УДК 517.54

А.Н. Малютина, М.А. Елизарова[1]

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ АНАЛИТИЧЕСКОГО И ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛЕНИЙ ОТОБРАЖЕНИЙ С *S*-УСРЕДНЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Продолжается развитие геометрического метода для изучения свойств отображений с s-усредненной характеристикой, основанного на специальном характеристическом законе искажения модулей семейств кривых.

Ключевые слова: *пространственные отображения с s-усредненной характеристикой, геометрический метод модулей, эквивалентность, точки ветвления.*

Пусть D – область в $\boldsymbol{R^n}$, $n \geq 3$, и отображение $f : D \to \boldsymbol{R^n}$ – открытое, непрерывное, дискретное, $f \in W^1_{n,\,\mathrm{loc}}(D)$, тогда отображение f обладает п.в. в области D всеми частными производными $\partial_i f_j(x)$ и для него определены величины $K_I(x,f)$, $K_O(x,f)$, $K_I(x,f) = \inf\{K(x)\}$, $K_O(x,f) = \inf\{P(x)\}$, где точная нижняя грань берется соответственно по всем измеримым в D функциям $K(x) \geq 1$, $P(x) \geq 1$, $x \in D$, для которых п.в. в области D выполняются неравенства $|J(x,f)| \leq K(x) l^n(f'(x))$, $|f'(x)|^n \leq P(x)|J(x,f)|$ (см. например, [2, 6]).

Рассмотрим $Q = \left\{x \in \boldsymbol{R^n} :\ a_i \leq x_i \leq b_i, i = \overline{1,n}\right\}$ – замкнутый n-мерный интервал. Будем говорить, как и в [1, 2], что отображение $f : Q \to \boldsymbol{R^m}$ принадлежит классу ACL (или является абсолютно непрерывным на линиях), если f – абсолютно непрерывно на почти всех линейных сегментах I, параллельных координатным осям. Более точно, пусть $\pi_i(x) = x - x_i e_i$ – ортогональная проекция. Тогда множество E_i всех точек $x \in \pi_i(I)$, таких, что отображение $t \to f(x - te_i)$, не абсолютно непрерывное на интервале $[a_i, b_i]$ – имеет меру Лебега $m_{n-1}(E_i) = 0$ для всех $1 \leq i \leq n$.

Если f – локально суммируемое ACL-отображение, тогда почти всюду в D отображение f имеет частные производные df_i / dx_j, $i, j = \overline{1,n}$. Если, кроме того, каждая из этих частных производных принадлежит классу $L_p(D)$, $p > 1$, для любой области $D' \subseteq D$, то $f : D \to \boldsymbol{R^n}$ называют ACL^p-отображением и пишут $f \in ACL^p(D)$. Известно [1, теоремы 1.4, 1.5], что если $f \in ACL^p(D)$, то $f \in W^1_{n,\,\mathrm{loc}}(D)$.

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке Минобрнауки РФ ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (соглашение № 14.В37.21.0354 «Сохранение алгебраических и топологических инвариантов и свойств отображениями»).

Назовем гомеоморфизм $f: D \to D'$ отображением класса $f \in \widetilde{W}_n^1(D)$, если $f \in W_{n,\,\mathrm{loc}}^1(D)$, $f^{-1} \in W_{n,\,\mathrm{loc}}^1(D')$ и обладает N, N^{-1}-свойствами. Можно считать, что якобиан $J(x, f)$ отображения f сохраняет знак почти всюду в D (для определенности возьмем $J(x, f) > 0$).

Пусть $y = f(x)$ – непрерывное отображение области $D \subset \boldsymbol{R^n}$, $U \subset D$, через $N(y, f, U)$ и $\mu(y, f, U)$, как и в [7], обозначим соответственно кратность и степень отображения f в точке $y \in U$, через ∂U – границу множества U. Напомним, что отображение f сохраняет ориентацию, если для любой подобласти $U, \overline{U} \subset D$, и точки $y \in f(U) \setminus f(\partial U)$ – степень отображения $\mu(y, f, U) > 0$ [1].

Пусть X, Y – два произвольных топологических пространства, f: X $\to$Y – непрерывное отображение. Точка $a \in$ X называется точкой ветвления отображения f, если f не является топологическим ни в какой окрестности точки a. Совокупность точек ветвления обозначим B_f [7, 8]. Известно, что если D – открытая область и $f: D \to \boldsymbol{R^n}$ – произвольное непрерывное дискретное отображение, тогда множество B_f нигде не плотно, $dim\,(B_f) \le n - 2$ и $m\,(B_f) = 0$ [8].

Приведем лемму, которая нам потребуется при доказательстве основных результатов работы, используя, как и в [2], следующие обозначения. Пусть $f: D \to \boldsymbol{R^n}$ – открытое, дискретное отображение, $U \subset D$, $J(D)$ – семейство всех областей U, являющихся компактными подмножествами D. Область $U \subseteq D$ назовем нормальной, если $f(\partial U) = \partial f(U)$. Согласно [2, замечание 2.8], если $f: D \to \boldsymbol{R^n}$, $x \in D$ и $r > 0$, то окрестность точки $x \in f^{-1}B^n(f(x), r)$ обозначим $U(x, f, r)$, здесь $B^n(f(x), r)$ – шар в $\boldsymbol{R^n}$ с центром в точке $f(x)$ y и радиусом r.

Лемма 1 [2, лемма 2.9]. Пусть $f: D \to \boldsymbol{R^n}$ – открытое дискретное отображение. Тогда $\lim\limits_{r \to 0} d(U(x, f, r)) = 0$ для всех $x \in D$. Если $U(x, f, r) \in J(D)$, тогда $U(x, f, r)$ – нормальная область и $f(U(x, f, r)) = B^n(f(x), r) \in J(f(D))$. Более того, для каждой точки $x \in D$ существует число $\delta_x > 0$, такое, что при $0 < r \le \delta_x$ выполнены следующие условия:

(1) Окрестность $U(x, f, r)$ является нормальной окрестностью точки x;

(2) $U(x, f, r) = U(x, f, \delta_x) \cap f^{-1}B^n(f(x), r)$;

(3) $\partial U(x, f, r) = U(x, f, \delta_x) \cap f^{-1}S^{n-1}(f(x), r)$, если $r < \delta_x$;

(4) $CU(x, f, r)$ – связное множество;

(5) $C\overline{U}(x, f, r)$ – связное множество;

(6) Если $0 < r < s \le \delta_x$, тогда $\overline{U}(x, f, r) \subset U(x, f, s)$ и $U(x, f, s) \setminus \overline{U}(x, f, r)$ – кольцо.

В качестве применяемого в теории квазиконформных гомеоморфизмов обратного отображения будем использовать построенное ниже отображение h_j [9].

Дадим аналитическое определение отображений с s-усредненной характеристикой [10, 11]

Определение 1. Отображение *f* называется отображением с $K_{O,s}$ -усредненной характеристикой, если

1) $f \in W^1_{n,loc}(D)$; $f \in \tilde{W}^1_{n,loc}(D)$.

2) Существует постоянная $K_{O,s} \geq 0$, такая, что выполняется неравенство

$$K_{O,s}(f) = \left(\int\limits_D \mathrm{K}^s_O(x,f)\, d\sigma_x \right)^{1/s} \leq K_{O,s}\,.$$

Определение 2. Отображение *f* называется отображением с $K^*_{O,s}$ -усредненной характеристикой, если

1) $f \in W^1_{n,loc}(D)$; $f \in \tilde{W}^1_{n,loc}(D)$.

2) Существует постоянная $K^*_{O,s} \geq 0$, такая, что выполняется неравенство

$$K^*_{O,s}(f) = \left(\int\limits_D K^s_O(x,f)\, J(x,f)\, d\sigma_x \right)^{1/s} \leq K^*_{O,s}\,.$$

Аналогично определяются отображения с $K_{\mathrm{I},s}$- и с $K^*_{\mathrm{I},s}$-усредненными характеристиками. Здесь $K_O(x,f), K_\mathrm{I}(x,f)$ – соответственно внешняя и внутренняя дилатация отображения *f* в точке *x*, $d\sigma_x = \dfrac{dx}{\left(1+|x|^2\right)^n}$.

В силу неравенств, связывающих между собой внешнюю и внутреннюю дилатации отображения *f* [6, 12], отображения с $K_{O,s}$-, $K^*_{O,s}$-, $K_{\mathrm{I},s}$- и с $K^*_{\mathrm{I},s}$-усредненными характеристиками также будем называть отображениями с *s*-усредненной характеристикой.

Пусть *f* – отображение с *s*-усредненной характеристикой, $f \in \tilde{W}^1_{n,loc}(D)$, $U \subseteq D$ – нормальная область, $x \in U$, $y \in f(U) \setminus f(B_f \cap U)$, $f^{-1}(y) = \{x_j\}$. Тогда, обобщая [9, лемма 4, часть (b)], получаем, что по лемме 1 существуют $V_j = U(x_j, f, r)$ – окрестности точек x_j, такие, что $f_j = f_{|V_j}$ – гомеоморфизм. Поэтому можно рассматривать отображения $h_j : B^n(y,r) \to U$, причем $f \circ h_j$ – тождественное отображение. Если $h_j \in W^1_{n,loc}\left(B^n(y,r)\right)$ и *f* – отображение с *s*-усредненной характеристикой, то по лемме 1 и [13] существует такое *r*, что $h_j = f_j^{-1}$ – квазиконформное в среднем отображение в шаре $B^n(y,r)$.

Множество *E* точек $y \in f(U) \setminus f(B_f)$, в которых хотя бы одно из h_j не дифференцируемо, содержится в борелевском множестве E_0, мера Лебега которого $m_n(E_0)=0$ (см., например, [9]).

Пусть D, D' – области пространства $\boldsymbol{R^n}$. Отображение $f : D \to D'$ называется дискретным (изолированным), если для каждого $y \in D'$ прообраз $f^{-1}(y)$ – дискретное множество, то есть состоит из изолированных точек [2].

Пусть ρ – борелевская функция в $\boldsymbol{R}^n$. Так как по следствию из теоремы 1.6 [6] класс множеств, измеримых по одномерной мере Хаусдорфа (Λ_1-измеримых), включает в себя класс борелевских множеств, то функция $N(y, \gamma, I)$ и ρ являются Λ_1-измеримыми. Тогда интеграл по кривой γ от функции ρ определим по формуле (см., например, [14])

$$\int_\gamma \rho dl = \int_\gamma \frac{\rho(x) N(y,\gamma,I)\, d\Lambda_1(x)}{1+|x|^2}, \tag{1}$$

где $N(y, \gamma, I)$ – функция кратности (число точек $t \in I$, таких, что $\gamma(t) = y$. Если γ есть кривая Жордана, то интеграл (1) совпадает с обычным интегралом $\int_\gamma \rho dl = \int_\gamma \rho ds_x = \int_\gamma \rho \frac{ds}{1+|x|^2}$, определенным посредством длин частичных дуг. Это определение отличается от аналогичного определения в [2, 6] наличием под интегралом множителя $1/(1+|x|^2)$.

Известно [2], что если $f: D \to \boldsymbol{R}^n$ – непрерывное, открытое, дискретное отображение и γ – кривая, лежащая в D, то $f(\gamma)$ – тоже кривая, лежащая в $f(D)$, и если Γ – семейство кривых, то $f(\Gamma) = \Gamma'$ – также семейство кривых.

Определение 3. Пусть $\Gamma \subset \boldsymbol{R}^n$ – некоторое семейство кривых. Функцию $\rho: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^1$ будем называть допустимой метрикой для Γ и обозначать $\rho \wedge \Gamma$, если она неотрицательна, измерима по Борелю и $\int_\gamma \rho ds_x \geq 1$ для $\forall\, \gamma \in \Gamma$, где $ds_x = ds/(1+|x|^2)$.

Определение 4. Для произвольного p, $0 < p < \infty$, определим сферический модуль порядка p семейства кривых Γ как нижнюю грань:

$$M_p(\Gamma) = \inf \int_{\boldsymbol{R}^n} \rho^p(x)\, d\sigma_x\,, \tag{2}$$

где инфимум берется над классом всевозможных метрик $\rho \wedge \Gamma$. Далее, если потребуется, для модуля семейства кривых $M_p(\Gamma)$ также введем обозначение $M_p(\gamma, E, U)$; здесь $\gamma \in \Gamma$, Γ – семейство всевозможных кривых, соединяющих множества E и U, лежащие в области D. Если $p = n$, индекс n часто опускают и пишут $M(\Gamma)$ вместо $M_n(\Gamma)$.

Приведем необходимые свойства модуля семейств кривых:

(1) Если $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$, то $M(\Gamma_1) \leq M(\Gamma_2)$;

(2) $M\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} M(\Gamma_i)$;

(3) если семейства Γ_i, i=1,2,… отделены, то $M\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} M(\Gamma_i)$;

(4) если $\Gamma_1 < \Gamma_2$, то $M(\Gamma_1) \geq M(\Gamma_2)$, (см., например, [14]).

В предлагаемой работе, исходя из понятия p-модуля семейства кривых, как и в [11], дадим еще одно определение отображений с s-усредненной характеристикой, которое можно трактовать как геометрическое.

Определение 5. Скажем, что открытое дискретное непрерывное отображение f:

- принадлежит классу $Q_s(D)$, где $1/(n–1) \le s < \infty$, если для любого p, такого, что $\frac{1}{n-1} \le p \le s$, существует Φ_p – неотрицательная ограниченная σ-аддитивная функция борелевских множеств в D, такая, что для любого семейства кривых Γ из D и произвольного борелевского множества $U \subset D$, содержащего все кривые из Γ, выполняется неравенство

$$M^{p+1}_{np/(p+1)}(\Gamma') \le \Phi_p(U) M^p_n(\Gamma), \tag{3}$$

где $\Gamma' = f(\Gamma)$.

Обозначим $q_s(D)$ – подкласс $q_s(D) \subset Q_s(D)$ отображений, для которых вышеопределенные функции Φ_p являются абсолютно непрерывными функциями борелевских множеств. Очевидно, если $s' \le s$, то $Q_s(D) \subset Q_{s'}(D)$, $q_s(D) \subset q_{s'}(D)$;

- принадлежит классу $Q_{s'}(D')$, где $(n–1) \le s' < \infty$, если существует $\Psi_{s'}$ – неотрицательная ограниченная σ-аддитивная функция борелевских множеств в D', такая, что для любого семейства кривых $\Gamma' \subset D'$ и произвольного борелевского множества $U' \subset D'$, содержащего все кривые из Γ', выполняется неравенство

$$M^s_n(\Gamma') \le [\Psi_{S'}(U')]^s \cdot M^{s/\beta}_{n\beta}(\Gamma), \tag{4}$$

где $U' = f(U)$, $\Gamma' = f(\Gamma) = \{f(\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$, $\beta = s/(s–1)$;

3) принадлежит классу $Q_{s,s'}(D)$, где $(n-1) \le s, s' < \infty$, если выполняются оба закона (3), (4) искажения модулей любых семейств кривых $\Gamma \subset D$ и $\Gamma' \subset D'$.

Обозначим соответственно $q_{s'}(D')$, $q_{s,s'}(D)$ – подклассы $q_{s'}(D') \subset Q_{s'}(D')$, $q_{s,s'}(D) \subset Q_{s,s'}(D)$ отображений, для которых функции Φ_p, $\Psi_{s'}$, существование которых доказано в [5] (теоремы 1, 2 и следствия из них), являются абсолютно непрерывными функциями борелевских множеств.

Лемма 2 [14]. Пусть $f : D \to \boldsymbol{R}^n$ – отображение с $K_{\mathrm{I},s}$-усредненной характеристикой, $s > 1/(n–1)$, область $U \subseteq D$, Γ – семейство кривых из U, $\Gamma' = f(\Gamma)$. Тогда для почти всех кривых $\gamma' \in \Gamma'$ кривая $\gamma \in \Gamma$ абсолютно непрерывна.

Приведем одну существенно используемую специальную лемму о покрытиях (см. [3, 15]).

Лемма 3. Пусть U – ограниченное множество в $\boldsymbol{R}^n$ и $t > 1$ – число. Тогда существует последовательность $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ шаров B_k с центрами в точках x_k и радиусами $r_k > 0$ так, что она и последовательность $\{B'_k\}_{k=1}^{\infty}$ концентрических шаров B'_k с теми же центрами в точках x_k и радиусами t_{r_k} удовлетворяет следующим условиям:

1) $U = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B'_k$;

2) каждая точка множества U, содержится не более чем в ξ шарах из $\{B_k\}$ и в ξ′ шарах из $\{B'_k\}$;

3) последовательность $\{B'_k\}$ можно разбить на η семейств непересекающихся шаров;

Постоянные ξ′ и η зависят от размерности пространства n и числа t, а постоянная ξ зависит только от n.

Предложение 1. Пусть E, U – ограниченные множества $m(U\setminus E)$ – n-мерная мера Лебега, а $m_{n-1}S$ – $(n–1)$-мерная мера Лебега C^∞-многообразия S, являющегося границей $S=\partial A$ ограниченного борелевского множества A, содержащего E и содержащегося вместе со своим замыканием $\overline{A}\subset U$, а точная нижняя грань берется по всем таким S. Тогда справедливо неравенство

$$M_p(\gamma,E,U)\ge\frac{(\inf m_{n-1}S)^p}{(m(U\setminus E))^{p-1}}.$$

Это предложение нетрудно доказать, пользуясь известными соотношениями емкости и модуля [16]. В работе [17] оно содержится в терминах емкости.

Лемма 4. Если $f: D\to \boldsymbol{R^n}$ – открытое отображение класса $Q_s(D)$, то существует σ-аддитивная ограниченная функция Φ, заданная на борелевских множествах в D, такая, что для любого открытого множества $U\subset D$ справедливо неравенство

$$mf(U)\le\Phi(U),$$

где $m\,f(U)$ – n-мерная мера Лебега множества $f(U)$.

Если же $f\in q_\alpha(D)$, то в этом неравенстве функцию Φ можно выбрать абсолютно непрерывной.

Доказательство. Пусть $U\subset D$ – ограниченное произвольное открытое множество. Тогда по лемме 3 существует последовательность $\{B_k\}_{k=1}^\infty$ шаров B_k с центрами в точках x_k и радиусами $r_k>0$, такая, что она и последовательность $\{B'_k\}_{k=1}^\infty$ концентрических шаров B'_k с теми же центрами в точках x_k и радиусами $2r_k$ $(t=2)$ удовлетворяет следующим условиям 1) – 3).

Поскольку $f\in Q_{\frac{1}{n-1}}(D)$, то для любых семейств кривых Γ_κ, соединяющих множества $\overline{B}_k$ и B'_k и Γ'_k, соединяющих множества $f(\overline{B}_k)$ и $f(B'_k)$, выполнено неравенство

$$M_1\left(\gamma', f(\overline{B}_k), f(B'_k)\right)\le\left(\Phi_{\frac{1}{n-1}}(B'_k)\right)^{(n-1)/n}\cdot M_n^{1/n}(\gamma,\overline{B}_k,B'_k).$$

В силу предложения 1, отсюда имеем

$$\inf m_{n-1}S\le c\left(\Phi_{1/(n-1)}(B'_k)\right)^{(n-1)/n},$$

где постоянная c зависит только от n, а величина $\inf m_{n-1}S$ – $(n–1)$-мерная мера Лебега C^∞ – многообразия S, являющегося границей $S=\partial U$ – ограниченного открытого множества U, содержащего E и содержащегося вместе со своим замыканием $\overline{U}$ в D;

$$M_1(\gamma,E,D)=\inf m_{n-1}S,$$

см. [17, лемма 6].

Оценивая левую часть по известному изопериметрическому неравенству, получим

$$mf\left(B_k\right) \le c_1 \Phi_{1/(n-1)}\left(B_k'\right).$$

Суммируя эти неравенства по каждому из η семейств $\left\{B_{k_1}'\right\},\ldots,\left\{B_{k_\eta}'\right\}$ непересекающихся шаров из $\left\{B_k'\right\}$ и пользуясь σ-аддитивностью функции $\Phi_{1/(n-1)}$ для каждого $p = 1,2,\ldots,\eta$, будем иметь

$$mf\left(U\right) = mf\left(\bigcup_{k_p} B_{k_p}\right) = \sum_{k_p} mf\left(B_{k_p}\right) \le$$

$$\le \sum_{k_p} \Phi_{1/(n-1)}\left(B_{k_p}'\right) = c_1 \Phi_{1/(n-1)}\left(\bigcup_{k_p} B_{k_p}'\right) = c_1 \Phi_{1/(n-1)}\left(U\right).$$

Производя теперь суммирование по $p = 1,2,\ldots,\eta$, получаем

$$mf\left(U\right) \le \sum\nolimits_{p=1}^{\eta} mf\left(\bigcup_{k_p} B_{k_p}\right) \le c_1 \eta\, \Phi_{1/(n-1)}\left(U\right),$$

и требуемое в условии леммы неравенство следует отсюда очевидным образом, если положить $\Phi\left(U\right) = c_1 \eta\, \Phi_{1/(n-1)}\left(U\right)$. Если функция Φ абсолютно непрерывна, то и функция Φ_p также абсолютно непрерывна.

Предложение 2. Пусть $f \in Q_s(D)$, соответственно $f \in q_s(D)$ тогда и только тогда, когда существует σ-аддитивная (абсолютно непрерывная) ограниченная функция Φ, заданная на борелевских множествах в D, такая, что для любого открытого множества $U \subset D$ имеет место неравенство

$$M_{sn/(n+1)}\left(f\left(\Gamma\right)\right) \le \Phi\left(U\right) M_n^{s/(s+1)}\left(\Gamma\right)$$

для любого семейства кривых $\Gamma \subset U$.

Доказательство. Если $f \in Q_s(D)$ (или $f \in q_s(D)$), то нужное неравенство следует из определения 5-го класса отображений.

Для доказательства обратного утверждения рассмотрим функцию Ψ, заданную на борелевских множествах $U \subset D$, полагая $\Psi(U) = mf(U)$. Применяя неравенство Гельдера, нетрудно видеть, что для любого $1/(n-1) \le p \le s$ выполнено

$$M_{\frac{pn}{p+1}}\left(\Gamma'\right) \le \left[\Psi\left(U\right)\right]^{\frac{s-p}{s(p+1)}} \cdot M_{\frac{sn}{s+1}}^{\frac{p(s-p)}{s(p+1)}}\left(\Gamma\right).$$

Тогда, вместе с заданным в условии неравенством, получаем

$$M_{\frac{pn}{p+1}}\left(\Gamma'\right) \le \left[\left(\Phi\left(U\right)\right)^{\frac{p}{s}} \left(\Psi\left(U\right)\right)^{\frac{s-p}{s}}\right]^{\frac{1}{p+1}} \cdot M_n^{\frac{p}{p+1}}\left(\Gamma\right).$$

Остается показать, что $f \in Q_s(D)$ с σ-аддитивной ограниченной функцией $\Phi_p = \left(\Phi\left(U\right)\right)^{\frac{p}{s}} \Psi\left(U\right)^{\frac{s-p}{s}}$. Действительно, если последовательность борелевских множеств $\left\{U_k\right\}_{k=1}^{\infty} \subset D$ такова, что $U_i \cap U_j = \varnothing$ при $i \ne j$, то применяя неравенство Гельдера и пользуясь σ-аддитивностью функций Φ и Ψ, выводим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_p(U_k)\le\left(\sum_{k=1}^{\infty}\Phi(U_k)\right)^{\frac{p}{s}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\Psi(U_k)\right)^{\frac{s-p}{s}}=$$

$$=\left(\Phi\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}U_k\right)\right)^{\frac{p}{s}}\left(\Psi\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}U_k\right)\right)^{\frac{s-p}{s}}=\Phi_p\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}U_k\right).$$

Если Φ абсолютно непрерывна, то и функция Φ_p абсолютно непрерывна и предложение доказано.

Теорема 1. Открытое отображение $f:D\to\boldsymbol{R^n}$, $f\in Q_s(D)$ при $(n-1)\le s<\infty$, есть ACL^n-отображение, дифференцируемое п.в. в области D, и такое, что конечен интеграл

$$\int_D K_I^s(x,f)\left|J(x,f)\right|d\sigma_x<\infty.$$

Доказательство. Убедимся, что f есть ACL-отображение в области D. Возьмем n-мерный открытый параллелепипед Q, $\overline{Q}\subset D$, с ребрами параллельными координатным осям, и покажем, что f абсолютно непрерывно на п.в. сечениях параллельных оси x_n.

Пусть Q_0 – проекция Q на подпространство $x_n=0$, J – проекция Q на координатную ось x_n. Тогда $Q=Q_0\times J$. Пусть Φ_s – σ-аддитивная функция, участвующая в определении $f\in Q_s(D)$, порождает неотрицательную σ-аддитивную конечную функцию борелевских множеств $A\subset Q_0$ по правилу $\Phi_s(A,Q)=\Phi_s(A\times J)$. Известно (см. например [2, 7]), что для почти всех точек $z\in Q_0$ конечна величина

$$\overline{\Phi}'_s(z,Q)=\overline{\lim_{r\to 0}}\frac{\Phi_s\left(B^{n-1}(z,r),Q\right)}{m_{n-1}B^{n-1}(z,r)},$$

где $B^{n-1}(z,r)$ – $(n-1)$-мерный шар с центром в точке z и радиуса $r>0$, а $m_{n-1}B^{n-1}(z,r)$ – его $(n-1)$-мерная мера Лебега.

Для открытого множества $U\subset Q_0$ положим $\Psi_n(U,Q)=m f(U\times J)$ и пусть Φ – σ-аддитивная функция, определяемая леммой 4 по заданному отображению $f\in Q_s(D)$. Поскольку $\Psi_n(U,Q)\le\Phi(U\times J)$, где $\Phi(U,Q)=\Phi(U\times J)$, для всякого открытого множества $U\subset Q_0$, то, учитывая сказанное выше, заключаем, что величина $\overline{\Phi}'(z,Q)$ конечна для п.в. $z\in Q_0$, при этом $\overline{\Psi}'_n(z,Q)\le\overline{\Phi}'(z,Q)$ и таким образом, величина $\overline{\Psi}'_n(z,Q)$ конечна для п.в. $z\in Q_0$.

Зафиксируем произвольную точку $z\in Q_0$, в которой $\overline{\Phi}'(z,Q)$ и $\overline{\Phi}'_s(z,Q)$ конечны. На сечении $J_z=\{z\}\times J$ параллелепипеда Q возьмем произвольно непересекающиеся интервалы $\Delta_1,\ldots,\Delta_k$ с длинами $b_1,\ldots,b_k$ соответственно. Обозначая через U_i множество всех точек, удаленных от Δ_i на расстояние, меньшее, чем заданное $r>0$, рассмотрим множество $(\gamma;\Delta_i,U_i)$ кривых γ, соединяющих множества Δ_i с U_i. Пусть $r>0$ выбрано так, что множества U_i не пересекаются, $U_i\in Q$ и $\Omega_n r\le\omega_{n-1}b_i$, , $i=1,\ldots,k$, где Ω_n и ω_{n-1} – объем единичного шара и площадь поверхности единичной сферы в $\boldsymbol{R^n}$ соответственно. Воспользуемся неравенством, доказанным в работе [2] при $p=n$, при $p<n$ – в [3, предложение 4] в терминах

емкости, для $n-1 \le p \le n$, в терминах модуля, – в работе [18]:

$$M_n(\gamma;\Delta_i,U_i) \le \frac{mU_i}{r^n} \le 2\omega_{n-1}\frac{b_i}{r}. \tag{5}$$

С другой стороны, поскольку условие $n-1 < s < \infty$ влечет неравенство $n-1 < sn/(s+1) < n$, а тогда, согласно [3, предложение 5], имеем

$$M^{n-1}_{\frac{sn}{s+1}}(f(\gamma);f(\Delta_i),f(U_i)) \ge C\frac{(diamf(\Delta_i))^{\frac{sn}{s+1}}}{(mf(U_i))^{\frac{s+1-n}{s+1}}}. \tag{6}$$

Из определения 3 и неравенств (5) и (6) получаем

$$diam\, f(\Delta_i) \le C_1 r^{\frac{1-n}{n}}(mf(U_i))^{\frac{s+1-n}{s+1}}(\Phi_s(U_i))^{\frac{n-1}{ns}} b_i^{\frac{n-1}{n}} \le$$

$$\le C_1 r^{\frac{1-n}{n}}(\Phi(U_i))^{\frac{s+1-n}{sn}}(\Phi_s(U_i))^{\frac{n-1}{sn}} b_i^{\frac{n-1}{n}},$$

где функция Φ определена выше. Суммируя по $i = 1,2,\ldots, k$, применяя неравенство Гельдера и σ-аддитивность функций Φ и Φ_s, имеем

$$\sum_{i=1}^{k} diam\, f(\Delta_i) \le C_1 r^{\frac{1-n}{n}}\left(\sum_{i=1}^{k}\Phi(U_i)\right)^{\frac{s+1-n}{sn}}\left(\sum_{i=1}^{k}\Phi_s(U_i)\right)^{\frac{n-1}{ns}}\left(\sum_{i=1}^{k} b_i\right)^{\frac{n-1}{n}} =$$

$$= C_1 r^{\frac{1-n}{n}}\left(\Phi\left(B^{n-1}(z,r),Q\right)\right)^{\frac{s+1-n}{sn}}\left(\Phi_s\left(B^{n-1}(z,r),Q\right)\right)^{\frac{n-1}{sn}}\left(\sum_{i=1}^{k} b_i\right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Устремляя $r \to 0$, получаем

$$\left(\sum_{i=1}^{k} diam\, f(\Delta_i)\right)^n \le C_2\left(\bar{\Phi}'(z,Q)\right)^{\frac{s+1-n}{s}}\left(\bar{\Phi}'_s(z,Q)\right)^{\frac{n-1}{s}}\left(\sum_{i=1}^{k} b_i\right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Отсюда имеем, что $f \in ACL(D)$.

Покажем, что $f \in ACL^n(D)$. С каждой точкой $x \in D$ свяжем семейство Γ кривых γ, лежащее в области D и соединяющее множества E_r и U_r, где $E_r = \{y : |x-y| \le r\}$ и $U_r = \{y : |x-y| \le 2r\}$.

Хорошо известно (см. например, [17]), что в случае концентрических шаров $U = \{x : |x| \le R\}$ и $E = \{x : |x| \le r\}$ справедливо равенство

$$M_n(\gamma;E,U) = \omega_{n-1}\ln^{1-n}\frac{R}{r},$$

а если $1 < p < n$, то

$$M_p(\gamma;E,U) = \omega_{n-1}\left(\frac{n-p}{p-1}\right)^p\left(r^{\frac{p-n}{p-1}} - R^{\frac{p-n}{p-1}}\right)^{1-p}.$$

Так как $M_n(\gamma, E, U) = C$, где постоянная C зависит только от n, тогда, учитывая определение 1, получаем неравенство

$$M_{\frac{sn}{s+1}}(f(\gamma);f(E_r),f(U_r)) \le C(\Phi_s(U_r))^{\frac{1}{s+1}}.$$

Оценим левую и правую части по неравенству (8) применяя лемму 4

$$\left(diamf\left(E_r\right)\right)^n \le C_1\left(mf\left(U_r\right)\right)^{\frac{s+1-n}{s}}\left(\Phi_s\left(U_r\right)\right)^{\frac{n-1}{s}} \le$$

$$\le C_1\left(\Phi\left(U_r\right)\right)^{\frac{s+1-n}{s}}\left(\Phi_s\left(U_r\right)\right)^{\frac{n-1}{s}}.$$

Разделим обе части последнего неравенства на r^n и устремим $r \to 0$. Тогда для почти всех $x \in D$ имеем

$$\left|f'(x)\right|^n \le L^n(x,f) \le C_2\left(\bar{\Phi}'(x)\right)^{\frac{s+1-n}{s}}\left(\bar{\Phi}'_s(x)\right)^{\frac{n-1}{s}},$$

где постоянные C_1 и C_2 зависят только от n, $L(x,f)=\overline{\lim\limits_{r\to 0}}\max\limits_{|x-y|=r}\frac{|f(x)-f(y)|}{r}$, величины $\bar{\Phi}'(x)=\overline{\lim\limits_{r\to 0}}\frac{\Phi(U_r)}{mU_r}$, $\bar{\Phi}'_s(x)=\overline{\lim\limits_{r\to 0}}\frac{\Phi_s(U_r)}{mU_r}$, определяемые по σ-аддитивным функциям Φ и Φ_s конечны п.в. в D и суммируемы [2, 7].

Следовательно, по теореме Степанова (см., например, [1]) отображение f дифференцируемо п.в. в D. Интегрируя последнее соотношение по области D, с учетом неравенства Гельдера, получаем

$$\int\limits_D\left|f'(x)\right|^n d\sigma_x \le C_2\left(\int\limits_D\left(\bar{\Phi}'(x)\right)d\sigma_x\right)^{\frac{s+1-n}{s}}\left(\int\limits_D\bar{\Phi}'_s(x)\,d\sigma_x\right)^{\frac{n-1}{s}},$$

откуда следует, что $f \in ACL^n(D)$.

Убедимся, что $\int\limits_D K_I^s(x,f)\left|J(x,f)\right|d\sigma_x < \infty$.

Пусть $x \in D$ – произвольная точка, в которой $J(x,f) \ne 0, \infty$ (так как $J(x,f) \ne \infty$ п.в., то $K_{I,s}(x,f) \ne \infty$ п.в. поскольку $f \in ACL^n(D)$). Рассматривая снова семейство кривых $\{\gamma; E_r, U_r\}$, приходим к неравенству

$$M_{\frac{sn}{s+1}}\left(f(\gamma); f(E_r), f(U_r)\right) \le C_2\left(\Phi_s\left(U_r\right)\right)^{\frac{1}{s+1}}.$$

Оценивая здесь левую часть по известному изопериметрическому неравенству [17], получаем

$$\left(\inf m_{n-1}S_r\right)^{\frac{sn}{s+1}} \le C_1\left(\Phi_s\left(U_r\right)\right)^{\frac{1}{s+1}}\left(mf\left(U_r\right)\right)^{\frac{sn-s-1}{s+1}}.$$

При $r \to 0$ множество $f(E_r)$ с точностью до $o(r)$ представляет собой эллипсоид $f'(E_r)$, являющийся образом шара E_r, при линейном отображении f'. Поэтому

$$\left(C_2\frac{\left|J(x,f)\right|}{l\left(f'(x)\right)}r^{n-1}-o\left(r^{n-1}\right)\right)^{\frac{sn}{s+1}} \le \left(m_{n-1}\partial f\left(E_r\right)-o\left(r^{n-1}\right)\right)^{\frac{sn}{s+1}} \le$$

$$\left(\inf m_{n-1}S_r\right)^{\frac{sn}{s+1}} \le C_1\left(\Phi_s\left(U_r\right)\right)^{\frac{1}{s-1}}\left(mf\left(U_r\right)\right)^{\frac{sn-s-1}{s+1}},$$

где постоянная $C_2 > 0$ зависит от n. Разделив неравенство на $r^{\frac{sn-s-1}{s+1}}$ и устремляя $r \to 0$, будем иметь

$$\frac{|J(x,f)|^n}{l^n(f'(x))} \le C_3\left(\bar{\Phi}'_s(x)\right)^{\frac{1}{s}}\left(\overline{\lim_{r\to 0}}\frac{mf(U_r)}{mU_r}\right)^{\frac{sn-s-1}{s+1}}.$$

Отсюда, поскольку $\overline{\lim\limits_{r\to 0}}\dfrac{mf(U_r)}{mU_r}=|J(x,f)|$ п.в. в D (см. [17]), получаем

$$|J(x,f)| \le C_3\left(\frac{\bar{\Phi}'_s(x)}{|J(x,f)|}\right)^{\frac{1}{s}} l^n(f'(x)).$$

Поэтому $K_I^s(x,f)|J(x,f)| \le C_4\bar{\Phi}'_s(x)$, если $|J(x,f)| \ne 0, \infty$; $K_I^s(x,f)|J(x,f)|=0$, если $|J(x,f)|=0$ и, кроме того, $K_I^s(x,f)|J(x,f)|$ вместе с $|J(x,f)|$ конечны п.в. в D.

Следовательно,

$$\int\limits_D K_I^s(x,f)|J(x,f)|d\sigma_x \le C_4\int\limits_D \bar{\Phi}'_s(x)\,d\sigma_x < \infty$$

и теорема доказана.

Замечание 1. Если открытое отображение $f: D \to \boldsymbol{R^n}$ класса $Q_s(D)$, $1/(n-1) \le s \le n-1$, дифференцируемо п.в. в D, то $\int\limits_D K_I^s(x,f)|J(x,f)|\,d\sigma_x < \infty$.

Действительно, приведенная выше схема доказательства ограниченности этого интеграла при $s > n-1$ проходит и в случае $1/(n-1) \le s \le n-1$, если мы покажем, что $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{mf(U_r)}{mU_r}=|J(x,f)| \ne \infty$ п.в. в D.

В самом деле, из леммы 4 следует, что f есть отображение с ограниченной вариацией в смысле Банаха, и нужное вытекает далее из [7, с. 354–355].

Следствие 1. В условиях теоремы 1 якобиан $J(x,f)$ открытых отображений $f: D \to \boldsymbol{R^n}$ класса $Q_s(D)$ суммируем по области D.

Из результатов монографии [7] и теоремы 1 непосредственно вытекают следующие утверждения.

Теорема 2. Если $f: D \to \boldsymbol{R^n}$ – открытое отображение класса $q_s(D)$, то образ $f(U)$ всякого измеримого множества $U \subset D$ есть измеримое множество.

Теорема 3. Для открытого отображения $f: D \to \boldsymbol{R^n}$ класса $Q_s(D)$ при $s > (n–1)$ справедлива формула

$$\int\limits_D |J(x,f)|\,d\sigma_x = \int\limits_{\boldsymbol{R^n}} N(y,f,D)\,d\sigma_y,$$

а также более общее равенство

$$\int\limits_U h(f(x))|J(x,f)|d\sigma_x = \int\limits_{\boldsymbol{R^n}} h(y)N(y,f,D)\,d\sigma_y,$$

имеющее смысл для любого измеримого множества $U \subset D$ и при условии существования одного из интегралов.

Если $mf(\partial D) = 0$, то справедлива формула

$$\int_D |J(x,f)|\, d\sigma_x = \int_{R^n} \mu(y,f,D)\, d\sigma_y$$

и
$$\int_U h(f(x))|J(x,f)|d\sigma_x = \int_{R^n} h(y)\mu(y,f,D)\, d\sigma_y,$$

имеющая смысл при условии существования интеграла слева.

Из теоремы 3 следует интегральная ограниченность степени и кратности отображений с s-усредненной характеристикой. Для отображений с ограниченным в среднем искажением степень и кратность, вообще говоря, не ограничены на компактах, есть соответствующий пример [1].

Здесь не учитывается присущее гомеоморфному отображению свойство $f^{-1} \in ACL^n(D')$, поскольку обратное отображение является неоднозначной функцией. Тем не менее все же обсудим условия, при которых эквивалентность геометрического и аналитического определений отображений с s-усредненной характеристикой имеет место. Пойдем в этом направлении, следуя работам [3, 4, 19]. Нами построен пример [20], показывающий, что класс отображений с s-усредненной характеристикой при $s > n–1$ не пуст и обобщает рассматриваемые в этих работах классы отображений.

Далее рассматриваем непрерывное, открытое, дискретное отображение $f : D \to D'$, $f \in \widetilde{W}^1_{n,\,\mathrm{loc}}\left(D \setminus B_f\right)$, $f \in W^1_{n,\,\mathrm{loc}}(D)$ и якобиан $J(x, f) > 0$ почти всюду в D.

Пусть отображение f с s-усредненной характеристикой удовлетворяет условиям аналитического определения. Пусть также для отображения f выполнено геометрическое определение $f \in Q_{s,s'}(D)$.

Покажем, что при таком понимании геометрическое и аналитическое определения отображений с s-усредненной характеристикой эквивалентны.

Теорема 4. Пусть $f : D \to D'$ – непрерывное открытое дискретное отображение, s, $s' > n–1$. Следующие условия эквивалентны:

(1) f – отображение с $K_{\mathrm{I},s}$-усредненной характеристикой и $\int_D K_O^s(x,f)\, d\sigma_x < \infty$;

(2) $f \in \widetilde{W}^1_{n,\,\mathrm{loc}}\left(D \setminus B_f\right)$, $f \in W^1_{n,\,\mathrm{loc}}(D)$ – невырожденные в своих областях задания отображения и следующие интегралы конечны $\int_D K_I^s(x,f)|J(x,f)|d\sigma_x$,
$$\int_{V^* \setminus f(B_f \cap V_j)} K_I^{s'}(y,f_j^{-1})\left|J(y,f_j^{-1})\right| d\sigma_y ;$$

(3) $f \in Q_{s,s'}(D)$;

(4) $f \in q_{s,s'}(D)$.

Доказательство. Условие (3) вытекает из (4) очевидным образом. Если выполнено (3), то по теореме 1 имеем, что отображение $f \in W^1_{n,\,\mathrm{loc}}(D)$, дифференцируемо почти всюду в D и интеграл $\int_D K_I^s(x,f)|J(x,f)|d\sigma_x$ конечен.

Остается показать, что $f_i^{-1} \in \widetilde{W}_{n,\mathrm{loc}}\left(D \setminus B_f\right)$.

Пусть область $V \subset D$ и $f(V) = V^*$. Точка $y \in V^* \setminus (B_f \cap V_i)$, $f^{-1}(y) \cap V = \{x_i\}$. Как показано выше, существуют окрестности $V_i = U(x_i, f, r)$ точек x_i такие, что $f_i = f|_{V_i}$ – гомеоморфизм. Поэтому можно рассмотреть отображение $f_i^{-1} : B^n(y,r) \to V_i$, причем $f \circ f_i^{-1}$ – тождественное отображение. Тогда по теореме 8.3 [1] получаем, что f_i^{-1} является ACL-отображением, невырожденным почти всюду в области своего задания, и интеграл $\int\limits_{V^* \setminus f(B_f \cap V_i)} K_I^{s'}(y, f_i^{-1}) \left| J(y, f_i^{-1}) \right| d\sigma_y$ конечен, где $s' > n-1$.

Проверим, что условие (2) влечет условие (1). Так как $J(x,f) \neq 0$ и $K_{\mathrm{I}}(x,f) \geq 1$ почти всюду в D, то из конечности интеграла $\int\limits_D K_I^s(x,f) \left| J(x,f) \right| d\sigma_x$ вытекает, что $0 < J(x,\ f) < \infty$ почти всюду в D. Поэтому характеристики $K_I^{n-1}(x,f) \geq K_O(x,f) \geq 1$ почти всюду в D, и из очевидных неравенств

$$\infty > \int\limits_D K_I^s(x,f) \left| J(x,f) \right| d\sigma_x \geq \int\limits_D K_O^{s/(n-1)}(x,f) \left| J(x,f) \right| d\sigma_x \geq$$

$$\geq \int\limits_D K_O(x,f) \left| J(x,f) \right| d\sigma_x \geq \int\limits_D |f'(x)|^n \, d\sigma_x$$

заключаем, что $f \in W_{n,\mathrm{loc}}^1(D)$.

Покажем, что $f_i^{-1} \in W_{n,\mathrm{loc}}(D \setminus B_f)$. В самом деле, так как

$$\infty \geq \int\limits_{V^* \setminus f(B_f \cap V_i)} K_I^s(y, f_i^{-1}) \left| J(y, f_i^{-1}) \right| d\sigma_y \geq \int\limits_{V^* \setminus f(B_f \cap V_i)} K_O^{s/(n-1)}(y, f_j^{-1}) \left| J(y, f_i^{-1}) \right| d\sigma_y \geq$$

$$\geq \int\limits_{V^* \setminus f(B_f \cap V_i)} K_O^s(y, f_i^{-1}) \left| J(y, f_i^{-1}) \right| d\sigma_y \geq \int\limits_{V^* \setminus f^i(B_f \cap V_i)} \left| \frac{\partial f_{i,j}^{-1}}{\partial y_k} \right|^n d\sigma_y$$

и отображение f_i^{-1} квазиконформно в среднем, следовательно, $f_i^{-1} \in W_{n,\mathrm{loc}}^1(D \setminus B_f)$. Поскольку ACL^n-гомеоморфизмы обладают N-свойством [7, 12], то f и f_i невырождено дифференцируемы в своих областях задания [1, 12], и поэтому $K_I(y, f_i^{-1}) = K_O(x,f)$ для почти всех $y = f(x)$.

Производя во втором интеграле замену переменных [7, теорема 3, с. 364], получим

$$\infty > \int\limits_{V^* \setminus f(B_f \cap V)} K_I^s(y, f_i^{-1}) \left| J(y, f_i^{-1}) \right| d\sigma_y \geq \int\limits_V K_O^{s'}(x,f) d\sigma_x.$$

Для завершения доказательства теоремы остается убедиться, что условие (4) есть следствие условия (1).

Из теоремы 2 [5] вытекает, что в качестве $\Phi_{\mathrm{I},s}^*(U)$ следует взять ограниченную неотрицательную абсолютно непрерывную σ-аддитивную функцию измеримых множеств в D, определяемую равенством

$$\Phi^*_{\mathrm{I},s}(U) = \int_U K_I^s(x,f)\left|J(x,f)\right| d\sigma_x .$$

Аналогично из [5, следствие 1 теоремы 2] и в силу известного неравенства, связывающего характеристики отображений между собой, вытекает, что за $\Psi_{s'}(U')$ следует взять функцию, определяемую равенством

$$\Psi_{s'}(U') = \int_{U'} K_I^{s'}(x,f)\left|J(x,f)\right| d\sigma_x .$$

Теорема доказана.

Теоремы 1–4, доказанные для отображений с s-усредненной характеристикой, можно распространить на классы и подклассы отображений с ограниченным интегралом Дирихле, квазирегулярных [1, 2] и др., пользуясь вложениями, доказанными в работе [20].

Для негомеоморфных квазирегулярных отображений эквивалентность аналитического и метрического определений доказана в [2]; для гомеоморфных отображений с искажением, ограниченным в среднем, эквивалентность аналитического и геометрического определений доказана в работе В.И. Кругликова [3], для негомеоморфных отображений с искажением, ограниченным в среднем, – в работе А.Н. Малютиной [4].

Исходя из высокой значимости модульной техники при исследовании геометрических свойств пространственных отображений, профессор О. Мартио предложил следующую общую концепцию – теорию Q-гомеоморфизмов, основы которой были заложены, начиная с работы [22] и др., а в работе [23] концепция Q-гомеоморфизмов была распространена на отображения с ветвлением, так называемые Q-отображения.

Приведем теорему об оценке модуля.

Теорема 5 (об оценке модуля [11, 20]). Пусть $f : D \to \boldsymbol{R}^n$ – отображение с $K_{\mathrm{I},s}$-усредненной характеристикой. Тогда выполняется неравенство

$$M(\Gamma') \le \inf_{\rho\wedge\Gamma} \int_D (\rho(x))^n K_I(x,f)\, d\sigma_x , \tag{9}$$

где Γ – некоторое семейство кривых, в области D, Γ' – образ семейства Γ при отображении f.

Оценка (9) указывает на непосредственную связь класса отображений с s-усредненной характеристикой с теорией Q-гомеоморфизмов [11, 24–27], интенсивно развивающейся в последние годы (ср. с определением ниже).

Определение 6 [22]. Пусть D – область в $\boldsymbol{R}^n$, $n \ge 3$, и пусть $Q : D \to [1,\infty]$ – измеримая функция. Гомеоморфизм $f : D \to \overline{\boldsymbol{R}^n} = \boldsymbol{R}^n \bigcup \{\infty\}$ называется Q-гомеоморфизмом, если

$$M(f(\Gamma)) \le \int_D Q(x)\rho^n(x)\, dm(x)$$

для любого семейства Γ путей в D и любой допустимой функции ρ для Γ. Здесь непрерывность отображений понимается относительно сферической (хордальной) метрики.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Решетняк Ю.Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982. 288 с.
2. *Martio O.*, *Rickman S., Väisälä J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. 1969. No. 448. P. 1–40.
3. *Кругликов В.И.*, *Пайков В.И.* Некоторые геометрические свойства отображений с искажением, ограниченным в среднем. Донецк: Донецк ун-т, 1982. 43 с. (Деп. в ВИНИТИ 06.09.82 № 4747-82 Деп).
4. *Малютина А.Н.* Об эквивалентности геометрического и аналитического определений отображений с ограниченным в среднем искажением // Экстремальные задачи теории функций 8. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1990. С. 64–70.
5. *Малютина А.Н.*, *Елизарова М.А.* Оценки искажения модулей для отображений с *s*-усредненной характеристикой // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2010. № 2(10). С. 5–15.
6. *Сычев А.В.* Модули и пространственные квазиконформные отображения. Новосибирск: Наука, 1983. 152 с.
7. *Rado T.*, *Reichelderfer R.V.* Continuous transformation in analisis. Berlin – Göttingen – Heidelberg: Springer-Verlag, 1955. 442 p.
8. *Чернавский А.В.* Конечнократные открытые отображения многообразий // Мат. сб. 1964. Т. 65. № 3. С. 357–369.
9. *Полецкий Е.А.* Метод модулей для негомеоморфных квазиконформных отображений // Мат. сборник. 1970. Т. 83 (125). № 2 (10). С. 261–273.
10. *Малютина А.Н.*, *Елизарова М.А.* Теоремы о полунепрерывности снизу отображений с *s*-усредненной характеристикой // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2009. № 4(8). С. 46–52.
11. *Елизарова М.А.*, *Малютина А.Н.* Отображения с *s*-усредненной характеристикой. Определение и свойства // LAP LAMBERT. Academic Publishing, 2013. С. 121.
12. *Väisälä J.* Lectures on *n*-dimentional quasiconformal mappings. – Lectures and Notes in Math. Berlin – Heidelberg – New-York: Springer-Verlag, 1971. 144 p.
13. *Гольдштейн В.М.* Емкость и продолжение функций с обобщенными производными // Сиб. мат. журн. 1982. Т. 23. № 1. С. 49–59.
14. *Малютина А.Н.*, *Кривошеева И.И.*, *Баталова Н.Н.* Искажение сферического модуля семейства кривых // Исследования по математическому анализу и алгебре. Вып. 3. Томск: Изд-во ТГУ, 2001. С. 179–195.
15. *Гусман М.* Дифференцирование интегралов в $\boldsymbol{R}^n$. М.: Мир, 1978. 200 с.
16. *Hesse J.* A *p*-extremal length and *p*-capacity // Arkiv for Math. 1975. V. 13. No. 1. P. 131–144.
17. *Мазья В.Г.* О некоторых интегральных неравенствах для функций многих переменных // Проблемы математического анализа. Л.: Изд-во ЛГУ, 1973. Вып. 3. С. 33–68.
18. *Малютина А.Н.* Устранимость изолированный особенности для отображений с искажением, ограниченным в *s*-среднем // Комплексный анализ и математическая физика. Школа-семинар. Материалы докладов. Красноярск, 1987. С. 72.
19. *Сычев А.В.*, *Малютина А.Н.* Об отображениях с ограниченным в среднем искажением // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283. № 2. С. 317–320.
20. *Малютина А.Н.*, *Елизарова М.А.* Дифференциальные свойства отображений с *s*-усредненной характеристикой // Вестник ТГУ. 2007. № 300(1). С. 124–129.
21. *Малютина А.Н.*, *Елизарова М.А.* О связи классов отображений с *s*-усредненной характеристикой с некоторыми классами пространственных отображений // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2010. № 4(12). С. 18–32.
22. *Мартио О.*, *Рязанов В.*, *Сребро У.*, *Якубов Э.* К теории *Q*-гомеоморфизмов // Докл. РАН. 2001. Т. 381. № 1. С. 20–22.
23. *Martio O.*, *Ryazanov V.*, *Srebro U.*, *and Yakubov E.* Mappings with finite length distortion // J. d'Anal. Math 93 (2004). P. 215–236.

24. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., and Yakubov E. Q*-homeomorphisms, Contemporary // Math. 2004. V. 364. P. 193–203.
25. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., and Yakubov E.* On *Q*-homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. 2005. V. 30. No. 1. P. 1–21.
26. *Ryazanov V. and Sevost'yanov E.* Toward the theory of ring *Q*-homeomorphisms // Israel J. Math. 2008. V. 168. P. 101–118.
27. *Рязанов В.И., Севостьянов Е.А.* Равностепенно непрерывные классы кольцевых *Q*-гомеоморфизмов // Сиб. матем. журн. 2007. Т. 48(6). С. 1361–1376.

Статья поступила 25.12.2012 г.

Malyutina A.N., Elizarova M.A. ON EQUIVALENCE OF THE ANALYTICAL AND GEOMETRICAL DEFINITIONS OF MAPPINGS WITH AN *s*-AVERAGED CHARACTERISTIC. In this paper we continue to develop the geometric method of studying properties of space mappings with an s-averaged characteristic. The method is based on the characteristic distortion law for modules of families of curves.

In recent decades, the theory of mappings with bounded distortion in the *n*-dimensional Euclidean space is one of the most meaningful and intensively developed branches of the function theory. These mappings were introduced and systematically studied in works by Yu.G. Reshetnyak, published since 1966. A part of Yu. G. Reshetnyak's results is contained in [1].

The most powerful tools used in the study of space mapping properties are methods that study invariance properties of conformal capacity or the module of families of curves. The equivalence of analytical and geometrical (expressed in terms of the conformal capacity of condensers) definitions of mappings with bounded distortion was introduced by O. Martio, S. Rickman and J. Väisälä [2]. In [3], the equivalence was proved for definitions of homeomorphic mappings with distortion bounded on the average. The equivalence for mappings nonhomeomorphic with distortion bounded on the average was considered in [4].

In the presented paper, we give a geometric definition of mappings with an *s*-averaged characteristic using the concept of a spherical *p*-module of a family of curves. This definition can also be interpreted as a generalization of the method of modules for mappings with an *s*-averaged characteristic. We also study these mappings properties and prove the equivalence of the geometric and analytic definitions using the distortion theorems.

Keywords: space mappings with an *s*-averaged characteristic, geometrical method of modules, equivalence, branching points.

REFERENCES

1. *Reshetnyak Yu.G.* Prostranstvennye otobrazheniya s ogranichennym iskazheniem. Novosibirsk: Nauka, 1982. 288 p. (in Russian).
2. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. 1969. No. 448. P. 1–40.
3. *Kruglikov V.I., Paykov V.I.* Nekotorye geometricheskie svoystva otobrazheniy s iskazheniem, ogranichennym v srednem. Donetsk: Donetsk un-t, 1982. 43 p. (Dep. v VINITI 06.09.82 No. 4747-82 Dep) (in Russian).
4. *Malyutina A.N.* Ob ekvivalentnosti geometricheskogo i analiticheskogo opredeleniy otobrazheniy s ogranichennym v srednem iskazheniem // Ekstremal'nye zadachi teorii funktsiy 8. Tomsk: Izd-vo Tom. un-ta, 1990. P. 64–70 (in Russian).
5. *Malyutina A.N., Elizarova M.A.* Otsenki iskazheniya moduley dlya otobrazheniy s s-usrednennoy kharakteristikoy // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika. 2010. No. 2(10). P. 5–15 (in Russian).
6. *Sychev A.V.* Moduli i prostranstvennye kvazikonformnye otobrazheniya. Novosibirsk: Nauka, 1983. 152 p. (in Russian).
7. *Rado T., Reichelderfer R.V.* Continuous transformation in analisis. Berlin – Göttingen – Heidelberg: Springer-Verlag, 1955. 442 p.

8. *Chernavskiy A.V.* Konechnokratnye otkrytye otobrazheniya mnogoobraziy // Mat. sb. 1964. V. 65. No. 3. P. 357–369 (in Russian).
9. *Poletskiy E.A.* Metod moduley dlya negomeomorfnykh kvazikonformnykh otobrazheniy // Mat. sbornik. 1970. V. 83 (125). No. 2 (10). P. 261–273 (in Russian).
10. *Malyutina A.N., Elizarova M.A.* Teoremy o polunepreryvnosti snizu otobrazheniy s s-usrednennoy kharakteristikoy // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika. 2009. No. 4(8). P. 46–52 (in Russian).
11. *Elizarova M.A., Malyutina A.N.* Otobrazheniya s s-usrednennoy kharakteristikoy. Opredelenie i svoystva // LAP LAMBERT. Academic Publishing, 2013. P. 121 (in Russian).
12. *Väisälä J.* Lectures on n-dimentional quasiconformal mappings. – Lectures and Notes in Math. Berlin – Heidelberg – New-York: Springer-Verlag, 1971. 144 p.
13. *Gol'dshteyn V.M.* Emkost' i prodolzhenie funktsiy s obobshchennymi proizvodnymi // Sib. mat. zhurn. 1982. V. 23. No. 1. P. 49–59 (in Russian).
14. *Malyutina A.N., Krivosheeva I.I., Batalova N.N.* Iskazhenie sfericheskogo modulya semeystva krivykh // Issledovaniya po matematicheskomu analizu i algebre. Vyp. 3. Tomsk: Izd-vo TGU, 2001. P. 179–195 (in Russian).
15. *Gusman M.* Differentsirovanie integralov v $\boldsymbol{R}^n$. Moscow: Mir, 1978. 200 p. (in Russian).
16. Hesse J. A p-extremal length and p-capacity // Arkiv for Math. 1975. V. 13. No. 1. P. 131–144.
17. *Maz'ya V.G.* O nekotorykh integral'nykh neravenstvakh dlya funktsiy mnogikh peremennykh // Problemy matematicheskogo analiza. L.: Izd-vo LGU, 1973. Vyp. 3. P. 33–68 (in Russian).
18. *Malyutina A.N.* Ustranimost' izolirovannyy osobennosti dlya otobrazheniy s iskazheniem, ogranichennym v s-srednem // Kompleksnyy analiz i matematicheskaya fizika. Shkola-seminar. Materialy dokladov. Krasnoyarsk, 1987. P. 72 (in Russian).
19. *Sychev A.V., Malyutina A.N.* Ob otobrazheniyakh s ogranichennym v srednem iskazheniem // Dokl. AN SSSR. 1985. V. 283. No. 2. P. 317–320 (in Russian).
20. *Malyutina A.N., Elizarova M.A.* Differentsial'nye svoystva otobrazheniy s s-usrednennoy kharakteristikoy // Vestnik TGU. 2007. No. 300(1). P. 124–129 (in Russian).
21. *Malyutina A.N., Elizarova M.A.* O svyazi klassov otobrazheniy s *s*-usrednennoy kharakteristikoy s nekotorymi klassami prostranstvennykh otobrazheniy // Vestnik Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika. 2010. No. 4(12). P. 18–32 (in Russian).
22. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* K teorii Q-gomeomorfizmov // Dokl. RAN. 2001. V. 381. No. 1. P. 20–22 (in Russian).
23. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., and Yakubov E.* Mappings with finite length distortion // J. d'Anal. Math 93 (2004). P. 215–236.
24. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., and Yakubov E.* Q-homeomorphisms, Contemporary // Math. 2004. V. 364. P. 193–203.
25. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., and Yakubov E.* On Q-homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. 2005. V. 30. No. 1. P. 1–21.
26. *Ryazanov V. and Sevost'yanov E.* Toward the theory of ring Q-homeomorphisms // Israel J. Math. 2008. V. 168. P. 101–118.
27. *Ryazanov V.I., Sevost'yanov E.A.* Ravnostepenno nepreryvnye klassy kol'tsevykh Q-gomeomorfizmov // Sib. matem. zhurn. 2007. V. 48(6). P. 1361–1376 (in Russian).

MALYUTINA Aleksandra Nikolaevna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: nmd@math.tsu.ru

Elizarova Mariya Aleksandrovna (Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: elizarova_m@sibmail.com