsevier.
12. Patankar S. (1980) *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow.* CRC Press.
13. Wu C.H., Faltinsen O.M., Chen B.F. (2012) Numerical study of sloshing liquid in tanks with baffles by time-independent finite difference and fictitious cell method. *Computers & Fluids.* 63. pp. 9–26. DOI: 10.1016/j.compfluid.2012.02.018.
14. Moukalled F., Mangani L., Darwish M. (2015) *The finite volume method in computational fluid dynamics: an advanced introduction with OpenFOAM and Matlab.* Switzerland: Springer International Publishing.
15. Hamelin J.A., Love J.S., Tait M.J., Wilson J.C. (2013) Tuned liquid dampers with a Keulegan-Carpenter number-dependent screen drag coefficient. *Journal of Fluids and Structure.* 43. pp. 271–286. DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2013.09.006.
16. Keulegan G.H., Carpenter L.H. (1958) Forces on cylinders and plates in an oscillating fluid. *Journal of Research of NIST.* 60(5). pp. 423–440.

УДК 532.543

DOI 10.17223/19988621/51/8

Б.В. Бошенятов, К.Н. Жильцов

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН ЦУНАМИ С ПОДВОДНЫМИ ПРЕГРАДАМИ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ В ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ЛОТКЕ¹

Приведены результаты исследований взаимодействия длинных волн типа цунами с непроницаемыми затопленными преградами конечной толщины. Детально изучен процесс прохождения волны через преграду и процесс образования и эволюции вихревых структур за преградой. С использованием интегрального метода оценки энергий отраженной и прошедшей волн определена эффективность преграды в подавлении волн цунами в зависимости от её толщины.

Ключевые слова: волна цунами, затопленная преграда, численное моделирование, гидродинамический (волновой) лоток, вихревые структуры.

Цунами представляют собой одно из самых непредсказуемых и разрушительных бедствий, которым подвергаются прибрежные районы морей и океанов. Для защиты жилых и промышленных сооружений вблизи береговой линии сооружают протяженные и дорогостоящие барьеры, которые проектируют из условия полного отражения наиболее вероятной высоты волны. Однако, когда волна цунами превышает половину высоты барьера над уровнем моря, барьер превращается в подводный при этом его эффективность резко падает, поскольку любой искусственный барьер по сравнению с характерной длиной волны цунами (десяtkи и сотни километров) является тонким [1]. Поэтому научные исследования, направленные на повышение эффективности подводных барьеров, являются актуальными и необходимыми [2–12].

Так, в работе [2] исследовалось влияние различных факторов на эффективность затопленной преграды, сечение которой вертикальной плоскостью, перпендикулярной фронту волны, имеет вид трапеции. Показано, что проницаемые преграды, за счет потерь на трение внутри преграды, могут уменьшить «заплеск» волны типа цунами на береговой склон с наклоном 1:5 на 8–15 % по сравнению с «заплеском» без преграды (15 %, когда высота преграды равна глубине воды в лотке). Во введении авторы справедливо отмечают, что эффективность подводных преград резко уменьшается в случае, когда длина волны намного больше толщины преграды, однако величина параметра H/λ (отношение глубины водоема к длине волны), при котором они проводили эксперименты, ими не указана. В работе [3] тех же авторов частично даны материалы работы [2] и даны фотографии волны, набегающей на преграду, из которых можно заключить, что в указанных экспериментах величина параметра $H/\lambda \approx 0.5 - 0.3$. Отметим, что для натуральных волн цунами у побережья, где обычно устанавливают преграды, параметр $H/\lambda < 0.01$. Авторы [4] исследовали нелинейные трансформации волны типа цунами при её взаимодействии с затопленными (проницаемой и непроницаемой)

¹ Работа проведена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 15-08-04097 а.

преградами высотой $h = 0.5H$ в виде бруска прямоугольной формы. Приведены графики коэффициента прохождения волны $T = A_t/A$, где A – усредненная амплитуда падающей волны, A_t – усредненная амплитуда прошедшей через преграду волны. Показано, что коэффициент T зависит не только от толщины преграды, но и от параметра A/λ , который изменялся в пределах $0.01 < A/\lambda < 0.13$. При значениях $0.01 < A/\lambda < 0.03$ и толщине преграды $b < 0.25\lambda$ коэффициент прохождения волны T изменяется от 0.9 до 1.0. При значениях $A/\lambda > 0.03$ разброс экспериментальных данных по коэффициенту T достигает 40 %. Эти исследования также касаются слишком коротких по сравнению с цунами волн, параметр $H/\lambda \approx 0.6$.

В работе [5] численно и экспериментально изучалось распространение одиночных волн (solitary waves) над прямоугольным непроницаемым барьером (высота барьера 0.1 м, толщина – 0.02 м), установленном на дне волнового лотка. Глубина воды в лотке $H = 0.14$ м оставалась неизменной, амплитуда падающей волны изменялась так, что $0.1 < A/H < 0.5$. Показано, что при этих условиях эксперимента за преградой образуется сложное вихревое поле, которое, взаимодействуя со свободной поверхностью, в ряде случаев формирует вблизи преграды стоячую волну с обрушением. Исследована зависимость коэффициентов отражения $R = A_r/A$, где A_r – усредненная амплитуда прошедшей через преграду волны, прохождения и относительного коэффициента диссипации энергии на преграде $(1 - R^2 - T^2)$ от параметра нелинейности волны. Установлено, что максимальная величина диссипации энергии достигается при $A/H = 0.15$ и составляет около 25 % от энергии падающей волны. Однако и в этой работе длина волны лишь в 6 раз превышает глубину воды, т.е. величина параметра $H/\lambda \approx 0.15$.

В экспериментах работы [6] был обнаружен довольно неожиданный факт, который заключается в том, что, при некотором оптимальном расстоянии друг от друга, два тонких подводных барьера могут существенно уменьшить высоту берегового «заплеска» волны типа цунами. Объяснение этому факту было дано в работах [7–9]. Оказалось, что при определенных условиях, вблизи тонкой подводной преграды (одной или двух) образуются крупномасштабные вихревые структуры, которые могут аккумулировать до 50 % энергии падающей волны [10–11]. Отдельно стоит отметить работу Ку и др. [12], в которой подвергается критике популярная практика моделирования волны цунами уединенной волной. Отмечается, что использование для этой цели уединенной волны, из-за её недостаточной длины по отношению к глубине волнового лотка, приводит к недооценке суммарной энергии и последующей неверной оценке «заплеска».

Отличительной особенностью наших исследований является то, что конструкция гидродинамического лотка Института прикладной механики Российской академии наук (ИПРИМ РАН) [13–15] и методики исследований [8, 16–18] обеспечивают достаточно полное моделирование волн цунами. В частности, генератор волны с высокой точностью создает длинную гравитационную волну (параметр $H/\lambda = 0.03$) заданной амплитуды с параметрами, близкими к натурным для волн цунами в прибрежной зоне.

Условия эксперимента

Экспериментальные исследования проводились в большом гидродинамическом лотке (БГЛ) на базе Института прикладной механики РАН. Размеры лотка: длина – 15 м, ширина – 0.26 м, высота – 0.4 м. Большинство способов генерации волны выполняются с помощью подвижных элементов. В нашем лотке подвижных элементов нет. Работа нашего генератора основана на принципе распада про-

извольного разрыва уровня воды. В начале лотка выделен герметичный по воздуху отсек длиной $a = 1.5$ м, он и является генератором. По воде объем генератора и остальная часть лотка связаны между собой через переднюю перегородку как сообщающиеся сосуды. Сверху к генератору подведена трубка для откачки воздуха. Перед началом работы лоток заполняется водой, так чтобы передняя стенка генератора погрузилась в воду, и производится откачка воздуха из объема генератора, создавая начальный перепад глубин ξ_0 : в генераторе глубина $(H + \xi_0)$, в рабочей части лотка – H . После разгерметизации в рабочей части образуется волна длиной $\lambda = 2a$ и амплитудой $A = \xi_0/2$. Такая конструкция генератора позволяет с высокой точностью контролировать амплитуду генерируемой волны любой заданной длины. В нашем случае длина волны составляет около 3 м. Более подробная информация об условиях тестовых экспериментов и об их сравнении с численными расчетами содержится в работах [11, 13–15]. Здесь стоит отметить, что результаты этих сравнений подтверждают достаточно высокую надежность и точность наших исследований.

Математическая постановка задачи

Для описания движения вязкой несжимаемой жидкости используется система уравнений Навье – Стокса в двумерной постановке. В векторной форме система включает в себя уравнение неразрывности (1) и уравнение движения (2):

$$\nabla U = 0; \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} + \nabla(\rho U U) = -\nabla p + \eta \nabla^2 U + \rho g - \sigma_T k_\gamma \nabla \gamma, \quad (2)$$

где $U = (u, v)$ – вектор скорости осредненного потока, $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$, ρ – плотность, p – давление, g – ускорение свободного падения ($g = 9.81$ м/с). Последний член в уравнении (2) отвечает за силу поверхностного натяжения, где σ_T коэффициент поверхностного натяжения равный 0.0728 кг/с², γ – линейный коэффициент отслеживания свободной поверхности, $k_\gamma = \nabla(\nabla \gamma / |\nabla \gamma|) = \nabla n$ – коэффициент кривизны.

Для расчета смещения свободной поверхности применяется метод *Volume of Fluid* (VOF), предложенный Хиртом и Николасом [19]. Уравнение переноса выглядит так:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \nabla(\gamma U) = 0, \quad (3)$$

где γ – определяет объемную долю воды в расчетной ячейке и изменяется линейно от 0 до 1 в соответствии со следующими условиями:

$$\gamma = \begin{cases} \gamma = 0, & \text{воздух,} \\ 0 < \gamma < 1, & \text{интерфейс,} \\ \gamma = 1, & \text{вода.} \end{cases} \quad (4)$$

Средневзвешенная плотность и вязкость в расчетной ячейке в зависимости от параметра γ рассчитываются по формулам

$$\begin{aligned} \rho &= \gamma \rho_w + (1 - \gamma) \rho_a, \\ \eta &= \gamma \eta_w + (1 - \gamma) \eta_a. \end{aligned} \quad (5)$$

При наших параметрах волнового лотка течение в пограничном слое за фронтом гравитационной волны заведомо ламинарное, поскольку известно [20], что при от-

носительной возмущенности набегающего течения $\varepsilon \leq 0.1$, значения критического числа Рейнольдса, при котором на плоской поверхности происходит переход пограничного слоя в турбулентное состояние, составляют $Re_* = U_\infty x / \nu = (3-4) \cdot 10^6$. В нашем случае число Рейнольдса за фронтом волны не превышает $2 \cdot 10^5$.

На всех твердых границах канала, в том числе на непроницаемом препятствии граничные условия соответствуют условиям прилипания:

$$U = 0. \quad (6)$$

На свободной поверхности канала выполняются комбинация граничных условий для скорости и давления в соответствии с технологий вычислительного алгоритма OpenFOAM:

$$nU = 0 \quad (7)$$

$$p_{\text{atm}} = 1 \text{ атм.} \quad (8)$$

В начальный момент времени в области задается распределение объемной концентрации γ , соответствующее начальному состоянию уровня воды в лотке и генераторе. С началом расчета под действием силы тяжести начинается волновое движение. При $t = 0$ распределение скорости во всей расчетной области лотка задавалось равным нулю.

Исследуемая преграда устанавливалась в середине лотка, а длина расчетной области выбиралась достаточно большой, чтобы исключить влияние отраженных волн от торцевых стенок лотка.

Вычислительная методика

Математическая модель (1) – (3), описанная выше, с соответствующими начальными и граничными условиями решалась с помощью метода контрольных объемов [21]. Построение сетки проводилось эйлеровским методом, что подразумевает фиксированный размер и форму сеток в процессе расчета. Длина расчетной области варьировалась от 15 до 30 м, высота и ширина постоянны: 0.13 и 0.02 м соответственно. По оси x шаг сетки оставался постоянным 0.002 м. По оси y шаг сетки варьировался от 0.001 до 0.002 м. Расчетная сетка по оси y сгущалась в небольшой области на границе раздела вода – воздух для получения большей точности расчетов. Ось z имела всего одну расчетную ячейку. Необходимость задавать в двумерной задаче фиктивную ось z вызвано особенностью программного комплекса OpenFOAM. Пример расчетной сетки в районе преграды можно увидеть на рис. 1.

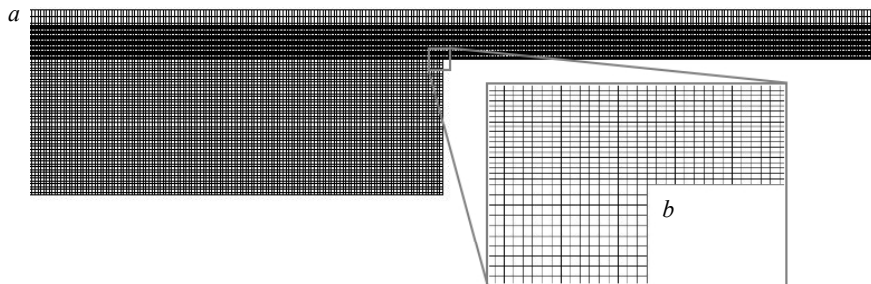


Рис. 1. Сетка расчетной области (a); сгущение сетки в районе преграды (b)
Fig. 1. (a) Grid for the computational domain and (b) refined grid around the obstacle

Временной шаг был нефиксированным и рассчитывался автоматически из условия, что число Куранта не должно быть больше 0.6. Расчет прохождения волны по каналу занимал от 20 до 45 с и прерывался, когда падающая волна доходила до правой стенки канала. Данные расчета записывались каждые 0.01 с.

Вычисления проводились с помощью пакета OpenFOAM [22]. Широко пространственный пакет с открытым исходным кодом представляет собой набор библиотек и макросов и является, по сути, языком программирования и удобным инструментом для численного моделирования.

Условия расчетов и методы исследования

Расчеты проводились при различной толщине преграды D , начальная глубина воды в гидродинамическом лотке ($H = 0.103$ м), параметры падающей на преграду волны (высота $A = 0.007$, длина $\lambda = 3$ м) и высота преграды ($h = 0.095$ м) оставались неизменными и соответствовали условиям интенсивного вихреобразования вблизи тонкой преграды [7, 9]: параметр нелинейности – $A/H = 0.068$, параметр преграды – $h/(H + A) \approx 0.864$. Таким образом, $A/H < 0.1$ и результаты расчетов вдали от преграды могут быть описаны линейной теорией мелкой воды [13, 18]. Схематический чертеж прохождения волны над затопленной преградой представлен на рис. 2.

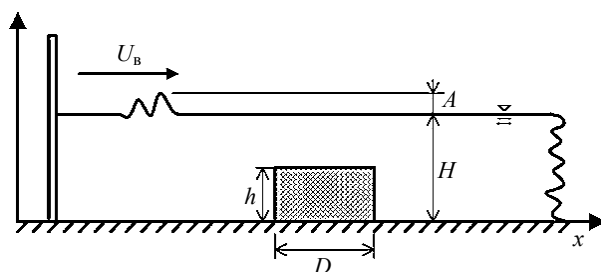


Рис. 2. Схематичный чертеж прохождения волны над затопленной преградой
Fig. 2. Schematic diagram of a wave passing over a submerged obstacle

Получены коэффициенты отражения и прохождения волн при их взаимодействии с преградой в зависимости от параметра толщины преграды в диапазоне $0 < D/\lambda < 2$. Более детально исследована преграда толщиной $D = 6$ м = 2λ . Обычно эффективность преграды оценивают относительно коэффициентов отражения и прохождения волны. Согласно линейной теории, кинетическая и потенциальная энергии в гравитационной волне равны друг другу. В этом случае, полную энергию волны удобно вычислять как удвоенную потенциальную энергию по следующей интегральной формуле:

$$W = 2W_p = \rho g \int_0^\lambda \xi^2 dx = \rho g \sqrt{gH} \int_0^t \xi^2 dt. \quad (9)$$

В левой части уравнения (9) потенциальная энергия волны рассчитывается через пространственный интеграл. Обычно удобнее использовать временной интеграл, стоящий в правой части. В условиях увеличения нелинейности волн, потенциальная и кинетическая энергии отличаются друг от друга, и такая оценка будет приводить к ошибочному результату. В данной работе используется интегральный метод для оценки потенциальной и кинетической энергии волны в отдельно-

сти. Кинетическая энергия рассчитывается по формуле

$$W_k = \sqrt{gH} \int_0^T \int_0^{H+\xi} \frac{\rho U^2}{2} dy dt. \quad (10)$$

Результаты исследования

На рис. 3 приведены результаты численного моделирования волнового процесса вблизи генератора волны типа цунами, который возникает при распаде произвольного разрыва уровней воды в генераторе и в остальной части гидродинамического лотка. В момент времени $t = 0$ (рис. 3, *a*) представлено начальное распределение воды в генераторе ($x < 1.5$ м) и в рабочей части волнового лотка. В этот момент времени все скорости равны 0. При $t = 0.5$ с (рис. 3, *b*) и $t = 1.5$ с (рис. 3, *c*) видно образование двух волн, расходящихся в разные стороны от первоначального разрыва уровней. Под каждым рисунком располагаются профили продольных скоростей. Далее, при $t = 3$ с (рис. 3, *d*) наблюдается отражение волны от левой стенки генератора ($x = 0$ м). В момент времени $t = 4.5$ с (рис. 3, *e*) гравитационная волна уже полностью сформировалась. В этот момент скорости жидкости перед волной равны нулю, после волны наблюдаются небольшие колебания, также близкие к нулю.

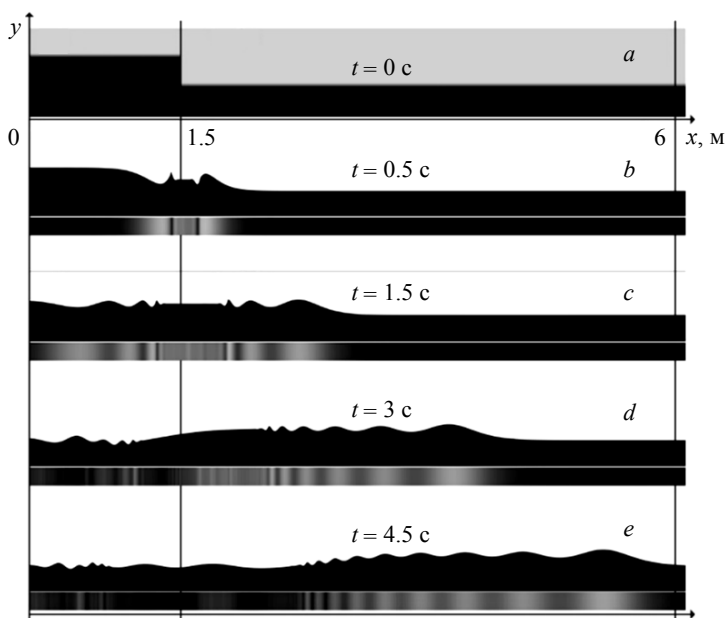


Рис. 3. Моделирование образования и прохождения волны генератором для случая $H = 0.103$ м, $A = 0.007$ м

Fig. 3. Simulation of the wave generation and evolution at $H = 0.103$ m and $A = 0.007$ m

На рис. 4 представлена временная осциллограмма смещения свободной поверхности жидкости как результат прохождения волны для случая, когда толщина препятствия $D = 0.01$ м. Датчик № 1, расположенный на расстоянии $x = 5.245$ м от

начала лотка, фиксирует падающую и отраженную волны. Датчик № 2, расположенный на расстоянии $x = 11.2$ м от начала лотка, фиксирует прошедшую через преграду волну, передний край преграды установлен на расстоянии $x = 9.04$ м. Для всех численных расчетов при различной толщине преграды D проводились записи данных, подобных графику на рис. 4.

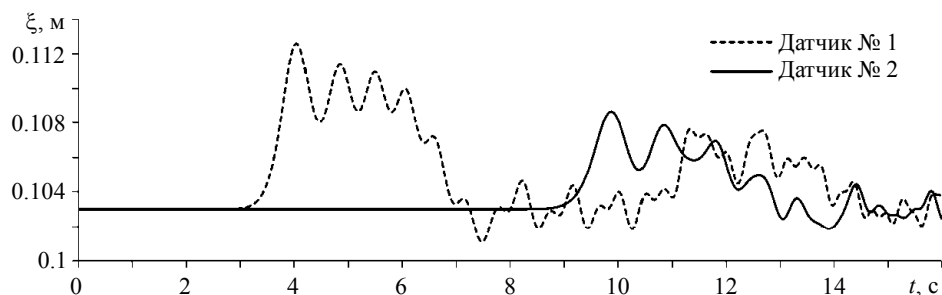


Рис. 4. Профили свободной поверхности в зависимости от времени, зафиксированные на расстояниях $x = 5.245$ м (датчик № 1) и $x = 11.2$ м (датчик № 2) для случая $H = 0.103$ м, $A = 0.007$ м, $D = 0.01$ м

Fig 4. Profiles of the free surface motion as a function of time registered at a distance of $x = 5.245$ (sensor No. 1) and 11.2 m (sensor No. 2) at $H = 0.103$ m, $A = 0.007$ m, and $D = 0.01$ m

На рис. 5 представлены профили скорости по глубине $H + \xi$ при распространении волны вдоль канала в сечении $x = 5.245$ м в различные моменты времени. Для отображения выбран первый гребень волны, проходящий через датчик в момент $3.5 < t < 4.5$ с (Датчик № 1, рис. 4).

На рис. 5, *a* представлены профили скоростей на тыльной стороне гребня во временных сечениях $3.73 < t < 3.96$ с. На рис. 5, *b* представлены профили скоростей на фронте гребня во временных сечениях $4.04 < t < 4.35$ с. Из графиков хорошо видно, что процесс распространения гравитационной волны по каналу сопровождается практически одновременным смещением всего слоя воды. Наибольшие отклонения наблюдаются в момент $t = 4.04$ с, когда в сечении достигаются максимальные значения $H + \xi$.

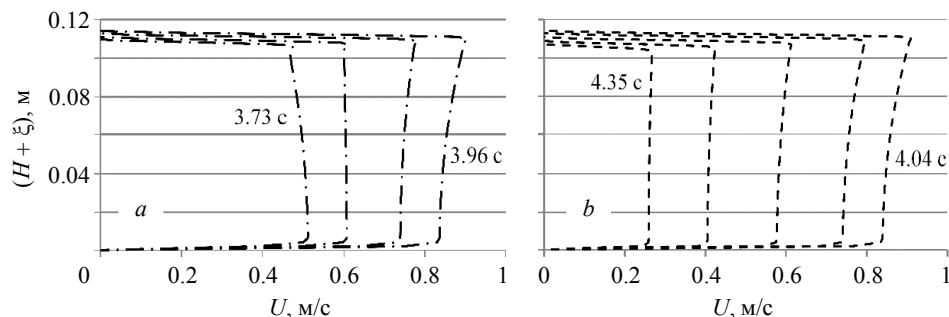


Рис. 5. Профили скорости по высоте волны $H + \xi$ для случая $H = 0.103$ м, $A = 0.007$ м в различные моменты времени: *a* – тыльная сторона гребня волны; *b* – фронт гребня волны

Fig. 5. Velocity profiles in accordance with a wave height $H + \xi$ for $H = 0.103$ m and $A = 0.007$ m at different time instants: *a*) back and *b*) front of the wave crest

Рассмотрим процесс взаимодействия волны на переднем уступе тонкой преграды. На рис. 6 представлено векторное поле скоростей вблизи переднего уступа преграды толщиной $D = 0.01$ м в моменты времени $t = 7\text{--}8.5$ с. В момент времени $t = 7$ с – начало взаимодействия падающей волны с преградой (рис. 6, *a*); при $t = 7.5$ с – течение над преградой полностью установилось (рис. 6, *b*) и картина обтекания практически не отличается от рис. 6, *c*, при $t = 8.5$ с. Отметим, что волны в лотке при данной глубине воды распространяются со скоростью 1 м/с, в момент времени $t = 8.5$ с преграда расположена в срединной части волны, длина которой составляет около 3 м. Видно, что при обтекании волной угловой точки преграды происходит образование вихря малой интенсивности и возможен отрыв потока вблизи передней кромки.

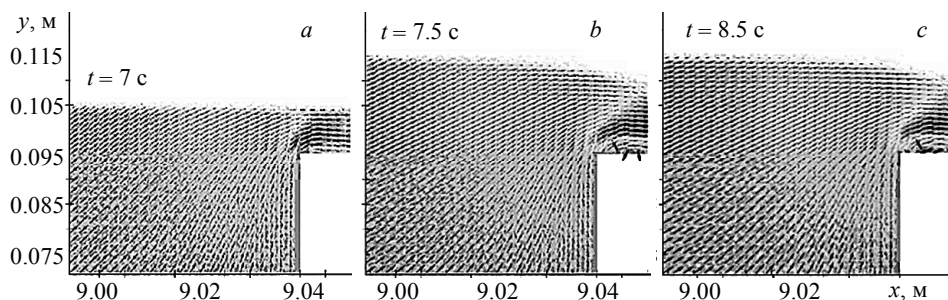


Рис. 6. Распределения векторов скорости в различные моменты времени для тонкой преграды $D = 0.01$ м

Fig 6. Distributions of the velocity vectors at different time instants for a thin obstacle of $D = 0.01$ m

Главной целью нашего исследования явилось выявление различных факторов, влияющих на суммарные потери энергии при прохождении гравитационной волны через преграду. Далее будет показано, что в наших условиях течение вблизи передней части преграды оказывает влияние лишь на величину отраженной волны. Основные потери энергии происходят над преградой и за её пределами, поэтому наибольший интерес представляет развитие течения за преградой.

На рис. 7 представлен типичный процесс эволюции течения за тонкой преградой в размерных координатах, при той же толщине преграды $D = 0.01$ м. В первый момент времени обтекание тонкой преграды близко к потенциальному обтеканию идеальной несжимаемой жидкостью (течение вдоль стенки за преградой направлено вниз), при этом скорость в верхней части преграды очень велика. Однако в соответствии с принципом Жуковского, жидкость стремится избежать бесконечно больших скоростей, поэтому образуется поверхность раздела и очень быстро формируется вихрь со встречным вращением вблизи преграды, который компенсирует эти слишком большие скорости (рис. 7, *a*). Со временем этот вихрь, захватывая новые порции жидкости, растет до предельной величины ($2R = H$) и распадается на два, три или более вихрей в зависимости от длины падающей на преграду волны (Рис. 7, *b–f*). В моменты времени, когда волна уже прошла через преграду и находится на расстоянии большем, чем длина волны λ (рис. 7, $t = 14$ с, $t = 16$ с) течение стабилизируется и можно увидеть четкие вихревые структуры различной интенсивности, которые, как будет показано в дальнейшем, аккумулируют вблизи преграды до 50 % энергии от падающей волны. Самый сильный вихрь по-прежнему находится рядом с преградой.

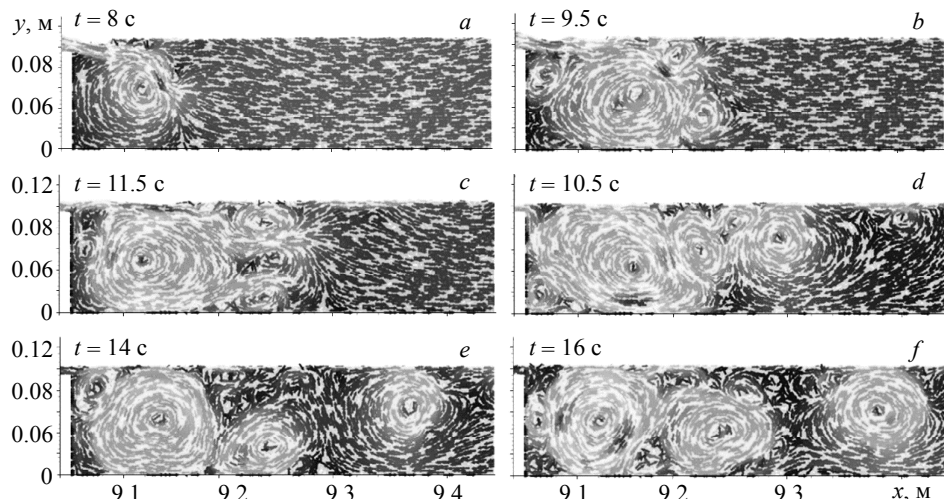


Рис. 7. Эволюция вихревого поля за преградой при $H = 0.103$ м, $A = 0.007$ м, $D = 0.01$ м
Fig. 7. Vortex field evolution behind the obstacle at $H = 0.103$ m, $A = 0.007$ m, and $D = 0.01$ m

Оценку эффективности преград обычно производят путем определения относительных энергий отражения Wr/W , прохождения Wt/W и суммарной энергии, на которую уменьшилась энергия падающей волны после взаимодействия с преградой $Wd/W = 1 - (Wr + Wt)/W$. Зависимость этих величин от безразмерной толщины преграды D/λ представлены на рис. 8.

Из рис. 8, *a* видно, что отраженная от преграды относительная энергия Wr для тонкой преграды ($D/\lambda < 0.005$) составляет около 25 % от энергии падающей волны. Далее, по мере увеличения толщины преграды, она увеличивается (до толщины D приблизительно равной $0.1\lambda = 30$ см), а затем остается практически неизменной и равной энергии, отраженной от преграды той же высоты, но бесконечной толщины, рассчитанной по линейной теории мелкой воды

$$\frac{Wr}{W} = \left(\frac{\sqrt{H} - \sqrt{H-h}}{\sqrt{H} + \sqrt{H-h}} \right)^2 = 0.32 \quad [1].$$

На рис. 8, *a* эта энергия показана пунктирной линией.

Относительная энергия прошедшей волны Wt для тонких преград составляет около 32 % от энергии падающей волны. Далее она сначала уменьшается, проходит через минимум (при $D/\lambda = 0.05$), затем, увеличиваясь, достигает максимума в 32 % (при $D/\lambda = 0.25$) и плавно убывает, при $D/\lambda \geq 0.50$ практически по линейной зависимости. Линейное убывание энергии, объясняется потерями на трение в пограничном слое и амплитудной дисперсией нелинейной волны над преградой, которые пропорциональны длине преграды.

Суммарные потери энергии на преграде Wd для тонких преград, при заданных условиях, равны 43 % от энергии падающей волны, и вся эта энергия аккумулируется в крупномасштабных вихревых структурах, возникающих за преградой (см. рис. 7). Далее, по мере увеличения толщины преграды потери уменьшаются, достигая минимума в 34 % при $D/\lambda \approx 0.25$, а затем плавно увеличиваются, при $D/\lambda \geq 0.50$ – практически по линейной зависимости.

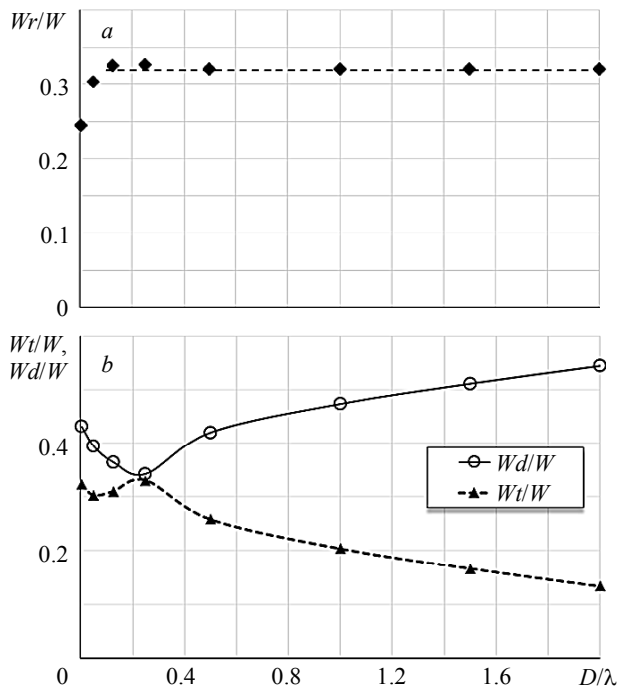


Рис. 8. Относительная энергия отраженной волны (W_r/W) (a); относительная энергия прошедшей волны (W_t/W) и относительные потери энергии волны на преграде W_d/W (b) в зависимости от толщины преграды D/λ

Fig. 8. a) Relative energy of the reflected wave (W_r/W); b) relative energy of the transmitted wave (W_t/W) and relative wave energy losses at the obstacle W_d/W as a function of the obstacle thickness D/λ

Рассмотрим более детально взаимодействие волн типа цунами с преградой толщиной $D = 2\lambda$. На рис. 9 приведена $x - t$ -диаграмма распространения волн в лотке при взаимодействии с этой преградой. На оси ординат местоположение преграды показано в виде серого прямоугольника.

Траектории отраженных от преграды волн показаны на рисунке тонкими сплошными линиями. Видно, что скорость распространения волн вне преграды, как и следовало ожидать, с высокой точностью равна расчетной скорости распространения малых возмущений в гидродинамическом лотке $c = \sqrt{gH} = 1.005$ м/с. Над преградой скорость фронта волны равна 0.468 м/с, в то время как скорость распространения малых возмущений (аналог скорости звука в сжимаемом газе) над преградой $c_1 = \sqrt{g(H-h)} = 0.280$ м/с, т.е. над преградой распространяется нелинейная волна с амплитудной дисперсией, при этом возможны обрушение и нелинейные потери энергии. Течение над преградой аналогично сверхзвуковому с числом Маха $M > 1$. В этом случае от передней кромки преграды возмущение в поток распространяется под углом α , тангенс которого равен углу Маха, что мы и наблюдаем на рис. 6. и на рис. 10, на котором представлено поле скоростей в окрестности передней части преграды толщиной $D = 6$ м $= 2\lambda$ в различные моменты времени.

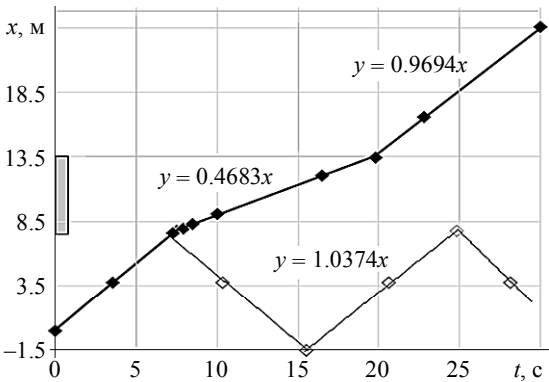


Рис. 9. Траектории волн в волновом лотке при $H = 0.103$ м, $A = 0.007$ м, $D = 6$ м
Fig. 9. Trajectories of waves in a wave flume at $H = 0.103$ m, $A = 0.007$ m, and $D = 6$ m

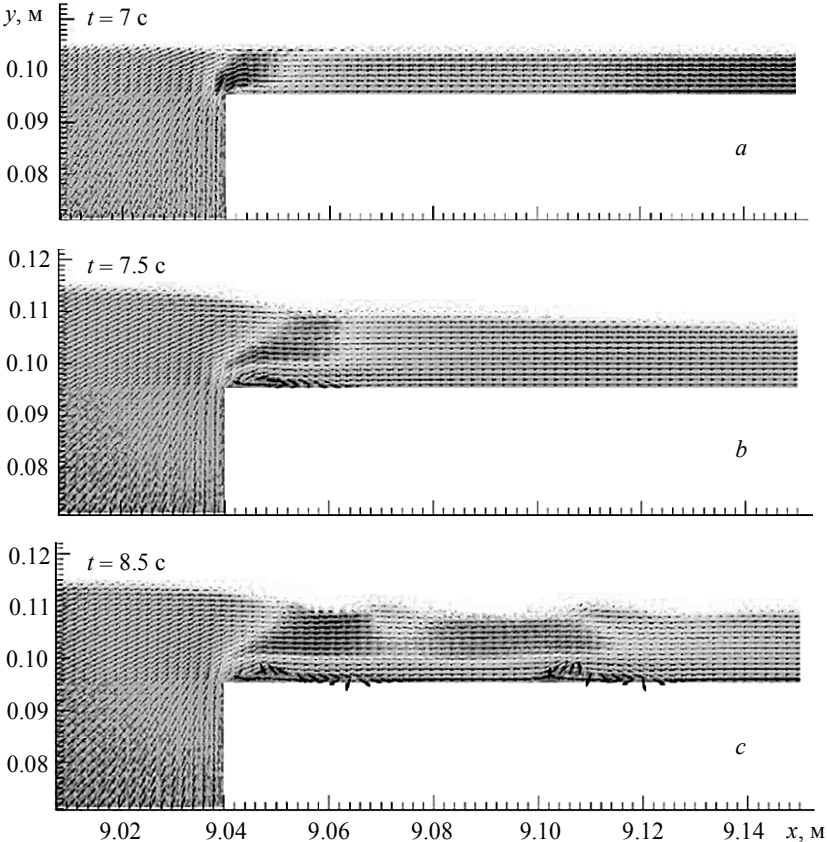


Рис. 10. Распределения векторов скорости в различные моменты времени для преграды $D = 6$ м
Fig 10. Distributions of the velocity vectors at different time instants for a thick obstacle with $D = 6$ m

При $t = 7$ с (рис. 10, *a*) фронт падающей волны, которая распространялась со скоростью 1.037 м/с, только приблизился к передней кромке преграды. При $t = 7.5$ с течение над преградой вблизи кромки практически сформировалось. Сравнивая рисунки 6 и 10, мы видим, что на расстоянии 0.01 м от передней кромки преграды обтекание преграды полностью идентично. Это свидетельствует о том, что информация о потоке над остальной частью преграды вперед не поступает (над преградой $M > 1$), именно этим и объясняется тот факт, что при толщине преграды больше приблизительно 30 см энергия в отраженной волне не изменяется и равна энергии, отражаемой от преграды бесконечной толщины. По-видимому, сложные волновые процессы с многочисленными отражениями волновых возмущений от свободной поверхности воды и верхней плоскости преграды, которые мы можем наблюдать на рис. 10 при $t = 8.5$ с, затухают приблизительно на этом расстоянии.

На рис. 11 представлены распределения скоростей в различные моменты времени за преградой толщиной $D = 6$ м. По сравнению с тонкой преградой сразу видны отличия в развитии течения. Максимальное распределение скоростей достаточно долго концентрируется именно в поверхностном слое. В первые моменты времени формируется плоская поверхность раздела продольных (тангенциальных к верхней плоскости преграды) скоростей. Над поверхностью раздела скорость равна скорости потока за фронтом нелинейной волны, которая распространялась над преградой, ниже поверхности раздела – застойная зона, скорости близкие к нулю. Однако вследствие неустойчивости поверхность раздела недолго сохраняет свою первоначальную форму [23]. Гребни и впадины случайных возмущений увеличиваются и, в конце концов, она распадается на отдельные вихри (рис. 11, *a*). Из-за случайного характера возмущений в конечной стадии распада поверхности раздела образуется беспорядочная последовательность больших и малых вихрей (рис. 11, *b-d*). В сравнении со случаем для короткой преграды (см. рис. 7) нужно отметить тот факт, что наиболее интенсивные вихри образуются очень далеко от преграды. Такой эффект наблюдается по мере увеличения ее толщины.

Толщина преграды D сильно сказывается на характере вихревого образования. Было замечено, что пока $D < \lambda$ характер вихреобразования очень схож со случаем для тонкой преграды. Количество сильных вихрей обычно не превышает трех, и образуются они сразу за преградой. Как только $D \geq \lambda$ течение за преградой становится похожим на случай, описанный на рис. 11.

На рис. 12 дан график отношения кинетической энергии к потенциальной в волне типа цунами при её взаимодействии с преградой $D = 6$ м. Как видно, отношение кинетической энергии к потенциальной в волнах, которые распространяются вне преграды, в точности равно единице. В нелинейной волне, над преградой, кинетическая энергия превышает потенциальную (рис. 12), при этом, вычисляя полную энергию волны, необходимо отдельно интегрировать вдоль волны и кинетическую и потенциальную энергию. Аналогично вычисляется энергия в непосредственной близости за преградой (рис. 12), где из-за интенсивного вихреобразования кинетическая энергия существенно превышает потенциальную.

На рис. 13 приведена относительная энергия в волне, распространяющейся в сторону возрастающих значений расстояний от генератора при ее взаимодействии с преградой толщиной $D = 6$ м. Перед преградой потери энергии происходят за счет отражения $Wr/W = 0.32$ и потерь на неупругий удар о торец преграды $\Delta W_s/W = 0.06$ [9]. Далее, вдоль распространения волны над преградой, добавляются потери обусловленные трением и нелинейностью $\Delta W_{f,n}/W = 0.25$.

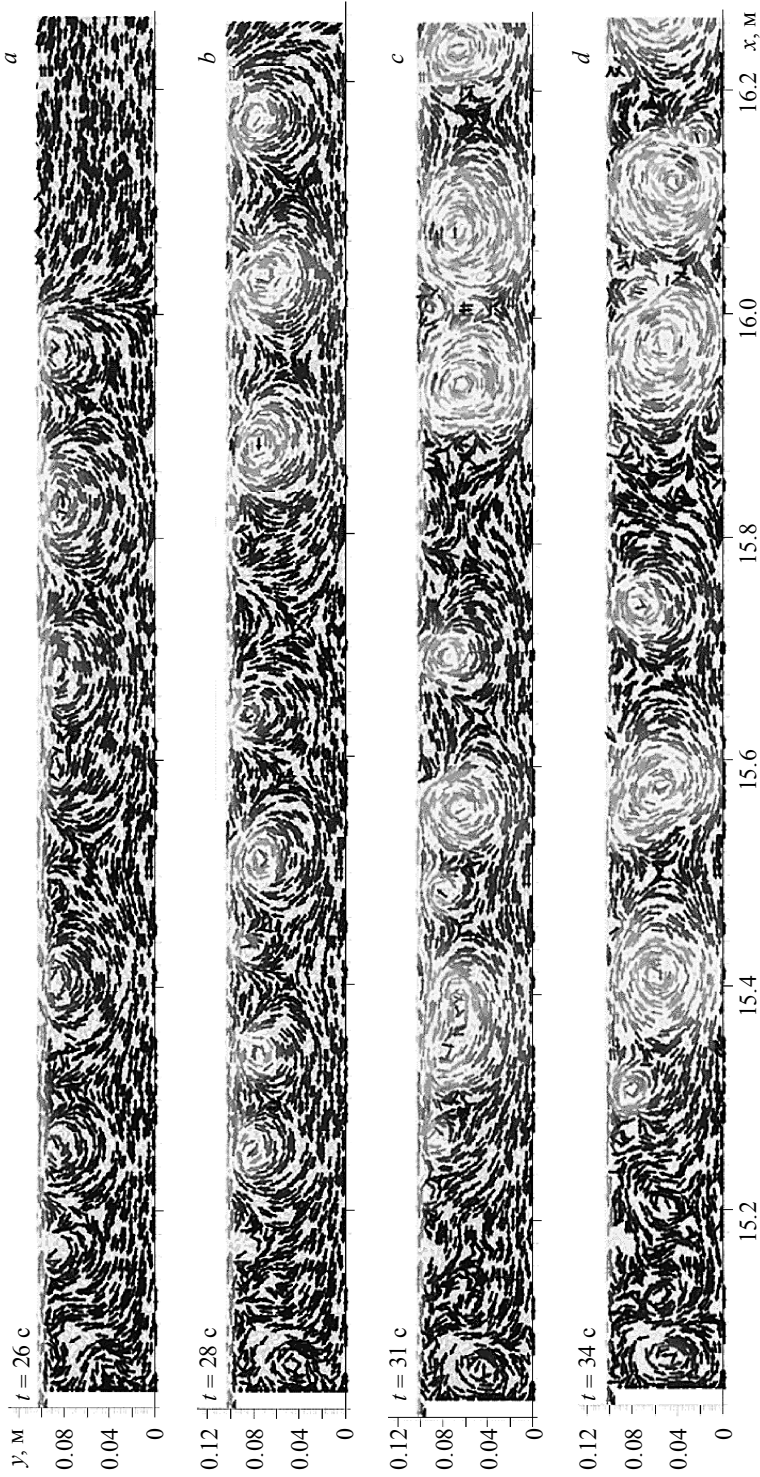


Рис. 11. Эволюция вихревого поля за преградой при $H = 0.103 \text{ м}$, $A = 0.007 \text{ м}$, $D = 6 \text{ м}$
 Fig. 11. Vortex field evolution behind the obstacle at $H = 0.103 \text{ m}$, $A = 0.007 \text{ m}$, and $D = 6 \text{ m}$

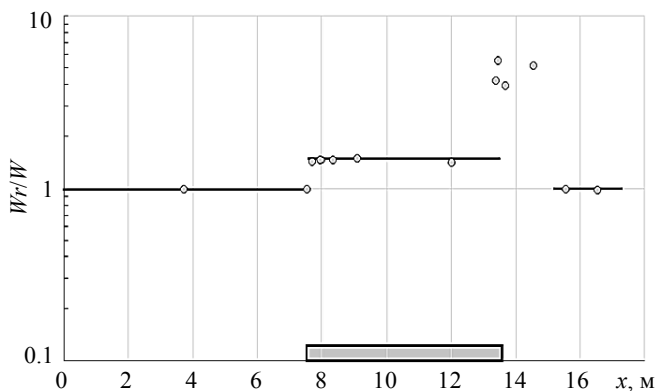


Рис. 12. Отношение кинетической энергии к потенциальной при $H = 0.103$ м, $A = 0.007$ м, $D = 6$ м

Fig. 12. Ratio of the kinetic energy to the potential energy at $H = 0.103$ m, $A = 0.007$ m, and $D = 6$ m

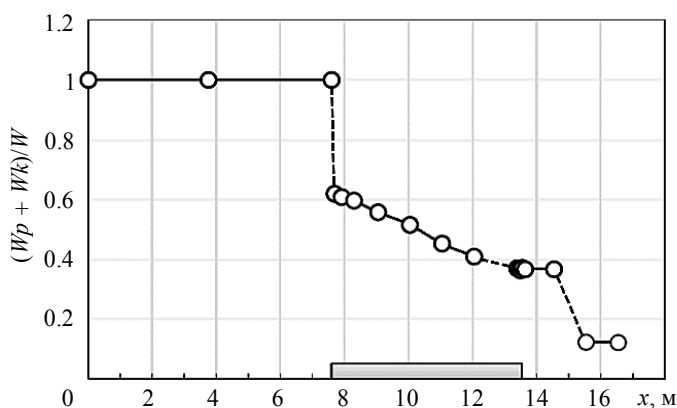


Рис. 13. Относительная энергия волны в зависимости от расстояния от генератора при $H = 0.103$ м, $A = 0.007$ м, $D = 6$ м

Fig. 13. Relative energy of the wave as a function of distance from the generator at $H = 0.103$ m, $A = 0.007$ m, and $D = 6$ m

За преградой имеют место, как и в случае тонких преград [7–10], довольно значительные вихревые потери $Wv/W = 0.25$ и только 12 % энергии от падающей волны остается в проходящей через преграду волне $Wt/W = 0.12$. Важно отметить, что если вихревые потери относить не к энергии падающей волны, а к энергии волны на конце преграды, то они в данном конкретном случае составят 68 %.

Заключение

В данном исследовании проводится подробный анализ нелинейного вязкого взаимодействия длинной гравитационной волны типа цунами с затопленной непроницаемой преградой различной толщины. Рассмотрены процесс генерации, распространения волны по каналу, взаимодействия с преградой, прохождением волны над преградой и процессы вихреобразования за преградой.

Используя численный метод расчета нестационарных осредненных уравнений Навье – Стокса для задачи со свободной поверхностью, были получены следующие результаты:

- Минимальная энергия в отраженных волнах, равная 25 % от энергии падающей волны, имеет место для тонких преград ($D \ll \lambda$). С увеличением толщины преграды энергия в отраженной волне увеличивается до 32 % (при $D = 0.1\lambda$) и далее не изменяется. При этом отраженная энергия для преград $D \geq 0.1\lambda$ с высокой точностью соответствует расчету по линейной теории для преграды бесконечной толщины.

- Максимальные вихревые потери за преградой, равные 43 % от энергии падающей волны, имеют место для тонких преград ($D \ll \lambda$). С увеличением толщины преграды до $D/\lambda = 0.25$ вихревые потери уменьшаются до 32–33 %, после чего темп падения значительно меньше, поэтому и при $D = 2\lambda$ вихревые потери за преградой составляют около 25 %.

- Кроме потерь на отражение и вихревых потерь на относительно толстых преградах имеют место потери на трение в пограничном слое и нелинейные потери, вследствие амплитудной дисперсии при движении волны над преградой. Эти потери нарастают практически линейно с увеличением толщины преграды и для преграды толщиной $D = 2\lambda$ они составили около 25 % от энергии падающей волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин Б.В., Носов М.А. Физика цунами и родственных явлений в океане. М.: Янус-К, 2005. 360 с.
2. Irtem E., Seyfioglu E., Kabdasli S. Experimental investigation on the effects of submerged breakwaters on tsunami run-up height // J. Coast. Res. 2001. SI 64. P. 516–520.
3. Irtem E., Seyfioglu E., Kabdasli S. Comparison of the effects of permeable, impermeable and monolithic vertical-face submerged breakwaters on tsunami run-up height // Twenty-second International Offshore and Polar Engineering Conference. International Society of Offshore and Polar Engineers. 2012. P. 1–6.
4. Saprykina Y., Kuznetsov S., Korzinin D. Nonlinear transformation of waves above submerged structures // Procedia Eng. 2015. V.116. P. 187–194.
5. Wu Y.-T., Hsiao S.-C., Huang Z.-C., Hwang K.-S. Propagation of solitary waves over a bottom-mounted barrier // Coastal Engineering. 2012. V.62. P. 31–47.
6. Фридман А.Н., Альперович Л.С., Шемер Л. и др. О подавлении волн цунами подводными барьерами // УФН. 2010. Т. 180. № 8. С. 843–850.
7. Бошенятов Б.В. О подавлении волн цунами подводными преградами // Доклады Академии наук. 2013. Т. 452. № 4. С. 392.
8. Бошенятов Б.В., Жильцов К.Н. Математическое моделирование взаимодействия длинных волн типа цунами с комплексом преград // Современные наукоемкие технологии. 2015. № 12-1. С. 20–23.
9. Бошенятов Б.В. О вихревом механизме подавления волн цунами подводными преградами // Доклады Академии наук. 2017. Т. 477. № 4. С. 485–487.
10. Boshenyatov B.V., Zhiltsov K.N. Simulation of the interaction of tsunami waves with underwater barriers // American Institute of Physics. Conference Series. 2016. V. 1770. No. 3. P. 030088.
11. Бошенятов Б.В., Жильцов К.Н., Попов В.В. Исследование взаимодействия волн цунами с подводными преградами // Материалы XII Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2016), 25–31 мая 2016 г., Алушта. М.: Изд-во МАИ, 2016. С. 495–497.

12. Qu K., Ren X.Y., Kraatz S. Numerical investigation of tsunami-like wave hydrodynamic characteristics and its comparison with solitary wave // *Applied Ocean Research*. 2017. V. 63. P. 36–48.
13. Бошнятов Б.В., Попов В.В. Экспериментальные исследования взаимодействия волн типа цунами с подводными преградами // *Изв. вузов. Физика*. 2012. Т. 55. № 9/3. С. 145–150.
14. Бошнятов Б.В. Исследования волн цунами в лабораторной установке // *Материалы XII Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2016)*, 25–31 мая 2016 г., Алушта. М.: Изд-во МАИ, 2016. С. 493–495.
15. Бошнятов Б.В. Исследование волн цунами в гидродинамическом лотке: эксперимент, теория, численное моделирование // *Материалы XX Юбилейной Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2017)*, 24–31 мая 2017 г., Алушта. М.: Изд-во МАИ. 2017. С. 620–622.
16. Бошнятов Б.В., Левин Ю.К., Попов В.В. Устройство измерения уровня воды // Патент РФ на изобретение № 2485452. Приоритет 07.10.2010. Заявка № 2010141060. Зарегистрировано 20.06.2013.
17. Бошнятов Б.В., Левин Ю.К., Попов В.В., Семянистый А.В. Метод измерения волн малой амплитуды на водной поверхности // *Приборы и техника эксперимента*. 2011. № 2. С. 116–118.
18. Бошнятов Б.В., Лисин Д.Г. Численное моделирование волн типа цунами в гидродинамическом лотке // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2013. № 6 (26). С. 45–55.
19. Hirt C.W., Nichols B.D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries // *J. Comput. Phys*. 1981. V. 39. P. 201–225.
20. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя: пер. с нем. М.: Наука, 1974. 712 с.
21. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости: пер. с англ. под ред. Виленского. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
22. OpenFOAM Foundation. OpenFOAM. User guide. Available at <http://www.openfoam.org>. 2016. 211 p.
23. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 576 с.

Статья поступила 15.12.2017 г.

Boshenyatov B.V., Zhil'tsov K.N. (2018) INVESTIGATION OF THE INTERACTION OF TSUNAMI WAVES AND SUBMERGED obstacleS OF FINITE THICKNESS IN A HYDRODYNAMIC WAVE FLUME. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 51. pp. 86–103

DOI 10.17223/19988621/51/8

This paper presents results of mathematical simulation of the interaction of long tsunami-like wave with a submerged obstacle in a wave flume. The calculations were performed using the OpenFOAM freeware package. The mathematical model included unsteady two-dimensional Navier-Stokes equations for an incompressible two-phase medium. The volume of fluid (VOF) method was used to indicate and evaluate the air–liquid interface.

The effects caused by the motion of a long wave with a specified amplitude over a submerged obstacle of various thicknesses were discussed in details. The wave amplitude, which is 30 times greater than the water depth, and the obstacle height stayed constant and corresponded to the conditions of maximum wave energy decrease. Numerical results show that the multiple vortex structures are formed behind the obstacle during the passage of the wave. The intensity of the vortex depends on the barrier size. The effectiveness of the submerged obstacle was estimated by evaluating the wave reflection and transmission coefficients using the energy integral method. The curves indicating a variation in the reflection and transmission coefficients due to the wave

interaction with obstacles of different thicknesses have been obtained. Finally, it has been confirmed that the wave energy in this case can be reduced from 43 % to 55 % after the passage of the wave through the obstacle. This energy decrease is caused by the intense vortex generation behind the barrier.

Keywords: tsunami wave, submerged obstacle, numerical simulation, hydrodynamic (wave) flume, vortex structures.

BOSHENYATOV Boris Vladimirovich (Doctor of Technical Sciences, Institute of Applied Mechanics Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation)
E-mail: bosbosh@mail.ru

ZHIL'TSOV Konstantin Nikolaevich (Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: konstantin@niipmm.tsu.ru

REFERENCES

1. Levin B.V., Nosov M.A. (2005) *Fizika tsunami i rodstvennykh yavleniy v okeane* [Physics of tsunamis and related phenomena in the ocean]. Moscow: Yanus-K.
2. Irtem E., Seyfioglu E., Kabdasli S. (2001) Experimental investigation on the effects of submerged breakwaters on tsunami run-up height. *J. Coast. Res.* 64. pp. 516–520.
3. Irtem E., Seyfioglu E., Kabdasli S. (2012) Comparison of the effects of permeable, impermeable and monolithic vertical-face submerged breakwaters on tsunami run-up height. *International Society of Offshore and Polar Engineers*. pp. 1–6.
4. Saprykina Y., Kuznetsov S., Korzinin D. (2015) Nonlinear transformation of waves above submerged structures. *Procedia Eng.* 116. pp. 187–194. DOI: 10.1016/j.proeng.2015.08.281.
5. Wu Y.T., Hsiao S.C., Huang Z.C., Hwang K.S. (2012) Propagation of solitary waves over a bottom-mounted barrier. *Coastal Engineering*. 62. pp. 31–47. DOI: 10.1016/j.coastaleng.2012.01.002.
6. Fridman A.M., Alperovich L.S., Shemer L., Pustilnik L.A., Shtivelman D., Marchuk A.G., Liberzon D. (2010) Tsunami wave suppression using submarine barriers. *Physics-Uspekhi*. 180(8). pp. 843–850. DOI: 10.3367/UFNr.0180.201008d.0843.
7. Boshenyatov B.V. (2013) Suppression of Tsunami Waves by Underwater Obstacles. *Doklady Physics*. 58(10). pp. 453–456. DOI: 10.7868/S0869565213290070.
8. Boshenyatov B.V., Zhil'tsov K.N. (2015) Matematicheskoye modelirovaniye vzaimodeystviya dlinnykh voln tipa tsunami s kompleksom pregrad [Mathematical simulation of the interaction of long tsunami type waves and complex of barriers]. *Modern High Technologies*. 12-1. pp. 20–23.
9. Boshenyatov B.V. (2017) The vortex mechanism of suppression of tsunami waves by underwater obstacles. *Doklady Earth Sciences*. 447(2). pp. 1434–1436. DOI: 10.1134/S1028334X17120017.
10. Boshenyatov B.V., Zhiltsov K.N. (2016) Simulation of the interaction of tsunami waves with underwater barriers. *American Institute of Physics. Conference Series*. 1770(3). p. 030088. DOI: 10.1063/1.4964030.
11. Boshenyatov B.V., Zhil'tsov K.N., Popov V.V. (2016) Issledovanie vzaimodeystviya voln tsunami s podvodnymi pregradami [Investigation of the interaction of tsunami waves with underwater obstacles]. *Proceedings of the XI International Conference on Nonequilibrium Processes in Nozzles and Jets. Alushta*. Moscow: MAI. pp. 495–497.
12. Qu K., Ren X.Y., Kraatz S. (2017) Numerical investigation of tsunami-like wave hydrodynamic characteristics and its comparison with solitary wave. *Applied Ocean Research*. 63. pp. 36–48. DOI: 10.1016/j.apor.2017.01.003.
13. Boshenyatov B.V., Popov V.V. (2012) Eksperimental'nye issledovaniya vzaimodeystviya voln tipa tsunami s podvodnymi pregradami [Experimental studies of the interaction of tsunami-like waves and underwater obstacles]. *Izv. Vyssh. Usheb. Zav. Fiz. J.* 55. 9/3. pp. 145–150.

14. Boshenyatov B.V. (2016) Issledovaniya voln tsunami v laboratornoy ustanovke [Studies of tsunami waves in a laboratory installation]. *Proceedings of the XI international conference on nonequilibrium processes in nozzles and jets. Alushta*. Moscow: MAI. pp. 493–495.
15. Boshenyatov B.V. (2017) Issledovaniye voln tsunami v gidrodinamicheskom lotke: eksperiment, teoriya, chislennoe modelirovanie [Investigation of tsunami waves in a hydrodynamic flume: experiment, theory, numerical simulation]. *Proceedings of the XX Anniversary International Conference of Computational Mechanics and Modern Applied Software Systems. Alushta*. Moscow: MAI. pp. 620–622.
16. Boshenyatov B.V., Levin Yu.K., Popov V.V. (2013) *Ustroystvo izmereniya urovnya vody* [Water level measuring device]. RF Patent 2485452.
17. Boshenyatov B.V., Levin Yu.K., Popov V.V., Semyanistyy A.V. (2011) A method for measuring small-amplitude waves on a water surface. *Instrum. Exp. Tech.* 54(2). pp. 254–255. DOI: 10.1134/S0020441211020229.
18. Boshenyatov B.V., Lisin D.G. (2013) Numerical simulation of tsunami type waves in a hydrodynamic channel. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 6(26). pp. 45–55.
19. Hirt C.W., Nichols B.D. (1981) Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *J. Comput. Phys.* 39. pp. 201–225. DOI: 10.1016/0021-9991(81)90145-5.
20. Schlichting H. (1951) *Grenzschicht-Theorie* [Boundary layer theory]. Karlsruhe: G. Braun.
21. Patankar S. (1980) *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. New York: Hemisphere.
22. OpenFOAM Foundation. OpenFOAM. User guide. Available at <http://www.openfoam.org>. 2016. p. 211.
23. Prandtl L. (1934) *Fundamentals of Hydro-and Aero-mechanics Based on Lectures of L. Prandtl*. London : McGraw-Hill.

УДК 531.351

DOI 10.17223/19988621/51/9

М.А. Бубенчиков, А.В. Уколов, Р.Ю. Уколов, С. Жамбаа**О СЕЛЕКТИВНЫХ СВОЙСТВАХ НАНОРАЗМЕРНОЙ БИФУРКАЦИИ**

Рассмотрены особенности прохождения молекул (атомов) через наноразмерную бифуркацию. Расчетами показано, что скопление массы атомов углеродной структуры в непосредственной близости от разветвления делает систему непроходимой для молекул метана. В то же время для атомов гелия бифуркация остается проницаемой. Определенное соотношение размеров пор и частиц обеспечивает разделительные свойства материала из компактированных углеродных наночастиц.

Ключевые слова: наночастицы, потенциал Леннарда – Джонса, молекулярная динамика, бифуркация, селективность, метан, гелий.

В последние десятилетия наблюдается значительный прогресс в развитии фундаментальных и прикладных исследований в направлении создания новых нанопористых материалов, используемых для разделения газовых смесей. В результате этого они нашли применение в задачах обогащения кислорода и водорода, восстановления CO до CO₂ и удаления углекислого газа из технологических смесей [1]. Дальнейшее развитие мембранных технологий и их расширяющееся промышленное применение зависит от разработки новых материалов и их композиций, обеспечивающих высокую селективность при применении их в качестве мембран в газоразделительных системах. Такие технологии отличает высокая эффективность, низкие эксплуатационные расходы, а также простота в употреблении [2–5]. Кроме того, поскольку мембраны не имеют никаких движущихся частей, их работа отличается стабильностью и поддается дистанционному регулированию. Следует также отметить, что при применении мембранных технологий в многоступенчатых системах очистки и обогащения имеется возможность контролировать скорость прохождения отдельных компонент на каждом этапе разделения. Большинство теоретических исследований связано с применением и развитие классического диффузионного подхода [2–5].

Полученные результаты [6] показывают, что мембранные процессы могут хорошо конкурировать с технологиями термического разделения даже при низких концентрациях гелия. Математическое моделирование мембранного модуля для удаления двуокиси углерода из метанового газа угольного пласта было рассмотрено в [7]. В работе [8] предложена оптимальная структура проектирования мембранных сетей, разделяющих многокомпонентные газовые смеси на основе модели смешанного целочисленного нелинейного программирования. Разработка математической модели для оптимизации мембранных газоразделительных модулей описана в [9]. Математическая модель процесса рециркуляции водорода с использованием мембран была предложена в работе [10]. Результаты [11] свидетельствуют о том, что с помощью палладиевой каталитической мембранной технологии в настоящее время возможна добыча сверхчистого водорода из ископаемых видов топлива. В [12] представлена разработанная и реализованная математическая модель нестационарных процессов разделения газа, протекающих в каскадах газо-

вых центрифуг в процессе сепарации многокомпонентных изотропных смесей. Проницаемость молекул N_2 , CH_4 , O_2 и CO_2 через молекулярное углеводородное сито была изучена в широком диапазоне давлений в работе [13]. Разработана математическая модель проницаемости и эффективной диффузии смешанных газов в стеклополимерных мембранах [14]. Авторами [15] проведено численное моделирование для прогнозирования степени разделения гелия и метана с использованием различных мембран. Повышение эффективности традиционных методов получения гелия, а также анализ новых технологий адсорбции и мембранного разделения газа был рассмотрен в [16]. Обзор [17] представляет текущее состояние исследовательской и патентной деятельности в области мембранных технологий выделения гелия. Результаты работы [18] показывают, что полимерные мембраны могут осуществлять различные стадии получения и очистки гелия в смесях природного газа. В работе [19] приводится оценка потенциала гидроксидалитовых мембран для сепарации гелия из природного газа. Авторами статьи [20] продемонстрировано, что пористый силицен можно использовать в качестве эффективной мембраны для получения гелия. В [21] описывается создание изолированных частиц углерода путем тушения плазмы аргона с помощью гелиевых импульсов. В [22] показано, что пористый углерод может быть получен посредством химической активации, а также с помощью шаблонов из различных материалов, обеспечивающих генерацию иерархических пор. Авторами [23] были синтезированы полые углеродные сферы с билюдальными мезопорами. Основными способами создания этих полых сфер являются жесткие [24, 25] и мягкие [26–28] шаблоны.

Вопросы математического моделирования проницаемости на базе молекулярно-кинетических моделей рассмотрены в работах [29–40].

Целью данной работы является изучение проницаемости углеродных структур со сложными порами и определение её селективности в отношении метан-гелиевой смеси.

Модель одиночной частицы

Поскольку поры мембран имеют размер 10^{-9} м, а средняя длина свободного пробега молекул газов при нормальных условиях порядка 10^{-7} м, то для описания взаимодействия молекул со структурой необходимо использовать модель разреженного газа либо метод одиночной частицы.

Уравнения динамики перемещающейся молекулы запишем в стандартной форме в виде второго закона Ньютона, который в проекциях на оси декартовых координат имеет вид

$$m \frac{du}{dt} = \sum_{j=1}^{N_p} X_j, \quad m \frac{dv}{dt} = \sum_{j=1}^{N_p} Y_j, \quad m \frac{dw}{dt} = \sum_{j=1}^{N_p} Z_j. \quad (1)$$

Здесь m – масса пробной частицы, пропускаемой через фильтр, N_p – количество частиц, составляющих фрагмент структуры; X_j , Y_j , Z_j – проекции сил взаимодействия пробной молекулы и j -й наночастицы, которые определяются следующим образом:

$$X_j = a_j \frac{x - x_j^0}{\rho_j} m, \quad Y_j = a_j \frac{y - y_j^0}{\rho_j} m, \quad Z_j = a_j \frac{z - z_j^0}{\rho_j} m, \quad (2)$$

где x , y , z – начальные координаты задающие расположение пробной частицы, x_j^0 , y_j^0 , z_j^0 – координаты частиц, образующих канал, a_j – величина ускорения, приобретаемого пробной молекулой под действием j -й наночастицы.

Потенциал взаимодействия наночастица – молекула выбирается в форме, предложенной В.Я. Рудяком и С.Л. Краснолуцким [41]:

$$\Phi_9(\rho_j) = \Phi_9(\rho_j) - \Phi_3(\rho_j). \quad (3)$$

Здесь ρ_j – расстояние от центра наночастицы до центра пробной молекулы, ρ_p – радиус наночастицы,

$$\Phi_9(\rho_j) = C_9 \left\{ \left[\frac{1}{(\rho_j - \rho_p)^9} - \frac{1}{(\rho_j + \rho_p)^9} \right] - \frac{9}{8\rho_j} \left[\frac{1}{(\rho_j - \rho_p)^8} - \frac{1}{(\rho_j + \rho_p)^8} \right] \right\}; \quad (4)$$

$$\Phi_3(\rho_j) = C_3 \left\{ \left[\frac{1}{(\rho_j - \rho_p)^3} - \frac{1}{(\rho_j + \rho_p)^3} \right] - \frac{3}{2\rho_j} \left[\frac{1}{(\rho_j - \rho_p)^2} - \frac{1}{(\rho_j + \rho_p)^2} \right] \right\}. \quad (5)$$

Тогда величина ускорения a_j , входящая в правые части соотношений (2), будет являться производной от (3) по ρ_j , деленной на массу m :

$$a_j = \frac{1}{m} \frac{d}{d\rho_j} \Phi_9(\rho_j) = \frac{1}{m} \left[\frac{d}{d\rho_j} \Phi_9(\rho_j) - \frac{d}{d\rho_j} \Phi_3(\rho_j) \right]. \quad (6)$$

При этом $C_9 = \frac{4\pi\epsilon_{12}\sigma_{12}^{12}}{45V_1}$, $C_3 = \frac{2\pi\epsilon_{12}\sigma_{12}^6}{3V_1}$, V_1 – объем физического пространства,

приходящийся на один атом углерода в кристаллической структуре алмаза. Потенциал (3) получен интегрированием парного LJ -потенциала по объему наночастицы [41].

Значения констант взаимодействия ϵ и σ , входящих в LJ -потенциал, для некоторых пар одинаковых молекул приведены в табл. 1 [42,43].

Взаимодействующие молекулы	Относительная глубина потенциальной ямы, К	Радиус влияния потенциала взаимодействия, нм
C – C (1)	$\epsilon/k = 51,2$	$\sigma = 0,335$
He – He (2)	$\epsilon/k = 10,2$	$\sigma = 0,228$
H ₂ – H ₂ (3)	$\epsilon/k = 34$	$\sigma = 0,29$
O ₂ – O ₂ (4)	$\epsilon/k = 117$	$\sigma = 0,35$
CH ₄ – CH ₄ (5)	$\epsilon/k = 148$	$\sigma = 0,38$

Примечание: k – постоянная Больцмана.

Параметры ϵ_{12} и σ_{12} определяются по формулам

$$\sigma_{12} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}, \quad \epsilon_{12} = (\epsilon_{11} \cdot \epsilon_{22})^{1/2}. \quad (7)$$

Если дополнить уравнения (1) кинематическими соотношениями

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w, \quad (8)$$

то получим систему шести дифференциальных уравнений первого порядка для движения пробной молекулы через структуру частиц. Эти уравнения с очевидными начальными условиями будем решать численно явными методами пошаговых вычислений.

Для сферических частиц, обладающих центральной симметрией, зависимость потенциала взаимодействия частицы от угла ее ориентации по отношению к направлению движения будет отсутствовать.

Учет несферической формы проникающих молекул

Взаимодействие молекул с нанопористыми структурами, составленными теми или иными фрагментами, можно представить как взаимодействие системы атомов, входящих в молекулу с теми же фрагментами структуры. Такой подход является простым в реализации. Архитектура расположения атомов известна для каждой молекулы. Поэтому многоатомную молекулярную систему удобно рассматривать как недеформируемую стержневую конструкцию, в узлах которой сосредоточена основная масса молекулы, а сами стержни моделируют устойчивые химические связи. При этом тепловые колебания атомов составляют не более 10 % от межатомных расстояний.

В результате уравнение движения центра масс многоатомной молекулы можно записать следующим образом:

$$m \frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = - \sum_{i=1}^S \sum_{k=1}^{N_p} \text{grad } U(r_{ik}). \quad (9)$$

Здесь m – масса молекулы, $\mathbf{v}_c$ – скорость центра масс перемещающейся молекулы, S – число атомов в молекуле, N_p – количество сферических частиц, составляющих структуру пористого материала, $r_{ik} = \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2}$, $U(r)$ – потенциал взаимодействия «атом – сферическая частица», зависящий от сорта атома (в нашем случае либо углерод, либо водород).

Как видим из (9), движение центра масс многоатомной молекулы определяется суммой сферических воздействий на пористый материал, который в нашем случае представлен также сферическими воздействиями, от атомов, составляющих молекулу.

Если рассматривается проникновение молекулы метана, то в ней центры атомов водорода находятся в вершинах тетраэдра, а в центре масс этой системы находится атом углерода. Тетраэдрический валентный угол составляет 109° , а расстояние от атома углерода до любого из атомов водорода составляет величину 0.109 нм. Тетраэдр имеет множество плоскостей симметрии. В результате имеем компактную укладку атомов, а сама конструкция является высокосимметричной. Поэтому для прохождения такой молекулы через извилистые нанопоры вряд ли будет важна ориентация молекулы в пространстве.

Бывают вытянутые молекулы, ориентация осей которых очень важна в смысле их прохождения через узкие поры. Вытянутыми можно считать все двухатомные молекулы, а также молекулы C_2H_6 , C_3H_8 и т.д. Однако у метана все линейные размеры, спроецированные на ортогональный декартовый базис практически одинаковы. Тем не менее движение молекулы метана как пирамидальной конструкции может быть определено более точно, нежели через эффективное молекулярное воздействие. Для этого необходимо использовать атомное представление молекулы и эйлеров подход, ставший классическим при описании движения тел в пространстве.

Согласно этому подходу, положение тела наряду с тремя координатами центра масс определяется еще и тремя углами Эйлера. Следовательно, в общем случае

наряду с уравнением (9) должны использоваться еще три скалярных уравнения для проекций вектора угловой скорости на подвижные, связанные с каркасной структурой молекулы оси координат (динамические уравнения Эйлера). Полученная таким образом система уравнений динамики дополняется связями проекций вектора мгновенной угловой скорости с углами Эйлера, получившими название кинематических соотношений Эйлера.

В нашем примере с метаном потенциальное поле весьма грубо, но все-таки можно принять сферическим. При этом, однако, атомы следует считать разнесенными в пространстве, тогда ближние взаимодействия молекулы будут реализовываться непосредственно через атомы водорода. Если принять, что повороты молекулы метана не так важны, и рассматривать ее движение как поступательное, то движение пирамидальной конструкции будет определяться уравнением (9), которое необходимо дополнить кинематическими векторным соотношением:

$$\frac{d\mathbf{r}_c}{dt} = \mathbf{v}_c. \quad (10)$$

Тогда система (9), (10) будет замкнутой и ее можно будет интегрировать численно.

Система (9), (10) должна интегрироваться со следующими начальными условиями:

$$t = 0, \quad \mathbf{v}_c = \mathbf{v}_c^0, \quad \mathbf{r}_c = \mathbf{r}_c^0.$$

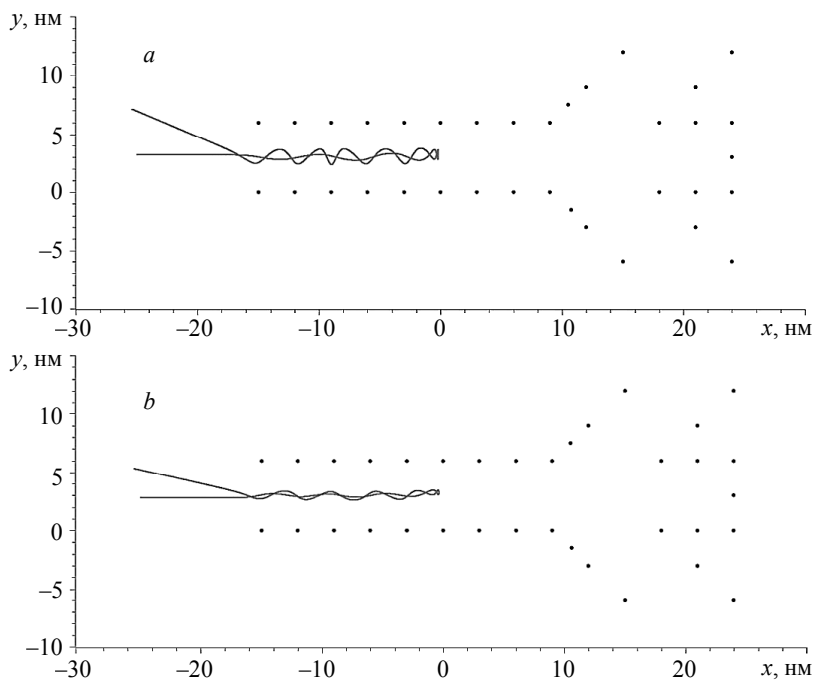
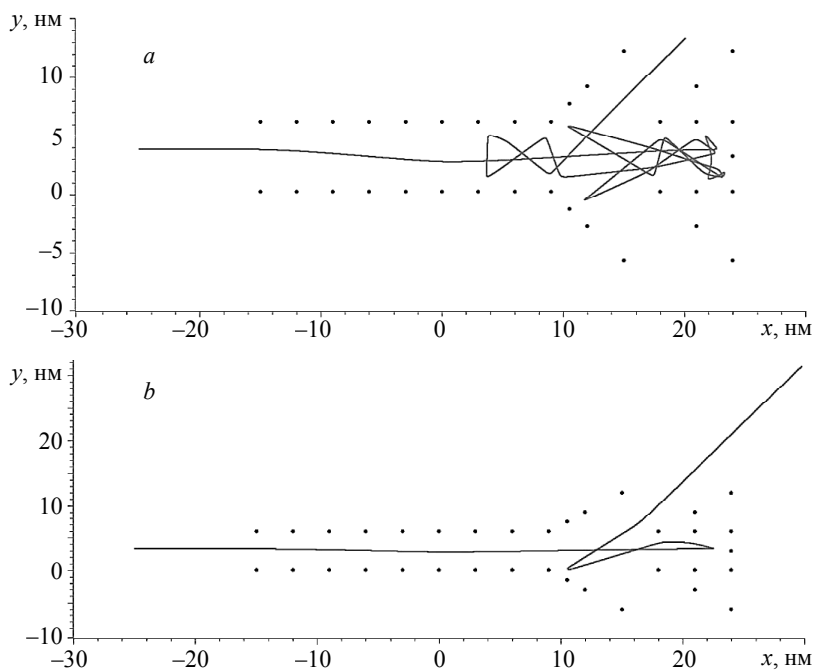
где $\mathbf{r}_c$ – радиус-вектор центра масс молекулы; $\mathbf{v}_c$ – скорость центра масс молекулы; индекс «ноль» относится к начальному моменту времени.

Расчеты, проведенные по модели эффективной молекулы, а также по модели совокупности атомов, дали практически одинаковые результаты.

Результаты расчетов

На первый взгляд кажется, что прохождение или не прохождение молекул через нанопоры определяется лишь поперечным размером этой поры, однако, это не так. Приводимые ниже расчеты демонстрируют, что разветвление канала само по себе является фактором селективности в задачах прохождения молекул через нанопористые слои. Ниже рассмотрена бифуркация канала, стенки которой составлены компактированными углеродными наночастицами радиуса 1 нм. Расстояние между частицами, формирующими стенку, такое, что молекулы рассматриваемых компонент не проходят между частицами стенки. Центры наночастиц лежат в одной плоскости, это снижает размерность задачи и соответственно уменьшает вариативность в отношении способов прохождения молекул через поры. При этом, однако, принципиальные вопросы селективности могут быть рассмотрены в более экономичном режиме на базе плоских задач.

Рассмотрим движения молекул метана в бифуркации. Как показывают расчеты, все молекулы метана возвращаются на исходную позицию, хотя если соответствующий канал сделать прямолинейным, то все молекулы свободно проходят через него (см. рис. 1). Необходимо отметить, что при нормальных условиях наиболее вероятная скорость движения молекул метана составляет величину 550 м/с. Если начальную скорость еще увеличить, то тяжелые молекулы метана, обладающие значительной инерцией в сравнении с гелием, еще раньше столкнутся с частицами разветвления и выйдут обратно из основного канала. В то же время малоинерционные атомы гелия в конце концов всегда проходят через разветвление (рис. 2). Наиболее вероятная скорость движения атомов гелия 1100 м/с.

Рис. 1. Траектории молекул метана при $v_0 = 650$ (a) и 550 м/с (b)Fig. 1. Trajectories of methane molecules at $v_0 = 650$ (a) and 550 m/s (b)Рис. 2. Траектории атомов гелия при $v_0 = 1200$ (a) и 1100 м/с (b)Fig. 2. Trajectories of helium atoms at $v_0 = 1200$ (a) and 1100 m/s (b)

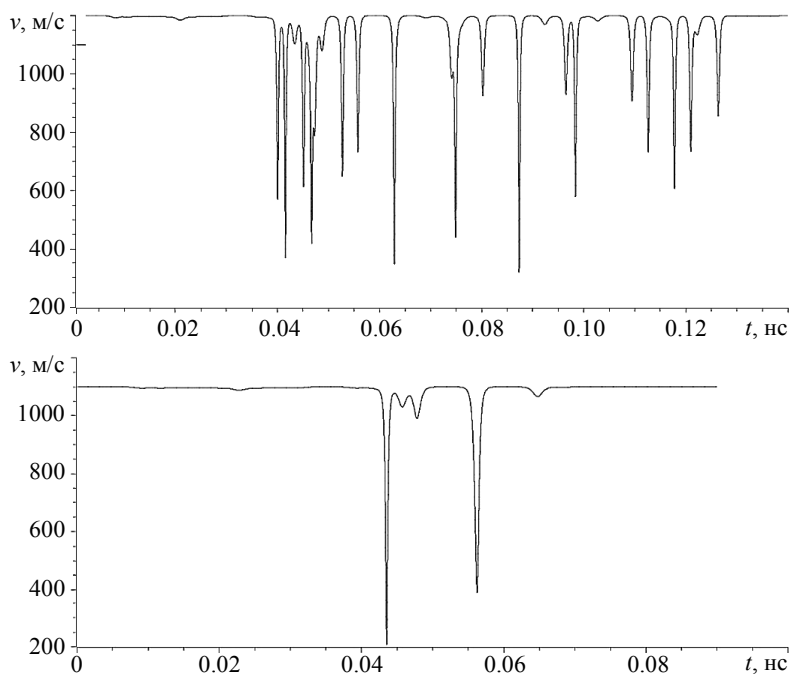


Рис. 3. Мгновенные значения скоростей атомов гелия при $v_0 = 1200$ (a) и 1100 м/с (b)
Fig. 3. Instantaneous velocities of helium atoms at $v_0 = 1200$ (a) and 1100 m/s (b)

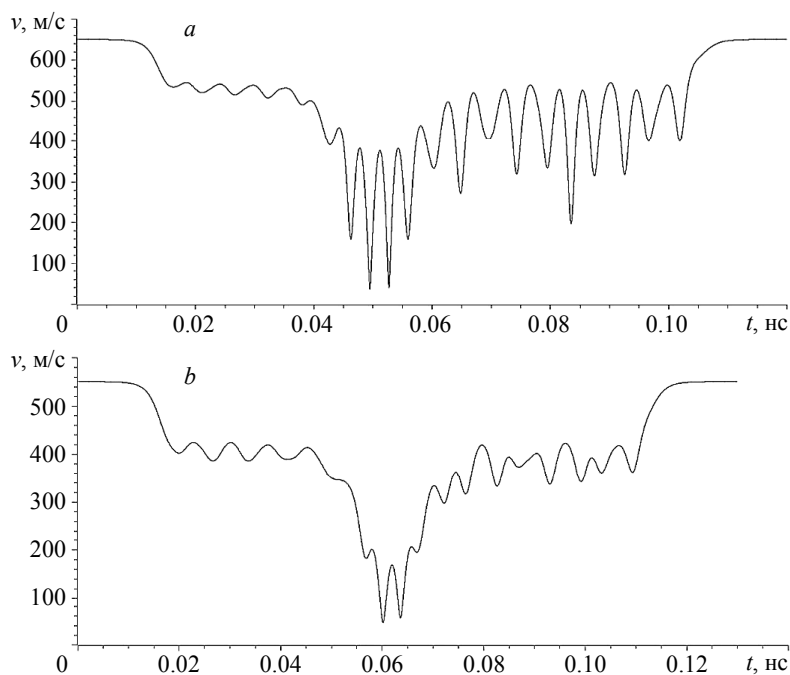


Рис. 4. Мгновенные значения скоростей молекул метана при $v_0 = 650$ (a) и 550 м/с (b)
Fig. 4. Instantaneous velocities of methane molecules at $v_0 = 650$ (a) and 550 m/s (b)

Искривление стенок наноканала не является препятствием и для относительно быстрых атомов гелия, которые из-за небольшой массы перемещающейся частицы успевают прореагировать на изменения в поле потенциальных взаимодействий, образованном частицами стенок каналов.

На рис. 3, 4 представлены зависимости локальных скоростей атомов гелия и молекул метана как функций времени. Из представленных распределений видно, что можно выделить определенную частоту колебаний скорости, связанную с величиной начальной скорости молекул и шириной каналов, составляющих бифуркацию.

Результат, заключающийся в регулярности ударов молекул о стенку канала, можно использовать в дальнейшем при построении неадиабатических моделей взаимодействий молекул со структурой.

Заключение

Математическое моделирование оказалось простым и эффективным в случае использования в качестве наночастиц идеальных шаров из углеродного материала. В этом случае для расчетов можно использовать центральносимметричный потенциал взаимодействия, а из шаров можно составлять фрагменты нанопористой структуры. Сконструировав таким образом наноразмерную бифуркацию, мы получили неочевидный результат, заключающийся в том, что разветвление канала заметным образом сдерживает молекулы метана, увеличивая тем самым селективность разделения метаново-гелиевых смесей, отделяемых с помощью слоев из компактированных углеродных наночастиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Vu D.Q., Koros W.J., Viller S.J.* Mixed matrix membranes using carbon molecular sieves: I. Preparation and experimental results // *J. Membr. Sci.* 2003. V. 211. P. 311–334. DOI: 10.1016/S0376-7388(02)00429-5.
2. *Baker R.* Membrane technology and applications. 2nd ed. Wiley, 2004. 538 p. DOI: 10.1002/0470020393
3. *Wallace D.W., Staudt-Bickel C., Koros W.J.* Efficient development of effective hollow fiber membranes for gas separations from novel polymers // *J. Membr. Sci.* 2006. V. 278. P. 92–104. DOI: 10.1016/j.memsci.2005.11.001.
4. *Javaid A.* Membranes for solubility-based gas separation applications // *Chem. Eng. J.* 2005. V. 112. P. 219–226. DOI: 10.1016/j.cej.2005.07.010.
5. *Membrane Handbook* / ed. by W.S. Winston Ho, K.K. Silkar. New York, London, 1992. 886 p. DOI: 10.1007/978-1-4615-3548-5.
6. *Alders M., Winterhalder D., Wessling M.* Helium recovery using membrane processes // *Separation and Purification Technology* 2017. V. 189. P. 433–440. DOI: 10.1016/j.seppur.2017.07.084.
7. *Ko D.* Optimization of hollow fiber membrane modules to sequester carbon dioxide // *J. Membr. Sci.* 2018. V. 546. P. 270–283. DOI: 10.1016/j.memsci.2017.09.039.
8. *Qi R., Henson M.* Membrane system design for multicomponent gas mixtures via mixed-integer nonlinear programming // *Computers and Chemical Engineering*. 2000. V. 24. P. 2719–2737. DOI: 10.1016/S0098-1354(00)00625-6.
9. *Labadini H., Al-Enezi G., Ettouney H.* Optimization of module configuration in membrane gas separation // *J. Membr. Sci.* 1996. V. 112 (2). P. 185–197. DOI: 10.1016/0376-7388(95)00283-9
10. *Zhang D., Wang H., Li C., Meng H.* Modeling of purge-gas recovery using membrane separation // *Chemical Engineering Research and Design*. 2017. V. 125. P. 361–366. DOI: 10.1016/j.cherd.2017.07.002

11. Saeidi S., Fazlollahi F., Najari S., Iranshahi D., Klemeš J., Baxter L. Hydrogen production: Perspectives, separation with special emphasis on kinetics of WGS reaction: A state-of-the-art review // J. Industrial and Engineering Chemistry 2017. V. 49. P. 1–25. DOI: 10.1016/j.jiec.2016.12.003.
12. Orlov A., Ushakov A., Sovach V. Mathematical Model of Nonstationary Separation Processes Proceeding in the Cascade of Gas Centrifuges in the Process of Separation of Multicomponent Isotope Mixtures // J. Engineering Physics and Thermophysics 2017. V. 90 (2). P. 258–265. DOI: 10.1007/s10891-017-1563-4.
13. Pirouzfard V., Omidkhah M. Mathematical modeling and optimization of gas transport through carbon molecular sieve membrane and determining the model parameters using genetic algorithm // Iranian Polymer J. (English Edition). 2016. V. 25 (3). P. 203–212. DOI: 10.1007/s13726-016-0414-z.
14. Saberi M., Hashemifard S., Dadkhah A. Modeling of CO₂/CH₄ gas mixture permeation and CO₂ induced plasticization through an asymmetric cellulose acetate membrane // RSC Advances. 2016. V. 6 (20). P. 16561–16567. DOI: 10.1039/C5RA23506E.
15. Kadioglu O., Keskin S. Efficient separation of helium from methane using MOF membranes// Separation and Purification Technology 2018. V. 191. P. 192–199. DOI: 10.1016/j.seppur.2017.09.031.
16. Rufford T., Chan K., Huang S., May E. A review of conventional and emerging process technologies for the recovery of helium from natural gas // Adsorption Science and Technology 2014. V. 32 (1). P. 49–72. DOI: 10.1260/0263-6174.32.1.49.
17. Scholes C., Ghosh U. Review of membranes for helium separation and purification // Membranes. 2017. V. 7 (1). Ar. № 9. DOI: 10.3390/membranes7010009.
18. Scholes C., Ghosh U. Helium separation through polymeric membranes: selectivity targets // J. Membr. Sci. 2016. V. 520. P. 221–230. DOI: 10.1016/j.memsci.2016.07.064.
19. Vaezi M., Bayat Y., Babaluo A., Shafiei S. Separation of helium from gases using the synthesized hydroxy sodalite membrane // Scientia Iranica. 2016. V. 23 (3). P. 1136–1143. DOI: 10.24200/SCI.2016.3884.
20. Hu W., Wu X., Li Z., Yang J. Helium separation via porous silicene based ultimate membrane // Nanoscale 2013. V. 5 (19). P. 9062–9066. DOI: 10.1039/c3nr02326e.
21. Abdul Wasy Zia, Zhifeng Zhou, Lawrence Kwok-Yan Li, A new approach to create isolated carbon particles by sputtering: A detailed parametric study and a concept of carbon particles embedded carbon coatings // Diamond and Related Materials. 2017. V. 76. P. 97–107. ISSN 0925-9635. DOI: 10.1016/j.diamond.2017.04.014.
22. Serene Wen Ling Ng, Gamze Yilmaz, Wei Li Ong, Ghim Wei Ho. One-step activation towards spontaneous etching of hollow and hierarchical porous carbon nanospheres for enhanced pollutant adsorption and energy storage // Applied Catalysis B: Environmental. V. 220. 2018. P. 533–541. ISSN 0926-3373. DOI: 10.1016/j.apcatb.2017.08.069.
23. You B., Yang J., Sun Y., Su Q. Easy synthesis of hollow core, bimodal mesoporous shell carbon nanospheres and their application in supercapacitor // Chem. Commun. 2011. V. 47. P. 12364–12366. DOI: 10.1039/C1CC15348J.
24. Cao J., Zhu Y., Shi L., Zhu L., Bao K., Liu S., Qian Y. Double-shelled Mn₂O₃ hollow spheres and their application in water treatment // Eur. J. Inorg. Chem. 2010 (2010). P. 1172–1176. DOI: 10.1002/ejic.200901116.
25. Zang Z., Wen M., Chen W., Zeng Y., Zu Z., Zeng X., Tang X. Strong yellow emission of ZnO hollow nanospheres fabricated using polystyrene spheres as templates // Mater. Des. 2015. V. 84. P. 418–421. DOI: 10.1016/j.matdes.2015.06.141.
26. Zhang Z., Qin M., Jia B., Zhang H., Wu H., Qu X. Facile synthesis of novel bowl-like hollow carbon spheres by the combination of hydrothermal carbonization and soft templating // Chem. Commun. 2017. V. 53. P. 2922–2925. DOI: 10.1039/C7CC00219J.
27. Sasidharan M., Gunawardhana N., Senthil C., Yoshio M. Micelle templated NiO hollow nanospheres as anode materials in lithium ion batteries // J. Mater. Chem. A. 2014. No. 2. P. 7337. DOI: 10.1039/C3TA14937D.

28. Liu J., Yang T., Wang D.W., Lu G.Q., Zhao D., Qiao S.Z. A facile soft-template synthesis of mesoporous polymeric and carbonaceous nanospheres // Nat. Commun. 2013. No. 4. DOI: 10.1038/ncomms3798.
29. Бубенчиков М.А. Об идеальных колебаниях нанотрубок в естественном магнитном поле // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2010. № 2 (10). С. 45–52.
30. Бубенчиков М.А. Движение нанотрубок в воздушной среде под воздействием электромагнитного поля // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2010. № 4 (12). С. 68–77.
31. Бубенчиков М.А. Расчет аэродинамики циклонной камеры // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2011. № 1(13). С. 67–73.
32. Бубенчиков М.А. Способ минимизации схемной диффузии в численной модели аэродинамики // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2011. № 2 (14). С. 79–84.
33. Бубенчиков М.А. Механическое сопротивление компактных наночастиц в воздушной среде // Изв. вузов. Физика. 2011. № 1. С. 92–96.
34. Бубенчиков М.А., Потеев А.И. Седиментация наночастиц в поле центробежных сил // Изв. вузов. Физика. 2011. № 2. С. 74–80.
35. Бубенчиков М.А. Движение частиц ксенона в циклонной камере // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. № 1 (17). С. 61–67.
36. Бубенчиков М.А. Двухфазная фильтрация в анизотропном пространстве // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 6 (26). С. 70–78.
37. Бубенчиков М.А. Математическая модель динамики электролита в магнитном поле // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2008. № 2 (3). С. 72–86.
38. Бубенчиков М.А. Движение углеродных нанотрубок в поле градиента температуры // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 4 (30). С. 63–70.
39. Бубенчиков М.А. Проницаемость туннеля из сферических наночастиц // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 5 (31). С. 69–75.
40. Бубенчиков М.А. О решении нестационарного уравнения Шредингера // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 5 (43). С. 28–34. DOI: 10.17223/19988621/433/3.
41. Rudyak V.Ya., Krasnolutskiy S.L. The calculation and measurements of nanoparticles diffusion coefficient in rarefied gases // J. Aerosol Science. 2003. V. 34. Suppl. 1. P. 579–580. DOI: 10.1016/S0021-8502(03)00148-4.
42. Глушко В.П. Термодинамические и теплофизические свойства продуктов сгорания. Т. 1. М., 1971. 263 с.
43. Справочник химика. Т. 1. / под ред. Б.П. Никольского. М.; Л.: Химия, 1982. 1072 с.

Статья поступила 23.07.2017 г.

Bubenchikov M.A., Ukolov A.V., Ukolov R.Yu., Jambaa S. (2018) ON THE SELECTIVE PROPERTIES OF NANOSCALE BIFURCATION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 51. pp. 104–116

DOI 10.17223/19988621/51/9

The motion of molecules and atoms in the space filled with spherical carbon nanoparticles is studied in the framework of Newtonian dynamics. The analytical distribution for a centrally symmetric potential of the molecule–nanoparticle interaction is essentially used in the numerical solution of the problem. Consideration of the process is based on the analysis of selective properties of the material composed of the particles with respect to separation of methane–helium mixtures.

The features of the passage of molecules (atoms) through a nanoscale bifurcation are considered. Calculated results show that the mass of carbon structure atoms accumulating in the immediate vicinity of branching makes the system impassable for methane molecules. At the same time, for helium atoms, the bifurcation remains permeable. A certain ratio of the pore size to the particle size provides separating properties of the material composed of compacted carbon nanoparticles.

Keywords: nanoparticles, Lennard-Jones potential, molecular dynamics, bifurcation, selectivity, methane, helium.

BUBENCHIKOV Mikhail Alekseevich (Candidate of Physics and Mathematics, GazpromTransgaz Tomsk Ltd., Tomsk, Russian Federation)

E-mail: michael121@mail.ru

UKOLOV Anton Vadimovich (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: Ukolov33@gmail.com

UKOLOV Roman Yur'evich (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: roman_ukolov@bk.ru

JAMBAA Soninbayar (School of Engineering and Applied Sciences, National University of Mongolia, Ulaanbaatar, Mongolia, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: jsoninbayar@yahoo.com

REFERENCES

1. Vu D.Q., Koros W.J., Viller S.J. (2003) Mixed matrix membranes using carbon molecular sieves: I. Preparation and experimental results. *J. Membr. Sci.* 211(2). pp. 311–334. DOI: 10.1016/S0376-7388(02)00429-5.
2. Baker R. (2004) *Membrane Technology and Applications*. John Wiley & Sons, Inc. DOI: 10.1002/0470020393.
3. Wallace W.D., Staudt-Bickel C., Koros W.J. (2006) Efficient development of effective hollow fiber membranes for gas separations from novel polymers. *J. Membr. Sci.* 278(1-2). pp. 92–104. DOI: 10.1016/j.memsci.2005.11.001.
4. Javadi A. (2005) Membranes for solubility-based gas separation applications. *Chem. Eng. J.* 112(1-3). pp. 219–226. DOI: 10.1016/j.cej.2005.07.010.
5. Winston W.S., Silkar K.K. (1992) *Membrane Handbook*. New York: Springer US. DOI: 10.1007/978-1-4615-3548-5.
6. Alders M., Winterhalder D., Wessling M. (2017) Helium recovery using membrane processes. *Separation and Purification Technology*. 189. pp. 433–440. DOI: 10.1016/j.seppur.2017.07.084.
7. Ko D. (2018) Optimization of hollow fiber membrane modules to sequester carbon dioxide. *J. Membr. Sci.* 546. pp. 270–283. DOI: 10.1016/j.memsci.2017.09.039.
8. Qi R., Henson M. (2009) Membrane system design for multicomponent gas mixtures via mixed-integer nonlinear programming. *Computers and Chemical Engineering*. 24(12). pp. 2719–2737. DOI: 10.1016/S0098-1354(00)00625-6.
9. Labadini H., Al-Enezi G., Ettouney H. (1996) Optimization of module configuration in membrane gas separation. *J. Membr. Sci.* 112(2). pp. 185–197. DOI: 10.1016/0376-7388(95)00283-9.
10. Zhang D., Wang H., Li C., Meng H. (2017) Modeling of purge-gas recovery using membrane separation. *Chemical Engineering Research and Design*. 125. pp. 361–366. DOI: 10.1016/j.cherd.2017.07.002.
11. Saeidi S., Fazlollahi F., Najari S., Iranshahi D., Klemes J., Baxter L. (2017) Hydrogen production: Perspectives, separation with special emphasis on kinetics of the WGS reaction: A state-of-the-art review. *J. Industrial and Engineering Chemistry*. 49. pp. 1–25. DOI: 10.1016/j.jiec.2016.12.003.

12. Orlov A., Ushakov A., Sovach V. (2017) Mathematical model of nonstationary separation processes proceeding in the cascade of gas centrifuges in the process of separation of multi-component isotope mixtures. *J. Engineering Physics and Thermophysics*. 90(2). pp. 258–265. DOI: 10.1007/s10891-017-1563-4.
13. Pirouzfard V., Omidkhah M.R. (2016) Mathematical modeling and optimization of gas transport through molecular sieve carbon membrane and determining the model parameters using a genetic algorithm. *Iranian Polymer Journal (English Edition)*. 25(3). pp. 203–212. DOI: 10.1007/s13726-016-0414-z.
14. Saberi M., Hashemifard S., Dadkhah A. (2016) Modeling of CO₂/CH₄ gas mixture permeation and CO₂ induced plasticization through an asymmetric cellulose acetate membrane. *RSC Advances*. 20. pp. 16561–16567. DOI: 10.1039/C5RA23506E.
15. Kadioglu O., Keskin S. (2018) Efficient separation of helium from methane using MOF membranes. *Separation and Purification Technology*. 191. pp. 192–199. DOI: 10.1016/j.seppur.2017.09.031.
16. Rufford T., Chan K., Huang S., May E. (2014) A review of conventional and emerging process technologies for the recovery of helium from natural gas. *Adsorption Science and Technology*. 32(1). pp. 49–72. DOI: 10.1260/0263-6174.32.1.49.
17. Scholes C., Ghosh U. (2017) Review of membranes for helium separation & purification. *Membranes*. 7(1). E9. DOI: 10.3390/membranes7010009.
18. Scholes C., Ghosh U. (2016) Helium separation through polymeric membranes: selectivity targets. *J. Membr. Sci.* 520. pp. 221–230. DOI: 10.1016/j.memsci.2016.07.064.
19. Vaezi M., Bayat, Y., Babaluo A., Shafiei S. (2016) Separation of helium from gases using the synthesized hydroxy sodalite membrane. *Scientia Iranica: Chemistry and Chemical Engineering*. 23(3). pp. 1136–1143. DOI: 10.24200/SCI.2016.3884.
20. Hu W., Wu X., Li Z., Yang J. (2013) Helium separation via porous silicene based ultimate membrane. *Nanoscale*. 5(19):9062–6. pp. 9062–9066. DOI: 10.1039/c3nr02326e.
21. Zia A.W., Zhou Zh., Li L.K. (2017) A new approach to create isolated carbon particles by sputtering: A detailed parametric study and a concept of carbon particles embedded carbon coatings. *Diamond and Related Materials*. 76. pp. 97–107. DOI: 10.1016/j.diamond.2017.04.014.
22. Ng S.W.L., Yilmaz G., Ong W.L., Ho G.W. (2018) One-step activation towards spontaneous etching of hollow and hierarchical porous carbon nanospheres for enhanced pollutant adsorption and energy storage. *Applied Catalysis B: Environmental*. 220. pp. 533–541. DOI: 10.1016/j.apcatb.2017.08.069.
23. You B., Yang J., Sun Y., Su Q. (2011) Easy synthesis of hollow core, bimodal mesoporous shell carbon nanospheres and their application in supercapacitor. *Chem. Commun.* 45. pp. 12364–12366. DOI: 10.1039/C1CC15348J.
24. Cao J., Zhu Y., Shi L., Zhu L., Bao K., Liu S., Qian Y. (2010) Double-shelled Mn₂O₃ hollow spheres and their application in water treatment. *Eur. J. Inorg. Chem.* 2010(8). pp. 1172–1176. DOI: 10.1002/ejic.200901116.
25. Zang Z., Wen M., Chen W., Zeng Y., Zu Z., Zeng X., Tang X. (2015) Strong yellow emission of ZnO hollow nanospheres fabricated using polystyrene spheres as templates. *Materials & Design*. 84. pp. 418–421. DOI: 10.1016/j.matdes.2015.06.141.
26. Zhang Z., Qin M., Jia B., Zhang H., Wu H., Qu X. (2017) Facile synthesis of novel bowl-like hollow carbon spheres by the combination of hydrothermal carbonization and soft templating. *Chem. Commun.* 20. pp. 2922–2925. DOI: 10.1039/C7CC00219J.
27. Sasidharan M., Gunawardhana N., Senthil C., Yoshio M. (2014) Micelle templated NiO hollow nanospheres as anode materials in lithium ion batteries. *J. Mater. Chem.* 20. P. 7337. DOI: 10.1039/C3TA14937D.
28. Liu J., Yang T., Wang D. W., Lu G. Q., Zhao D., Qiao S. Z. (2013) A facile soft-template synthesis of mesoporous polymeric and carbonaceous nanospheres. *Nat. Commun.* 4(2798). DOI: 10.1038/ncomms3798.
29. Bubenchikov M.A. (2010) Ob ideal'nykh kolebaniyakh nanotrubok v estestvennom magnitnom pole [On perfect oscillations of nanotubes in the natural magnetic field]. *Vestnik Tom-*

- skogo gosudarstvennogo universiteta. *Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(10). pp. 45–52.
30. Bubenchikov M.A. (2010) Dvizhenie nanotrubok v vozduшной среде под воздействием электромагнитного поля [Motion of nanotubes in an air medium under the influence of an electromagnetic field]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(12). pp. 68–77.
 31. Bubenchikov M.A., Ivanova I.A. (2011) Raschet aerodinamiki tsiklonnoy kamery [Calculation of vortex chamber aerodynamics]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(13). pp. 67–73.
 32. Bubenchikov M.A. (2011) Sposob minimizatsii skhemnoy diffuzii v chislennoy modeli aerodinamiki [Method for minimizing the circuit diffusion in the numerical model of aerodynamics]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(14). pp. 79–84.
 33. Bubenchikov M.A. (2011) Mekhanicheskoe soprotivlenie kompaktnykh nanochastits v vozduшной среде [Mechanical resistance of a compact nanoparticle in a gaseous medium]. *Russ. Phys. J.* 54(1). pp. 102–107.
 34. Bubenchikov M.A., Potekaev A.I. (2011) Sedimentatsiya nanochastits v pole tsentrobezhnykh sil [Sedimentation of nanoparticles in the field of centrifugal forces]. *Russ. Phys. J.* 54(2). pp. 211–220.
 35. Bubenchikov M.A. (2012) Dvizhenie chastits ksenona v tsiklonnoy kamere [Motion of xenon particles in a cyclone chamber]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(17). pp. 61–67.
 36. Dil' D.O., Bubenchikov M.A. (2013) Dvukhfaznaya fil'tratsiya v anizotropnom prostranstve [Two-phase filtration in an anisotropic medium]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 6(26). pp. 70–78.
 37. Bubenchikov M.A. (2008) Matematicheskaya model' dinamiki elektrolita v magnitnom pole [Mathematical modeling of electrolyte dynamics in a magnetic field]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(3). pp. 72–86.
 38. Bubenchikov M.A., Potekayev A.I., Bubenchikov A.M., Klykov I.I., Korobitsyn V.A., Maslov A.S., Ovcharenko V.V. (2014) Dvizhenie uglerodnykh nanotrubok v pole gradienta temperatury [Motion of carbon nanotubes in the temperature gradient field]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(30). pp. 63–70.
 39. Bubenchikov A.M., Bubenchikov M.A., Potekaev A.I., Usenko O.V., Sherstobitov A.A. (2014) Pronitsaemost' tunnelya iz sfericheskikh nanochastits [Permeability of the tunnel of spherical nanoparticles]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(31). pp. 69–75.
 40. Mishcharina E.Yu., Libin E.E., Bubenchikov M.A. (2016) O reshenii nestatsionarnogo uravneniya Shredingera [On the solution of the non-stationary Schrödinger equation]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(43). pp. 28–34. DOI: 10.17223/19988621/433/3.
 41. Rudyak V.Y., Krasnolutskiy S.L. (2003) The calculation and measurements of nanoparticles diffusion coefficient in rarefied gases. *J. Aerosol Science*. 34(1). pp. 579–580. DOI: 10.1016/S0021-8502(03)00148-4.
 42. Glushko V.P. (1974) *Thermodynamic and Thermophysical Properties of Combustion Products*. Israel Program for Scientific Translations.
 43. Nikol'skiy B.P. (1982) *Spravochnik khimika* [The Chemist's handbook]. Vol. 1. Moscow; Leningrad: Khimiya.

УДК 533.69

DOI 10.17223/19988621/51/10

С.В. Пейгин, Н.А. Пушин, А.Л. Болсуновский, С.В. Тимченко

ОПТИМАЛЬНОЕ АЭРОДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ КРЫЛА ШИРОКОФЮЗЕЛЯЖНОГО ДАЛЬНЕМАГИСТРАЛЬНОГО САМОЛЕТА¹

Приводятся результаты оптимального аэродинамического проектирования крыла широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета на высоких трансзвуковых скоростях полета. Для решения задачи использован подход, в основе которого лежат методы высокоточного математического моделирования и глобального оптимального поиска с использованием суперкомпьютерных технологий. Было показано, что оптимальное крыло обладает малым волновым сопротивлением в основной точке проектирования и может эксплуатироваться при заданных условиях крейсерского полета, при этом оптимизация позволила сдвинуть волновой кризис в сторону больших чисел Маха и отвечает всем заданным геометрическим и аэродинамическим ограничениям.

Ключевые слова: *оптимальное проектирование, полные уравнения Навье – Стокса, коэффициент сопротивления, момент тангажа, коэффициент подъемной силы.*

Как известно, процесс проектирования летательного аппарата подразделяется на три основные стадии:

- 1) концептуального проектирования;
- 2) предварительного проектирования;
- 3) окончательного детального проектирования.

При этом решающей из них является стадия предварительного проектирования, по завершении которой принимается решение о принципиальной возможности успешного завершения проекта создания самолета. Цена вопроса при этом чрезвычайно высока – например, затраты на завершающую стадию детального проектирования для среднемагистрального пассажирского самолета оцениваются в 8–10 млрд дол. США (по данным корпорации Boeing). Поэтому понятно, что успешное завершение стадии предварительного проектирования и достижение всех целей, поставленных перед этой стадией проекта, является ключевым фактором для успеха проекта создания самолета в целом.

При существующем в настоящее время в авиастроительной промышленности технологическом подходе традиционный процесс аэродинамического дизайна (важнейшая часть всей стадии предварительного проектирования) выполняется вручную на основе метода «проб и ошибок».

В рамках этого подхода:

На первом шаге этого итерационного метода инженер-аэродинамик, основываясь на своем опыте и интуиции, предлагает начальную форму летательного аппарата.

На втором – производится систематический расчет основных аэродинамических характеристик данной конфигурации в широком диапазоне изменения усло-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации Проекта RFMEFI57617X0103.

вий полета (в основном используя программные продукты для численного решения газодинамических уравнений различной степени точности и различные принятые в промышленности приближенные инженерные методики).

На заключительных циклах проектирования дополнительным важным источником информации об аэродинамических характеристиках проектируемого аппарата становятся экспериментальные данные о продувках его модели в аэродинамических трубах.

Третий шаг связан с критическим анализом полученной информации. В рамках этого шага выявляются области, где рассматриваемая геометрия не удовлетворяет требуемым целям и ограничениям проекта в целом. Исходя из результатов анализа причин этого несоответствия, аэродинамический инженер предлагает определенные модификации формы летательного аппарата, и итерационный цикл процесса аэродинамического дизайна повторяется.

Основанный по большей части на опыте дизайнера и его интуиции, этот процесс требует большого числа циклов дизайна, а также больших временных и финансовых затрат.

По данным корпорации Boeing [1], для выполнения этой стадии (предварительное проектирование) на основе вышеописанного подхода для среднемагистрального пассажирского самолета требуется работа порядка 200 человек на протяжении 1,5–2 лет с общими расходами порядка 100–120 млн дол. США.

Математически задача заключается в оптимизации формы летательного аппарата по полному сопротивлению. Первостепенная важность снижения аэродинамического сопротивления самолёта становится ясной из так называемой формулы Бреге [1]: при сохранении дальности полета уменьшение сопротивления самолета на 1 % ведет к увеличению его полезной нагрузки на 7.6 %

Таким образом, по-настоящему назревшими требованиями авиапромышленности является переход с «ручного» метода проб и ошибок на новый технологический подход, в основе которого лежат программные продукты нового поколения для автоматического оптимального аэродинамического проектирования летательных аппаратов с учетом конструктивных параметров и конструктивных ограничений.

Именно этот подход, в основе которого лежат методы высокоточного математического моделирования и глобального оптимального поиска с использованием суперкомпьютерных технологий, и предлагается использовать для выполнения данной работы по оптимальному аэродинамическому проектированию широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета взлетной массой 200–220 т на 250–300 пассажиров, крейсерской скоростью $M = 0.86$ и дальностью 10 000 км.

Постановка задачи

Каждый цикл аэродинамического проектирования стартует с начальной компьютерной геометрической модели летательного аппарата. В первом таком цикле, геометрическая модель поступает из стадии концептуального дизайна вместе с аэродинамическими характеристиками дизайна. В число аэродинамических характеристик входят заданные значения коэффициента подъёмной силы и числа Маха набегающего потока, а также высота полёта и максимально допустимое значение сопротивления в крейсерском режиме полёта. Эти данные призваны обеспечить выполнение аэродинамических целей полёта (таких, как дальность, полезная нагрузка, объём топливного бака и т.д.). Поиск искомой геометрической формы осуществляется в классе решений, удовлетворяющих различным геометриче-

ским, аэродинамическим и междисциплинарным ограничениям, которые также определяются на стадии концептуального дизайна. Обычно ограничения накладываются на толщину профилей, допустимые значения момента тангажа и коэффициента подъемной силы при взлете и т.д.

Математически задача состоит в нахождении формы аэродинамической конфигурации, обладающей минимальным полным аэродинамическим сопротивлением при крейсерских условиях полета и отвечающей всем необходимым геометрическим и аэродинамическим ограничениям.

Сформулируем в точных терминах проблему оптимизации.

Начнем с одноточечной задачи. Ее цель – найти аэродинамическую форму, которая минимизирует коэффициент полного сопротивления C_x с учетом следующих аэродинамических и геометрических ограничений:

Аэродинамические ограничения: заданный постоянный коэффициент подъемной силы C_y и максимально допустимый момент тангажа M_z .

Геометрические ограничения на следующие величины, задаваемые для каждой оптимизируемой секции крыла:

- относительная толщина секции крыла $(t/c)_i$;
- радиус кривизны передней кромки секции крыла $(R_L)_i$;
- угол задней кромки секции крыла $(q_T)_i$;
- локальные толщины секции крыла $(y/t)_{ij}$.

В этих ограничениях $i = 1, \dots, N_{ws}$ – число секций по размаху крыла, а $j = 1, \dots, N_{bs}(i)$ – число ограничений на локальную толщину в секции номер i .

Цель многоточечной оптимизации – минимизировать взвешенную комбинацию коэффициентов сопротивления в нескольких точках дизайна. При этом геометрические ограничения не зависят от точки дизайна, а аэродинамические ограничения задаются для каждой точки дизайна по отдельности.

Решение задачи для реальных конфигураций является сложным в силу ниже следующих причин:

- Точный расчет сопротивления очень труден для реальных конфигураций.
- Нет общего решения проблемы глобального геометрического представления аэродинамических поверхностей.
- Оптимальный поиск происходит в пространстве высокой размерности.
- Необходим эффективный учет большого числа нелинейных ограничений.
- Решение задачи требует огромнейшего объема вычислений.

Метод решения задачи

В соответствии с вышесказанным, базовый алгоритм оптимального аэродинамического проектирования содержит три основных элемента:

- Расчет целевой функции (в нашем случае это коэффициент полного сопротивления самолета C_x) на базе численного расчета обтекания аэродинамических конфигураций потоком вязкого сжимаемого газа на основе математической модели высокого уровня точности (осредненных по числу Рейнольдса полных уравнений Навье – Стокса).
- Поиск оптимальной геометрии на базе алгоритма глобального оптимального поиска с учетом заданных многочисленных ограничений различного типа на оптимальное решение.
- Повышение вычислительной эффективности на базе алгоритма параллелизации вычислительного потока на многопроцессорном вычислительном кластере.

В задачах оптимизации точность расчёта целевой функции (в данном случае полного сопротивления), а также дополнительных функционалов на решении является ключом к успеху.

Для расчёта целевой функции используется код вычислительной аэродинамики OPTIMENGA_AERO_ANALYSIS. Программный продукт OPTIMENGA_AERO_ANALYSIS является кодом высокой точности для решения усреднённых по Рейнольдсу полных уравнений Навье – Стокса вязкой сжимаемой жидкости в турбулентном режиме на основе надежного, высокоточного и вычислительно-эффективного численного метода высокого порядка точности с использованием схемы ENO (Essentially Non-Oscillatory Scheme) и многосеточного подхода (multigrid approach) с использованием многоблочных структурированных вычислительных сеток при трансзвуковых скоростях полета на высокопроизводительных многопроцессорных вычислительных комплексах.

Основными характеристиками кода являются использование многоблочных структурированных сеток, многосеточного (многоуровневого) подхода, схемы высокого порядка точности, учёт турбулентности и глубокая параллелизация.

В алгоритме кода конвективная часть уравнений аппроксимируется характеристическим оператором первого порядка, который легко обращается. Эта схема применяется везде при многосеточной релаксации. При этом схема высокого порядка ENO/WENO определяет поправки в правую часть дискретного уравнения только на самом тонком сеточном уровне, а вязкие члены аппроксимируются обычным образом.

Код обеспечивает точный расчет сопротивления для сложных аэродинамических конфигураций, достигая хорошей точности на грубых сетках. В нём отсутствуют искусственные параметры. Все эти качества делают код подходящим для промышленных приложений. Данный код был успешно верифицирован в рамках AIAA Drag Prediction Workshop (своеобразного чемпионата мира среди кодов для расчета сопротивления реальных самолетных конфигураций). Проведенные сравнения с кодом OVERFLOW (сертифицированным кодом компании Boeing) дополнительно подтвердили точность этого кода (см. статью [2] в списке литературы).

Уравнения Навье – Стокса вязкой сжимаемой жидкости могут быть записаны в следующей форме:

$$\mathbf{q}_t + \text{div } \mathbf{C} = \text{div } \mathbf{V}, \quad (1)$$

где тензор $\mathbf{C} = (\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h})$ содержит конвективные члены; тензор $\mathbf{V} = (\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ содержит вязкие члены; $\mathbf{q} = \rho, \rho u, \rho v, \rho w, E)^T$; ρ – плотность; (u, v, w) – вектор скорости; E – энергия; t – время; $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$ – невязкие (конвективные) потоки и $\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}$ – вязкие потоки.

Компоненты невязких потоков имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{q}) &= u\mathbf{q} + p(0, 1, 0, 0, u)^T, \\ \mathbf{g}(\mathbf{q}) &= v\mathbf{q} + p(0, 0, 1, 0, v)^T, \\ \mathbf{h}(\mathbf{q}) &= w\mathbf{q} + p(0, 0, 0, 1, w)^T. \end{aligned}$$

Компоненты вязких потоков имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\mathbf{q}) &= \mu(0, \tau_{11}, \tau_{21}, \tau_{31}, \bar{\sigma}_1)^T, \\ \mathbf{s}(\mathbf{q}) &= \mu(0, \tau_{12}, \tau_{22}, \tau_{32}, \bar{\sigma}_2)^T, \\ \mathbf{t}(\mathbf{q}) &= \mu(0, \tau_{13}, \tau_{23}, \tau_{33}, \bar{\sigma}_3)^T, \end{aligned}$$

где составляющие тензора вязких напряжений задаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\tau_{11} &= (4/3)u_x - (2/3)v_y - (2/3)w_z, \\
\tau_{21} &= \tau_{12} = u_y + v_x, \\
\tau_{31} &= \tau_{13} = u_z + w_x, \\
\tau_{22} &= (4/3)v_y - (2/3)u_x - (2/3)w_z, \\
\tau_{32} &= \tau_{23} = u_z + w_y, \\
\tau_{33} &= (4/3)w_z - (2/3)u_x - (2/3)v_y, \\
\bar{\sigma}_1 &= u\tau_{11} + v\tau_{12} + w\tau_{13} + (c2)_x / ((\gamma - 1)Pr), \\
\bar{\sigma}_2 &= u\tau_{21} + v\tau_{22} + w\tau_{23} + (c2)_y / ((\gamma - 1)Pr), \\
\bar{\sigma}_3 &= u\tau_{31} + v\tau_{32} + w\tau_{33} + (c2)_z / ((\gamma - 1)Pr).
\end{aligned}$$

Здесь μ – значение вязкости, γ – отношение теплоёмкостей газа, Pr – число Прандтля, $p = (\gamma - 1)[E - 0.5\rho(u^2 + v^2 + w^2)]$, $c^2 = \gamma p / \rho$, $H = (E + p) / \rho$.

При дискретизации сжимаемых уравнений Навье – Стокса для сжимаемого газа используется метод конечных объёмов с явной схемой аппроксимации потоков. Рассмотрим структурированную расчётную сетку, состоящую из ячеек, которые образуют структуру типа (i, j, k) . Интегрируя по каждой ячейке, мы получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, к которой применяется процедура интегрирования по времени.

Аппроксимация для ячейки с индексами (i, j, k) будет иметь вид

$$\begin{aligned}
(\Omega_{i,j,k} \mathbf{q}_{i,j,k})_t + [\mathbf{C} \cdot (\mathbf{Sn})]_{i+0.5,j,k} - [\mathbf{C} \cdot (\mathbf{Sn})]_{i-0.5,j,k} + [\mathbf{C} \cdot (\mathbf{Sn})]_{i,j,k+0.5} - \\
- [\mathbf{C} \cdot (\mathbf{Sn})]_{i,j,k-0.5} + [\mathbf{C} \cdot (\mathbf{Sn})]_{i,j,k+0.5} - [\mathbf{C} \cdot (\mathbf{Sn})]_{i,j,k-0.5} = \\
= [\mathbf{V} \cdot (\mathbf{Sn})]_{i+0.5,j,k} - [\mathbf{V} \cdot (\mathbf{Sn})]_{i-0.5,j,k} + [\mathbf{V} \cdot (\mathbf{Sn})]_{i,j,k+0.5} - \\
- [\mathbf{V} \cdot (\mathbf{Sn})]_{i,j,k-0.5} + [\mathbf{V} \cdot (\mathbf{Sn})]_{i,j,k+0.5} - [\mathbf{V} \cdot (\mathbf{Sn})]_{i,j,k-0.5}, \quad (2)
\end{aligned}$$

где $\Omega_{i,j,k}$ – объём ячейки, $\mathbf{q}_{i,j,k}$ – среднее значение переменной по ячейке и S – площадь грани ячейки. Дробные индексы указывают, с какой стороны ячейки берётся поток в квадратных скобках.

Разумеется, соотношение (2) является всего лишь формальной аппроксимационной схемой, для реализации которой следует построить интерполяционные формулы, по которым потоки в квадратных скобках интерполируются по значениям потоков в близлежащих центрах ячеек.

В пространственной аппроксимации потоков конвективные потоки на гранях ячеек интерполируются по данным в центрах ячеек посредством двух интерполяционных операторов: характеристического оператора первого порядка и ENO (Essentially non-Oscillatory – Существенно не-Осцилляционный) оператора высокого порядка. Шаблон характеристической схемы первого порядка, фактически применяемой при релаксации, состоит из одной точки, выбранной по знаку соответствующего собственного числа.

Метод ENO (предложенный А. Хартеном и С. Ошером и затем упрощённый С.-В. Шу и С. Ошером, см. статьи [3] и [4] в списке литературы) применяется посредством выбора интерполяционного шаблона по локальным характеристикам и гладкости потоков и может изменяться по ходу итераций. При этом применяется

характеристическая декомпозиция, и интерполяция производится в соответствующих характеристических полях. Интерполяционный шаблон ENO (типично состоящий из трёх точек в нашей имплементации) определяется отдельно в каждом характеристическом поле, сначала по знаку соответствующего собственного числа и затем в соответствии с гладкостью интерполируемых потоков. Чтобы вернуться к декартовым потокам после интерполяции, значения интерполированных характеристических потоков проектируются обратно.

Мы также используем метод поправки на дефект, в котором целевая дискретизация уравнений на самой тонкой сетке отличается от дискретизации, применяемой при многосеточной релаксации. Для релаксации используется аппроксимационный оператор первого порядка точности, а поправка на дефект вычисляется посредством аппроксимации ENO высокого порядка.

Таким образом, мы применяем схему ENO только при вычислении поправки на дефект, а большая часть работы осуществляется посредством относительно дешёвой в вычислительном отношении характеристической схемы первого порядка.

Вязкие члены аппроксимируются напрямую. Для интегрирования по времени используется схема Рунге-Кутты третьего порядка, сохраняющая полную вариацию (TVD), разработанная С.-В. Шу и С. Ошером [4].

Более подробное описание численного метода дано в статьях [5] и [6].

Результаты трехточечной оптимизации

Для проведения оптимизации использовался программный продукт OPTI-MENGA_AERO, предназначенный для автоматического оптимального аэродинамического проектирования трехмерных изолированных крыльев произвольной формы в плане с учетом конструктивных параметров и конструктивных ограничений. Подробности используемого метода могут быть найдены в [7–9].

При проведении оптимального аэродинамического проектирования, оптимизируемое крыло сохраняло постоянную форму в плане и было представлено пятью секциями по размаху крыла:

- Бортовая секция при координате $Z = 3.04$ м вдоль размаха крыла.
- 1-ая промежуточная секция при координате $Z = 9.0$ м вдоль размаха крыла.
- 2-ая промежуточная секция при координате $Z = 16.5$ м вдоль размаха крыла.
- 3-ая промежуточная секция при координате $Z = 22.5$ м вдоль размаха крыла.
- Концевая секция при координате $Z = 30.0$ м вдоль размаха крыла.

Крыло имеет постоянный угол скоса передней кромки равный 33.5° и следующие углы скоса задней кромки:

- Между бортовой и 1-й промежуточной секцией – 4.82° .
- Между 1-й и 2-й промежуточной секцией – 16.58° .
- Между 2-й и 3-й промежуточной секцией – 22.86° .
- Между 3-й промежуточной и концевой секцией – 24.26° .

Были наложены следующие габаритные ограничения на относительные толщины оптимизируемых профилей: относительная толщина бортового профиля была равна 13.25 %, относительная толщина профиля в 1-й промежуточной секции составляла 11.1, относительная толщина профиля во 2-й промежуточной секции – 9.2, относительная толщина профиля в 3-й промежуточной секции – 8.7 %, а относительная толщина концевого профиля крыла равнялась 8 %.

Для гарантированного размещения топливного бака в крыле самолета дополнительно были выставлены следующие ограничения на относительную толщину

секций крыла в заданных значениях продольной координаты X/C (C – величина локальной хорды секции крыла):

- Бортовая секция – 11.8 % (при $X/C = 0.16$) и 8.9 % (при $X/C = 0.65$).
- 1-я промежуточная секция – 8.9 % (при $X/C = 0.16$) и 7.7 % (при $X/C = 0.65$).
- 2-я промежуточная секция – 7.5 % (при $X/C = 0.16$) и 6.4 % (при $X/C = 0.65$).
- 3-я промежуточная секция – 6.9 % (при $X/C = 0.16$) и 6.4 % (при $X/C = 0.65$).
- Концевая секция – 6.5 % (при $X/C = 0.16$) и 5.9 % (при $X/C = 0.65$).

В качестве основных точек аэродинамического проектирования были выбраны 2 точки на крейсерских режимах полета и 1 точка на режиме взлета:

- Точка $M = 0.86$, $C_y = 0.5$ (с весом 0.70).
- Точка $M = 0.87$, $C_y = 0.5$ (с весом 0.25).
- Точка $M = 0.20$, $C_y = 1.00$ (с весом 0.05).

Дополнительным аэродинамическим ограничением являлось ограничение на момент тангажа, необходимое для обеспечения устойчивости полета. При проведении оптимального аэродинамического проектирования требовалось, чтобы момент тангажа всей конфигурации был не меньше, чем момент тангажа начальной конфигурации.

Первый шаг в проведении оптимального аэродинамического проектирования широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета состоял в проведении детального аэродинамического анализа изолированного трехмерного крыла начальной формы. Расчётная сетка для пятисекционного крыла состояла из 4 блоков: двух блоков, прилегающих к крылу, и двух блоков на следе крыла. Благодаря использованию условия симметрии на центральной линии крыла, сетка строится только для половины крыла (от плоскости симметрии до численной «бесконечности»).

Блоки около крыла имеют топологию $C-O$ (C – по маршевой координате и O – по размаху крыла). Каждый из этих двух блоков содержит 64 расчётных ячейки по маршевой координате, 32 – в направлении, нормальном к поверхности крыла и 52 – в направлении по размаху крыла, в общей сложности $64 \times 32 \times 52 = 106496$ расчётных ячеек в блоке.

Блоки на следе имеют топологию $H-O$ (H – по маршевой координате и O – по размаху крыла). Каждый из этих двух блоков содержит 32 расчётных ячейки по маршевой координате, 32 – в направлении, нормальном к поверхности крыла и 52 – в направлении по размаху крыла, итого $32 \times 32 \times 52 = 53248$ расчётных ячеек в блоке. Таким образом, в общей сложности тонкая сетка вокруг половины крыла содержит 319488 расчётных ячеек. Для повышения точности расчетов шаги сетки были неравномерными и сетка сгущалась в области течения с большими градиентами. В частности, шаг сетки вдоль поверхности крыла в окрестности передней кромки составлял порядка 0.2 % от локальной хорды крыла, а в окрестности задней кромки был порядка 0.45 % от локальной хорды крыла. Величина 1-го шага по направлению по нормали к поверхности крыла составляла 0.02 мм.

Вид расчётной сетки на верхней поверхности крыла представлен на рис. 1.

Расчёт базового крыла на тонкой сетке (обладающей достаточно высокой резольвцией) дал следующие результаты:

- $M = 0.84$, $C_y = 0.50$, $C_x = 175.1$ аэродинамических каунта.
- $M = 0.85$, $C_y = 0.50$, $C_x = 180.6$ аэродинамических каунта.
- $M = 0.86$, $C_y = 0.50$, $C_x = 200.6$ аэродинамических каунта.
- $M = 0.87$, $C_y = 0.50$, $C_x = 236.2$ аэродинамических каунта.
- $M = 0.87$, $C_y = 0.50$, $C_x = 280.1$ аэродинамических каунта.

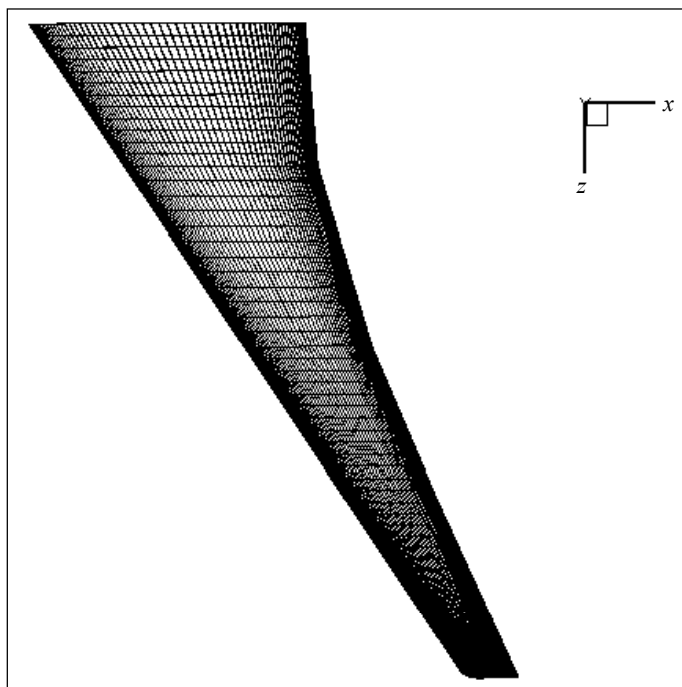


Рис. 1. Вид расчетной сетки на верхней поверхности крыла
Fig. 1. Computational grid on the upper surface of the wing

Детальный анализ полученных аэродинамических характеристик исходного (базового) крыла привёл к следующим оценкам:

- Приведённые данные позволяют сделать вывод, что базовое крыло обладает приемлемым волновым сопротивлением в точке $C_Y = 0.50$, $M = 0.85$.
- При постоянном значении $C_Y = 0.50$, происходит, начиная с $M = 0.85$, резкий рост сопротивления – при переходе от $M = 0.85$ до 0.86 прирост сопротивления составляет 20 каунтов.

Эти данные позволяют предположить следующее. Потенциальное увеличение крейсерской скорости полёта свыше $M = 0.86$ – 0.87 может оказаться проблематичным. Существует потенциальная возможность снижения сопротивления в точке проектирования и в более широком диапазоне полётных условий. Нижеследующая задача представляет серьёзный оптимизационный вызов:

Требуется снизить сопротивления крыла при $C_Y = 0.50$ и значениях Маха набегающего потока в зоне $M = 0.84$ – 0.87 при сохранении всех остальных положительных характеристик крыла и с учётом всех ограничений, наложенных на форму крыла и аэродинамические характеристики.

Трехточечная оптимизация с ограничением на момент тангажа снизила коэффициент сопротивления в точке оптимизации $C_Y = 0.50$, $M = 0.86$ на 30.4 каунта по сравнению с базовым крылом (с 200.6 до 170.2 каунта). В точке $C_Y = 0.50$, $M = 0.87$ значение коэффициента сопротивления снизилось на 40.8 каунта по сравнению с базовым крылом (с 236.2 до 195.4 каунта). Секционные аэродинамические профили крыла по результатам данной трехточечной оптимизации, в сравнении с профилями базового крыла, приведены на рис. 2.

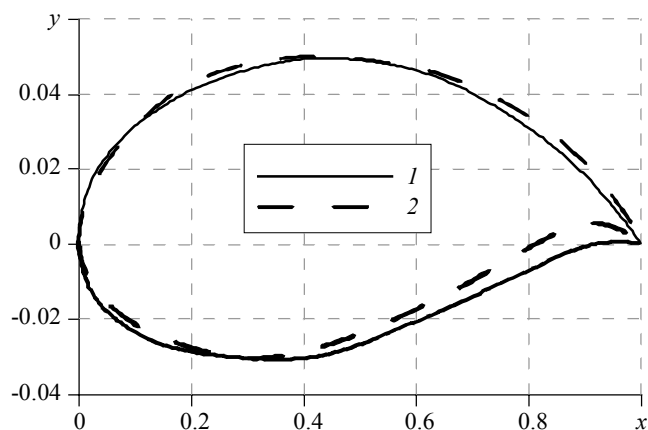


Рис. 2. Сравнение профилей концевой секции базового (1) и оптимального (2) крыла
Fig. 2. Comparison of the tip profiles for the original (1) and optimal (2) wings

Распределения давлений по верхней поверхности оптимального крыла и секционные распределения давлений в сравнении с базовым крылом при $C_Y = 0.50$ (соответствующей коэффициенту подъемной силы в точке проектирования) и $M = 0.86$ показаны на рис. 3 и 4 соответственно.

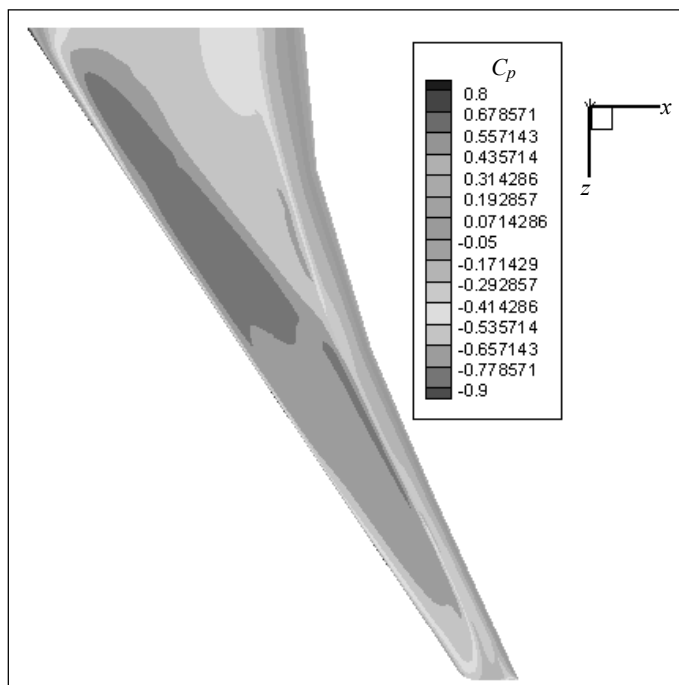


Рис. 3. Распределение давлений по верхней поверхности оптимального крыла при $C_Y = 0.50$, $M = 0.86$
Fig. 3. Pressure distribution over the upper surface of the optimal wing at $C_Y = 0.50$ and $M = 0.86$

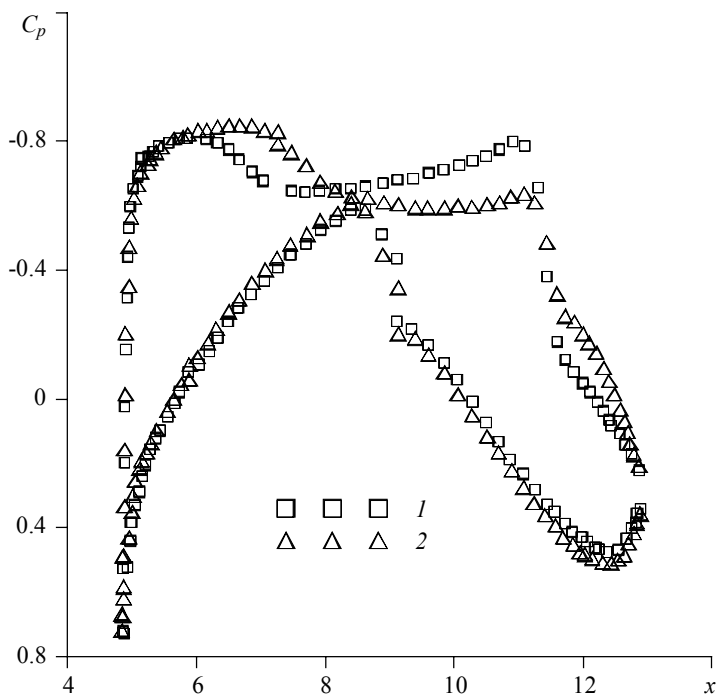


Рис. 4. Сравнение распределений давления в сечении $Z = 5.96$ м по размаху крыла при $C_Y = 0.50$ для $M = 0.86$ для базового (1) и оптимального крыла (2)

Fig. 4. Comparison of the pressure distributions in the cross section $Z = 5.96$ m over the wingspan at $C_Y = 0.50$ and $M = 0.86$ for the original (1) and optimal (2) wings

Анализ этих распределений показывает, что оптимальное крыло обладает значительно улучшенными распределениями давлений по всему размаху крыла. Индикация на подходе к зоне отрыва течения во внешней по размаху части крыла, отмеченная при анализе базового крыла, отсутствует в оптимальном крыле при $M = 0.85$ – 0.86 и значительное улучшение наблюдается при $M = 0.87$ (см. рис. 6).

Детальный анализ полученных аэродинамических характеристик оптимального крыла, показывает, что трехточечная оптимизация позволила успешно решить задачу оптимального проектирования крыла, поскольку:

- оптимальное крыло обладает малым волновым сопротивлением в основной точке проектирования $C_Y = 0.50$, $M = 0.86$ ($C_X = 170.2$ каунта) и может эксплуатироваться при крейсерском полете при $M = 0.86$;
- оптимизация позволила сдвинуть волновой кризис в сторону больших чисел Маха не менее чем на 0.02;
- оптимальное крыло обладает значительно лучшими аэродинамическими характеристиками по сравнению с базовым крылом в широком диапазоне чисел Маха и коэффициента подъемной силы;
- оптимальное крыло отвечает всем заданным геометрическим и аэродинамическим ограничениям.

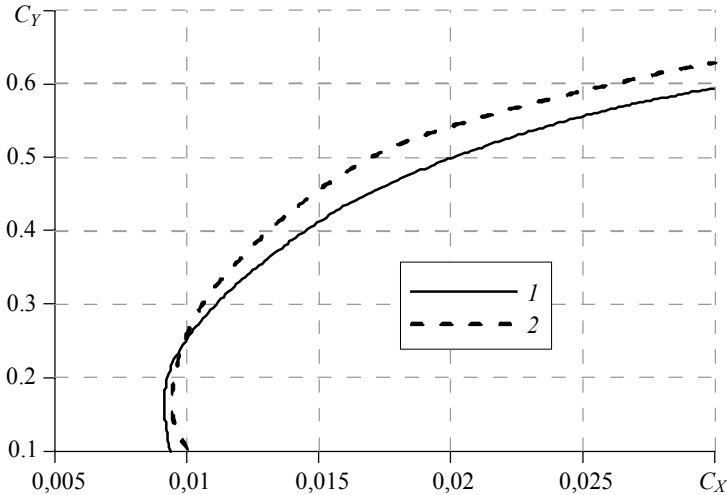


Рис. 5. Сравнение поляр сопротивления базового (1) и оптимального крыла (2) при $M = 0.86$

Fig. 5. Comparison of the drag polars for the original (1) and optimal (2) wings at $M = 0.86$

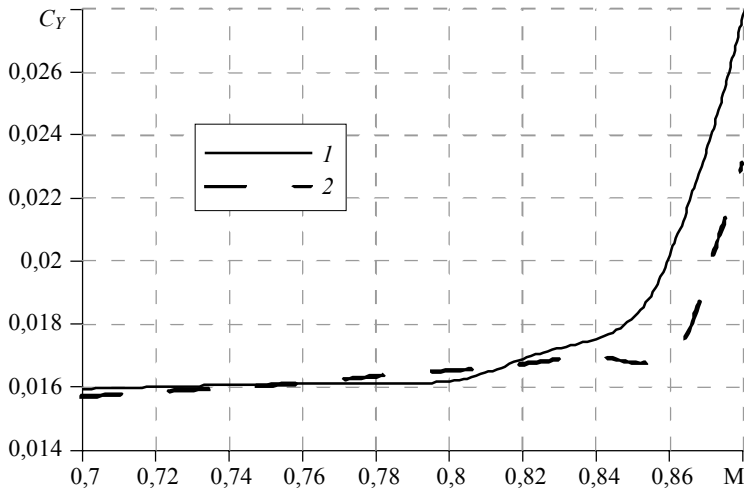


Рис. 6. Кривая зависимости сопротивления от числа Маха набегающего потока при фиксированном значении коэффициента подъемной силы $C_Y = 0.50$ для базового (1) и оптимального крыла (2)

Fig. 6. Dependence of the drag on the Mach number of the approach flow at a fixed value of the lift coefficient $C_Y = 0.50$ for the original (1) and optimal (2) wings

ЛИТЕРАТУРА

1. Jameson A., Martinelli L., Vassberg J. Using computational fluid dynamics for aerodynamics – a critical assessment // 23rd International Congress of Aeronautical Sciences, September 8–13, 2002, Toronto, Canada.

2. Epstein B., Jameson J., Peigin S., Roman D., Harrison N., and Vassberg J. Comparative study of 3D wing drag minimization by different optimization techniques // *Journal of Aircraft*. 2009. V. 46. No. 2.
3. Harten A., Osher S. Uniformly high-order accurate non-oscillatory schemes // *I. SIAM J. of Numerical Analysis*. 1987. V. 24. P. 279.
4. Shu C.-W. and Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes 1 // *J. Computational Physics*. 1989. V. 83. No. 1. P. 3
5. Epstein B., Averbuch A. and Yavneh I. An accurate ENO driven multigrid method applied to 3D turbulent transonic flows // *J. Computational Physics*. 2001. V. 168. P. 316–328.
6. Epstein B., Peigin S.V. Implementation of WENO (Weighted Essentially Non-oscillatory) Approach to Navier-Stokes Computations // *International J. CFD*. 2004. V. 18. No. 3.
7. Peigin S. and Epstein B. Robust Handling of Non-linear Constraints for GA Optimization of Aerodynamic Shapes // *International J. for Numerical Methods in Fluids*. 2004. V. 45. P. 1339–1362.
8. Epstein B. and Peigin S. Constrained aerodynamic optimization of 3D wings driven by Navier-Stokes computations // *AIAA Journal*. 2005. V. 43. Issue 9. P. 1946–1957.
9. Peigin S. and Epstein B. Multi-constrained aerodynamic design of business jet by CFD driven optimization tool // *European J. Aerospace Science and Technology*. 2008. V. 12. Issue 2, March. P. 125–134.

Статья поступила 28.12.2017 г.

Peigin S.V., Pushchin N.A., Bolsunovskiy A.L., Timchenko S.V. (2018) AN OPTIMAL AERODYNAMIC DESIGN FOR THE WING OF A WIDE-BODY LONG-RANGE AIRCRAFT. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 51. pp.

DOI 10.17223/19988621/51/10

Results of the optimal aerodynamic design of a wide-body long-range aircraft wing at high transonic flight speeds are presented. The problem is solved using the approach based on methods of high-precision mathematical modeling and global optimum search with application of supercomputer technologies. It is shown that the optimal wing is characterized by a low shock-wave drag at the main design point and can operate under given cruise flight conditions. Optimization technology made it possible to shift the Mach tuck towards larger Mach numbers. The aerodynamic characteristics of the optimal wing significantly outperform those of the original wing in a wide range of the Mach number and lift coefficient. The optimal wing satisfies all the given geometric and aerodynamic constraints. The work was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation in the framework of the RFMEFI57617X0103 Project.

Keywords: optimal design, full Navier-Stokes equations, drag coefficient, pitch moment, lift coefficient.

PEYGIN Sergey Vladimirovich (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, OPTIMENGA-777 Ltd., Moscow, Russian Federation)
E-mail: mishpahat_peiguine@yahoo.com

PUSHCHIN Nikita Aleksandrovich (OPTIMENGA-777 Ltd., Moscow, Russian Federation)
E-mail: mishpahat_peiguine@yahoo.com

BOLSUNOVSKIY Anatoliy Longenovich (Candidate of Technical Science, OPTIMENGA-777 Ltd., Moscow, Russian Federation)
E-mail: mishpahat_peiguine@yahoo.com

TIMCHENKO Sergey Viktorovich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, OPTIMENGA-777 Ltd., Moscow, Russian Federation)
E-mail: tsv@ftf.tsu.ru

REFERENCES

1. Jameson A., Martinelli L., Vassberg J. (2002) Using computational fluid dynamics for aerodynamics – a critical assessment. *23rd International Congress of Aeronautical Sciences, Toronto, Canada*.
2. Epstein B., Jameson J., Peigin S., Roman D., Harrison N., Vassberg J. (2009) Comparative study of three-dimensional wing drag minimization by different optimization techniques. *Journal of Aircraft*. 46(2). pp. 526–541. DOI: 10.2514/1.38216.
3. Harten A., Osher S. (1987) Uniformly high-order accurate non-oscillatory schemes. I. *SIAM Journal of Numerical Analysis*. 24(2). pp. 279–309.
4. Shu C.-W., Osher S. (1989) Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes, II. *Journal of Computational Physics*. 83(1). pp. 32–78. DOI: 10.1016/0021-9991(89)90222-2.
5. Epstein B., Averbuch A., Yavneh I. (2001) An accurate ENO driven multigrid method applied to 3D turbulent transonic flows. *Journal of Computational Physics*. 168(2). pp. 316–338. DOI: 10.1006/jcph.2001.6698.
6. Epstein B., Peigin S.V. (2004) Implementation of WENO (Weighted Essentially Non-oscillatory) Approach to Navier-Stokes Computations. *International Journal of CFD*. 18(3). pp. 289–293. DOI: 10.1080/1061-8560310001621243.
7. Peigin S., Epstein B. (2004) Robust handling of non-linear constraints for GA optimization of aerodynamic shapes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 45(12). pp. 1339–1362. DOI: 10.1002/flid.747.
8. Epstein B., Peigin S. (2005) Constrained aerodynamic optimization of three-dimensional wings driven by Navier-Stokes computations. *AIAA Journal*. 43(9). pp. 1946–1957. DOI: 10.2514/1.10308.
9. Peigin S., Epstein B. (2008) Multiconstrained aerodynamic design of business jet by CFD driven optimization tool. *European Journal of Aerospace Science and Technology*. 12(2). pp. 125–134. DOI: 10.1016/j.ast.2007.03.001.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АНИСИМОВА Мария Александровна – ассистент Института физики высоких технологий Национального исследовательского Томского политехнического университета, г. Томск. E-mail: anisimova_mawa@mail.ru

БОЗИЕВ Олег Людинович – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник института информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра РАН. E-mail: boziev@yandex.ru

БОЛСУНОВСКИЙ Анатолий Лонгенович – кандидат технических наук, доцент, ведущий специалист ООО «Оптименга – 777», г. Москва. E-mail: mishpahat_peiguine@yahoo.com

БОТАЛОВ Андрей Юрьевич – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории нефтегазовой механики Тюменского филиала Института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Тюмень. E-mail: aubotalov@bk.ru

БОШЕНЯТОВ Борис Владимирович – доктор технических наук, главный научный сотрудник Института прикладной механики Российской академии наук, г. Москва. E-mail: bosbosh@mail.ru

БУБЕНЧИКОВ Михаил Алексеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: M.Bubenchkov@gtt.gazprom.ru

ЖАМБАА Сонинбаяр Иванович – аспирант Томского государственного университета, г. Томск, преподаватель кафедры прикладной математики Монгольского национального университета, г. Улан-Батор, Монголия. E-mail: jsoninbayar@yahoo.com

ЖИЛЬЦОВ Константин Николаевич – инженер-исследователь Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: konstantin@niipmm.tsu.ru

ЗЮЗЬКОВ Валентин Михайлович – старший научный сотрудник, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и компьютерного моделирования механико-математического факультета Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: vmz@math.tsu.ru

КНЯЗЕВА Анна Георгиевна – доктор физико-математических наук, профессор, профессор Института физики высоких технологий Национального исследовательского Томского политехнического университета, г. Томск. E-mail: anna-knyazeva@mail.ru

ПЕЙГИН Сергей Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор, генеральный директор ООО «Оптименга – 777», г. Москва. E-mail: mishpahat_peiguine@yahoo.com

ПУЩИН Никита Александрович – специалист ООО «Оптименга – 777», г. Москва. E-mail: mishpahat_peiguine@yahoo.com

РАЧИНСКАЯ Мария Анатольевна – ассистент кафедры программной инженерии Института информационных технологий, математики и механики, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород. E-mail: rachinskaya.maria@gmail.com

РОДИОНОВ Сергей Павлович – доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией нефтегазовой механики Тюменского филиала Института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Тюмень, профессор Тюменского государственного университета. E-mail: timms@tmn.ru

СЕВОСТЬЯНОВ Игорь Борисович – кандидат физико-математических наук, профессор отделения механической и аэрокосмической инженерии Университета штата Нью-Мексико, США. E-mail: igor@nmsu.edu

ТИМЧЕНКО Сергей Викторович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета, ведущий специалист ООО «Оптименга – 777», г. Москва. E-mail: tsv@ftf.tsu.ru

УКОЛОВ Антон Вадимович – аспирант Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: Ukolov33@gmail.com

УКОЛОВ Роман Юрьевич – аспирант Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: roman_ukolov@bk.ru

ФЕДОТКИН Михаил Андреевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры программной инженерии Института информационных технологий, математики и механики, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород. E-mail: fma5@rambler.ru

ШИШКОВА Алёна Андреевна – аспирант Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: Shishkova@sibmail.com

Peter V. DANCHEV – Professor, Department of Mathematics, Plovdiv University “P. Hilendarski”, Plovdiv 4000, Bulgaria. E-mail: pvdanchev@yahoo.com

Оригинал-макет подготовлен
ООО «Издательство научно-технической литературы»
634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*
Верстка *Д.В. Фортеса*

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001.
Подписано к печати 16.02.2018. Выпуск в свет 26.02.2018.
Формат 70 × 100 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 10.64. Уч.-изд. л. 11.92. Тираж 250 экз. Заказ № 4. Цена свободная.

Отпечатано на оборудовании
Издательского Дома Томского государственного университета,
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. Заказ № ???.
<http://publish.tsu.ru> E-mail: rio.tsu@mail.ru