

Г.Ш. Цициашвили, М.А. Осипова

ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ РАЗОРЕНИЯ В ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ РИСКА С ЗАВИСИМЫМИ ФИНАНСОВЫМ И СТРАХОВЫМ РИСКАМИ

Рассмотрена дискретная модель риска с зависимыми финансовым и страховым рисками и с тяжелым хвостом распределения ущерба. Построен алгоритм вычисления вероятности разорения за конечное число шагов на основе аппроксимации распределения ущерба смесью показательных распределений и доказательства теоремы непрерывности, обосновывающей такой подход. Разработаны специальные методы преобразования интегральных выражений, решена задача о малых знаменателях, построена экономичная процедура перечисления целочисленных векторов с фиксированной суммой их компонент. Для вероятности разорения в рассматриваемой модели риска получены асимптотические соотношения в случае специального класса распределений страхового риска. Для тестирования построенных алгоритмов проведены вычислительные эксперименты.

Ключевые слова: вероятность разорения; страховые и финансовые риски; конечная смесь экспоненциальных распределений.

В последнее десятилетие среди ведущих специалистов по теории риска, финансовой математике и теории массового обслуживания (С. Асмуссен [1], В. Уитт [2], В.В. Калашников [3], А.А. Новиков [4]) ведутся дискуссии о точности асимптотических формул для моделей с тяжелыми хвостами распределений. Многочисленные вычислительные эксперименты показывают, что асимптотические формулы достигают высокой точности при больших значениях аргумента. В свою очередь, известные численные методы (например, метод Монте-Карло) хорошо работают при сравнительно небольших значениях аргумента. В результате возникают области аргументов, в которых известные численные методы уже не работают из-за трудоемкости, а асимптотические формулы еще не работают.

Для вычисления в этих областях А.А. Новиков предложил аппроксимировать законы распределений с тяжелыми хвостами смесью экспоненциальных распределений. При реализации этого предложения возникла необходимость вычисления вероятности выхода авторегрессионной последовательности из некоторой области за конечное число шагов. А.А. Новиков решал данную задачу с помощью теории мартигалов, но этот метод работает в достаточно узких предположениях. В настоящей работе удалось снять эти ограничения за счет проведения прямых вычислений с помощью рекуррентных соотношений.

В статье исследована дискретная модель риска с тяжелым хвостом распределения ущерба и зависимыми финансовым и страховым рисками. Предполагалось, что инфляционный фактор представим цепью Маркова общего вида с конечным числом значений, а распределение страхового ущерба определяется этими значениями. Такое усложнение модели риска было инициировано А.А. Новиковым и ранее не попадало в поле зрения специалистов по теории риска. Однако сейчас такая зависимость становится существенной в связи с различными антропогенными и природными катастрофами, на размеры которых влияют финансовые факторы.

Продолжая идею работ [5–7], мы строим рекуррентный алгоритм вычисления вероятности разорения рассмотренной модели риска за конечное число шагов на основе аппроксимации распределения ущерба суммой показательных распределений и доказательства теорем непрерывности, обосновывающих такой подход. Для этого разработаны специальные методы преобразования интегральных выражений, решена задача о малых знаменателях и построена экономичная процедура перечисления векторов с фиксированной суммой неотрицательных целочисленных компонент. На основе построенного алгоритма проведен вычислительный эксперимент, который показал его преимущества перед методом Монте-Карло при близости результатов вычислений.

Наряду с точными формулами вычисления вероятности разорения получены асимптотические формулы в случае субэкспоненциально распределенного страхового риска, которые сравнивались с результатами прямых вычислений.

1. Точные формулы

Рассмотрим дискретную модель риска (с шагом в один год) с начальным капиталом $x \geq 0$:

$$U_n = U_{n-1}B_n - X_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad U_0 = x. \quad (1)$$

В работе [8] $X_n = Z_n - a$ называется страховым риском, а B_n^{-1} – финансовым риском. Здесь $a > 0$ – доход, а $Z_n \geq 0$ – страховой ущерб на шаге n . Введем в рассмотрение цепь Маркова q_n , $n > 0$, с матрицей переходных вероятностей $\|p_{sq}\|_{s,q \in Q}$ и начальным состоянием $q_0 = s$, $Q = \{1, \dots, m\}$. Предположим, что инфляционный фактор B_n определяется цепью Маркова q_n с помощью равенства $B_n^{-1} = r_{q_n}$, $n = 1, 2, \dots$, в котором детерминированные $r_q > 1$, $q \in Q$. Определим время разорения

$$\tau(x, s) = \inf \{n = 1, 2, \dots : U_n \leq L \mid U_0 = x, q_0 = s\} \quad (2)$$

и вероятность разорения на конечном числе шагов $\psi_n(x, s) = P(\tau(x, s) \leq n)$.

Пусть независимые одинаково распределенные случайные величины w_n , $n > 0$, не зависят от цепи Маркова q_n , $n > 0$, и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Обозначим G_q , $G_q(-a) = 0$, $q \in Q$, функцию распределения страхового риска X_n и определим зависимость q_n и X_n соотношением $X_n = G_{q_n}^{-1}(w_n)$. По аналогии с [9, лемма 2.1] было доказано утверждение.

Теорема 1. При $x > L$ справедливы формулы:

$$\psi_1(x, s) = \sum_{q \in Q} p_{sq} \bar{G}_q(xr_q - L), \quad \psi_{n+1}(x, s) = \psi_1(x, s) + \sum_{q \in Q} p_{sq} \int_{-\infty}^{xr_q - L} \psi_n(xr_q - z, q) dG_q(z), \quad n > 0. \quad (3)$$

Введем в рассмотрение m -мерные векторы $1_q = (\delta_{1q}, \dots, \delta_{mq})$, где δ_{ij} – символ Кронекера и

$$R = (r_1, \dots, r_m), \quad K = (k_1, \dots, k_m), \quad k_i \in \{0, 1, \dots\}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Обозначим

$$R^K = \prod_{q \in Q} r_q^{k_q}, \quad |K| = \sum_{q \in Q} k_q.$$

Пусть для вещественных a_{iq} , $1 \leq i \leq l$, $q \in Q$, $\sum_{q \in Q} a_{iq} = 1$,

$$\bar{G}_q(t) = \sum_{i=1}^l a_{iq} \exp(-\lambda_i(t+a)), \quad t \geq -a. \quad (4)$$

Теорема 2. Предположим, что

$$r_q L - L + a > 0, \quad q \in Q, \quad (5)$$

$$R^K \lambda_i \neq \lambda_j, \quad i \geq 1, \quad j \leq l, \quad |K| \geq 1. \quad (6)$$

Тогда существуют вещественные числа $B_{s,i,n}^K$, $1 \leq i \leq l$, $s \in Q$, $1 \leq |K| \leq n$, такие, что для $x > L$

$$\psi_n(x, s) = \sum_{1 \leq |K| \leq n} \sum_{i=1}^l B_{s,i,n}^K \exp(-R^K \lambda_i(x-L)), \quad (7)$$

причем

$$B_{s,i,1}^{1_q} = p_{sq} a_{iq} \exp\left(-\lambda_i \left(R^{1_q} L - L + a\right)\right), \quad (8)$$

$$B_{s,i,n+1}^K = -\sum_{q \in Q} \sum_{j=1}^l I(k_q > 0) F_{s,q,i,j,n}^{K-1_q}, \quad 1 \leq |K| \leq n+1, \quad B_{s,i,n+1}^{1_q} = \sum_{1 \leq |K| \leq n} \sum_{j=1}^l D_{s,q,j,i,n}^K + B_{s,i,1}^{1_q}, \quad (9)$$

где

$$D_{s,q,i,j,n}^K = \frac{p_{sq} B_{q,i,n}^K a_{jq} \lambda_j}{R^K \lambda_i - \lambda_j} \exp\left(-\lambda_j \left(R^{1_q} L - L + a\right)\right), \quad F_{s,q,i,j,n}^K = \frac{p_{sq} B_{q,i,n}^K a_{jq} \lambda_j}{R^K \lambda_i - \lambda_j} \exp\left(-\lambda_i \left(R^{1_q} L - L + a\right)\right).$$

Доказательство. Из (3)–(6) имеем при $x > L$

$$\psi_1(x, s) = \sum_{q \in Q} \sum_{i=1}^l p_{sq} a_{iq} \exp\left(-\lambda_i \left(R^{1_q} L - L + a\right)\right) \exp\left(-R^{1_q} \lambda_i (x-L)\right),$$

и, следовательно, формула (8) верна.

Обозначим

$$C_{s,q,i,j,n}^K = \frac{p_{sq} B_{q,i,n}^K a_{jq} \lambda_j}{R^K \lambda_i - \lambda_j} \exp\left(R^K \lambda_i (L-a)\right).$$

Из теоремы (1) получим

$$\begin{aligned} \psi_n(x, s) - \psi_1(x, s) &= \sum_{q \in Q} \int_{-a}^{xR^{1_q} - L} \sum_{i=1}^l \sum_{1 \leq |K| \leq n} p_{sq} B_{q,i,n}^K \exp\left(-R^K \lambda_i \left(R^{1_q} x - L - z\right)\right) \times \\ &\quad \times \sum_{j=1}^l a_{jq} \lambda_j \exp\left(-\lambda_j (z+a)\right) dz = [z+a=u] = \\ &= \sum_{q \in Q} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \sum_{1 \leq |K| \leq n} p_{sq} B_{q,i,n}^K a_{jq} \lambda_j \int_0^{xR^{1_q} - L + a} \exp\left(-R^K \lambda_i \left(R^{1_q} x - L - u + a\right)\right) e^{-\lambda_j u} du = \\ &= \sum_{q \in Q} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \sum_{1 \leq |K| \leq n} C_{s,q,i,j,n}^K e^{-R^{K+1_q} \lambda_i x} \left[\exp\left(\left(R^K \lambda_i - \lambda_j\right) \left(xR^{1_q} - L + a\right)\right) - 1 \right]. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} &\exp\left(-R^{K+1_q} \lambda_i x\right) \left[\exp\left(\left(R^K \lambda_i - \lambda_j\right) \left(xR^{1_q} - L + a\right)\right) - 1 \right] = \\ &= \exp\left(-R^{1_q} \lambda_j (x-L)\right) \exp\left(-R^{1_q} \lambda_j L - \left(R^K \lambda_i - \lambda_j\right) (L-a)\right) - \exp\left(-R^{K+1_q} \lambda_i (x-L)\right) \exp\left(-R^{K+1_q} L \lambda_i\right), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} &C_{s,q,i,j,n}^K \exp\left(-R^{K+1_q} \lambda_i x\right) \left[\exp\left(\left(R^K \lambda_i - \lambda_j\right) \left(xR^{1_q} - L + a\right)\right) - 1 \right] = \\ &= \left[D_{s,q,i,j,n}^K \exp\left(-R^{1_q} \lambda_j (x-L)\right) - F_{s,q,i,j,n}^K \exp\left(-R^{K+1_q} \lambda_i (x-L)\right) \right]. \end{aligned}$$

Следовательно, имеем

$$\psi_n(x, s) - \psi_1(x, s) = \sum_{q \in Q} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \sum_{1 \leq |K| \leq n} \left[D_{s,q,i,j,n}^K e^{-R^{1_q} \lambda_j (x-L)} - F_{s,q,i,j,n}^K e^{-R^{K+1_q} \lambda_i (x-L)} \right],$$

$$\begin{aligned}\Psi_{n+1}(x, s) &= \sum_{q \in Q} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \sum_{1 \leq |K| \leq n} \left[D_{s,q,i,j,n}^K e^{-R^q \lambda_i(x-L)} - F_{s,q,i,j,n}^K e^{-R^{K+q} \lambda_i(x-L)} \right] + \sum_{q \in Q} \sum_{i=1}^l B_{s,i,l}^q e^{-R^q \lambda_i(x-L)} = \\ &= \sum_{1 \leq |K| \leq n+1} \sum_{i=1}^l B_{s,i,n+1}^K e^{-R^K \lambda_i(x-L)}\end{aligned}$$

и, таким образом, рекуррентные формулы (9) верны. Теорема доказана.

2. Асимптотические формулы

Используя подход работ [5, теорема 5.1; 6, лемма 3.2], был получен следующий результат.

Теорема 3. Если ф. р. $G_q(t)$ являются субэкспоненциальными и для $q' \neq q$, $q', q \in Q$, справедливо одно из двух соотношений

$$G_{q'}(t) = O(G_q(t)), \quad G_q(t) = O(G_{q'}(t)), \quad t \rightarrow \infty,$$

то

$$\Psi_{n+1}(t, s) \sim \sum_{q \in Q} p_{sq} \left(\Psi_n(t r_q, q) + \bar{G}_q(t r_q) \right), \quad t \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Следствие 1. Если $\exists c_q, \alpha_q > 0$, $q \in Q: \bar{G}_q(t) \sim c_q t^{-\alpha_q}$, $t \rightarrow \infty$, то

$$\Psi_n(t, s) \sim c_{n,s} t^{-\alpha}, \quad t \rightarrow \infty,$$

где $\alpha = \min_{q \in Q} \alpha_q$, $c_{1,s} = \sum_{q \in Q_0} p_{sq} c_q r_q^{-\alpha}$, $Q_0 = \{q: \alpha_q = \alpha\}$, $c_{n+1,s} = \sum_{q \in Q} p_{sq} r_q^{-\alpha} c_{n,q} + c_{1,s}$, $n > 0$.

Следствие 2. Если $\exists b_q > 0$, $0 < \alpha_q < 1$, $q \in Q: \bar{G}_q(t) \sim e^{-b_q t^{\alpha_q}}$, $t \rightarrow \infty$, то

$$\Psi_n(t, s) \sim c_{n,s} \exp(-d_n t^\alpha), \quad t \rightarrow \infty,$$

где $d_1 = \min_{q \in Q_0} b_q r_q^\alpha$, $d_{n+1} = \min \left(d_1, \min_{q \in Q_0} d_n r_q^\alpha \right)$,

$$c_{1,s} = \sum_{q \in Q_0, b_q r_q^\alpha = d_1} p_{sq}, \quad c_{n+1,s} = c_{1,s} I(d_1 = d_{n+1}) + \sum_{q \in Q} p_{sq} c_{n,q} I(d_{n+1} = d_n r_q^\alpha).$$

3. Теоремы непрерывности

Обозначим F_q , $q \in Q$, возмущенные ф.р. и положим $\tilde{\Psi}_n(t)$ соответствующие вероятности разорения. Тогда, используя равномерную метрику $\rho(G_q(t), F_q(t))$, теорему 1 и результаты по устойчивости систем массового обслуживания [7, теорема 1], нетрудно доказать следующее утверждение.

Теорема 4. Для $n > 0$

$$\rho(\Psi_n(t, q), \tilde{\Psi}_n(t, q)) \leq n \max_{q \in Q} \rho(F_q(t), G_q(t)).$$

Теорема 2 и теорема Бернштейна позволяют построить приближенный алгоритм вычисления вероятности разорения. Но линейная по n верхняя оценка в (12) неудобна для этой цели. Поэтому мы переформулируем теорему 4 в метрике L_1 .

Обозначим

$$\frac{1}{d} = \sum_{q \in Q} \frac{p_{sq}}{r_q} < 1, \quad \frac{1}{c} = \max_{q \in Q} \frac{1}{r_q} < 1.$$

Теорема 5. Для $n > 0$

$$L_1(\psi_n(t, q), \tilde{\psi}_n(t, q)) \leq \frac{\max_{q \in Q} L_1(G_q(t), F_q(t))}{d-1}, \quad q \in Q. \quad (11)$$

Доказательство. Предположим, что $r > 0$, d – вещественные числа и $\tilde{S}(x)$, $S(x)$, $R(x)$ ф. р. на действительной оси. Тогда нетрудно получить («*» означает свертку функций распределения):

$$L_1((\tilde{S} * R)(x), (S * R)(x)) \leq L_1(\tilde{S}(x), S(x)), \quad L_1(\tilde{S}(rx + f), S(rx + f)) = \frac{L_1(\tilde{S}(x), S(x))}{r}. \quad (12)$$

Следовательно, из теоремы 1 имеем

$$L_1(\tilde{\psi}_{n+1}(x, s), \psi_{n+1}(x, s)) \leq \frac{L_1(\tilde{\psi}_n(x, s), \psi_n(x, s)) + \delta}{d}$$

и индукция по n приводит к формуле (11). Теорема доказана.

Легко получить, что при выполнении условия

$$\max_{q \in Q} \int_0^{\infty} \bar{G}_q(t) dt = C < \infty \quad (13)$$

существует невозрастающая функция $\psi(t, q): \psi(t, q) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty, \psi(L, q) = 1$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(t, q) = \psi(t, q), \quad t \rightarrow \infty, \quad q \in Q.$$

Теорема 6. Если выполняется условие (13), то

$$L_1(\psi_n(t, q), \psi(t, q)) \leq \frac{C}{(c-1)c^{n-1}}, \quad n > 0. \quad (14)$$

Доказательство. Для $n = 1$ формула (14) верна. Докажем формулу (14), используя индукцию по n . Предположим, что (16) имеет место для некоторого $n > 0$. Используя теорему 1 и соотношение (12), нетрудно получить

$$L_1(\psi(t, s), \psi_{n+1}(t, s)) \leq \sum_{q \in Q} p_{sq} L_1(\psi(r_q t, q), \psi_n(r_q t, q)) = \frac{1}{c} \sum_{q \in Q} p_{sq} L_1(\psi(t, q), \psi_n(t, q)).$$

Теорема доказана.

Замечание. Обозначим $n(\varepsilon) = \inf(n: L_1(\psi_1, \psi) < \varepsilon)$. Тогда из теоремы 6 получим неравенство

$$n(\varepsilon) \leq 2 + \frac{\ln L_1(\psi_1, \psi) - \ln \varepsilon}{\ln R} = n_1(\varepsilon),$$

из которого устанавливаем, что если $L_1(\psi_{n(\varepsilon)}, \psi) < \varepsilon$, то достаточно вычислить функции ψ_n , $1 \leq n \leq n_1(\varepsilon)$.

Следующее утверждение является следствием результатов работ [9, 10].

Теорема 7. Пусть ф. р. $F(t)$ сосредоточена на $[0, \infty)$ и имеет конечное среднее и непрерывную положительную плотность. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно построить ф. р. $R(t)$, сосредоточенную на $[0, \infty)$ с хвостом $\bar{R}(t) = \sum_{i=1}^r a_i \exp(-b_i t)$, $t > 0$, $-\infty < a_i < \infty$, $0 < b_i < \infty$, такую, что $L_1(F, R) < \varepsilon$.

4. Вычислительные задачи

Введем множества векторов

$$\mathcal{K}_i^j = \left\{ K = (k_1, \dots, k_j) : k \in \{0, 1, \dots\}, \sum_{q=1}^j k_q = i \right\}, \quad i \geq 0, j = 1, \dots, m,$$

и обозначим $|\mathcal{K}_i^j|$ число векторов множества $\mathcal{K}_i^j$. Наша задача состоит в перечислении всех векторов множества $K = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{K}_i^m$. Нетрудно построить алгоритм определения множества $\mathcal{K}_i^m$ по множеству $\mathcal{K}_{i-1}^m$ в виде

$$\mathcal{K}_i^m = \left\{ K + 1_q : K \in \mathcal{K}_{i-1}^m, q = 1, \dots, m \right\}.$$

Но сложность этого алгоритма пропорциональна m^n , и он может генерировать совпадающие векторы. Поэтому был построен более эффективный алгоритм.

Очевидно, что

$$\mathcal{K}_i^{j+1} = \bigcup_{t=0}^i \left\{ (K, t) : K \in \mathcal{K}_{i-t}^j \right\}, \quad 1 \leq j \leq m-1, 1 \leq i \leq n,$$

где $\mathcal{K}_i^1 = \{i\}$, $1 \leq i \leq n$, а множество $\mathcal{K}_0^j$, $1 \leq j \leq m$, состоит из единственного j -мерного вектора с нулевыми компонентами. Так как

$$1 = |\mathcal{K}_0^j| \leq \dots \leq |\mathcal{K}_i^j|, \quad |\mathcal{K}_i^{j+1}| = \sum_{t=0}^i |\mathcal{K}_{i-t}^j| = \sum_{t=0}^i |\mathcal{K}_t^j| \leq (i+1) |\mathcal{K}_i^j| \leq (i+1)^{j+1},$$

то сложность построенного алгоритма меньше $(m+1)(n+1)^{m+1}$.

Используя теоремы непрерывности (5), (6), можно, слегка возмущая r_i, λ_j и, следовательно, слегка возмущая в метрике L_1 вероятность разорения $\psi_n(t, s)$, добиться выполнения условия (6) теоремы 2. Иными словами, можно для любого $\varepsilon > 0$ подобрать $s_1, \dots, s_m, v_1, \dots, v_m > 0$, такие, что выполняются неравенства

$$|s_i - r_i| < \varepsilon, \quad i \in Q, \quad |v_j - \lambda_j| < \varepsilon, \quad j = 1, \dots, l, \quad (15)$$

и для любого K справедлив аналог соотношения (6)

$$S^K v_i \neq v_j, \quad 1 \leq i, j \leq l, \quad |K| \geq 1, \quad S = (s_1, \dots, s_m).$$

Для этого достаточно взять натуральное число b , такое, что $2^b < \varepsilon$, и определить рациональные числа $s_i = \frac{a_i}{2^b}$, $i \in Q$, $v_j = \frac{b_j}{2^b}$, $j = 1, \dots, l$, с нечетными числителями, удовлетворяющие неравенствам (15).

5. Вычислительный эксперимент

Зададим параметры рассмотренной в разделе 1 модели риска

$$x = 1, m = 2, L = 0,5, a = 2, r_1 = 1,03, r_2 = 1,08, p_{11} = \frac{5}{9}, p_{12} = \frac{4}{9}, p_{21} = \frac{4}{27}, p_{22} = \frac{23}{27}$$

и предположим, что ущербы имеют паретовские распределения с хвостами

$$\bar{G}_1(t) = (1 + 5(t + a))^{-1,2}, \bar{G}_2(t) = (1 + 0,83(t + a))^{-2,2}, t + a > 0.$$

В силу теоремы (7) хвосты распределений были аппроксимированы смесями экспоненциальных распределений

$$\bar{G}_q(t) \approx \sum_{i=1}^{27} a_{iq} \exp(-\lambda_i(t + a)), t \geq -a,$$

с коэффициентами $a_{i1}, a_{i2}, \lambda_i$, представленными в табл. 1 и взятыми из работы [2].

Вероятность разорения $\psi_n(x, s)$ была вычислена с помощью формулы теоремы (2) и методом Монте-Карло с 1 000 000 реализаций, что продемонстрировано в табл. 2. Также вероятность разорения $\psi_5(x, s)$ была вычислена с помощью точной формулы теоремы 2 и асимптотической формулы следствия 1 теоремы 3, что продемонстрировано в табл. 3.

Таблица 1

Значения коэффициентов $a_{i1}, a_{i2}, \lambda_i$

i	a_{i1}	a_{i2}	λ_i	i	a_{i1}	a_{i2}	λ_i
1	0,089437	0	23,304	15		0,193963	4,491
2	0,533823	0	6,516	16	0	0,651199	1,422
3	0,307218	0	1,546	17	0	0,147814	0,371
4	0,0059768	0	0,306	18	0	0,006832	0,076
5	0,008462	0	0,057	19	0	0,000188	0,014
6	0,001122	0	0,01	20	0	$4,61 \times 10^{-6}$	0,003
7	0,000147	0	0,002	21	0	$1,11 \times 10^{-7}$	0,0005
8	0,0000192	0	0,00035	22	0	$2,65 \times 10^{-9}$	0,000088
9	$2,5 \times 10^{-6}$	0	0,000065	23	0	$6,35 \times 10^{-11}$	0,000016
10	$3,27 \times 10^{-7}$	0	0,000012	24	0	$1,52 \times 10^{-12}$	$2,9 \times 10^{-6}$
11	$4,27 \times 10^{-9}$	0	$2,2 \times 10^{-6}$	25	0	$3,36 \times 10^{-14}$	$5,4 \times 10^{-7}$
12	$5,56 \times 10^{-10}$	0	$3,9 \times 10^{-7}$	26	0	$8,51 \times 10^{-16}$	$9,7 \times 10^{-8}$
13	$7,18 \times 10^{-10}$	0	$6,8 \times 10^{-8}$	27	0	$1,72 \times 10^{-17}$	$1,58 \times 10^{-8}$
14	$8,37 \times 10^{-11}$	0	$8,3 \times 10^{-9}$				

Таблица 2

Вероятности разорения $\psi_n(x, s)$

Начальное состояние s	Число шагов n	Методы	$\psi_n(x, s)$	Время счета, с	Начальное состояние s	Число шагов n	Методы	$\psi_n(x, s)$	Время счета, с.
1	1	Монте-Карло	0,066038	71	2	1	Монте-Карло	0,079685	71
1	1	Формула	0,0586839	0	2	1	Формула	0,073708	0
1	2	Монте-Карло	0,09866	117	2	2	Монте-Карло	0,115185	117
1	2	Формула	0,0901557	0,1	2	2	Формула	0,107071	0,1
1	3	Монте-Карло	0,118499	165	2	3	Монте-Карло	0,135518	165
1	3	Формула	0,109308	0,3	2	3	Формула	0,127891	0,3
1	4	Монте-Карло	0,130707	212	2	4	Монте-Карло	0,148205	212
1	4	Формула	0,121714	1,3	2	4	Формула	0,140592	1,3
1	5	Монте-Карло	0,139442	260	2	5	Монте-Карло	0,157148	260
1	5	Формула	0,130206	2,8	2	5	Формула	0,149217	2,8

Сравнение в табл. 2 результатов вычисления вероятности разорения методом Монте-Карло и с помощью рекуррентных соотношений показывает не только преимущество метода рекуррентных соотношений перед методом Монте-Карло по быстродействию, но и близость результатов, получаемых этими методами.

Т а б л и ц а 3

Значения асимптотических и точных формул

Начальный капитал x	Формула	$\psi_5(x, 1)$	Начальный капитал x	Формула	$\psi_5(x, 1)$
1 000	Асимптотическая	0,000056666	6 000	Асимптотическая	$6,59995 \times 10^{-6}$
1 000	Точная	0,0000563073	6 000	Точная	$6,77988 \times 10^{-6}$
2 000	Асимптотическая	0,0000246653	7 000	Асимптотическая	$5,48535 \times 10^{-6}$
2 000	Точная	0,0000232221	7 000	Точная	$5,51602 \times 10^{-6}$
3 000	Асимптотическая	0,0000151627	8 000	Асимптотическая	$4,6732 \times 10^{-6}$
3 000	Точная	0,0000151122	8 000	Точная	$4,60568 \times 10^{-6}$
4 000	Асимптотическая	0,0000107362	9 000	Асимптотическая	$4,005724 \times 10^{-6}$
4 000	Точная	0,0000111379	9 000	Точная	$3,93824 \times 10^{-6}$
5 000	Асимптотическая	$8,21407 \times 10^{-6}$	10 000	Асимптотическая	$3,57538 \times 10^{-6}$
5 000	Точная	$8,56365 \times 10^{-6}$	10 000	Точная	$3,43885 \times 10^{-6}$

Заключение

Результаты вычислительного эксперимента показали, что предложенный в работе метод прямого вычисления вероятности разорения в дискретной модели риска с зависимыми страховыми и финансовыми рисками позволяет оценивать точность асимптотических формул. Кроме того появляется возможность достаточно точно вычислять вероятность разорения в области средних значений аргумента, что до сих пор является трудной задачей прикладной теории вероятностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Asmussen S. Ruin Probabilities. Singapore : World Scientific, 2000.
2. Feldmann A., Whitt W. Fitting mixtures of exponentials to long-tailed distributions to analyze network performance models // Performance Evaluation. 1998. V. 31. P. 245–279.
3. Kalashnikov V. Geometric Sums: Bounds for Rare Events with Applications. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1997.
4. Kordzakhia N., Novikov A., Tsitsiashvili G.Sh. On ruin probabilities in risk models with interest rate. In monograph: Mathematical and Statistical Methods in Actuarial Sciences and Finance / eds. by C. Perna, M. Sibilio. Springer Verlag, 2012. P. 245–253.
5. Cai J., Dicson D.C.M. Ruin probabilities with a Markov chain interest model // Insurance: Mathematics and Economics. 2004. V. 35. P. 513–525.
6. Tang Q., Tsitsiashvili G. Precise estimates for the ruin probability in finite horizon in a discrete-time model with heavy-tailed insurance and financial risks // Stochast. Process. Appl. 2003. V. 108, No. 2. P. 299–325.
7. Золотарев В.М. Стохастическая непрерывность систем массового обслуживания // Теория вероятностей и ее применения. 1976. Т. 21, № 2. С. 260–279.
8. Norberg R. Ruin problems with assets and liabilities of diffusion type // Stochastic Process. Appl. 1999. V. 81, No. 2. P. 255–269.
9. Dufresne D. Stochastic life annuities abstract // American Actuarial Journal. 2007. V. 11, No. 1. P. 136–157.
10. Ko B., Ng A.C.Y. "Stochastic Annuities", Daniel Dufresne. Discussions of papers already published // American Actuarial Journal. 2007. V. 11, No. 3. P. 170–171.

Цициашвили Гурам Шалвович, д-р физ.-мат. наук, профессор. E-mail: guram@iam.dvo.ru

Осипова Марина Анатольевна, канд. физ.-мат. наук, доцент. E-mail: mao1975@list.ru

Дальневосточный федеральный университет,

ИПМ ДВО РАН (г. Владивосток)

Поступила в редакцию 14 декабря 2013 г.

Tsitsiashvili Gurami Sh., Osipova Marina A. (IAM, FEBRAS, Vladivostok, Russian Federation).

Calculation of ruin probability in discrete risk model with dependent insurance and financial risks.

Keywords: ruin probability; insurance and financial risks; finite mixture of exponential distributions.

Last decades there is a discussion between leading specialists in risk theory, financial mathematics and queuing theory (S. Asmussen, W. Whitt, V. Kalashnikov and A. Novikov) about an accuracy of asymptotic formulas in stochastic models with heavy tailed distributions. Manifold numerical experiments showed that asymptotic formulas reach high accuracy only for very large meanings of arguments. The Monte-Carlo method works efficiently only for sufficiently small arguments. As a result an area of mid arguments appears. In this area known numerical methods do not work because of their complexity and asymptotic formulas do not work because of their small accuracy. To make calculations in this area A. Novikov suggested to approximate distributions with heavy tails by finite mixtures of exponential distributions. This approach demands to calculate a probability of autoregressive sequence to exit from some domain in a finite number of steps. A. Novikov solved this problem using martingale methods. But these methods work in sufficiently narrow suggestions.

In this paper, the authors discard these restrictions for discrete time risk model with financial risks and heavy tailed insurance risks dependent on them. An inflation factor is represented by Markov chain with finite set of states and insurance risk has a distribution depending of this chain. Such complication of risk model is suggested by A. Novikov and is not considered yet by specialists of risk and financial mathematics. But last events showed that a dependence between insurance and financial risks is caused by natural and anthropogenic catastrophes with sizes depending on financial factors significantly.

Recurrent algorithm of ruin probability calculation in risk model under finite horizon is based on an approximation of loss distributions by finite mixtures of exponential distributions and on continuity theorems. For this aim special methods of a transformation of integral relations are constructed and a problem of small denominators connected with these methods is solved. An efficient procedure of an enumeration of vectors with fixed sums of non negative integer components is constructed. On a base of this algorithm we performed numerical experiment which showed its advantage in an efficiency as compared to Monte-Carlo method with practically identical results. Some numerical results with the chosen parameters of the model (for an example with unit capital) are represented below.

Steps number	Methods	Ruin probability
3	Monte-Carlo	0.118499
3	Recurrent formula	0.109308
4	Monte-Carlo	0.130707
4	Recurrent formula	0.121714
5	Monte-Carlo	0.139442
5	Recurrent formula	0.130206

We compare the calculation of ruin probability by accuracy formulas and by asymptotic formulas in a case when insurance losses have subexponential distributions. Below some results of numerical experiments are represented.

Initial capital	Formula	Ruin probability
1000	Asymptotic	0.000056666
1000	Recurrent	0.0000563073
3000	Asymptotic	0.0000151627
3000	Recurrent	0.0000151122
5000	Asymptotic	8.21407×10^{-6}
5000	Recurrent	8.56365×10^{-6}

REFERENCES

1. Asmussen S. *Ruin probabilities*. Singapore: World Scientific, 2000. 602 p.
2. Feldmann A., Whitt W. Fitting mixtures of exponentials to long-tailed distributions to analyze network performance models. *Performance Evaluation*, 1998, vol. 31, pp. 245-279. DOI: 10.1016/S0166-5316(97)00003-5
3. Kalashnikov V. *Geometric sums: bounds for rare events with applications*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997. 265 p.
4. Kordzakhia N., Novikov A., Tsitsashvili G.Sh. *On ruin probabilities in risk models with interest rate*. In: Perna C., Sibilio M. (eds.) *Mathematical and statistical methods in actuarial sciences and finance*. Springer Verlag, 2012, pp. 245-253.
5. Cai J., Dicson D.C.M. Ruin probabilities with a Markov chain interest model. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2004, vol. 35, pp. 513-525. DOI: 10.1016/j.insmatheco.2004.06.004
6. Tang Q., Tsitsashvili G. Precise estimates for the ruin probability in finite horizon in a discrete-time model with heavy-tailed insurance and financial risks. *Stochastic Processes and Their Application*, 2003, vol. 108, no. 2, pp. 299-325. DOI: 10.1016/j.spa.2003.07.001
7. Zolotarev V.M. Stokhasticheskaya nepreryvnost' sistem massovogo obsluzhivaniya [Stochastic continuity of systems of Queuing]. *Teoriya veroyatnostey i ee primeneniya – Probability Theory and its applications*, 1976, vol. 21, no. 2, pp. 260-279.
8. Norberg R. Ruin problems with assets and liabilities of diffusion type. *Stochastic Processes and Their Application*, 1999, vol. 81, no. 2, pp. 255-269. DOI: 10.1016/S0304-4149(98)00103-3.
9. Dufresne D. Stochastic life annuities. *American Actuarial Journal*, 2007, vol. 11, no. 1, pp. 136-157. DOI: 10.1080/10920277.2007.10597441
10. Ko B., Ng A.C.Y. "Stochastic Annuities", Daniel Dufresne. Discussions of papers already published. *American Actuarial Journal*, 2007, vol. 11, no. 3, pp. 170-171. DOI: 10.1080/10920277.2007.10597475