УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 519.2

О.О. Мухина, В.И. Смагин

ЛОКАЛЬНО-ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПО ВЫХОДУ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ ОБЪЕКТОВ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО СОСТОЯНИЮ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта (№ 13-08-01015 А).

Рассматривается задача локально-оптимального управления по наблюдаемому выходу для дискретных объектов с запаздыванием по состоянию. Для ее решения предлагаются алгоритмы, в основе которых лежит оптимизация локального критерия без использования расширения пространства состояний. Управление определяется как функция измеряемых переменных с памятью и отслеживаемого сигнала. Исследуется асимптотическое поведение замкнутой системы.

Ключевые слова: управление по выходу; локально-оптимальное слежение; запаздывание по состоянию.

Локально-оптимальные дискретные системы управления являются частным случаем дискретного прогнозирующего управления (Model predictive control) с прогнозом на 1 такт. Основным достоинством метода локально-оптимального управления является существенное упрощение процедуры синтеза. Область применения метода MPC и, соответственно, метода локально-оптимального управления охватывает задачи управления техническими системами, производственными системами, управление запасами и финансовую математику [1–13].

Результаты настоящей работы обобщают [14] на случай управления по выходу объектом с запаздыванием по состоянию. В статье [15] рассмотрена близкая задача для управления объектом с запаздыванием по состоянию при точном измерении компонент вектора состояния с использованием квадратичного критерия. В работе [1] рассмотрена задача синтеза системы управления с учетом запаздываний по управлению для дискретных объектов, которая решается на основе преобразования модели с запаздываниями к расширенной модели без запаздываний, что приводит к значительному увеличению размерности задачи при больших задержках и тем самым к дополнительным вычислительным затратам.

В данном исследовании предлагается осуществлять синтез следящих систем управления по выходу на основе оптимизации локального критерия, при косвенных измерениях для дискретных объектов с запаздываниями по состоянию. Управление определяется как функция измеряемых переменных и отслеживаемого сигнала. Исследуется асимптотическое поведение системы, строятся оценки для асимптотической точности слежения.

1. Постановка задачи

Пусть управляемый объект с запаздыванием по состоянию описывается разностным уравнением

$$x(k+1) = Ax(k) + A_1 x(k-h) + Bu(k) + q(k),$$
$$x(\tau) = \varphi(\tau),\ \tau = -h,\ 1-h,\ 2-h, \ldots, 0;\ k = 0,1,2,\ldots, \tag{1}$$

модель канала измерений имеет вид

$$y(k) = Sx(k) + v(k). \tag{2}$$

В (1), (2) $x(k) \in R^n$ – вектор состояний; $h > 0$ – величина временного запаздывания (целое число); $u(k) \in R^m$ – управление; $y(k) \in R^l$ – вектор измерений; A, A_1, B – матрицы соответствующих размерностей; S – матрица канала наблюдения; x_0 – начальные условия $(\mathrm{M}\{x_0 x_0^{\mathrm{T}}\} = P_{x_0})$; $q(k)$ – гауссовская случайная последовательность входных возмущений; $v(k)$ – гауссовская случайная последовательность ошибок измерений с характеристиками: $\mathrm{M}\{q(k)\} = 0$, $\mathrm{M}\{v(k)\} = 0$, $\mathrm{M}\{q(k)v^{\mathrm{T}}(j)\} = 0$, $\mathrm{M}\{q(k)q^{\mathrm{T}}(j)\} = Q(k)\delta_{kj}$, $\mathrm{M}\{v(k)v^{\mathrm{T}}(j)\} = V(k)\delta_{kj}$ ($\delta_{i,j}$ – символ Кронекера), $Q(k) = Q^{\mathrm{T}}(k) \geq 0$, $V(k) = V^{\mathrm{T}}(k) \geq 0$ – неотрицательно определенные матрицы).

Оптимизируемый локальный критерий имеет вид

$$I(k) = \mathrm{M}\{(w(k+1) - z(k))^{\mathrm{T}} C(w(k+1) - z(k)) + u^{\mathrm{T}}(k) D u(k)\}, \tag{3}$$

где $w(k) = Hx(k)$ – управляемый выход системы (H – матрица выхода системы); $C = C^{\mathrm{T}} \geq 0$ и $D = D^{\mathrm{T}} \geq 0$ – весовые матрицы; $z(k) \in R^n$ – отслеживаемый вектор, удовлетворяющий уравнению

$$z(k+1) = Fz(k) + q_z(k),\ z(0) = z_0,\ k = 0,1,2,\ldots. \tag{4}$$

В (4) $q_z(k)$ – гауссовская случайная последовательность с характеристиками $\mathrm{M}\{q_z(k)\} = 0$, $\mathrm{M}\{q_z(k)q^{\mathrm{T}}(j)\} = 0$, $\mathrm{M}\{q_z(k)v^{\mathrm{T}}(j)\} = 0$, $\mathrm{M}\{q_z(k)q_z^{\mathrm{T}}(j)\} = Q_z(k)\delta_{k,j}$, z_0 – начальные условия $(\mathrm{M}\{z_0 z_0^{\mathrm{T}}\} = P_{z_0}, \mathrm{M}\{z_0 x_0^{\mathrm{T}}\} = P_{z_0 x_0},\ \mathrm{M}\{x_0 z_0^{\mathrm{T}}\} = P_{x_0 z_0})$, F – матрица динамики модели отслеживаемого сигнала.

2. Оптимизация локального критерия

Управление объектом (1) при измерениях (2) определим в параметрическом виде

$$u(k) = K_1(k)y(k) + K_2(k)y(k-h) + K_3(k)z(k), \tag{5}$$

где коэффициенты передачи $K_1(k), K_2(k), K_3(k)$ подлежат определению.

Решение задачи сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Если для объекта (1), канала измерений (2) и локального критерия (3) матрицы

$$\overline{C} = (B^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}} CHB + D) > 0,$$

$$\overline{P}(k) = \begin{bmatrix} SP_x(k)S^{\mathrm{T}} + V(k) & SP_x(k-h,k)S^{\mathrm{T}} & P_{zx}(k)S^{\mathrm{T}} \\ SP_x(k,k-h)S^{\mathrm{T}} & SP_x(k-h)S^{\mathrm{T}} + V(k-h) & P_{zx}(k,k-h)S^{\mathrm{T}} \\ SP_{xz}(k) & SP_{xz}(k-h,k) & P_z(k) \end{bmatrix} > 0 \tag{6}$$

положительно определены для всех $k = 1,2,\ldots$, тогда оптимальные в смысле минимума критерия (3) коэффициенты передачи для управления (5) определяются по формулам

$$K_1^*(k) = aK_2(k) + bK_3(k) + c, \tag{7}$$

$$K_3^*(k) = [K_3(k)(bd+e) + cd + f][E - ad], \tag{8}$$

$$K_3^*(k) = [(cd+f)(E-ad)^{-1}(ag+n) + cg + m][(1-bg) - (bd+e)(E-ad)^{-1}(ag+n)]^{-1}, \tag{9}$$

где E – единичная матрица, $a = -SP_x(k-h,k)S^{\mathrm{T}}[SP_x(k)S^{\mathrm{T}} + V(k)]^{-1}$, $b = -P_{zx}(k)S^{\mathrm{T}}[SP_x(k)S^{\mathrm{T}} + V(k)]^{-1}$,

$$c = -\overline{C}^{-1}B^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}C[HAP_x(k) + HA_1P_x(k-h,k) - P_{zx}(k)]S^{\mathrm{T}}[SP_x(k)S^{\mathrm{T}} + V(k)]^{-1},$$

$$d = -SP_x(k,k-h)S^{\mathrm{T}}[SP_x(k-h)S^{\mathrm{T}} + V(k-h)]^{-1},\ e = -P_{zx}(k,k-h)S^{\mathrm{T}}[SP_x(k-h)S^{\mathrm{T}} + V(k-h)]^{-1},$$

$$f = -\overline{C}^{-1}B^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}C[HAP_x^{\mathrm{T}}(k-h,k) + HA_1P_x(k-h) - P_{zx}(k,k-h)]S^{\mathrm{T}}[SP_x(k-h)S^{\mathrm{T}} + V(k-h)]^{-1},$$

$$g = -SP_{xz}(k)P_z^{-1}(k),\ \ n = -SP_{xz}(k-h,k)P_z^{-1}(k),$$

$$m = -\overline{C}^{-1}B^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}C[HAP_{xz}(k) + HA_1P_{xz}(k-h,k) - P_z(k)]P_z^{-1}(k). \tag{10}$$

В (10) введены обозначения: $P_z(k)=\mathrm{M}\{z(k)z^{\mathrm{T}}(k)\}$, $P_x(k)=\mathrm{M}\{x(k)x^{\mathrm{T}}(k)\}$, $P_{zx}(k,r)=P_{xz}^{\mathrm{T}}(r,k)=$ $=\mathrm{M}\{z(k)x^{\mathrm{T}}(r)\}$, $P_{xz}(k,r)=P_{zx}^{\mathrm{T}}(r,k)=\mathrm{M}\{x(k)z^{\mathrm{T}}(r)\}$, $P_{xz}(k)=P_{zx}^{\mathrm{T}}(k)=\mathrm{M}\{x(k)z^{\mathrm{T}}(k)\}$, $P_x(k,r)=$ $=\mathrm{M}\{x(k)x^{\mathrm{T}}(r)\}$, $P_{zx}(k)=P_{xz}^{\mathrm{T}}(k)=\mathrm{M}\{z(k)x^{\mathrm{T}}(k)\}$, которые определяются системой разностных матричных уравнений с запаздываниями.

Доказательство. Для вычисления локального критерия получим уравнение состояния путем подстановки (5) в (1), в результате получим

$$x(k+1)=Ax(k)+A_1x(k-h)+Bu(k)+q(k)=Ax(k)+A_1x(k-h)+$$
$$+BK_1(k)Sx(k)+BK_1(k)v(k)+BK_2(k)Sx(k-h)+BK_2(k)v(k-h)+BK_3(k)z(k)+q(k)\,. \quad (11)$$

Учитывая (1), (2), (4) и (5), вычислим значение локального критерия (3):

$$I(k)=\mathrm{M}\{(w(k+1)-z(k))^{\mathrm{T}}C(w(k+1)-z(k))+u^{\mathrm{T}}(k)Du(k)\}=$$
$$=trA^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}C(HA+HBK_1(k)S)P_x(k)+$$
$$+trS^{\mathrm{T}}K_1^{\mathrm{T}}(k)B^{\mathrm{T}}C(HA+HBK_1(k)S)P_x(k)+trS^{\mathrm{T}}K_1^{\mathrm{T}}(k)DK_1(k)SP_x(k)+$$
$$+trA^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}C(HA_1+HBK_2(k)S)P_x(k-h,k)+trS^{\mathrm{T}}K_1^{\mathrm{T}}(k)B^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}C(HA_1+HBK_2(k)S)P_x(k-h,k)+$$
$$+trS^{\mathrm{T}}K_1^{\mathrm{T}}(k)DK_2(k)SP_x(k-h,k)+trA^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}C(HBK_3(k)-E)P_{zx}(k)+$$
$$+trS^{\mathrm{T}}K_1^{\mathrm{T}}(k)B^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}C(HBK_3(k)-E)P_{zx}(k)+$$
$$+trS^{\mathrm{T}}K_1^{\mathrm{T}}(k)DK_3(k)P_{zx}(k)+trA_1^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}C(HA+HBK_1(k)S)P_x(k,k-h)+$$
$$+trS^{\mathrm{T}}K_2^{\mathrm{T}}(k)B^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}C(HA+HBK_1(k)S)P_x(k,k-h)+trS^{\mathrm{T}}K_2^{\mathrm{T}}(k)DK_1SP_x(k,k-h)+$$
$$+trA_1^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}C(HA_1+HBK_2(k)S)P_x(k-h)+trS^{\mathrm{T}}K_2^{\mathrm{T}}(k)B^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}C(HA_1+$$
$$+HBK_2(k)S)P_x(k-h)+trS^{\mathrm{T}}K_2^{\mathrm{T}}(k)DK_2SP_x(k-h)+trA_1^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}C(HBK_3(k)-E)P_{zx}(k,k-h)+$$
$$+trS^{\mathrm{T}}K_2^{\mathrm{T}}(k)B^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}C(HBK_3(k)-E)P_{zx}(k,k-h)+trS^{\mathrm{T}}K_2^{\mathrm{T}}(k)DK_3(k)P_{zx}(k,k-h)+$$
$$+trK_3^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}C(HBK_1(k)S+PA)P_{xz}(k)-trC(HA+HBK_1(k)S)P_{xz}(k)+$$
$$+trK_3^{\mathrm{T}}(k)DK_1(k)SP_{xz}(k)+trK_3^{\mathrm{T}}(k)B^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}C(HBK_2(k)S+HA_1)P_{xz}(k-h,k)-$$
$$-trC(HA_1+HBK_2(k)S)P_{xz}(k-h,k)+trK_3^{\mathrm{T}}(k)DK_2(k)SP_{xz}(k-h,k)+$$
$$+trK_3^{\mathrm{T}}(k)B^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}C(PBK_3(k)-E)P_z(k)+trC(E-HBK_3(k))P_z(k)+K_3^{\mathrm{T}}(k)DK_3(k)P_z(k)+$$
$$+trK_1(k)(B^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}CHB+D)K_1(k)V(k)+K_2^{\mathrm{T}}(k)(B^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}CHB+D)K_2(k)V(k-h)+trH^{\mathrm{T}}CHQ(k). \quad (12)$$

Входящие в (12) моменты $P_x(i,j)$, $P_z(i,j)$, $P_{xz}(i,j)$, $P_{zx}(i,j)$ определяются следующими формулами:

$$P_x(i+1,j+1)=\tilde{A}(i)P_x(i,j)\tilde{A}^{\mathrm{T}}(j)+\tilde{A}_1(i)P_x(i-h,j)\tilde{A}(j)+\tilde{A}_1(i)P_x(i-h,j-h)\tilde{A}_1^{\mathrm{T}}(j)+Q_1(i,j),\ P_x(0)=P_{x_0}, \quad (13)$$

$$P_z(i+1,j+1)=FP_z(i,j)F^{\mathrm{T}}+Q_z(i,j)\delta_{i,j}\,,\ P_z(0)=P_{z_0}\,, \quad (14)$$

$$P_{zx}(i+1,j+1)=FP_{zx}(i,j)\tilde{A}^{\mathrm{T}}+FP_{zx}(i,j-h)\tilde{A}_1^{\mathrm{T}}+FP_z(i,j)K_3^{\mathrm{T}}(j)B^{\mathrm{T}},P_{zx}(0)=P_{z_0x_0}\,, \quad (15)$$

$$P_{xz}(i+1,j+1)=\tilde{A}(i)P_{xz}(i,j)F^{\mathrm{T}}+\tilde{A}_1(i)P_{xz}(i-h,j)F^{\mathrm{T}}+BK_3(i)P_z(i,j)F^{\mathrm{T}},P_{xz}(0)=P_{x_0z_0}\,. \quad (16)$$

В (13)–(16) введены обозначения:

$$\tilde{A}(i)=A+BK_1^*(i)S,\ \ \tilde{A}_1(i)=A_1+BK_2^*(i)S\,,\ \ \tilde{A}(j)=A+BK_1^*(j)S\,,\ \ \tilde{A}_1(j)=A_1+BK_2^*(j)S\,,$$
$$Q_1(i,j)=Q(i,j)\delta_{i,j}+BK_3^*(i)P_{zx}(i,j)\tilde{A}^{\mathrm{T}}(j)+\tilde{A}(i)P_{xz}(i,j)K_3^{*\mathrm{T}}(j)B^{\mathrm{T}}+BK_3^*(i)P_{zx}(i,j-h)\tilde{A}_1^{\mathrm{T}}(j)+$$
$$+\tilde{A}_1(i)P_{xz}(i-h,j)K_3^{*\mathrm{T}}(j)B^{\mathrm{T}}+BK_3^*(i)P_z(i,j)K_3^{*\mathrm{T}}(j)B^{\mathrm{T}}+$$
$$+BK_1^*(i)V(i,j)K_1^{*\mathrm{T}}(j)B^{\mathrm{T}}+BK_2^*(i)V(i-h,j-h)K_2^{*\mathrm{T}}(j)B^{\mathrm{T}}. \quad (17)$$

Полученный результат (12) можно переписать в виде

$$I(k) = trP_1(k)P_x(k) + trP_2(k)P_x(k-h,k) + trP_3(k)P_{zx}(k) + trP_4(k)P_x(k,k-h) + trP_5(k)P_{xz}(k) +$$
$$+trP_6(k)P_x(k-h) + trP_7(k)P_{zx}(k,k-h) + P_8(k)P_{xz}(k-h,k) + P_9(k)P_z(k) +$$
$$+trK_1^{\mathrm{T}}(k)\bar{C}K_1(k)V(k) + trK_2^{\mathrm{T}}(k)\bar{C}K_2(k)V(k-h) + trH^{\mathrm{T}}CHQ(k), \tag{18}$$

где:

$$P_1(k) = (A + BK_1(k)S)^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}} CH(A + BK_1(k)S) + S^{\mathrm{T}} K_1^{\mathrm{T}}(k)DK_1(k)S,$$
$$P_2(k) = (A + BK_1(k)S)^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}} CH(A_1 + BK_2(k)S) + S^{\mathrm{T}} K_1^{\mathrm{T}}(k)DK_2(k)S,$$
$$P_3(k) = (A + BK_1(k)S)^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}} CH(PBK_3(k) - E) + S^{\mathrm{T}} K_1^{\mathrm{T}}(k)DK_3(k),$$
$$P_4(k) = (A_1 + BK_2(k)S)^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}} CH(A + BK_1(k)S) + S^{\mathrm{T}} K_2^{\mathrm{T}}(k)DK_1(k)S,$$
$$P_5(k) = (PBK_3(k) - E)^{\mathrm{T}} CH(A + BK_1(k)S) + K_3^{\mathrm{T}}(k)DK_1(k)S,$$
$$P_6(k) = (A_1 + BK_2(k)S)^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}} CH(A_1 + BK_2(k)S) + S^{\mathrm{T}} K_2^{\mathrm{T}}(k)DK_2(k)S,$$
$$P_7(k) = (A_1 + BK_2(k)S)^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}} C(HBK_3(k) - E) + S^{\mathrm{T}} K_2^{\mathrm{T}}(k)DK_3(k),$$
$$P_8(k) = (HBK_3(k) - E)^{\mathrm{T}} CH(A_1 + BK_2(k)S) + K_3^{\mathrm{T}}(k)DK_2(k)S,$$
$$P_9(k) = (HBK_3(k) - E)^{\mathrm{T}} C(HBK_3(k) - E) + K_3^{\mathrm{T}}(k)DK_3(k).$$

Вычислим значения градиентов критерия (18) по $K_1(k), K_2(k)$ и $K_3(k)$, используя правила дифференцирования функции *tr* от произведения матриц по матричному аргументу [16] и приравняв их к нулю, получим уравнения, решения которых несложно представить в следующем виде:

$$K_1(k) = -\bar{C}^{-1}(B^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}} CHAP_x(k)S^{\mathrm{T}} + \bar{C}K_2(k)SP_x(k-h,k)S^{\mathrm{T}} + \bar{C}K_3(k)P_{zx}(k)S^{\mathrm{T}} +$$
$$+B^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}} CHA_1P_x(k-h,k)S^{\mathrm{T}} - B^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}} CP_{zx}(k)S^{\mathrm{T}})(SP_x(k)S^{\mathrm{T}} + V(k))^{-1}, \tag{19}$$
$$K_2(k) = -\bar{C}^{-1}(B^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}} CH[AP_x(k-h,k) + A_1P_x(k-h)]S^{\mathrm{T}} + \bar{C}K_1(k)SP_x(k,k-h)S^{\mathrm{T}} +$$
$$+\bar{C}K_3(k)P_{zx}(k,k-h)S^{\mathrm{T}} - B^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}} CP_{zx}(k,k-h)S^{\mathrm{T}})(SP_x(k-h)S^{\mathrm{T}} + V(k-h))^{-1}, \tag{20}$$
$$K_3(k) = -\bar{C}^{-1}(C_1K_1(k)SP_{xz}(k) + \bar{C}K_2(k)SP_{xz}(k-h,k)S^{\mathrm{T}} +$$
$$B^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}} C[AP_{xz}(k) + A_1P_{xz}(k-h,k)] - B^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}} CP_z(k))P_z^{-1}(k). \tag{21}$$

Представим формулы (19)–(21) в виде следующих соотношений:

$$\bar{C}[K_1(k)(SP_x(k)S^{\mathrm{T}} + V(k)) + K_2(k)SP_x(k-h,k)S^{\mathrm{T}} + K_3(k)P_{zx}(k)S^{\mathrm{T}}] =$$
$$= -B^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}} C[HAP_x(k) + HA_1P_x(k-h,k) - P_{zx}(k)]S^{\mathrm{T}}, \tag{22}$$
$$\bar{C}[K_1(k)SP_x(k,k-h)S^{\mathrm{T}} + K_2(k)(SP_x(k-h)S^{\mathrm{T}} + V(k-h)) + K_3(k)P_{zx}(k,k-h)S^{\mathrm{T}}] =$$
$$= -B^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}} C[HAP_x(k-h,k) + HA_1P_x(k-h) - P_{zx}(k,k-h)]S^{\mathrm{T}}, \tag{23}$$
$$\bar{C}[K_1(k)SP_{xz}(k) + K_2(k)SP_{xz}(k-h,k) + K_3(k)P_z(k)] = -B^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}} C[HAP_{xz}(k) + HA_1P_{xz}(k-h,k) - P_z(k)]. \tag{24}$$

Тогда (22)–(24) в можно записать в следующей компактной форме:

$$\bar{C}[K_1(k)|K_2(k)|K_3(k)]\bar{P}(k) = B^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}} C[(HAP_x(k) + HA_1P_x(k-h,k) - P_{zx}(k))S^{\mathrm{T}}\Big|$$
$$[(HAP_x(k-h,k) + HA_1P_x(k-h) - P_{zx}(k,k-h))S^{\mathrm{T}}\Big| (HAP_{xz}(k) + HA_1P_{xz}(k-h,k) - P_z(k))]. \tag{25}$$

В силу (6) матрицы $\bar{C}$ и $\bar{P}(k)$ невырожденные для всех $k = 0,1,2,\ldots$, следовательно, уравнение (25) разрешимо относительно блочной матрицы $[K_1(k)|K_2(k)|K_3(k)]$ и имеет единственное решение, представленное в виде (7)–(9).

3. Оценки среднеквадратического отклонения

Теорема 2. Пусть в описании объекта (1), канала измерений (2), критерия (3) и модели отслеживаемого вектора (4) матрицы $A, A_1, B, Q, S, V, H, C, D$ – постоянные; $F = E$; $q_z(k) = 0$. Тогда, если выполняется условие (6) теоремы 1, существует установившееся решение уравнений (13), (15), (16), матрицы $P_x = \lim_{k\to\infty} P_x(k) \ge 0$; $Q_1 = \lim_{k\to\infty} Q_1(k) \ge 0$, пара матриц A, $\sqrt{Q_1}$ стабилизируема, тогда матрица динамики замкнутой системы $\tilde{A} = A + BK_1^* S$ асимптотически устойчива для $K_1^* = \lim_{k\to\infty} K_1^*(k)$.

Доказательство. Если матрица $P_x \ge 0$, то из леммы 12.2 [17] при условии, что пара матриц $\tilde{A}$, $\sqrt{Q_1}$ стабилизируема, следует, что матрица $\tilde{A}$ асимптотически устойчива. Применяя теорему 3.6 [Там же], получаем, что если пара матриц A, $\sqrt{Q_1}$ стабилизируема, то и пара матриц $\tilde{A}$, $\sqrt{Q_1}$ также стабилизируема. Этим доказывается справедливость теоремы 2.

Асимптотическую точность слежения определим, вычислив оценку критерия:

$$J = \lim_{k\to\infty} \mathrm{M}\{\|x(k) - z\|^2\}, \tag{26}$$

где $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора; z – постоянный отслеживаемый вектор. Построим сначала оценку для критерия $J(k) = \mathrm{M}\{\|x(k) - z\|^2\}$. Задавая далее условие, что $k \to \infty$, найдем оценку для критерия (26). При этом предположим, что условия теоремы 2 выполняются, а $\|\tilde{A}\|_s = \alpha_1$, $\|\tilde{A}_1\|_s = \alpha_2$ (здесь $\|\cdot\|_s$ – спектральная норма матрицы). Введем условие, что $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$. Отметим, что выполнение этого условия обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы с запаздываниями по состоянию [18]. Учитывая (1), (2), (5) при коэффициентах передачи K_1^*, K_2^*, K_3^* ($K_i^* = \lim_{k\to\infty} K_i^*(k)$, $i = \overline{1,3}$), вычислим значение критерия (26) для момента времени $(k+1)$:

$$\begin{aligned} J(k+1) = \mathrm{M}\{&x^{\mathrm{T}}(k)\tilde{A}^{\mathrm{T}}\tilde{A}\, x(k) + x^{\mathrm{T}}(k)\tilde{A}^{\mathrm{T}}\tilde{A}_1 x(k-h) + x^{\mathrm{T}}(k)\tilde{A}^{\mathrm{T}}\tilde{B}z(k) + \\ &+ x^{\mathrm{T}}(k-h)\tilde{A}_1^{\mathrm{T}}\tilde{B}z(k) + z^{\mathrm{T}}(k)\tilde{B}^{\mathrm{T}}\tilde{A}x(k) + z^{\mathrm{T}}(k)\tilde{B}^{\mathrm{T}}\tilde{A}_1 x(k-h)\} + z^{\mathrm{T}}(k)\tilde{B}^{\mathrm{T}}\tilde{B}z(k) + tr\tilde{Q}, \end{aligned} \tag{27}$$

где $\tilde{B}(k) = BK_3^*(k) - E$; $\tilde{Q}(k) = Q(k) + BK_1^*(k)V(k)K_1^{*\mathrm{T}}(k)B^{\mathrm{T}} + BK_2^*(k)V(k-h)K_2^{*\mathrm{T}}(k)B^{\mathrm{T}}$.

Из (27) в силу неравенства Коши–Буняковского получим оценку

$$\begin{aligned} J(k+1) \le{}& \alpha_1^2 J_1(k) + \alpha_2^2 J_1(k-h) + \alpha_1\alpha_2 J_2(k,k-h) + \alpha_1\alpha_2 J_2(k-h,k) + \\ &+ 2\alpha_2 r_1 J_3(k-h) + 2\alpha_1 r_1 J_3(k) + r_1^2 + tr\tilde{Q}, \end{aligned} \tag{28}$$

где $r_1 = \|\tilde{B}z\|$, $\tilde{Q} = \lim_{k\to\infty}\tilde{Q}(k)$, $V = \lim_{k\to\infty} V(k)$, $J_1(k) = \mathrm{M}\{\|x(k)\|^2\}$, $J_2(k,k-h) = \mathrm{M}\{\|x(k)\|\|x(k-h)\|\}$, $J_3(k) =$ $= \mathrm{M}\{\|x(k)\|\}$. Тогда, учитывая, что траектория замкнутой системы описывается уравнением

$$\begin{aligned} x(k) = {}& \tilde{A}x(k-1) + \tilde{A}_1 x(k-h-1) + BK_1^* Sx(k-1) + BK_1^* v(k-1) + BK_2^* Sx(k-h-1) + \\ &+ BK_2^* v(k-h-1) + BK_3^* z + q(k-1), \end{aligned}$$

вычислим рекуррентные соотношения для критериев $J_1(k)$, $J_2(k,k-h)$, $J_3(k)$, которые входят в состав (28):

$$\begin{aligned} J_1(k) \le{}& \alpha_1^2 J_1(k-1) + \alpha_1\alpha_2 J_2(k-1,k-h-1) + \alpha_2\alpha_1 J_2(k-h-1,k-1) + \\ &+ 2\alpha_1 r_2 J_3(k-1) + \alpha_2^2 J_1(k-h-1) + 2\alpha_1 r_2 J_3(k-h-1) + tr\tilde{Q} + r_2^2, \end{aligned} \tag{29}$$

где $r_2 = \|BK_3^* z\|$. Рекуррентное соотношение для $J_2(k)$ примет вид

$$\begin{aligned} J_2(k,k-h) \le{}& \alpha_2\alpha_1 J_1(k-h-1) + \alpha_1^2 J_2(k-1,k-h-1) + \alpha_1\alpha_2 J_2(k-1,k-2h-1) + \alpha_2^2 J_2(k-h-1,k-2h-1) + \\ &+ \alpha_1 r_2 J_3(k-1) + r_2^{\mathrm{T}}\alpha_1 J_3(k-h-1) + r_2\alpha_2 J_3(k-h-1) + r_2^{\mathrm{T}}\alpha_2 J_3(k-2h-1) + tr\tilde{Q}_1 + r_2^2, \end{aligned} \tag{30}$$

где $\tilde{Q}_1 = K_2^{*\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} B K_1^{*\mathrm{T}} V$. Рекуррентное соотношение для $J_3(k)$

$$J_3(k) \le \alpha_1 J_3(k-1) + \alpha_2 J_3(k-h-1) + r_2 . \tag{31}$$

Полагая $k = 1, 2, \ldots k$ и строя последовательно неравенства для $J_3(1)$, $J_3(2), \ldots J_3(k)$, получим

$$J_3(k) \le \alpha_1^k J_3(0) + \sum_{j=1}^{k} \alpha_1^{k-j} \alpha_2 J_3(j-h-1) + \frac{\alpha_1^{2k} - 1}{\alpha_1^2 - 1} r_2 , \tag{32}$$

$$\begin{gathered} J_2(k, k-h) \le \alpha_1^{2k} J_2(0, -h) + \alpha_2 \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_1^{2k-2j-1} J_2(j, j-2h) + \\ + r_2 \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_1^{2k-2j-1} \alpha_2 J_3(j) + \alpha_2 \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_1^{2k-2j-1} J_1(j-h) + \\ + \alpha_2^2 \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_1^{2k-2(j+1)} J_2(j-h, j-2h) + \alpha_2 r_2 \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_1^{2k-2(j+1)} J_3(j-h) + \\ + \alpha_2 r_2^T \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_1^{2k-2(j+1)} \alpha_2 J_3(j-2h) + r_2^T \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_1^{2k-2j-1} J_3(j-h) + \frac{\alpha_1^{2k} - 1}{\alpha_1^2 - 1} r_2^2 + \frac{\alpha_1^{2k} - 1}{\alpha_1^2 - 1} tr\tilde{Q}_1 ; \end{gathered} \tag{33}$$

$$\begin{gathered} J_1(k) \le \alpha_1^{2k} J_1(0) + \alpha_2 \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_1^{2k-2j-1} J_2(j, j-h) + \alpha_2 \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_1^{2k-2j-1} J_2(j-h, j) + \\ + 2r_2 \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_1^{2k-2j-1} J_3(j) + \alpha_2^2 \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_1^{2k-2(j+1)} J_1(-h) + 2r_2 \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_1^{2k-2(j+1)} J_3(j-h) + \frac{\alpha_1^{2k} - 1}{\alpha_1^2 - 1} r_2^2 + \frac{\alpha_1^{2k} - 1}{\alpha_1^2 - 1} tr\tilde{Q} . \end{gathered} \tag{34}$$

Оценку критерия (26) построим, учитывая неравенства (32)–(34). Тогда при $k \to \infty$ из (28) получим

$$\begin{gathered} J \le \alpha_1^2 [\frac{1}{1-\alpha_1^2} r_2^2 - \frac{1}{1-\alpha_1^2} tr\tilde{Q}] + \alpha_2^2 [\frac{1}{1-\alpha_1^2} r_2^2 + \frac{1}{1-\alpha_1^2} tr\tilde{Q}] + \\ + 2\alpha_1 \alpha_2 [\frac{1}{1-\alpha_1^2} r_2^2 + \frac{1}{1-\alpha_1^2} tr\tilde{Q}_1] + 4 \frac{\alpha_2 r_2^2}{1-\alpha_1^2} + r_1^2 + tr\tilde{Q}. \end{gathered} \tag{35}$$

Что и требовалось доказать.

4. Результаты моделирования

Моделирование выполнено для объекта (1), канала измерений (2), локального критерия (3) и отслеживаемого вектора (4), в которых матрицы и векторы имели следующие значения:

$$A = \begin{pmatrix} 0,05 & 1 \\ -0,025 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,03 & 0 \end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix} 0,02 & 0 \\ 0 & 0,02 \end{pmatrix},$$

$$C = 1, D = 0{,}2, \ S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \ H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, F = 1, V = 0{,}16, z = 10.$$

В результате получены графики (пунктирная линия обозначает отслеживаемый сигнал), которые демонстрируют, что при заданных параметрах переменная $x_1(k)$ сходится к желаемому поведению z (рис. 1).

Рис. 1. Реализации $x_1(k)$, $x_1^*(k)$ и управления

На рис. 2 и 3 приведены результаты моделирования для отслеживания переменного сигнала $z(k)$.

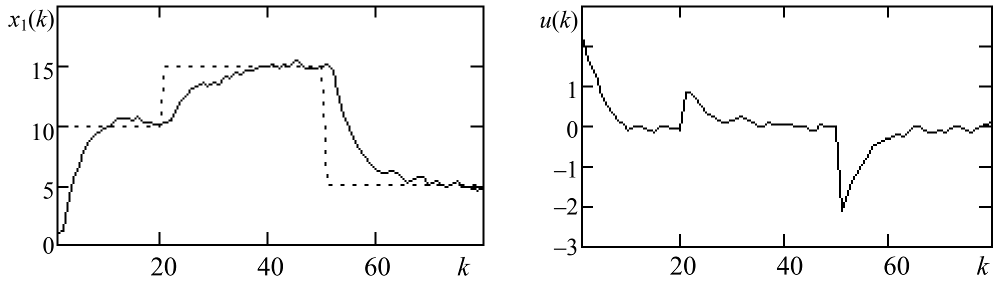

Рис. 2. Реализации $x_1(k)$, $x_1^*(k)$ и управления при кусочно-постоянном отслеживаемом векторе

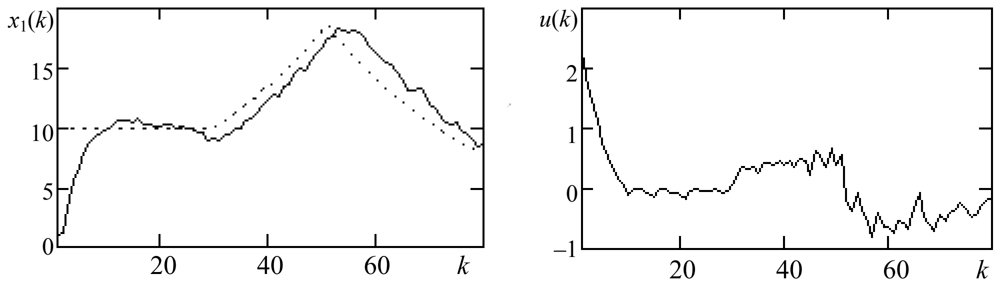

Рис. 3. Реализации $x_1(k)$, $x_1^*(k)$ и управлений при возрастающем и убывающем отслеживаемом векторе

Заключение

Решена задача управления выходом для дискретного объекта с запаздыванием по состоянию на основе синтеза локально-оптимальной следящей системы управления линейным динамическим объектом при косвенных измерениях. Показано, что при практически естественных ограничениях на класс динамических систем метод локально-оптимального слежения при косвенных измерениях с ошибками обеспечивает асимптотическое слежение с точностью, определяемой интенсивностью аддитивных возмущений и ошибок в канале измерений, динамическими характеристиками замкнутой системы, значениями параметров объекта и коэффициентов передачи следящей системы управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дегтярев Г.Л., Ризаев И.С.* Синтез локально-оптимальных алгоритмов управления летательными аппаратами. М. : Машиностроение, 1991. 304 с.
2. *Домбровский В.В., Ляшенко Е.А.* Линейно-квадратичное управление дискретными системами со случайными параметрами и мультипликативными шумами с применением к оптимизации инвестиционного портфеля // Автоматика и телемеханика. 2003. № 10. С. 50–65.
3. *Перепелкин Е.А.* Прогнозирующее управление экономической системой производства, хранения и поставок товара потребителям // Экономика и математические методы. 2004. Т. 40, № 1. С. 125–128.
4. *Conte P., Pennesi P.* Inventory control by model predictive control methods // Proc. 16th IFAC World Congress. Prague. 2005. P. 1–6.
5. *Смагин В.И., Смагин С.В.* Управление запасами по двум критериям с учетом ограничений // Вестник Томского государственного университета. 2006. № 290. С. 244–246.
6. *Смагин В.И., Смагин С.В.* Адаптивное управление запасами с учетом ограничений и транспортных запаздываний // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2008. № 3(4). С. 19–26.
7. *Киселева М.Ю., Смагин В.И.* Управление производством, хранением и поставками товаров на основе прогнозирующей модели выхода системы // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. № 2(7). С. 24–31.
8. *Киселева М.Ю., Смагин В.И.* Управление с прогнозирующей моделью с учетом запаздывания по управлению // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2(11). С. 5–12.

9. *Приступа М.Ю., Смагин В.И.* Прогнозирующее управление дискретными системами с неизвестным входом и его применение к задаче управления экономическим объектом // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 1(18). С. 5–15.
10. *Мухина О.О., Смагин В.И.* Локально-оптимальное управление запасами с учетом запаздываний в поставках и транспортных ограничений // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 2(19). С. 42–50.
11. *Домбровский В.В., Объедко Т.Ю.* Управление с прогнозированием гибридными системами с марковскими скачками при ограничениях // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 3(20). С. 5–12.
12. *Dai L., Xia Y., Fu M., Mahmoud M.* Discrete-Time Model Predictive Control. Advances in Discrete Time Systems. Publisher: InTech, 2012. Ch. 4. P. 77–116.
13. *Приступа М.Ю., Смагин В.И.* Прогнозирующее управление выходом нестационарной дискретной системы при ограничениях на управление // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 3(24). С. 14–23.
14. *Смагин В.И.* Локально-оптимальные следящие системы управления при косвенных измерениях с ошибками // Известия вузов. Авиационная техника. 1995. № 1. С. 26–30.
15. *Tang G., Sun H., Liu Y.* Optimal tracking control for discrete time-delay systems with persistent disturbances // Asian Journal of Control. 2006. V. 8, No. 8. P. 135–140.
16. *Амосов А.А., Колпаков В.В.* Скалярно-матричное дифференцирование и его приложения к конструктивным задачам теории связи // Проблемы передачи информации. 1972. № 1. С. 3–15.
17. *Уонэм М.* Линейные многомерные системы управления. М. : Наука, 1980. 376 с.
18. *Stojanovic S., Debeljkovic D.* On the asymptotic stability of linear discrete time delay systems. Mechanical Engineering, V. 2, No. 1. 2004. P. 35–48.

Мухина Оксана Олеговна. E-mail: oksm7@sibmail.com
Смагин Валерий Иванович. E-mail: vsm@mail.tsu.ru
Томский государственный университет Поступила в редакцию 3 сентября 2013 г.

Mukhina Oksana O., Smagin Valery I. (Tomsk State University, Russian Federation).
Local-optimal output control for discrete systems with state delays.
Keywords: output control; local-optimal control; state delays.

Consider the problem of locally-optimal control based on the observed output for discrete objects with delay in the state described by the following difference equation:

$$x(k+1) = Ax(k) + A_1x(k-h) + Bu(k) + q(k)\ ,$$
$$x(\tau) = \varphi(\tau),\ \tau = -h,\ 1-h,\ 2-h,\ldots,0;\ k = 0,1,2,\ldots\ ,$$

where $x(k)\in R^n$ is a state vector, $h>0$ is a positive integer time delay, $u(k)\in R^m$ is a control input, A, A_1, B are the constant matrices of appropriate dimensions, $q(k)$ is the Gaussian random sequence of input disturbances.

The measurement channel is represented by equation

$$y(k) = Sx(k) + v(k)\ ,$$

where *S* is the matrix of the measurement channel, *v*(*k*) is the Gaussian random sequence of measurement errors. To solve the problem, we propose an algorithm, which is based on the optimization of the following local criteria:

$$I(k) = \mathrm{M}\{(w(k+1) - z(k))^{\mathrm{T}} C(w(k+1) - z(k)) + u^{\mathrm{T}}(k)Du(k)\},$$

where $w(k) = Hx(k)$ is the controlled output of the system, $C = C^T \geq 0$, and $D = D^T \geq 0$ are weighting matrices, $z(k) \in R^n$ is the tracking vector described by equation

$$z(k+1) = Fz(k) + q_z(k)\ ,$$

where $q_z(k)$ is the Gaussian random sequence; *F* is a matrix.

The control law of object is determined by the function of the measured variables with the time memory and tracked signal:

$$u(k) = K_1(k)y(k) + K_2(k)y(k-h) + K_3(k)z(k)\ .$$

The formulas for calculating the optimal transfer coefficients $K_1^*(k), K_2^*(k), K_3^*(k)$ are given.

In this paper, the proposed algorithms synthesis of output control does not use the extension method of state space. The asymptotic properties of the closed-loop system are investigated. The estimators are obtained by the square criterion

$$J = \lim_{k\to\infty} \mathrm{M}\{\|x(k) - z\|^2\}\ ,$$

which defines the asymptotic tracking accuracy.

It is shown that the estimator has the following form:

$$J \leq \alpha_1^2[\frac{1}{1-\alpha_1^2}r_2^2 - \frac{1}{1-\alpha_1^2}tr\tilde{Q}] + \alpha_2^2[\frac{1}{1-\alpha_1^2}r_2^2 + \frac{1}{1-\alpha_1^2}tr\tilde{Q}] +$$
$$+ 2\alpha_1\alpha_2[\frac{1}{1-\alpha_1^2}r_2^2 + \frac{1}{1-\alpha_1^2}tr\tilde{Q}_1] + 4\frac{\alpha_2 r_2^2}{1-\alpha_1^2} + r_1^2 + tr\tilde{Q}\ ,$$

where $r_1 = \left\| \tilde{B}z \right\|$, $r_2 = \left\| BK_3^* z \right\|$, $\tilde{B}(k) = BK_3^*(k) - E$, $\left\| \overline{A} \right\|_s = \alpha_1$, $\left\| \overline{A_1} \right\|_s = \alpha_2$, $\tilde{A}(i) = A + BK_1^*(i)S$, $\tilde{A}_1(i) = A_1 + BK_2^*(i)S$, $\tilde{Q}(k) = Q(k) + BK_1^*(k)V(k)K_1^{*\mathrm{T}}(k)B^{\mathrm{T}} + BK_2^*(k)V(k-h)K_2^{*\mathrm{T}}(k)B^{\mathrm{T}}$, $\tilde{Q}_1 = K_2^{*\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}BK_1^{*\mathrm{T}}V$.

The simulation results on the proposed methods are given.

REFERENCES

1. Degtyarev G.L., Rizaev I.S. Sintez lokal'no-optimal'nykh algoritmov upravleniya letatel'nymi apparatami. M. : Mashinostroenie, 1991. 304 p. [Degtyarev G.L., Rizaev I.S. Synthesis of locally optimal algorithms for flight vehicle control. Moscow: Mashinostroenie, (1991).]
2. Dombrovskiy V.V., Lyashenko E.A. Lineyno-kvadratichnoe upravlenie diskretnymi sistemami so sluchaynymi parametrami i mul'tiplikativnymi shumami s primeneniem k optimizatsii investitsionnogo portfelya. *Avtomatika i telemekhanika.* 2003. No. 10. P. 50-65. [Dombrovskii V.V., Lyashenko E.A. Linear quadratic control of discrete systems with random parameters and multiplicative noises with application to investment portfolio optimization. *Automation and Remote Control.* V. 64. No. 10. P. 1558-1570. (2003).]
3. Perepelkin E.A. Prognoziruyushchee upravlenie ekonomicheskoy sistemoy proizvodstva, khraneniya i postavok tovara potrebitelyam. *Ekonomika i matematicheskie metody.* 2004. V. 40, no. 1. P. 125-128. [Perepjolkin E. Forecast-making control of an economic system of production, storage and deliveries of goods to consumers. *Economics and Mathematical Methods.* V. 40. No. 1. P. 125-128. (2004).]
4. Conte P., Pennesi P. Inventory control by model predictive control methods. *Proc. 16th IFAC World Congress.* Prague. 2005. P. 1-6. [Conte P., Pennesi P. Inventory control by model predictive control methods. *Proc. 16th IFAC World Congress.* Prague. P. 1-6. (2005).]
5. Smagin V.I., Smagin S.V. Upravlenie zapasami po dvum kriteriyam s uchetom ogranicheniy. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta.* 2006. No. 290. P. 244-246. [Smagin V.I., Smagin S.V. Inventory control on two criterions with restrictions. *Tomsk State University Journal.* No. 290. P. 244-246. (2006).]
6. Smagin V.I., Smagin S.V. Adaptivnoe upravlenie zapasami s uchetom ogranicheniy i transportnykh zapazdyvaniy. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika.* 2008. No. 3(4). P. 19-26. [Smagin V.I., Smagin S.V. Adaptive inventory control with restrictions and transport delays. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* No. 3(4). P. 19-26. (2008).]
7. Kiseleva M.Yu., Smagin V.I. Upravlenie proizvodstvom, khraneniem i postavkami tovarov na osnove prognoziruyushchey modeli vykhoda sistemy. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika.* 2009. No. 2(7). P. 24-31. [Kiseleva M.Yu., Smagin V.I. Control of goods production, storage and delivery based on prediction model systems output. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* No. 2(7). P. 24-31. (2009).]
8. Kiseleva M.Yu., Smagin V.I. Upravlenie s prognoziruyushchey model'yu s uchetom zapazdyvaniya po upravleniyu. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika.* 2010. No. 2(11). P. 5–12. [Kiseleva M.Yu., Smagin V.I. Model predictive control with time-delay in control input. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. No. 2(11). P. 5-12. (2010).]
9. Pristupa M.Yu., Smagin V.I. Prognoziruyushchee upravlenie diskretnymi sistemami s neizvestnym vkhodom i ego primenenie k zadache upravleniya ekonomicheskim ob"ektom. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika.* 2012. No. 1(18). P. 5-15. [Pristupa M.Yu., Smagin V.I. Model Predictive Control discrete systems with unknown input and its application to control problem of economic object. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. No. 1(18). P. 5-15. (2012).]
10. Mukhina O.O., Smagin V.I. Lokal'no-optimal'noe upravlenie zapasami s uchetom zapazdyvaniy v postavkakh i transportnykh ogranicheniy. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika.* 2012. No. 2(19). P. 42-50. [Mukhina O.O., Smagin V.I. Locally optimal inventory control with time delays in deliveries and transport restrictions. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* No. 2(19). P. 42-50. (2012).]
11. Dombrovskiy V.V., Ob"edko T.Yu. Upravlenie s prognozirovaniem gibridnymi sistemami s markovskimi skachkami pri ogranicheniyakh. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika.* 2012. No. 3(20). P. 5–12. [Dombrovskii V.V., Obyedko T.Y. Model predictive control of interconnected hybrid systems with Markov jumps under constraints. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* No. 3(20). P. 5-12. (2012).]
12. Dai L., Xia Y., Fu M., Mahmoud M. Discrete-Time Model Predictive Control. *Advances in Discrete Time Systems.* Publisher: InTech. Chapter 4. P. 77-116. (2012).
13. Pristupa M.Yu., Smagin V.I. Prognoziruyushchee upravlenie vykhodom nestatsionarnoy diskretnoy sistemy pri ogranicheniyakh na upravlenie. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika.* 2013. No. 3(24). P. 14-23. [Pristupa M.Yu., Smagin V.I. Model predictive control of the output time-varying discrete systems with constraints on the control. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* No. 3(24). P. 14-23. (2013).]
14. Smagin V.I. Lokal'no-optimal'nye sledyashchie sistemy upravleniya pri kosvennykh izmereniyakh s oshibkami. *Izvestiya vuzov. Aviatsionnaya tekhnika.* 1995. No. 1. P. 26-30. [Smagin V.I. Locally optimal control servosystems in indirect measurements with errors. *Izvestia Vuzov Aviatsionnaya Tekhnika.* No. 1. P. 26-30. (1995).]
15. Tang G., Sun H., Liu Y. Optimal tracking control for discrete time-delay systems with persistent disturbances. *Asian Journal of Control.* V. 8. No. 8. P. 135-140. (2006).
16. Amosov A.A., Kolpakov V.V. Skalyarno-matrichnoe differentsirovanie i ego prilozheniya k konstruktivnym zadacham teorii svyazi. *Problemy peredachi informatsii.* 1972. No. 1. P. 3-15. [Amosov A. A., Kolpakov V.V. Scalar-matrix differentiation and its applications to constructive problems of Communication Theory. *Problems of Information Transmission.* No. 1. P. 3-15. (1972).]
17. Uonem M. Lineynye mnogomernye sistemy upravleniya. M. : Nauka, 1980. 376 p. [Wonham W.M. Linear Multivariable Control. New York, Springer, (1979).]
18. Stojanovic S., Debeljkovic D. On the asymptotic stability of linear discrete time delay systems. *Mechanical Engineering.* V. 2. No. 1. P. 35-48. (2004).