

А.М. Горцев, А.А. Калягин, Л.А. Нежелская

## СОВМЕСТНАЯ ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ИНТЕРВАЛОВ ОБОБЩЕННОГО ПОЛУСИНХРОННОГО ПОТОКА СОБЫТИЙ ПРИ НЕПРОДЛЕВАЮЩЕМСЯ МЁРТВОМ ВРЕМЕНИ

Изучается обобщенный полусинхронный поток событий, являющийся одной из адекватных математических моделей информационных потоков заявок в цифровых сетях интегрального обслуживания. Поток функционирует в условиях непродлевающегося мертвого времени. Приводятся явные выражения плотности вероятностей значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий наблюдаемого потока и совместной плотности вероятностей значений длительности двух соседних интервалов, учитывающие эффект непродлевающегося мертвого времени. Формулируются условия рекуррентности наблюдаемого потока событий.

**Ключевые слова:** обобщенный полусинхронный поток событий; непродлевающееся мертвое время; плотность вероятностей; совместная плотность вероятностей; рекуррентность потока событий.

В настоящей статье проводится дальнейшее исследование обобщенного полусинхронного потока событий, функционирующего в условиях непродлевающегося мёртвого времени, начатое в работах [1–5].

Обобщенный полусинхронный поток событий (далее поток) относится к классу дважды стохастических потоков и является одной из адекватных математических моделей информационных потоков заявок, функционирующих в цифровых сетях интегрального обслуживания (ЦСИО) [6]. В реальных ситуациях параметры, задающие входящий поток событий, известны либо частично, либо вообще не известны, либо (что ещё более ухудшает ситуацию) изменяются со временем. Вследствие этого возникают задачи: 1) оценки состояний потока (задача фильтрации интенсивности потока) по наблюдениям за моментами наступления событий [7]; 2) оценки параметров потока по наблюдениям за моментами наступления событий [8].

Одним из искажающих факторов при оценке состояний и параметров потока событий выступает мертвое время регистрирующих приборов [9], которое порождается зарегистрированным событием. Другие же события, наступившие в течение периода мертвого времени, недоступны наблюдению (теряются). Можно считать, что этот период продолжается некоторое фиксированное время (непродлевающееся мёртвое). В качестве примера приведем CSMA/CD – протокол случайного множественного доступа с обнаружением конфликта, широко используемого в компьютерных сетях. В момент регистрации (обнаружения) конфликта на входе некоторого узла сети рассылается сигнал «заглушки» («пробки»); в течение времени рассылки сигнала «заглушки» заявки, поступившие в данный узел сети, получают отказ в обслуживании и направляются в источник повторных вызовов. Здесь время, в течение которого узел сети закрыт для обслуживания заявок, поступающих в него после обнаружения конфликта, можно трактовать как мёртвое время прибора, регистрирующего конфликт в узле сети.

Для решения задачи оценивания (тем или иным статистическим методом) параметров потока в первую очередь необходимо знание вероятностных свойств потока. В настоящей работе находятся явные виды плотности вероятностей значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий потока и совместной плотности вероятностей значений длительности двух соседних интервалов, учитывающие эффект непродлевающегося мертвого времени.

## 1. Постановка задачи

Рассматривается обобщенный полусинхронный поток событий, интенсивность которого есть кусочно-постоянный случайный процесс  $\lambda(t)$  с двумя состояниями  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  ( $\lambda_1 > \lambda_2$ ). В течение временного интервала, когда  $\lambda(t) = \lambda_i$ , имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ . Переход из первого состояния процесса  $\lambda(t)$  во второе возможен только в момент наступления события, при этом переход осуществляется с вероятностью  $p$  ( $0 < p \leq 1$ ); с вероятностью  $1 - p$  процесс  $\lambda(t)$  остается в первом состоянии. Тогда длительность пребывания процесса  $\lambda(t)$  в первом состоянии есть случайная величина с экспоненциальной функцией распределения  $F_1(\tau) = 1 - e^{-p\lambda_1\tau}$ . Переход из второго состояния процесса  $\lambda(t)$  в первое состояние может осуществляться в произвольный момент времени. При этом длительность пребывания процесса  $\lambda(t)$  во втором состоянии распределена по экспоненциальному закону  $F_2(\tau) = 1 - e^{-\alpha\tau}$ . При переходе процесса  $\lambda(t)$  из второго состояния в первое инициируется с вероятностью  $\delta$  ( $0 \leq \delta \leq 1$ ) дополнительное событие. При этом блочная матрица инфинитезимальных коэффициентов примет вид

$$D = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ (1-\delta)\alpha & -(\lambda_2 + \alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1-p)\lambda_1 & p\lambda_1 \\ \delta\alpha & \lambda_2 \end{pmatrix} = \|D_0 | D_1\|.$$

Элементами матрицы  $D_1$  являются интенсивности переходов процесса  $\lambda(t)$  из состояния в состояние с наступлением события. Недиagonальные элементы матрицы  $D_0$  – интенсивности переходов из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы  $D_0$  – интенсивности выхода процесса  $\lambda(t)$  из своих состояний, взятые с противоположенным знаком.

В сделанных предпосылках  $\lambda(t)$  – скрытый марковский процесс. После каждого зарегистрированного в момент времени  $t_k$  события наступает время фиксированной длительности  $T$  (мертвое время), в течение которого другие события исходного потока недоступны наблюдению. События, наступившие в течение мертвого времени, не вызывают продления его периода (непродлевающееся мертвое время). По окончании мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени  $T$  и т.д. Вариант возникающей ситуации показан на рис. 1, где 1, 2 – состояния случайного процесса  $\lambda(t)$ ; дополнительные события, которые могут наступать в момент перехода процесса  $\lambda(t)$  из второго состояния в первое, помечены буквой  $\delta$ ; штриховка – периоды мертвого времени длительности  $T$ ;  $t_1, t_2, \dots$  – моменты наступления событий в наблюдаемом потоке.

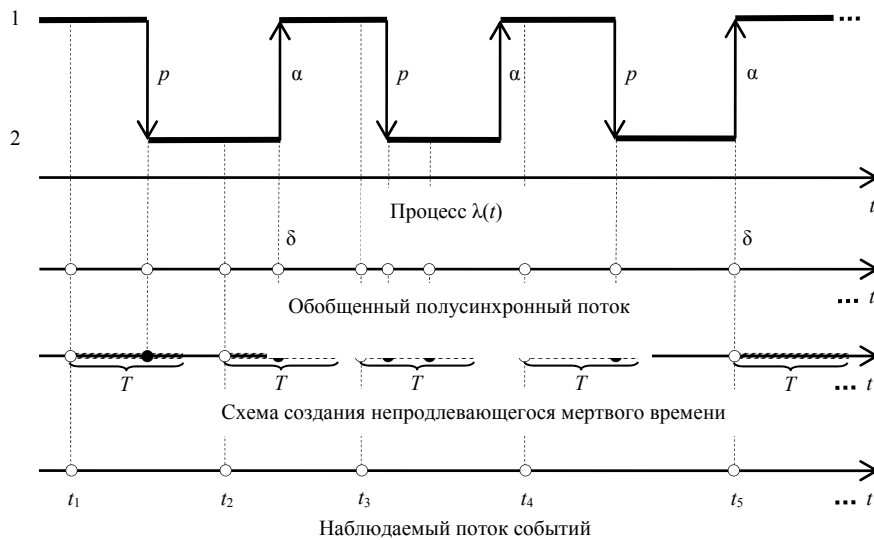


Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий

Подчеркнем, что если  $\delta = 0$ , то имеет место обычный полусинхронный поток событий [10]. Отметим также, что в соответствии с классификацией МАР-потоков событий, приведенной в [11], обобщенный полусинхронный поток относится к классу МАР-потоков событий второго порядка.

Заметим, что в определении обобщенного полусинхронного потока событий в явном виде не оговаривается, в каком состоянии процесса  $\lambda(t)$  наступает дополнительное событие потока при переходе процесса  $\lambda(t)$  из второго состояния в первое. Данное обстоятельство при последующем выводе плотности вероятностей значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий потока и совместной плотности вероятностей значений длительности двух соседних интервалов является несущественным, так как наступление дополнительного события и переход процесса  $\lambda(t)$  из второго состояния в первое происходят мгновенно. В реальных ситуациях возможны два варианта, связанных с наступлением события и переходом процесса  $\lambda(t)$  из второго состояния в первое: 1) первично наступление события во втором состоянии процесса  $\lambda(t)$ , затем его переход из второго состояния в первое; 2) первичен переход процесса  $\lambda(t)$  из второго состояния в первое, затем наступление события в первом состоянии. В силу этого при получении численных результатов путем имитационного моделирования наблюдаемого потока необходимо учитывать реальную ситуацию.

Процесс  $\lambda(t)$  и типы событий (события пуассоновских потоков и дополнительные события) являются принципиально ненаблюдаемыми, а наблюдаемыми являются только моменты наступления событий  $t_1, t_2, \dots$  наблюдаемого потока. Рассматривается установившийся (стационарный) режим функционирования наблюдаемого потока событий. В силу предпосылок последовательность моментов наступления событий  $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$  образует вложенную цепь Маркова, т.е. наблюдаемый поток обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать с момента  $t_k$  (момента наступления события),  $k = 1, 2, \dots$ . Обозначим  $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , – значение длительности  $k$ -го интервала между соседними событиями наблюдаемого потока. Так как рассматривается стационарный режим, то плотность вероятностей значений длительности  $k$ -го интервала  $p_T(\tau_k) = p_T(\tau)$ ,  $\tau \geq 0$ , для любого  $k$  (индекс  $T$  подчеркивает, что плотность вероятностей зависит от длительности мертвого времени). В силу этого момент  $t_k$  без потери общности можно положить равным нулю, или, что то же самое, момент наступления события наблюдаемого потока есть  $\tau = 0$ . Пусть теперь  $(t_k, t_{k+1})$ ,  $(t_{k+1}, t_{k+2})$  – два смежных интервала с соответствующими значениями длительностей  $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ ,  $\tau_{k+1} = t_{k+2} - t_{k+1}$ ; их расположение на временной оси, в силу стационарности потока, произвольно. Тогда можно положить  $k = 1$  и рассматривать соседние интервалы  $(t_1, t_2)$ ,  $(t_2, t_3)$  с соответствующими значениями длительностей:  $\tau_1 = t_2 - t_1$ ,  $\tau_2 = t_3 - t_2$ ;  $\tau_1 \geq 0$ ,  $\tau_2 \geq 0$ . При этом  $\tau_1 = 0$  соответствует моменту  $t_1$  наступления события наблюдаемого потока;  $\tau_2 = 0$  – моменту  $t_2$  наступления следующего события наблюдаемого потока. Соответствующая совместная плотность вероятностей при этом есть  $p_T(\tau_1, \tau_2)$ ,  $\tau_1 \geq 0$ ,  $\tau_2 \geq 0$ .

Задача заключается в нахождении явного вида  $p_T(\tau)$  и явного вида  $p_T(\tau_1, \tau_2)$ , а также в установлении условий рекуррентности наблюдаемого потока событий и при  $T = 0$  условий рекуррентности обобщенного полусинхронного потока событий.

## 2. Вывод плотности вероятностей $p_T(\tau)$

Рассмотрим интервал времени  $(0, \tau)$  между соседними событиями в наблюдаемом потоке. С другой стороны, значение длительности этого интервала есть  $\tau = T + t$ , где  $t$  – значение длительности интервала между моментом окончания мертвого времени и следующим событием наблюдаемого потока ( $t \geq 0$ ). Пусть  $p_{jk}(t)$  – условная вероятность того, что на интервале  $(0, t)$  нет событий наблюдаемого потока и  $\lambda(t) = \lambda_k$  при условии, что в момент  $t = 0$  имеет место  $\lambda(0) = \lambda_j$ ,  $j, k = 1, 2$ . Отметим, что переход из первого состояния процесса  $\lambda(t)$  во второе возможен только при наступлении события наблюдаемого потока, тогда  $p_{12}(t) = 0$ ,  $t \geq 0$ . Аналогично обозначим  $\tilde{p}_{jk}(t)$  – условная плотность вероятностей значений длительности интервала  $(0, t)$  при условии, что  $\lambda(0) = \lambda_j$ ,  $\lambda(t) = \lambda_k$ ,  $j, k = 1, 2$ . Введем переходную вероятность  $q_{ij}(T)$  – вероятность того, что за мертвое время длительности  $T$  процесс  $\lambda(t)$  перейдет из состояния  $i$  (момент времени  $\tau = 0$ ) в состояние  $j$  (момент времени  $\tau = T$ ),  $i, j = 1, 2$ , и веро-

ятность  $\pi_i(0|T)$  – условная (финальная) вероятность того, что процесс  $\lambda(\tau)$  в момент времени  $\tau = 0$  находится в состоянии  $i$  ( $i = 1, 2$ ) при условии, что в этот момент времени наступило событие наблюдаемого потока и наступило мертвое время длительности  $T$ . Тогда искомую плотность вероятностей  $p_T(\tau)$  можно записать в виде

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau \leq T, \\ \sum_{i=1}^2 \pi_i(0|T) \sum_{j=1}^2 q_{ij}(T) \sum_{k=1}^2 \tilde{p}_{jk}(\tau - T), & \tau \geq T. \end{cases} \quad (1)$$

Найдем явные выражения для  $\tilde{p}_{jk}(\tau - T)$ ,  $q_{ij}(T)$ ,  $\pi_i(0|T)$ ,  $i, j, k = 1, 2$ .

В соответствии с определением обобщенного полусинхронного потока введем вероятность  $p_{11}(t)\lambda_1\Delta t(1-p) + o(\Delta t)$  – совместная вероятность того, что без наступления событий наблюдаемого потока процесс  $\lambda(t)$  перешел на интервале  $(0, t)$ ,  $t = \tau - T$ , из первого состояния в первое и на полуинтервале  $[t, t+\Delta t)$ , где  $\Delta t$  – здесь и далее достаточно малая величина, произошло событие пуассоновского потока интенсивности  $\lambda_1$  и процесс  $\lambda(t)$  остался в первом состоянии. Аналогичные совместные вероятности для различных  $j$  и  $k$  ( $j, k = 1, 2$ ) примут вид

$$p_{11}(t)\lambda_1\Delta t p + o(\Delta t); \quad p_{21}(t)\lambda_1\Delta t(1-p) + o(\Delta t); \quad p_{21}(t)\lambda_1\Delta t p + o(\Delta t); \\ p_{22}(t)\lambda_2\Delta t + o(\Delta t); \quad p_{22}(t)\alpha\Delta t\delta + o(\Delta t).$$

Соответствующие введенным совместным вероятностям плотности вероятностей запишутся в виде

$$\tilde{p}_{11}(t) = (1-p)\lambda_1 p_{11}(t); \quad \tilde{p}_{12}(t) = p\lambda_1 p_{11}(t); \quad \tilde{p}_{21}^{(1)}(t) = \delta\alpha p_{22}(t); \quad \tilde{p}_{21}^{(2)}(t) = (1-p)\lambda_1 p_{21}(t); \\ \tilde{p}_{22}^{(1)}(t) = \lambda_2 p_{22}(t); \quad \tilde{p}_{22}^{(2)}(t) = p\lambda_1 p_{21}(t), \quad t \geq 0.$$

Тогда условные плотности вероятностей  $\tilde{p}_{jk}(t)$  того, что без наступления событий наблюдаемого потока на интервале  $(0, t)$  и наступления события наблюдаемого потока в момент времени  $t$  процесс  $\lambda(t)$  перейдет на этом интервале из состояния  $j$  в состояние  $k$  ( $j, k = 1, 2$ ), запишутся для разных  $j$  и  $k$  в виде

$$\tilde{p}_{11}(t) = (1-p)\lambda_1 p_{11}(t); \quad \tilde{p}_{12}(t) = p\lambda_1 p_{11}(t); \quad \tilde{p}_{21}(t) = \delta\alpha p_{22}(t) + (1-p)\lambda_1 p_{21}(t); \\ \tilde{p}_{22}(t) = \lambda_2 p_{22}(t) + p\lambda_1 p_{21}(t), \quad t \geq 0. \quad (2)$$

Для вероятностей  $p_{jk}(t)$  справедлива следующая система дифференциальных уравнений:

$$p'_{11}(t) = -\lambda_1 p_{11}(t); \quad p'_{22}(t) = -(\alpha + \lambda_2) p_{22}(t); \quad p'_{21}(t) = -\lambda_1 p_{21}(t) + (1-\delta)\alpha p_{22}(t), \quad t \geq 0,$$

с граничными условиями  $p_{11}(0) = p_{22}(0) = 1$ ;  $p_{21}(0) = 0$ , решая которые находим

$$p_{11}(t) = e^{-\lambda_1 t}; \quad p_{22}(t) = e^{-(\alpha + \lambda_2)t}; \quad p_{21}(t) = \frac{(1-\delta)\alpha}{\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha} \left[ e^{-(\alpha + \lambda_2)t} - e^{-\lambda_1 t} \right], \quad t \geq 0, \quad (3)$$

где  $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha \neq 0$ .

Подставляя (3) в (2), получаем явный вид плотностей вероятностей  $\tilde{p}_{jk}(t)$ ,  $j, k = 1, 2$ .

Для вероятностей  $q_{ij}(\tau)$ ,  $0 \leq \tau \leq T$ , справедливы следующие системы дифференциальных уравнений:

$$q'_{11}(\tau) = -p\lambda_1 q_{11}(\tau) + \alpha q_{12}(\tau); \quad q'_{12}(\tau) = p\lambda_1 q_{11}(\tau) - \alpha q_{12}(\tau); \\ q'_{21}(\tau) = -p\lambda_1 q_{21}(\tau) + \alpha q_{22}(\tau); \quad q'_{22}(\tau) = p\lambda_1 q_{21}(\tau) - \alpha q_{22}(\tau),$$

с граничными условиями  $q_{11}(0) = q_{22}(0) = 1$ ,  $q_{12}(0) = q_{21}(0) = 0$ , решая которые, находим (для  $\tau = T$ ):

$$q_{11}(T) = \pi_1 + \pi_2 e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}; \quad q_{12}(T) = \pi_2 - \pi_2 e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}; \\ q_{21}(T) = \pi_1 - \pi_1 e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}; \quad q_{22}(T) = \pi_2 + \pi_1 e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}, \quad (4) \\ q_{11}(T) + q_{12}(T) = 1, \quad q_{21}(T) + q_{22}(T) = 1; \quad \pi_1 = \alpha / (\alpha + p\lambda_1), \quad \pi_2 = p\lambda_1 / (\alpha + p\lambda_1).$$

Перейдем к нахождению вероятностей  $\pi_i(0|T)$ ,  $i=1, 2$ . Так как моменты наступления событий наблюдаемого потока образуют вложенную цепь Маркова, то для вероятностей  $\pi_i(0|T)$  справедливы следующие уравнения:

$$\begin{aligned}\pi_1(0|T) &= \pi_1(0|T)\pi_{11} + \pi_2(0|T)\pi_{21}; \quad \pi_2(0|T) = \pi_1(0|T)\pi_{12} + \pi_2(0|T)\pi_{22}, \\ \pi_1(0|T) + \pi_2(0|T) &= 1,\end{aligned}\tag{5}$$

где  $\pi_{ij}$  – переходная вероятность того, что за время, которое пройдет от момента времени  $\tau = 0$  до наступления следующего события наблюдаемого потока, процесс  $\lambda(\tau)$  перейдет из  $i$ -го состояния в  $j$ -е ( $i, j = 1, 2$ ).

Введем в рассмотрение вероятность  $p_{ij}$  – переходная вероятность того, что за время, которое пройдет от момента времени  $t = 0$  (момента окончания мертвого времени) до момента наступления следующего события наблюдаемого потока, процесс  $\lambda(t)$  перейдет из  $i$ -го состояния в  $j$ -е ( $i, j = 1, 2$ ). Так как  $t$  – произвольный момент времени, то вероятности перехода  $p_{ij}$  определяются в виде

$$\begin{aligned}p_{11} &= \int_0^\infty \tilde{p}_{11}(t)dt = (1-p)\lambda_1 \int_0^\infty p_{11}(t)dt, \quad p_{12} = \int_0^\infty \tilde{p}_{12}(t)dt = p\lambda_1 \int_0^\infty p_{11}(t)dt, \\ p_{21} &= \int_0^\infty \tilde{p}_{21}(t)dt = (1-p)\lambda_1 \int_0^\infty p_{21}(t)dt + \delta\alpha \int_0^\infty p_{22}(t)dt, \\ p_{22} &= \int_0^\infty \tilde{p}_{22}(t)dt = p\lambda_1 \int_0^\infty p_{21}(t)dt + \lambda_2 \int_0^\infty p_{22}(t)dt,\end{aligned}\tag{6}$$

где  $\tilde{p}_{jk}(t)$  определены в (2),  $p_{jk}(t)$  – в (3). Подставляя (3) в (6), находим

$$\begin{aligned}p_{11} &= 1-p, \quad p_{12} = p, \quad p_{21} = \frac{\alpha(1-p+p\delta)}{\alpha+\lambda_2}, \quad p_{22} = \frac{\lambda_2+p\alpha(1-\delta)}{\alpha+\lambda_2}, \\ p_{11} + p_{12} &= 1, \quad p_{21} + p_{22} = 1.\end{aligned}\tag{7}$$

В силу марковости процесса  $\lambda(t)$  полученные переходные вероятности  $q_{ij}(T)$  и  $p_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ , позволяют выписать выражения для переходных вероятностей  $\pi_{ij}$ :

$$\begin{aligned}\pi_{11} &= q_{11}(T)\pi_{11} + q_{12}(T)\pi_{21}, \quad \pi_{12} = q_{11}(T)\pi_{12} + q_{12}(T)\pi_{22}, \\ \pi_{21} &= q_{21}(T)\pi_{11} + q_{22}(T)\pi_{21}, \quad \pi_{22} = q_{21}(T)\pi_{12} + q_{22}(T)\pi_{22}.\end{aligned}\tag{8}$$

Подставляя в (8) сначала (4), затем (7), получаем

$$\begin{aligned}\pi_{11} &= 1-p - \frac{\pi_2}{\alpha+\lambda_2}[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \delta\alpha)][1 - e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}], \\ \pi_{12} &= p + \frac{\pi_2}{\alpha+\lambda_2}[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \delta\alpha)][1 - e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}], \\ \pi_{21} &= \frac{\alpha(1-p+p\delta)}{\alpha+\lambda_2} + \frac{\pi_1}{\alpha+\lambda_2}[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \delta\alpha)][1 - e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}], \\ \pi_{22} &= \frac{\lambda_2+p\alpha(1-\delta)}{\alpha+\lambda_2} - \frac{\pi_1}{\alpha+\lambda_2}[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \delta\alpha)][1 - e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}].\end{aligned}\tag{9}$$

Наконец, подставляя (9) в (5), находим

$$\begin{aligned}\pi_1(0|T) &= \frac{\alpha(1-p+p\delta) + \pi_1[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \delta\alpha)][1 - e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}]}{\alpha + p(\lambda_2 + \delta\alpha) + [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \delta\alpha)][1 - e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}]}, \\ \pi_2(0|T) &= \frac{p(\alpha+\lambda_2) + \pi_2[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \delta\alpha)][1 - e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}]}{\alpha + p(\lambda_2 + \delta\alpha) + [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \delta\alpha)][1 - e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}]},\end{aligned}\tag{10}$$

где  $\pi_1, \pi_2$  определены в (4).

Подставляя в (1) сначала (2), затем (3), (4) и (10), проделывая при этом достаточно трудоемкие преобразования и учитывая, что  $t = \tau - T$ , получаем

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau \leq T, \\ \gamma(T)\lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau-T)} + [1-\gamma(T)](\alpha + \lambda_2)e^{-(\alpha+\lambda_2)(\tau-T)}, & \tau \geq T, \end{cases} \quad (11)$$

$$\gamma(T) = 1 - \pi_2(T) \frac{\lambda_1 - \lambda_2 - \delta\alpha}{\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha}, \quad \pi_2(T) = \pi_2 - [\pi_2 - \pi_2(0|T)]e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}, \quad \lambda_1 - \lambda_2 - \alpha \neq 0,$$

где  $\pi_2$  определена в (4),  $\pi_2(0|T)$  – в (10).

В частности, положив в (11)  $T=0$ , получаем формулу для  $p_T(\tau)$ , приведенную в [3].

### 3. Вывод совместной плотности вероятностей $p_T(\tau_1, \tau_2)$

Пусть  $\tau_1 = T + t^{(1)}$ ,  $\tau_2 = T + t^{(2)}$  – значения длительностей двух смежных интервалов между моментами наступления последовательных событий наблюдаемого потока.  $\tau_1 = 0$  – момент наступления первого события,  $\tau_2 = 0$  – момент наступления второго события. В силу того что последовательность моментов наступления событий наблюдаемого потока образует вложенную цепь Маркова, в обозначениях раздела 2 совместная плотность вероятностей  $p_T(\tau_1, \tau_2)$  примет вид

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau_1 \leq T, \quad 0 \leq \tau_2 \leq T, \\ \sum_{i=1}^2 \pi_i(0|T) \sum_{j=1}^2 q_{ij}(T) \sum_{k=1}^2 \tilde{p}_{jk}(\tau_1 - T) \sum_{s=1}^2 q_{ks}(T) \sum_{n=1}^2 \tilde{p}_{sn}(\tau_2 - T), & \\ \tau_1 \geq T, \quad \tau_2 \geq T, \end{cases} \quad (12)$$

где  $\tilde{p}_{jk}(\tau_1 - T) = \tilde{p}_{jk}(t^{(1)})$ ,  $\tilde{p}_{sn}(\tau_2 - T) = \tilde{p}_{sn}(t^{(2)})$  определены в (2), при этом в выражениях для  $\tilde{p}_{ij}(t)$ ,  $i, j = 1, 2$ , нужно произвести замену  $t$  на  $t^{(1)}$  либо на  $t^{(2)}$ . Тогда, подставляя в (12) сначала  $\tilde{p}_{jk}(t^{(1)})$ ,  $\tilde{p}_{sn}(t^{(2)})$ , затем  $p_{jk}(t^{(1)})$ ,  $p_{sn}(t^{(2)})$ , определенные в (3) для  $t = t^{(1)}$  и  $t = t^{(2)}$ , затем  $q_{ij}(T)$ ,  $q_{ks}(T)$ , определенные в (4), и, наконец,  $\pi_i(0|T)$ ,  $i = 1, 2$ , определенные в (10), и проделывая достаточно трудоемкие преобразования, находим

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = 0; \quad 0 \leq \tau_1 < T, \quad 0 \leq \tau_2 < T,$$

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1)p_T(\tau_2) + e^{-(\alpha+p\lambda_1)T} \gamma(T)[1-\gamma(T)] \frac{\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)}{\alpha + \lambda_2} \times$$

$$\times \left[ \lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau_1-T)} - (\alpha + \lambda_2) e^{-(\alpha+\lambda_2)(\tau_1-T)} \right] \left[ \lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau_2-T)} - (\alpha + \lambda_2) e^{-(\alpha+\lambda_2)(\tau_2-T)} \right], \quad \tau_1 \geq T, \quad \tau_2 \geq T, \quad (13)$$

где  $\gamma(T)$ ,  $p_T(\tau_k)$  определены в (11) для  $\tau = \tau_k$ ,  $k = 1, 2$ .

Из (13) следует, что обобщенный полусинхронный поток, функционирующий в условиях мертвого времени, в общем случае является коррелированным потоком. Положив в (13)  $T = 0$ , получаем формулу для  $p(\tau_1, \tau_2)$ , приведенную в [3].

Нетрудно получить вероятностные характеристики наблюдаемого потока, такие как математическое ожидание длительности интервала между соседними событиями, дисперсию и ковариацию:

$$M_\tau = T + \frac{\gamma(T)}{\lambda_1} + \frac{1-\gamma(T)}{\alpha + \lambda_2}, \quad D_\tau = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{(\alpha + \lambda_2)^2} - \left[ \frac{1}{\lambda_1(\alpha + \lambda_2)} \right]^2 [\lambda_1 - (\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta)\pi_2(T)]^2,$$

$$\text{cov}(\tau_1, \tau_2) = \gamma(T)[1-\gamma(T)](\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha)^2 \frac{\lambda_2 - (\lambda_2 + \alpha\delta)p}{\lambda_1^2(\alpha + \lambda_2)^3} e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}.$$

В рассматриваемом потоке присутствуют события трех типов: 1) события пуассоновского потока интенсивности  $\lambda_1$ ; 2) события пуассоновского потока интенсивности  $\lambda_2$ ; 3) дополнительные события. Типы событий являются неразличимыми. Введем вероятность:  $q_1^{(i)}(T)$  – стационарная вероят-

ность того, что наступившее событие есть событие пуассоновского потока интенсивности  $\lambda_i$  и процесс  $\lambda(t)$  перешел при этом из первого состояния в  $i$ -е ( $i=1, 2$ );  $q_2(T)$  – стационарная вероятность того, что наступившее событие есть событие пуассоновского потока интенсивности  $\lambda_2$ ;  $q_3(T)$  – стационарная вероятность того, что наступившее событие есть дополнительное событие. Тогда, используя вышеприведенные результаты, нетрудно получить явные выражения для введенных вероятностей:

$$\begin{aligned} q_1^{(1)}(T) &= (1-p)\pi_1 \frac{\alpha + \lambda_2 + p\lambda_1(1-\delta) - (\lambda_2 - p\lambda_1\delta)e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}}{\alpha + \lambda_2 - [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)]e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}}, \\ q_1^{(2)}(T) &= p\pi_1 \frac{\alpha + \lambda_2 + p\lambda_1(1-\delta) - (\lambda_2 - p\lambda_1\delta)e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}}{\alpha + \lambda_2 - [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)]e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}}, \\ q_2(T) &= \frac{p\lambda_2 \left\{ \lambda_1 + [\alpha - \lambda_1(1-p)]e^{-(\alpha+p\lambda_1)T} \right\}}{(\alpha + p\lambda_1) \left\{ \alpha + \lambda_2 - [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)]e^{-(\alpha+p\lambda_1)T} \right\}}, \\ q_3(T) &= \pi_1 \frac{p\lambda_1\delta + p\delta(\alpha - \lambda_1 + p\lambda_1)e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}}{\alpha + \lambda_2 - [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)]e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Тогда стационарная вероятность  $q_1(T)$  того, что наступившее событие есть событие пуассоновского потока интенсивности  $\lambda_1$ , запишется в виде

$$q_1(T) = q_1^{(1)}(T) + q_1^{(2)}(T) = \pi_1 \frac{\alpha + \lambda_2 + p\lambda_1(1-\delta) - (\lambda_2 - p\lambda_1\delta)e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}}{\alpha + \lambda_2 - [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)]e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}}. \quad (15)$$

Отметим, что  $\pi_1(0|T) = q_1^{(1)}(T) + q_3(T)$ ,  $\pi_2(0|T) = q_1^{(2)}(T) + q_2(T)$ . Полагая в (14), (15) величину  $T = 0$ , получаем формулы для  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$ , приведенные в [3].

#### 4. Условия рекуррентности наблюдаемого потока событий

Рассмотрим частные случаи, при которых обобщенный полусинхронный поток, функционирующий в условиях мертвого времени, становится рекуррентным потоком. Используя выражения (11) для  $\gamma(T)$ ,  $\pi_2(T)$  и выражение (10) для  $\pi_1(0|T)$ ,  $\pi_2(0|T)$ , можно показать, что

$$\begin{aligned} \gamma(T)[1-\gamma(T)] &= \frac{p\alpha(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta)[\lambda_1(1-p+\delta p) - \lambda_2 - \alpha](\alpha + \lambda_2)}{(\alpha + p\lambda_1)^2(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha)^2 \left\{ \alpha + \lambda_2 - [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)]e^{-(\alpha+p\lambda_1)T} \right\}^2} \times \\ &\times \{ \lambda_1(\alpha + \lambda_2) - [2\lambda_1(\alpha + \lambda_2) - (\alpha + p\lambda_1)(\lambda_1 + \lambda_2 + \alpha)]e^{-(\alpha+p\lambda_1)T} + \\ &+ [\lambda_1(\alpha + \lambda_2) - (\alpha + p\lambda_1)(\lambda_1(1-p) + \lambda_2)]e^{-2(\alpha+p\lambda_1)T} \}. \end{aligned} \quad (16)$$

Предварительно отметим, что выражение в фигурных скобках формулы (16), обозначим его  $f(T)$ , после преобразования примет вид

$$\begin{aligned} f(T) &= \lambda_1(\alpha + \lambda_2) \left[ 1 - e^{-(\alpha+p\lambda_1)T} \right]^2 + \\ &+ (\alpha + p\lambda_1) [\lambda_1(1-p) + \lambda_2] e^{-(\alpha+p\lambda_1)T} \left[ 1 - e^{-(\alpha+p\lambda_1)T} \right] + (\alpha + p\lambda_1)^2 e^{-2(\alpha+p\lambda_1)T}, \end{aligned}$$

так что для любых  $T \geq 0$  имеем  $f(T) > 0$ .

Из (16) вытекает:

1) если  $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta = 0$ , то совместная плотность (13) факторизуется:  $p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1)p_T(\tau_2)$ ,  $\tau_1 \geq T$ ,  $\tau_2 \geq T$ ; при этом из (11) следует  $\gamma(T) = 1$ , и тогда  $p_T(\tau_k) = \lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau_k - T)}$ ,  $\tau_k \geq T$ ,  $k = 1, 2$ , т.е.  $p_T(\tau) = \lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau - T)}$ ,  $\tau \geq T$ ;

2) если  $\lambda_1(1 - p + p\delta) - \lambda_2 - \alpha = 0$ , то совместная плотность (13) факторизуется; при этом из (11) следует  $\gamma(T) = 0$ , и тогда  $p_T(\tau_k) = (\alpha + \lambda_2)e^{-(\alpha + \lambda_2)(\tau_k - T)}$ ,  $\tau_k \geq T$ ,  $k = 1, 2$ , т.е.  $p_T(\tau) = (\alpha + \lambda_2)e^{-(\alpha + \lambda_2)(\tau - T)}$ ,  $\tau \geq T$ .

Из (13) следует третье условие факторизации совместной плотности вероятностей  $p_T(\tau_1, \tau_2)$ :  $\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta) = 0$ . Тогда  $p_T(\tau)$  определяется формулой (11), в которой

$$\pi_2(0|T) = p, \quad \pi_2(T) = p \left\{ \frac{\lambda_1}{\alpha + p\lambda_1} + \left[ 1 - \frac{\lambda_1}{\alpha + p\lambda_1} \right] e^{-(\alpha + p\lambda_1)T} \right\},$$

$$\gamma(T) = 1 - \frac{p}{\alpha + \lambda_1} \left[ \lambda_1 - (\lambda_1 - \alpha - p\lambda_1)e^{-(\alpha + p\lambda_1)T} \right] \frac{\lambda_1(1 - p) - \alpha\delta}{(1 - p)(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha)}, \quad \alpha + \lambda_2 = \frac{\alpha(1 - p + \delta p)}{1 - p}, \quad p \neq 1.$$

Для  $p = 1$  из третьего условия факторизации вытекает, что  $\delta = 0$ . Тогда  $p_T(\tau)$  определяется формулой (11), в которой

$$\pi_2(0|T) = 1; \quad \pi_2(T) = \pi_2 + \pi_1 e^{-(\alpha + \lambda_1)T},$$

$$\gamma(T) = 1 - \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha} \left[ \pi_2 + \pi_1 e^{-(\alpha + \lambda_1)T} \right], \quad \pi_1 = \frac{\alpha}{\alpha + \lambda_1}, \quad \pi_2 = \frac{\lambda_1}{\alpha + \lambda_1}.$$

Поскольку последовательность моментов наступления событий наблюдаемого потока  $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$  есть вложенная цепь Маркова, то при выполнении одного из вышеприведенных условий факторизации (либо их комбинации) нетрудно показать, что факторизуется и совместная плотность вероятностей  $p_T(\tau_1, \dots, \tau_k)$  для любого  $k$ . Последнее означает, что для этих ситуаций наблюдаемый поток является рекуррентным потоком.

Отметим, что условия факторизации для случая  $T = 0$  [3] и  $T \neq 0$  идентичны.

Если связать изложенные здесь результаты для рекуррентных обобщенных полусинхронных потоков событий, функционирующих в условиях мертвого времени, с результатами для апостериорных вероятностей состояний процесса  $\lambda(t)$ , приведенных в [2], то получим точно такие же выводы относительно близости наблюдаемого рекуррентного потока к пуассоновскому потоку, что и в [3].

## 5. Особый случай

Рассмотрим особый случай, когда в выражении (11) для  $\gamma(T)$  реализуется деление на ноль:  $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha = 0)$ . Можно показать (проделывая выкладки, аналогичные выкладкам в разделах 2 и 3), что

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0; & 0 \leq \tau \leq T, \\ \left[ \lambda_1 - \alpha(1 - \delta)\pi_2(T)(1 - \lambda_1(\tau - T)) \right] e^{-\lambda_1(\tau - T)}, & \tau \geq T; \end{cases} \quad (17)$$

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = 0, \quad 0 \leq \tau_1 < T, \quad 0 \leq \tau_2 < T,$$

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1)p_T(\tau_2) + e^{-(\alpha + p\lambda_1)T} \lambda_1 [\alpha(1 - \delta)]^2 [\alpha(1 - p + p\delta) - \lambda_1(1 - p)] \times$$

$$\times \left[ \frac{\pi_2 + (p - \pi_2)e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}}{\lambda_1 + [\alpha(1 - p + p\delta) - \lambda_1(1 - p)]e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}} \right]^2 [1 - \lambda_1(\tau_1 - T)][1 - \lambda_1(\tau_2 - T)] \times$$

$$\times e^{-\lambda_1(\tau_1 + \tau_2 - 2T)}, \quad \tau_i \geq T, \quad i = 1, 2; \quad (18)$$

$$\pi_2(T) = \pi_2 - [\pi_2 - \pi_2(0|T)]e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}, \quad \pi_2 = p\lambda_1 / (\alpha + p\lambda_1),$$

$$\pi_2(0|T) = \frac{p\lambda_1 - \pi_2 [\alpha(1 - p + p\delta) - \lambda_1(1 - p)] [1 - e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}]}{\lambda_1 + [\alpha(1 - p + p\delta) - \lambda_1(1 - p)]e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}}.$$

В (18)  $p_T(\tau_1)$ ,  $p_T(\tau_2)$  определены формулой (17) для  $\tau = \tau_1$  и  $\tau = \tau_2$ . В частности, положив в (18)  $T = 0$ , получаем для этого особого случая формулы  $p_T(\tau)$ ,  $p_T(\tau_1, \tau_2)$ , приведенные в [3].

Из (18) следует, что при  $\delta = 1$  (первое условие факторизации) наблюдаемый поток становится рекуррентным. Тогда  $p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1)p_T(\tau_2)$ ,  $\tau_1 \geq T$ ,  $\tau_2 \geq T$ , и  $p_T(\tau_i) = \lambda_i e^{-\lambda_i(\tau_i - T)}$ ,  $\tau_i \geq T$ ,  $i = 1, 2$ , т.е.  $p_T(\tau) = \lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau - T)}$ ,  $\tau \geq T$ .

Для второго условия факторизации  $\lambda_1(1 - p + p\delta) - \lambda_1(1 - p) = 0$ ,  $p \neq 1$ , вытекающего из (18), плотность вероятностей  $p_T(\tau)$  определяется формулой (17), в которой  $\pi_2(0|T) = p$ .

Для  $p = 1$  из второго условия факторизации вытекает, что  $\delta = 0$ . Тогда  $p_T(\tau)$  определяется формулой (17), в которой  $\delta = 0$ ,  $\pi_2(T) = [\lambda_1 + \alpha e^{-(\alpha + \lambda_1)T}] / (\alpha + \lambda_2)$ .

Отметим, что условия факторизации для ситуации  $T = 0$  [3] и ситуации  $T \neq 0$  идентичны.

Связав изложенные в особом случае результаты для рекуррентных обобщенных полусинхронных потоков событий, функционирующих в условиях мертвого времени, с результатами для апостериорных вероятностей состояний процесса  $\lambda(t)$ , приведенных в [2] для особого случая, получим точно такие же выводы относительно близости наблюдаемого рекуррентного потока к пуассоновскому потоку, что и в [3].

### Заключение

Приведенные результаты делают возможным решение задачи оценки неизвестных параметров, задающих обобщенный полусинхронный поток событий, функционирующий в условиях мертвого времени, по наблюдениям за моментами наступления событий. Рабочими методами оценки параметров при этом могут быть либо метод максимального правдоподобия, либо метод моментов [12]. Полученные явные формулы для плотностей вероятностей  $p_T(\tau)$  и  $p_T(\tau_1, \tau_2)$  позволяют выписать в явном виде либо функцию правдоподобия, либо уравнения моментов.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2(11). С. 66–81.
2. Горцев А.М., Калягин А.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока событий в условиях непродлевающегося мертвого времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 4(13). С. 50–60.
3. Горцев А.М., Калягин А.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного полусинхронного потока // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 2(19). С. 80–87.
4. Калягин А.А. Плотность вероятностей длительности интервала между соседними событиями обобщенного полусинхронного потока при непродлевающемся мертвом времени // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур : материалы Девятой Рос. конф. с междунар. участием. Томск : Изд-во НТЛ, 2012. С. 89.
5. Горцев А.М., Калягин А.А. Условия рекуррентности обобщенного полусинхронного потока событий // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур : материалы Девятой Рос. конф. с междунар. участием. Томск : Изд-во НТЛ, 2012. С. 84.
6. Дудин А.Н., Клименок В.И. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск : Изд-во БГУ, 2000. С. 175.
7. Bushlanov I.V., Gortsev A.M. Optimal estimation of the states of a synchronous double stochastic flow of events // Automation and Remote Control. V. 65. Is. 9. 2004. P. 1389–1399.
8. Vasil'eva L.A., Gortsev A.M. Parameter estimation of a doubly stochastic flow of events under incomplete observability // Automation and Remote Control. 2003. V. 64. Is. 12. P. 1890–1898.
9. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988. 254 с.

10. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events // Measurement Techniques. 2003. V. 46, No. 6. P. 536–545.
11. Горцев А.М., Нежелская Л.А. О связи МС-поток и МАР-поток событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 1(14). С. 13–21.
12. Шуленов В.П. Математическая статистика. Томск: Изд-во НТЛ, 2012. Ч. 1. С. 540.

Горцев Александр Михайлович, д-р техн. наук, профессор. E-mail: dekanat@fpmk.tsu.ru

Калягин Алексей Андреевич. E-mail: redall@inbox.ru

Нежелская Людмила Алексеевна, канд. техн. наук, доцент. E-mail: dekanat@fpmk.tsu.ru

Томский государственный университет

Поступила в редакцию 5 февраля 2014 г.

Gortsev Alexander M., Kalyagin Aleksey A., Nezhelskaya Lyudmila A. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

**The joint probability density of duration of the intervals in a generalized semisynchronous flow of events with unprolonging dead time.**

**Keywords:** generalized semisynchronous flow of events; probability density; joint probability density; recurrence of the event flow; unprolonging dead time.

Generalized semisynchronous stream of events which intensity is a piecewise constant stochastic process  $\lambda(t)$  with two values  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$  ( $\lambda_1 > \lambda_2$ ) is considered. During the time interval when  $\lambda(t) = \lambda_i$ , Poisson flow of events takes place with the intensity  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ . Transition from the first state of the process  $\lambda(t)$  into the second is possible only at the moment of event occurrence, thus, the transition is carried out with probability  $p$  ( $0 < p \leq 1$ ); with probability  $1 - p$  process  $\lambda(t)$  remains in the first condition. In this case the duration of process stay  $\lambda(t)$  in the first state is a random variable with exponential distribution function  $F_1(\tau) = 1 - e^{-p\lambda_1\tau}$ . Transition from the second state of process into the first state can be carried out at any moment of time. Thus, duration of process stay  $\lambda(t)$  in the second state is distributed according exponential law:  $F_2(\tau) = 1 - e^{-\alpha\tau}$ . By transition  $\lambda(t)$  from the second state into the first one an additional event in the first state is initiated with probability  $\delta$  ( $0 \leq \delta \leq 1$ ).

The flow is considered in the condition of constant dead time. The dead time period of the fixed duration  $T$  begins after every registered event at time  $t_i$ . During this period no other events are observed. When the dead time period is over, the first coming event causes the next  $T$ -interval of dead time and so on (unprolonging dead time).

We solve the problem of finding the explicit form of probability density  $p_T(\tau)$  of the interval between two events and the joint probability density  $p_T(\tau_1, \tau_2)$  of the length of two adjacent intervals with unprolonging dead time:

$$\begin{aligned}
 p_T(\tau) &= \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau \leq T, \\ \gamma(T)\lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau-T)} + [1 - \gamma(T)](\alpha + \lambda_2)e^{-(\alpha + \lambda_2)(\tau-T)}, & \tau \geq T, \end{cases} \\
 \gamma(T) &= 1 - \pi_2(T) \frac{\lambda_1 - \lambda_2 - \delta\alpha}{\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha}, \quad \pi_2(T) = \pi_2 - [\pi_2 - \pi_2(0|T)]e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}, \quad \lambda_1 - \lambda_2 - \alpha \neq 0. \\
 p_T(\tau_1, \tau_2) &= 0; \quad 0 \leq \tau_1 < T, \quad 0 \leq \tau_2 < T, \\
 p_T(\tau_1, \tau_2) &= p_T(\tau_1)p_T(\tau_2) + e^{-(\alpha + p\lambda_1)T} \gamma(T) [1 - \gamma(T)] \frac{\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)}{\alpha + \lambda_2} \times \\
 &\times \left[ \lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau_1-T)} - (\alpha + \lambda_2)e^{-(\alpha + \lambda_2)(\tau_1-T)} \right] \left[ \lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau_2-T)} - (\alpha + \lambda_2)e^{-(\alpha + \lambda_2)(\tau_2-T)} \right], \quad \tau_1 \geq T, \quad \tau_2 \geq T,
 \end{aligned}$$

The conditions for the recurrence of generalized semisynchronous flow of events with unprolonging dead time are given.

## REFERENCES

1. Gortsev A.M., Kalyagin A.A., Nezhelskaya L.A. Optimum estimation of states in generalized semi-synchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2010, no. 2(11), pp. 66-81. (In Russian).
2. Gortsev A.M., Kalyagin A.A. Optimum estimation of conditions of generalized semisynchronous stream of events in the conditions of non-extended dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2010, no. 4(13), pp. 50-60. (In Russian).
3. Gortsev A.M., Kalyagin A.A. The joint probability density of the duration of the intervals of a generalized semi-synchronous stream. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2012, no. 2(19), pp. 80-87. (In Russian).
4. Kalyagin A.A. [The probability density of duration of the intervals between neighboring events a generalized semisynchronous flow with unprolonging dead time]. *Novye informatsionnye tekhnologii v issledovanii slozhnykh struktur : materialy Devyatyoy*

- Rossiyskoy konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem* [New information technologies in research of complicated structures. Proc. of the 9th Russian conference with international participation]. Tomsk: NTL Publ., 2012, p. 89. (In Russian).
5. Gortsev A.M., Kalyagin A.A. [The recurrence conditions of a generalized semisynchronous flow of events]. *Novye informatsionnye tekhnologii v issledovanii slozhnykh struktur : materialy Devyatoy Rossiyskoy konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem* [New information technologies in research of complicated structures. Proc. of the 9th Russian conference with international participation]. Tomsk: NTL Publ., 2012, p. 84. (In Russian).
  6. Dudin A.N., Klimenok V.I. *Sistemy massovogo obsluzhivaniya s korrelirovannymi potokami* [Queueing systems with correlated flows]. Minsk: BSU Publ., 2000. 175 p.
  7. Bushlanov I.V., Gortsev A.M. Optimal estimation of the states of a synchronous double stochastic flow of events. *Automation and Remote Control*, 2004, vol. 65, pp. 1389-1399. DOI: 10.1023/B:AURC.0000041418.09187.63
  8. Vasileva L.A., Gortsev A.M. Parameter estimation of a doubly stochastic flow of events under incomplete observability. *Automation and Remote Control*, 2003, vol. 64, issue 12, pp. 1890-1898.
  9. Apanasovich V.V., Kolyada A.A., Chernyavsky A.F. *Statisticheskiy analiz sluchaynykh potokov v fizicheskom eksperimente* [Statistical analysis of stochastic flows in physical experiment]. Minsk: Universitetskoe Publ., 1988. 254 p.
  10. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events. *Measurement Techniques*, 2003, vol. 46, no. 6, pp. 536-545. DOI: 10.1023/A:1025499509015
  11. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. On relationship of MC- flows and MAP- flows of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2011, no. 1(14), pp. 13-21. (In Russian).
  12. Shulenin V.P. *Matematicheskaya statistika* [Mathematical statistics]. Tomsk: NTL Publ., 2011. Pt. 1, 540 p.