

## ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.21

**М.А. Бахолдина, А.М. Горцев**

### ОПТИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА СОСТОЯНИЙ МОДУЛИРОВАННОГО ОБОБЩЕННОГО ПОЛУСИНХРОННОГО ПОТОКА СОБЫТИЙ ПРИ НЕПРОДЛЕВАЮЩЕМСЯ МЕРТВОМ ВРЕМЕНИ

Решается задача оптимальной оценки состояний модулированного обобщенного полусинхронного потока событий, являющегося одной из математических моделей информационных потоков заявок, функционирующих в цифровых сетях интегрального обслуживания. Функционирование потока рассматривается в условиях непродлевающегося мертвого времени. Находится явный вид апостериорных вероятностей состояний потока. Решение о состоянии потока выносится по критерию максимума апостериорной вероятности. Приводятся численные результаты, полученные с использованием расчетных формул и имитационного моделирования.

**Ключевые слова:** модулированный обобщенный полусинхронный поток событий; состояние потока; апостериорная вероятность состояния; оценка состояния; мертвое время; критерий максимума апостериорной вероятности; MAP (Markovian Arrival Process)-поток событий.

Настоящая статья является продолжением работ [1–5].

В последнее время в связи с бурным развитием компьютерной техники и информационных технологий появилась важная сфера приложений теории массового обслуживания – проектирование и создание информационно-вычислительных сетей, телекоммуникационных сетей и т.п., объединенных термином «цифровые сети интегрального обслуживания» (ЦСИО) [6].

Математические методы теории массового обслуживания обеспечивают возможность решения многочисленных задач расчета характеристик качества функционирования различных компонент ЦСИО, включая оценку вероятностно-временных характеристик узлов коммутации и маршрутизации; анализ буферной памяти узлов и методов локального и глобального управления потоками и т.д.

Стоит отметить, что условия функционирования реальных объектов и систем таковы, что если в отношении параметров обслуживаемых устройств можно сказать, что они известны и с течением времени не меняются, то в отношении интенсивностей входящих потоков этого сказать во многих случаях нельзя. Более того, интенсивности входящих потоков обычно меняются со временем, часто эти изменения носят случайный характер, что приводит к рассмотрению математических моделей дважды стохастических потоков событий.

По-видимому, статья [7] является одной из первых работ в этом направлении, где дважды стохастический поток определяется как поток, интенсивность которого есть непрерывный случайный процесс.

С другой стороны, функционирование систем массового обслуживания зависит от параметров и состояний входящих потоков.

В подобных ситуациях наиболее рациональным является применение адаптивных систем массового обслуживания, которые в процессе функционирования оценивают неизвестные параметры либо состояния входящих потоков и изменяют дисциплину обслуживания в соответствии с полученными оценками [8].

Дважды стохастические потоки событий можно разделить на два класса: к первому классу относятся потоки, интенсивность которых есть непрерывный случайный процесс; ко второму классу отно-

сятся потоки, интенсивность которых есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний. Потоки второго класса впервые и независимо введены в работах [9–11]. В [9, 10] введенные потоки названы МС (Markov chain)-потоками; в [11] – MVP (Markov Versatile Processes)-потоками. С начала 1990-х гг. отечественные и зарубежные авторы называют в своих работах введенные потоки событий либо дважды стохастическими потоками, либо МАР-потоками, либо МС-потоками [12–18].

В свою очередь, в зависимости от того, каким образом происходит переход из состояния в состояние, МС-потоки событий можно разделить на три типа: 1) синхронные потоки [19, 20]; 2) асинхронные потоки [21, 22]; 3) полусинхронные потоки [23]. Здесь указаны ссылки на статьи, в которых авторы впервые рассматривали МС-потоки событий в соответствии с приведенной классификацией. Наиболее полно литература по изучаемым типам МС-потоков событий приведена в [24].

Подчеркнем, что синхронные, асинхронные и полусинхронные потоки возможно представить в виде моделей МАР-потоков событий первого либо второго порядков [25]. В [25] показывается, что синхронный МС-поток является частным случаем МАР-потока первого порядка, асинхронный и полусинхронный МС-потоки являются частными случаями МАР-потока второго порядка. Как было отмечено выше, в реальных ситуациях интенсивность входящего потока событий изменяется со временем случайным образом, поэтому при реализации адаптивного управления системой массового обслуживания возникают, в частности, следующие задачи: 1) оценка состояний потока по наблюдениям за моментами наступления событий [26]; 2) оценка параметров потока по наблюдениям за моментами наступления событий [27].

Отдельно стоит отметить, что в большинстве случаев рассматриваются математические модели потоков событий, когда события потока доступны наблюдению. Однако на практике любое регистрирующее устройство затрачивает на измерение и регистрацию события некоторое конечное время, в течение которого оно не способно правильно обработать следующее событие, т.е. событие, поступившее на обслуживающий прибор, порождает период так называемого мертвого времени [28], в течение которого другие наступившие события потока недоступны наблюдению (теряются). Можно считать, что этот период продолжается некоторое фиксированное время (непродлеваемое мертвое время). В частности, подобные ситуации встречаются в компьютерных сетях, например при использовании протокола случайного множественного доступа с обнаружением конфликта (протокол CSMA/CD). В момент регистрации (обнаружения) конфликта на входе некоторого узла сети по сети рассылается сигнал «заглушки» («пробки»); в течение времени рассылки сигнала «заглушки» заявки, поступившие в данный узел сети, получают отказ в обслуживании и направляются в источник повторных вызовов. Здесь время, в течение которого узел сети закрыт для обслуживания заявок, поступающих в него после обнаружения конфликта, можно трактовать как мертвое время прибора, регистрирующего конфликт в узле сети.

В работах [1–5] введен в рассмотрение модулированный обобщенный полусинхронный поток событий, являющийся обобщением полусинхронного потока и обобщенного полусинхронного потока и относящийся к классу МАР-потоков второго порядка. Полусинхронный и обобщенный полусинхронный потоки событий систематически исследовались в работах [23, 24, 29]. В настоящей статье решается задача об оптимальной оценке состояний модулированного обобщенного полусинхронного потока событий, функционирующего в условиях мертвого времени. Предлагается алгоритм оптимальной оценки состояний, когда решение о состоянии потока выносится по критерию максимума апостериорной вероятности, представляющей наиболее полную характеристику состояния потока, которую можно получить, располагая только выборкой наблюдений. Сам критерий минимизирует полную вероятность ошибки вынесения решения [30].

## 1. Постановка задачи

Рассматривается модулированный обобщенный полусинхронный поток событий (далее поток), интенсивность которого есть кусочно-постоянный стационарный случайный процесс  $\lambda(t)$  с двумя

состояниями  $\lambda_1, \lambda_2$  ( $\lambda_1 > \lambda_2$ ). Длительность пребывания процесса  $\lambda(t)$  (потока) в первом состоянии распределена по экспоненциальному закону с параметром  $\beta$ , во втором – с параметром  $\alpha$ . Если процесс  $\lambda(t)$  в момент времени  $t$  находится в первом (втором) состоянии, то на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$ , где  $\Delta t$  (здесь и далее) – достаточно малая величина, с вероятностью  $\beta\Delta t + o(\Delta t)$  (с вероятностью  $\alpha\Delta t + o(\Delta t)$ ) пребывание процесса  $\lambda(t)$  в первом (втором) состоянии закончится и процесс  $\lambda(t)$  с вероятностью единица перейдет из первого (второго) состояния во второе (первое). В течение временного интервала случайной длительности, когда  $\lambda(t) = \lambda_i$ , имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ . Кроме того, переход из первого состояния процесса  $\lambda(t)$  во второе возможен в момент наступления события пуассоновского потока интенсивности  $\lambda_1$ ; переход осуществляется с вероятностью  $p$  ( $0 < p \leq 1$ ); с вероятностью  $1 - p$  процесс  $\lambda(t)$  остается в первом состоянии (т.е. сначала наступает событие потока, затем происходит либо не происходит переход процесса  $\lambda(t)$  из первого состояния во второе). Переход из второго состояния процесса  $\lambda(t)$  в первое в момент наступления события пуассоновского потока интенсивности  $\lambda_2$  невозможен. В момент окончания второго состояния процесса  $\lambda(t)$  при его переходе с вероятностью единица из второго состояния в первое инициируется с вероятностью  $\delta$  ( $0 \leq \delta \leq 1$ ) дополнительное событие в первом состоянии (т.е. сначала осуществляется переход, а затем инициируется либо не инициируется дополнительное событие). В сделанных предположениях  $\lambda(t)$  – марковский процесс. Блочная матрица инфинитезимальных коэффициентов примет вид

$$D = \left\| \begin{array}{cc|cc} -(\lambda_1 + \beta) & \beta & (1-p)\lambda_1 & p\lambda_1 \\ (1-\delta)\alpha & -(\lambda_2 + \alpha) & \delta\alpha & \lambda_2 \end{array} \right\| = \|D_0 | D_1\|. \quad (1)$$

В (1) элементами матрицы  $D_1$  являются интенсивности переходов процесса  $\lambda(t)$  из состояния в состояние с наступлением события. Недиagonальные элементы матрицы  $D_0$  – интенсивности переходов из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы  $D_0$  – интенсивности выхода процесса  $\lambda(t)$  из своих состояний, взятые с противоположным знаком. Отметим, что если  $\beta = 0$ , то имеет место обобщенный полусинхронный поток событий [24].

Подчеркнем, что если процесс  $\lambda(t)$  находится в первом состоянии, то принимается первичность наступления события пуассоновского потока интенсивности  $\lambda_1$ , затем переход из состояния в состояние; если же процесс  $\lambda(t)$  находится во втором состоянии, то принимается первичность перехода из второго состояния в первое, затем наступает либо не наступает дополнительное событие в первом состоянии. Данное обстоятельство при получении аналитических результатов является несущественным, так как наступление события и переход процесса  $\lambda(t)$  из состояния в состояние происходят мгновенно. При получении же численных результатов путем имитационного моделирования необходима определенность, что первично наступление события, затем смена состояния либо наоборот.

После каждого зарегистрированного в момент времени  $t_k$  события наступает период мертвого времени фиксированной длительности  $T$ , в течение которого другие события потока недоступны наблюдению. По окончании периода мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени длительности  $T$  и т.д. (непродлевающееся мертвое время). Вариант возникающей ситуации приведен на рис. 1, где  $\lambda_1, \lambda_2$  – состояния процесса  $\lambda(t)$ ; дополнительные события, которые могут наступать в первом состоянии при переходе процесса  $\lambda(t)$  из второго состояния в первое, обозначены буквами  $\delta$ ; периоды мертвого времени длительности  $T$  помечены штриховкой; ненаблюдаемые события отображены черными кружками, наблюдаемые  $t_1, t_2, \dots$  – белыми.

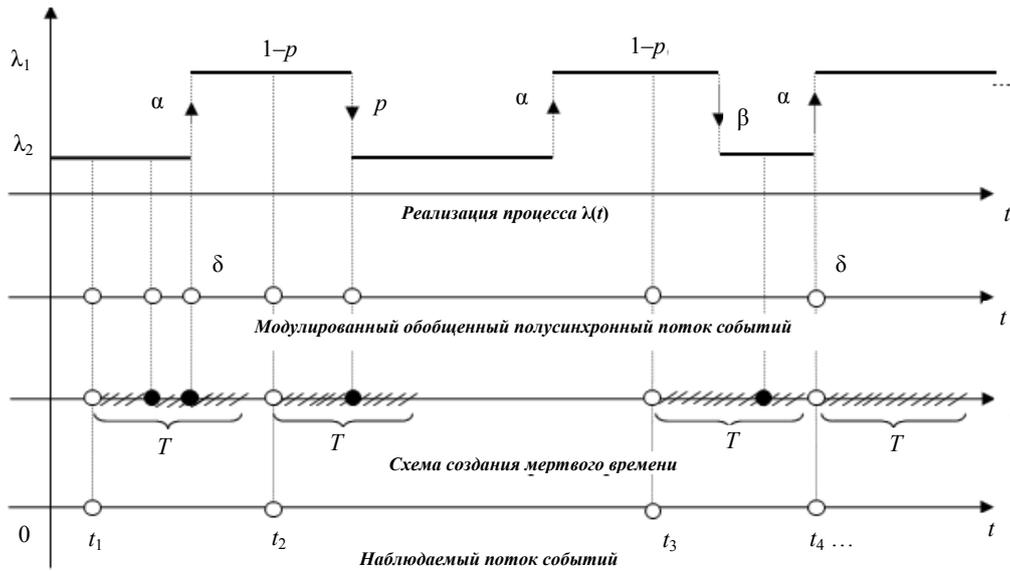


Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий

Так как процесс  $\lambda(t)$  и типы событий (события пуассоновских потоков с интенсивностями  $\lambda_1$  либо  $\lambda_2$  и дополнительные события) являются принципиально ненаблюдаемыми, а наблюдаемыми являются только временные моменты наступления событий наблюдаемого потока  $t_1, t_2, \dots$ , то необходимо по этим наблюдениям оценить состояние процесса  $\lambda(t)$  (потока) в момент окончания наблюдений. Рассматривается стационарный режим функционирования потока событий, поэтому переходными процессами на интервале наблюдения  $(t_0, t)$ , где  $t_0$  – начало наблюдений,  $t$  – окончание наблюдений (момент вынесения решения), пренебрегаем. Тогда без потери общности можно положить  $t_0 = 0$ . Для вынесения решения о состоянии процесса  $\lambda(t)$  в момент времени  $t$  необходимо определить апостериорные вероятности  $w(\lambda_i | t) = w(\lambda_i | t_1, \dots, t_m, t)$ ,  $i = 1, 2$ , того, что в момент времени  $t$  значение процесса  $\lambda(t) = \lambda_i$  ( $m$  – количество наблюдаемых событий за время  $t$ ), при этом  $w(\lambda_1 | t) + w(\lambda_2 | t) = 1$ . Решение о состоянии процесса  $\lambda(t)$  выносится путем сравнения апостериорных вероятностей: если  $w(\lambda_j | t) \geq w(\lambda_i | t)$ ,  $i, j = 1, 2$ ,  $i \neq j$ , то оценка состояния процесса есть  $\hat{\lambda}(t) = \lambda_j$ .

## 2. Алгоритм оптимальной оценки состояний модулированного обобщенного полусинхронного потока событий в условиях непродлевающегося мертвого времени

Момент вынесения решения будет принадлежать интервалу  $(t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , между соседними событиями наблюдаемого потока. Для начального интервала  $(t_0, t_1)$  момент  $t$  будет лежать между началом наблюдения  $t_0$  и первым наблюдаемым событием потока. Рассмотрим интервал  $(t_k, t_{k+1})$ , значение длительности которого есть  $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Так как наблюдаемое в момент времени  $t_k$  событие порождает период мертвого времени длительности  $T$ , то величину  $\tau_k$  можно записать в виде  $\tau_k = T + \eta_k$ , где  $\eta_k$  – значение длительности интервала между моментом окончания периода мертвого времени  $t_k + T$  и моментом  $t_{k+1}$ , т.е. интервал  $(t_k, t_{k+1})$  разбивается на два смежных: полуинтервал мертвого времени  $(t_k, t_k + T]$  и  $(t_k + T, t_{k+1})$ . При этом условия вычисления апостериорной вероятности  $w(\lambda_i | t)$  на полуинтервале  $(t_k, t_k + T]$  и интервале  $(t_k + T, t_{k+1})$  принципиально разные. Кроме того, для нахождения вероятности  $w(\lambda_i | t)$  необходимо точно знать значение  $T$  либо предва-

рительно осуществить оценку величины мертвого времени. В противном случае отсутствие такой информации делает попытку строгого нахождения вероятности  $w(\lambda_1 | t)$  невозможной. Здесь предполагается, что значение  $T$  известно точно.

В статье [4] сформулирован алгоритм расчета апостериорной вероятности  $w(\lambda_1 | t)$  для случая отсутствия мертвого времени ( $T = 0$ ). При этом поведение апостериорной вероятности  $w(\lambda_1 | t)$  на временном полуинтервале  $[t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , между соседними событиями модулированного обобщенного полусинхронного потока определяется формулой

$$w(\lambda_1 | t) = \frac{w_1 [w_2 - w(\lambda_1 | t_k + 0)] - w_2 [w_1 - w(\lambda_1 | t_k + 0)] e^{-b(t-t_k)}}{w_2 - w(\lambda_1 | t_k + 0) - [w_1 - w(\lambda_1 | t_k + 0)] e^{-b(t-t_k)}}, \quad (2)$$

$$w_1 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha + \beta - 2\alpha\delta - b}{2(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta)}, \quad w_2 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha + \beta - 2\alpha\delta + b}{2(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta)}, \quad b = \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta(1 - \delta)},$$

где  $t_k \leq t < t_{k+1}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ;  $w(\lambda_1 | t_0 + 0)$ ,  $w(\lambda_1 | t_k + 0)$  определены ниже.

Апостериорная вероятность  $w(\lambda_1 | t)$  в момент наступления события потока  $t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , претерпевает разрыв первого рода, поэтому в момент времени  $t_k$  имеет место формула пересчета

$$w(\lambda_1 | t_k + 0) = \frac{\alpha\delta + [\lambda_1(1 - p) - \alpha\delta] w(\lambda_1 | t_k - 0)}{\lambda_2 + \alpha\delta + (\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) w(\lambda_1 | t_k - 0)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

В свою очередь,  $w(\lambda_1 | t_k + 0)$  зависит от значения  $w(\lambda_1 | t_k - 0)$  – значения вероятности  $w(\lambda_1 | t)$  в момент времени  $t_k$ , когда  $w(\lambda_1 | t)$ , определяемая в (2), изменяется на полуинтервале  $[t_{k-1}, t_k)$ , соседнем с полуинтервалом  $[t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Таким образом, в значении  $w(\lambda_1 | t_k + 0)$  «сосредоточена» вся предыстория наблюдений за потоком, начиная от момента времени  $t_0 = 0$  до момента  $t_k$ . В качестве начального условия  $w(\lambda_1 | t_0 + 0) = w(\lambda_1 | t_0 = 0)$  на полуинтервале  $[t_0, t_1)$  в (2) выбирается априорная финальная вероятность первого состояния процесса  $\lambda(t)$ :

$$\pi_1 = \alpha / (\alpha + \beta + p\lambda_1), \quad (4)$$

которая находится из уравнений  $\pi_1 + \pi_2 = 1$ ,  $\pi_1(\beta + p\lambda_1) = \pi_2\alpha$  [1].

Возвратимся к ситуации, когда длительность мертвого времени  $T \neq 0$  (рис. 1). Тогда вычисление апостериорной вероятности  $w(\lambda_1 | t)$  по формуле (2) справедливо на интервале  $(t_k + T, t_{k+1})$ . При этом начальное условие для  $w(\lambda_1 | t)$  привязывается к моменту времени  $t_k + T$ , т.е. в формуле (2) необходимо заменить  $w(\lambda_1 | t_k + 0)$  на  $w(\lambda_1 | t_k + T)$  и  $t_k + T \leq t < t_{k+1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Формула (3) остается без изменения, так как предназначена для вычисления  $w(\lambda_1 | t)$  в момент  $t_k$  наступления события, которое порождает период мертвого времени.

Рассмотрим полуинтервал  $(t_k, t_k + T]$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . На этом полуинтервале событие имеет место в граничной точке  $t_k$ , на самом полуинтервале события отсутствуют.

**Теорема.** Поведение апостериорной вероятности  $w(\lambda_1 | t)$  на временных полуинтервалах  $(t_k, t_k + T]$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , определяется явной формулой

$$w(\lambda_1 | t) = \pi_1 - [\pi_1 - w(\lambda_1 | t_k + 0)] e^{-(\alpha + p\lambda_1 + \beta)(t-t_k)}, \quad (5)$$

где  $t_k < t \leq t_k + T$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ;  $w(\lambda_1 | t_k + 0)$  определена формулой (3);  $\pi_1$  определена в (4).

**Доказательство.** Определим апостериорную вероятность  $w(\lambda_1 | t + \Delta t)$  того, что в момент времени  $t + \Delta t$  ( $t_k < t + \Delta t < t_k + T$ ), где  $\Delta t$  – достаточно малая величина, процесс  $\lambda(t)$  находится в первом состоянии. Пусть в момент времени  $t$  процесс  $\lambda(t)$  находится в первом состоянии и на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$  процесс  $\lambda(t)$  не перешел во второе состояние. Вероятность этого события есть  $w(\lambda_1 | t)(1 - \beta\Delta t - p\lambda_1\Delta t) + o(\Delta t)$ . Пусть в момент времени  $t$  процесс  $\lambda(t)$  находится во втором состоянии и на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$  процесс  $\lambda(t)$  перешел в первое состояние. Вероятность этого события есть  $w(\lambda_2 | t)\alpha\Delta t + o(\Delta t)$ . Другие возможные варианты имеют вероятность  $o(\Delta t)$ . Тогда  $w(\lambda_1 | t + \Delta t) = w(\lambda_1 | t)(1 - \beta\Delta t - p\lambda_1\Delta t) + w(\lambda_2 | t)\alpha\Delta t + o(\Delta t)$ . Аналогично находится вероятность  $w(\lambda_2 | t + \Delta t)$ :  $w(\lambda_2 | t + \Delta t) = w(\lambda_2 | t)(1 - \alpha\Delta t) + w(\lambda_1 | t)(\beta\Delta t + p\lambda_1\Delta t) + o(\Delta t)$ .

Производя здесь необходимые преобразования и перейдя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получаем систему дифференциальных уравнений для апостериорных вероятностей  $w(\lambda_1 | t)$  и  $w(\lambda_2 | t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{dw(\lambda_1 | t)}{dt} &= -(\lambda_1 p + \beta)w(\lambda_1 | t) + \alpha w(\lambda_2 | t), \\ \frac{dw(\lambda_2 | t)}{dt} &= (\lambda_1 p + \beta)w(\lambda_1 | t) - \alpha w(\lambda_2 | t) \end{aligned} \quad (6)$$

с начальными условиями  $w(\lambda_1 | t = t_k) = w(\lambda_1 | t_k + 0)$ ,  $w(\lambda_2 | t = t_k) = w(\lambda_2 | t_k + 0) = 1 - w(\lambda_1 | t_k + 0)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Последнее вытекает из того, что на интервале  $(t_{k-1} + T, t_k)$ , граничащем с полуинтервалом  $(t_k, t_k + T]$ ,  $k = 2, 3, \dots$ , вероятность  $w(\lambda_1 | t)$  рассчитывается по формуле (2), где вместо  $w(\lambda_1 | t_k + 0)$  стоит  $w(\lambda_1 | t_k + T)$ . При этом в точке  $t = t_k$  сначала вычисляется вероятность  $w(\lambda_1 | t_k - 0)$ , после чего происходит пересчет апостериорной вероятности в этой точке по формуле (3), так что значение  $w(\lambda_1 | t_k + 0)$  становится граничным условием в системе уравнений (6). Для начального полуинтервала  $[t_0, t_1)$  вероятность  $w(\lambda_1 | t)$  вычисляется по формуле (2) с последующим пересчетом по формуле (3) в точке  $t = t_1$ . Решая систему уравнений (6), находим (5). Отметим, что  $\lim w(\lambda_1 | t) \rightarrow \pi_1$  при  $t \rightarrow \infty$ . Теорема доказана.

Из (5) следует, что вероятность в точке  $t_k + T$  рассчитывается по формуле

$$w(\lambda_1 | t_k + T) = \pi_1 - [\pi_1 - w(\lambda_1 | t_k + 0)]e^{-(\alpha + p\lambda_1 + \beta)T}. \quad (7)$$

Полученные формулы позволяют сформулировать алгоритм расчета апостериорной вероятности  $w(\lambda_1 | t)$  и алгоритм принятия решения о состоянии процесса  $\lambda(t)$  в любой момент времени  $t$  (алгоритм оптимальной оценки состояний потока):

- 1) в момент времени начала наблюдений за потоком  $t_0 = 0$  задается  $w(\lambda_1 | t_0 + 0) = w(\lambda_1 | t_0 = 0) = \pi_1$ ;
- 2) по формуле (2) для  $k = 0$  рассчитывается вероятность  $w(\lambda_1 | t)$  в любой момент времени  $t$  ( $0 < t < t_1$ ), где  $t_1$  – момент наступления первого события наблюдаемого потока;
- 3) по формуле (2) для  $k = 0$  вычисляется вероятность  $w(\lambda_1 | t_1) = w(\lambda_1 | t_1 - 0)$ ;
- 4)  $k$  увеличивается на единицу, и по формуле пересчета (3) для  $k = 1$  рассчитывается вероятность  $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ , являющаяся начальным значением для  $w(\lambda_1 | t)$  в формуле (5);
- 5) по формуле (5) для  $k = 1$  вычисляется  $w(\lambda_1 | t)$  в любой момент времени  $t$  ( $t_k < t < t_k + T$ );

6) по формуле (7) для  $k = 1$  рассчитывается  $w(\lambda_1 | t_k + T)$ , являющаяся начальным значением для  $w(\lambda_1 | t)$  на следующем шаге алгоритма;

7) для  $k = 1$  по формуле

$$w(\lambda_1 | t) = \frac{w_1 [w_2 - w(\lambda_1 | t_k + T)] - w_2 [w_1 - w(\lambda_1 | t_k + T)] e^{-b(t-t_k-T)}}{w_2 - w(\lambda_1 | t_k + T) - [w_1 - w(\lambda_1 | t_k + T)] e^{-b(t-t_k-T)}} \quad (8)$$

( $w_1$ ,  $w_2$  и  $b$  определены в (2)) вычисляется  $w(\lambda_1 | t)$  в любой момент времени  $t$  ( $t_k + T < t < t_{k+1}$ ), где  $t_{k+1}$  – момент наблюдения следующего события в наблюдаемом потоке;

8) по формуле (8) для  $k = 1$  рассчитывается вероятность  $w(\lambda_1 | t_{k+1}) = w(\lambda_1 | t_{k+1} - 0)$ ;

9) алгоритм переходит на шаг 4, после чего шаги 4–8 повторяются для  $k = 2$  и т.д.

По ходу вычисления  $w(\lambda_1 | t)$  в любой момент времени  $t$  выносятся решение о состоянии процесса  $\lambda(t)$  согласно критерию максимума апостериорной вероятности: если  $w(\lambda_1 | t) \geq w(\lambda_2 | t)$ , то оценка  $\hat{\lambda}(t) = \lambda_1$ , в противном случае  $\hat{\lambda}(t) = \lambda_2$ .

Для частных и особых случаев, приведенных в [4], алгоритм оптимальной оценки состояний идентичен предложенному выше алгоритму для общего случая.

### 3. Результаты численных расчетов

Приведенный выше алгоритм оптимальной оценки состояний потока был положен в основу работы программы для получения численных результатов. Программа расчета реализована на языке программирования C#, Microsoft Visual Studio 2013. Первый этап расчета предполагает имитационное моделирование потока в условиях непродлевающегося мертвого времени и как результат – получение истинной траектории интенсивности процесса  $\lambda(t)$  и временных моментов  $t_1, t_2, \dots$  наступления наблюдаемых событий потока. Описание алгоритма имитационного моделирования здесь не приводится, так как никаких принципиальных трудностей алгоритм не содержит. Второй этап расчета – непосредственное вычисление вероятностей  $w(\lambda_1 | t)$ ,  $t_0 \leq t < t_1$ ;  $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ;  $w(\lambda_1 | t)$ ,  $t_k \leq t < t_{k+1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , по формулам (2), (3), (5), (7), (8) и построение оценки  $\hat{\lambda}(t)$ . Расчеты произведены для следующих значений параметров:  $\lambda_1 = 5$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $p = 0,025$ ,  $\beta = 0,2$ ,  $\alpha = 0,2$ ,  $\delta = 0,2$ ,  $T = 0,5$  ед. времени, и времени моделирования  $T_m = 100$  ед. времени. В качестве иллюстрации на рис. 2 приведена траектория (верхняя часть рис. 2) процесса  $\lambda(t)$  (истинная траектория), полученная путем имитационного моделирования, и траектория (нижняя часть рис. 2) оценки  $\hat{\lambda}(t)$ .

Вынесение решения о состоянии процесса  $\lambda(t)$  производилось с шагом  $\Delta t = 0,001$ . На рис. 2 на оси времени жирными линиями обозначены промежутки, на которых оценка состояния не совпадает с истинным значением процесса  $\lambda(t)$  (область ошибочных решений). На рис. 3 приведена траектория поведения апостериорной вероятности  $w(\lambda_1 | t)$ , соответствующей полученной при имитационном моделировании последовательности наступления событий  $t_1, t_2, \dots$  наблюдаемого потока.

Для установления частоты ошибочных решений о состояниях процесса  $\lambda(t)$  по наблюдениям за потоком проведен статистический эксперимент, состоящий из следующих этапов: 1) для определенного набора параметров  $\lambda_1, \lambda_2, p, \beta, \alpha, \delta, T$  ед. времени осуществляется моделирование потока событий на отрезке времени моделирования  $[0, T_m]$  (отдельный  $j$ -й эксперимент); 2) рассчитывается вероятность  $w(\lambda_1 | t)$  на отрезке  $[0, T_m]$  по формулам (2), (3), (5), (7), (8); 3) оценивается траектория процесса  $\lambda(t)$  на отрезке  $[0, T_m]$ ; 4) осуществляется определение (для  $j$ -го эксперимента)  $d_j$  – суммарной

протяженности интервалов, на которых истинная траектория процесса  $\lambda(t)$  не совпадает с траекторией его оценки  $\hat{\lambda}(t)$ ; 5) вычисляется доля ошибочных решений  $\hat{p}_j = d_j / T_m$ ; 6) производится повторение  $N$  раз ( $j = \overline{1, N}$ ) шагов 1–5 для расчета оценки безусловной (полной) вероятности ошибки принятия решения о состояниях процесса  $\lambda(t)$ .

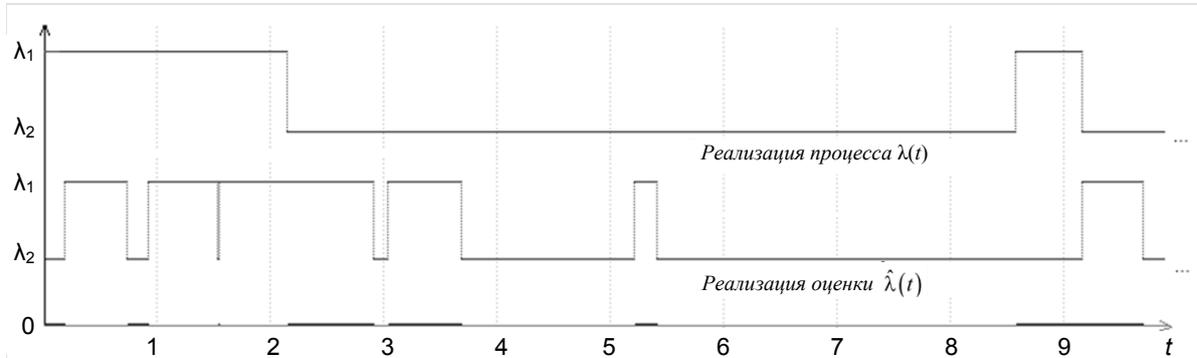


Рис. 2. Траектория процесса  $\lambda(t)$  и оценки  $\hat{\lambda}(t)$

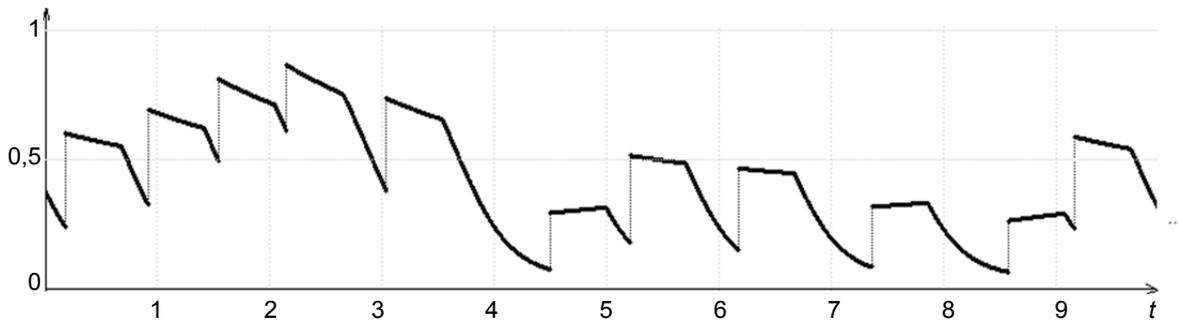


Рис. 3. Траектория апостериорной вероятности  $w(\lambda_1 | t)$

Результатом выполнения описанного алгоритма является выборка  $(\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_N)$  долей ошибочных решений в  $N$  экспериментах. По этому набору вычисляются выборочное среднее безусловной вероятности ошибочного решения  $\hat{P}_0 = (1/N) \sum_{j=1}^N \hat{p}_j$  и выборочная дисперсия  $\hat{D} = (1/(N-1)) \sum_{j=1}^N (\hat{p}_j - \hat{P}_0)^2$ .

Результаты статистического эксперимента приведены в табл. 1–5. В первой строке таблиц указана длительность мертвого времени  $T$  ( $T = 0, 1, \dots, 7$ ) ед. времени. Во второй и третьей строках для каждого опыта приведены численные значения  $\hat{P}_0$  и  $\hat{D}$ .

Результаты получены при следующих значениях параметров, общих для всех таблиц:  $\lambda_2 = 1$ ,  $p = 0,025$ ,  $\beta = 0,2$ ,  $\alpha = 0,2$ ,  $\delta = 0,2$ ,  $T_m = 100$  ед. времени,  $N = 100$ . При этом результаты в табл. 1 получены для  $\lambda_1 = 5$ , в табл. 2 – для  $\lambda_1 = 6$ , в табл. 3 – для  $\lambda_1 = 7$ , в табл. 4 – для  $\lambda_1 = 8$ , в табл. 5 – для  $\lambda_1 = 9$ .

Таблица 1

$T$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\hat{P}_0$	0,1702	0,2819	0,3248	0,3597	0,3678	0,3685	0,3666	0,3750
$\hat{D}$	0,0009	0,0029	0,0035	0,0043	0,0046	0,0044	0,0071	0,0070

Таблица 2

$T$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\hat{P}_0$	0,1423	0,2715	0,3112	0,3423	0,3526	0,3615	0,3645	0,3676
$\hat{D}$	0,0009	0,0019	0,0035	0,0033	0,0054	0,0050	0,0061	0,0078

Таблица 3

$T$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\hat{P}_0$	0,1255	0,2474	0,2889	0,3122	0,3345	0,3398	0,3417	0,3420
$\hat{D}$	0,0005	0,0022	0,0038	0,0035	0,0054	0,0052	0,0064	0,0075

Таблица 4

$T$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\hat{P}_0$	0,1163	0,2383	0,2942	0,3038	0,3122	0,3187	0,3214	0,3230
$\hat{D}$	0,0006	0,0018	0,0027	0,0041	0,0047	0,0056	0,0064	0,0046

Таблица 5

$T$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\hat{P}_0$	0,1074	0,2287	0,2761	0,2944	0,3016	0,3122	0,3181	0,3237
$\hat{D}$	0,0004	0,0015	0,0032	0,0044	0,0050	0,0041	0,0038	0,0061

Отметим, что анализ проведенных многочисленных вариантов расчетов по нахождению оценки  $\hat{P}_0$  показывает, что  $\hat{P}_0$  является достаточно стабильной для  $T_m = 100$  ед. времени. Вследствие этого величина времени моделирования  $T_m$  для всех экспериментов выбрана равной 100 ед. времени. Анализ результатов, приведенных в табл. 1–5, показывает, что тренд значений оценки  $\hat{P}_0$ , в зависимости от  $\lambda_1$ , убывающий при фиксированной длительности мертвого времени  $T$ , так как при увеличении разности  $\lambda_1 - \lambda_2$  условия различимости состояний потока улучшаются. При этом оценка  $\hat{D}$  для всех вариантов расчета достаточно мала. Значение оценки  $\hat{P}_0$  увеличивается при увеличении длительности мертвого времени  $T$  ( $T = 0, 1, \dots, 7$ ) ед. времени. Последнее является вполне естественным, так как при увеличении длительности мертвого времени происходит увеличение потерь полезной информации о потоке событий, что отрицательно сказывается на качестве оценивания.

### Заключение

Результаты, полученные в таблицах, показывают возможность оценивания состояний модулированного обобщенного полусинхронного потока в условиях непродлевающегося мертвого времени по результатам текущих наблюдений за потоком. Это позволяет изменять режимы работы системы обслуживания в зависимости от того или иного состояния потока. Выражения апостериорных вероятностей получены в явном виде, что позволяет производить вычисления без привлечения численных методов. Сам же алгоритм оценки состояний потока обеспечивает минимум безусловной (полной) вероятности ошибки вынесения решения.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Бахолдина М.А. Модулированный полусинхронный поток событий с иницированием дополнительных событий // Материалы юбилейной 50-й Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. Новосибирск : Изд-во НГУ, 2012. С. 180–190.
2. Бахолдина М.А., Горцев А.М. Апостериорные вероятности состояний модулированного обобщенного полусинхронного потока событий // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур: материалы Девятой Российской конференции с международным участием. Томск : Изд-во НТЛ, 2012. С. 79.
3. Бахолдина М.А. Оценивание состояний модулированного обобщенного полусинхронного потока событий // Материалы 51-й Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. Новосибирск : Изд-во НГУ, 2013. С. 248.
4. Бахолдина М.А. Оптимальная оценка состояний модулированного обобщенного полусинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 2(23). С. 10–21.
5. Бахолдина М.А., Горцев А.М. Оценивание состояний модулированного обобщенного полусинхронного потока событий при непродлевающемся мертвом времени // Известия вузов. Физика. 2013. Т. 56, № 9/2. С. 217–219.

6. Дудин А.Н., Клименок В.И. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск : Изд-во БГУ, 2000. 175 с.
7. Kingman Y.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proceedings of Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60, No. 4. P. 923–930.
8. Горцев А.М., Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Управление и адаптация в системах массового обслуживания. Томск : Изд-во ТГУ, 1978. 208 с.
9. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
10. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
11. Neuts M.F. A versatile Markov point process // Journal of Applied Probability. 1979. V. 16. P. 764–779.
12. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a batch markovian arrival process // Communications in Statistics Stochastic Models. 1991. V. 7. P. 1–46.
13. Lucantoni D.M., Neuts M.F. Some steady-state distributions for the MAP/SM/1 queue // Communications in Statistics Stochastic Models. 1994. V. 10. P. 575–598.
14. Card H.C. Doubly stochastic Poisson processes in artificial neural learning // Neural Networks, IEEE Transaction. 1988. V. 9, is. 1. P. 229–231.
15. Breuer L. An EM algorithm for batch Markovian arrival processes and its comparison to a simpler estimation procedure // Annals of Operations Research. 2002. V. 112. P. 123–138.
16. Telek M., Horvath G. A minimal representation of Markov arrival processes and a moments matching method // Performance Evaluation. 2007. V. 64. P. 1153–1168.
17. Okamura H., Dohi T., Trivedi K.S. Markovian arrival process parameter estimation with group data // IEEE/ACM Transactions on Networking. 2009. V. 17. P. 1326–1339.
18. Horvath A., Horvath G., Telek M. A joint moments based analysis of networks of MAP/MAP/1 queues // Performance Evaluation. 2010. V. 67. P. 759–788.
19. Нежелская Л.А. Нелинейная оптимальная фильтрация дважды стохастического потока с инициативными событиями // Тезисы докладов научно-технической конференции «Микросистема-91». Суздаль. М. : Всесоюз. общество информатики и вычислительной техники, 1991. С. 26–28.
20. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценка параметров синхронного МС-потока событий // Сети связи и сети ЭВМ : тез. докл. Восьмой Белорусской зимней школы-семинара по теории массового обслуживания. Минск : Изд-во БГУ, 1992. С. 33.
21. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оптимизация параметров адаптера при наблюдении за МС-потоком // Стохастические и детерминированные модели сложных систем. Новосибирск : Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1988. С. 20–32.
22. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оптимальная нелинейная фильтрация марковского потока событий с переключениями // Техника средств связи. Сер. Системы связи. 1989. Вып. 7. С. 46–54.
23. Нежелская Л.А. Алгоритм оценивания состояний полусинхронного потока событий с учетом мертвого времени // Массовое обслуживание: потоки, системы, сети : материалы Четырнадцатой Белорусской зимней школы-семинара по теории массового обслуживания. Минск : Изд-во БГУ, 1998. С. 18–21.
24. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2(11). С. 66–81.
25. Горцев А.М., Нежелская Л.А. О связи МС-потоков и MAP-потоков событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 1(14). С. 13–21.
26. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A., Solov'ev A.A. Optimal State Estimation in MAP Event Flows with Unextendable Dead Time // Automation and Remote Control. 2012. V. 73, No. 8. P. 1316–1326.
27. Bushlanov I.V., Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimating parameters of the synchronous twofold-stochastic flow of events // Automation and Remote Control. 2008. No. 9. 1517–1533.
28. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988. 254 с.
29. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events // Measurement Techniques. 2003. V. 46, No. 6. P. 536–545.
30. Хазен Э.М. Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. М. : Сов. радио, 1968. 256 с.

Бахолдина Мария Алексеевна. E-mail: maria.bakholdina@gmail.com

Горцев Александр Михайлович. E-mail: dekanat@fpmk.tsu.ru  
Томский государственный университет

Поступила в редакцию 11 сентября 2013 г.

Bakholdina Maria A., Gortsev Alexander M. (Tomsk State University, Russian Federation).

**Optimal states estimation of the modulated semisynchronous integrated flow of events in the condition of constant dead time.**

**Keywords:** modulated semisynchronous integrated flow of events; flow state; state estimation; dead time; a posteriori probability maximum; Markovian arrival process (MAP).

In this paper, the estimation problem of states of the modulated semisynchronous integrated flow of events is solved. Such flows of events are the mathematical models that may be used in Integrated Services Digital Networks (ISDNs). The flow intensity is a piecewise

constant stationary random process  $\lambda(t)$  with two states  $\lambda_1, \lambda_2$  ( $\lambda_1 > \lambda_2$ ). In the time interval by  $\lambda(t) = \lambda_i$ , (during time interval) there is a Poisson flow of events with intensity  $\lambda_i, i=1,2$ . Transition of the process  $\lambda(t)$  from the state to another state can be realized at any time. The staying time of process  $\lambda(t)$  in the first state is distributed by the exponential law with a parameter  $\beta$ . At the same time, after the event occurrence, the process  $\lambda(t)$  can change the state to  $\lambda_2$  with probability  $p$  or stay in the first state  $\lambda_1$  with probability  $1-p$ . While the process  $\lambda(t)$  is in the second state, the staying time is distributed by the exponential law with a parameter  $\alpha$ . At that, in the moment of changing state from the second state to the first one, an additional event is initiated in the state  $\lambda_1$  with probability  $\delta$ .

The flow is considered in the condition of constant dead time. The dead time period of the fixed duration  $T$  begins after every registered event at time  $t_k$ . During this period no other events are observed. When the dead time period is over, the first coming event causes the next  $T$ -interval of dead time and so on (constant dead time).

The process  $\lambda(t)$  and possible events (events of the Poisson flows with intensities  $\lambda_i, i=1,2$  and additional events) are unobservable in principle. We observe only the moments  $t_1, t_2, \dots$  of occurring events. So, using this information, we estimate the state of the process  $\lambda(t)$  at the stop time of observations. Note that the process  $\lambda(t)$  is only considered in stationary conditions. To make the decision on the state of process  $\lambda(t)$  at moment  $t$ , we found the explicit formula for a posteriori probability  $w(\lambda_i | t) = w(\lambda_i | t_1, \dots, t_m, t), i=1,2$ , where  $\lambda(t) = \lambda_i$  ( $m$  is the number of observable events in the time period  $t$ ), and  $w(\lambda_1 | t) + w(\lambda_2 | t) = 1$ .

The obtained formulas  $w(\lambda_i | t)$  provide with the calculation algorithm for a posteriori probability  $w(\lambda_1 | t)$ , and the decision algorithm on a state of process  $\lambda(t)$  at a moment  $t$  (the algorithm of the optimal estimator for flow states). By the calculation of the probability  $w(\lambda_1 | t)$  at a moment  $t$ , the decision on a state of process  $\lambda(t)$  is given according to the criterion of a posteriori probability maximum: if  $w(\lambda_1 | t) \geq w(\lambda_2 | t)$ , then  $\hat{\lambda}(t) = \lambda_1$ , else  $\hat{\lambda}(t) = \lambda_2$ .

The algorithm of the optimal evaluation for flow states is a basis for simulations. The first stage assumes the flow simulation in condition of constant dead time and obtaining the real path of process  $\lambda(t)$  and the moments  $t_1, t_2, \dots$  for observable events. The second stage is the computation of probabilities  $w(\lambda_1 | t)$  and estimation  $\hat{\lambda}(t)$ .

For the same values of parameters  $\lambda_1, \lambda_2, p, \beta, \alpha, \delta$ , the probability estimation of the erroneous decision  $\hat{P}_0$  increases when the dead time period  $T$  increases as well. This results are expected, since the increase of the dead time period always generates the loss of the useful information on flow events.

## REFERENCES

1. Bakholdina M.A. Modulirovanny polusinkhronnyy potok sobytiy s initsirovaniem dopolnitel'nykh sobytiy. *Materialy yubileynoy 50-y Mezhdunarodnoy nauchnoy studencheskoy konferentsii «Student i nauchno-tekhnicheskii progress»*: Matematika. Novosibirsk : Izd-vo NGU, 2012. P. 180-190. [Bakholdina M.A. Modulated semisynchronous flow of events with additional events initiation. *Materials of anniversary 50<sup>th</sup> international scientific student conference "Student and scientific-technical progress"*: Mathematics. Novosibirsk: NSU. P. 180-190. (2012).]
2. Bakholdina M.A., Gortsev A.M. Aposteriornye veroyatnosti sostoyaniy modulirovannogo obobshchennogo polusinkhronnogo potoka sobytiy. *Novye informatsionnye tekhnologii v issledovanii slozhnykh struktur: materialy Devyatoy Rossiyskoy konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem*. Tomsk : Izd-vo NTL, 2012. P. 79. [Bakholdina M.A., Gortsev A.M. A posteriori states probabilities of modulated semisynchronous integrated flow of events. *New information technologies in research of complicated structures: materials of 9<sup>th</sup> Russian conference with international participation*. Tomsk: NTL. P. 79. (2012).]
3. Bakholdina M.A. Otsenivanie sostoyaniy modulirovannogo obobshchennogo polusinkhronnogo potoka sobytiy. *Materialy 51-y Mezhdunarodnoy nauchnoy studencheskoy konferentsii «Student i nauchno-tekhnicheskii progress»*: Matematika. Novosibirsk : Izd-vo NGU, 2013. P. 248. [Bakholdina M.A. States estimation of modulated semisynchronous integrated flow of events. *Materials of 51<sup>st</sup> international scientific student conference "Student and scientific-technical progress"*: Mathematics. Novosibirsk: NSU. P. 248. (2013).]
4. Bakholdina M.A. Optimal'naya otsenka sostoyaniy modulirovannogo obobshchennogo polusinkhronnogo potoka sobytiy. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika*. 2013. No. 2(23). P. 10-21. [Bakholdina M.A. The optimal states evaluation of modulated semisynchronous integrated flow of events. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. No. 2(23). P. 10-21. (2013).]
5. Bakholdina M.A., Gortsev A.M. Otsenivanie sostoyaniy modulirovannogo obobshchennogo polusinkhronnogo potoka sobytiy pri neprodlevayushchemsya mertvom vremeni. *Izvestiya vuzov. Fizika*. 2013. V. 56, no. 9/2. P. 217-219. [Bakholdina M.A., Gortsev A.M. States estimation of modulated semisynchronous integrated flow of events in conditions of constant dead time. *Russian Physics Journal*. V. 56. No. 9/2. P. 217-219. (2013).]
6. Dudin A.N., Klimenok V.I. Sistemy massovogo obsluzhivaniya s korrelirovannymi potokami. Minsk : Izd-vo BGU, 2000. 175 p. [Dudin A.N., Klimenok V.I. Queueing systems with correlated flows. Minsk: BSU. (2000).]
7. Kingman Y.F.C. On doubly stochastic Poisson process. *Proceedings of Cambridge Philosophical Society*. V. 60. No. 4. P. 923-930. (1964).
8. Gortsev A.M., Nazarov A.A., Terpugov A.F. Upravlenie i adaptatsiya v sistemakh massovogo obsluzhivaniya. Tomsk : Izd-vo TGU, 1978. 208 s. [Gortsev A.M., Nazarov A.A., Terpugov A.F. Control and adaptation in queueing systems. Tomsk: TSU. (1978).]

9. Basharin G.P., Kokotushkin V.A., Naumov V.A. O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. *Izv. AN SSSR. Tekhn. kibernetika*. 1979. No. 6. P. 92-99. [Basharin G.P., Kokotushkin V.A., Naumov V.A. On a method of equivalent substitutions for communications network fragments calculation. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. No. 6. P. 92-99. (1979).]
10. Basharin G.P., Kokotushkin V.A., Naumov V.A. O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. *Izv. AN SSSR. Tekhn. kibernetika*. 1980. No. 1. P. 55-61. [Basharin G.P., Kokotushkin V.A., Naumov V.A. On a method of equivalent substitutions for communications network fragments calculation. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. No. 1. P. 55-61. (1980).]
11. Neuts M.F. A versatile Markov point process. *Journal of Applied Probability*. V. 16. P. 764-779. (1979).
12. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a batch markovian arrival process. *Communications in Statistics Stochastic Models*. V. 7. P. 1-46. (1991).
13. Lucantoni D.M., Neuts M.F. Some steady-state distributions for the MAP/SM/1 queue. *Communications in Statistics Stochastic Models*. V. 10. P. 575-598. (1994).
14. Card H.C. Doubly stochastic Poisson processes in artificial neural learning. *Neural Networks, IEEE Transaction*. V. 9. Issue 1. P. 229-231. (1994).
15. Breuer L. An EM algorithm for batch Markovian arrival processes and its comparison to a simpler estimation procedure. *Annals of Operations Research*. V. 112. P. 123-138. (2002).
16. Telek M., Horvath G. A minimal representation of Markov arrival processes and a moments matching method. *Performance Evaluation*. V. 64. P. 1153-1168. (2007).
17. Okamura H., Dohi T., Trivedi K.S. Markovian arrival process parameter estimation with group data. *IEEE/ACM Transactions on Networking*. V. 17. P. 1326-1339. (2009).
18. Horvath A., Horvath G., Telek M. A joint moments based analysis of networks of MAP/MAP/1 queues. *Performance Evaluation*. V. 67. P. 759-788. (2010).
19. Nezhel'skaya L.A. Nelineynaya optimal'naya fil'tratsiya dvazhdy stokhasticheskogo potoka s initsiativnymi sobytiyami. *Tezisy dokladov nauchno-tekhnicheskoy konferentsii «Mikrosistema-91»*. Suzdal'. M. : Vsesoyuz. obshchestvo informatiki i vychislitel'noy tekhniki, 1991. P. 26-28. [Nezhel'skaya L.A. Nonlinear optimal filtration of double stochastic flow with enterprising events. *Theses of scientific and technical conference "Microsystem-91"*. Suzdal: All-Union society of informatics and computer engineering. P. 26-28. (1991).]
20. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Otsenka parametrov sinkhronnogo MC-potoka sobyitij. *Seti svyazi i seti EVM : tez. dokl. Vos'moy Belorusskoy zimney shkoly-seminara po teorii massovogo obsluzhivaniya*. Minsk : Izd-vo BGU, 1992. P. 33. [Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Parameters estimation of synchronous Markov chain (MC) flow of events. *Telecommunications and computer networks: theses of eighth Belarusian winter workshop on queueing theory*. Minsk: BSU. P. 33. (1992).]
21. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Optimizatsiya parametrov adaptera pri nablyudenii za MC-potokom. *Stokhasticheskie i determinirovannye modeli slozhnykh sistem*. Novosibirsk : Izd-vo VTs SO AN SSSR, 1988. P. 20-32. [Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Parameters optimization in monitoring the Markov chain (MC) flow. *Stochastic and deterministic models of complicated systems*. Novosibirsk: Computing center of USSR Academy of Sciences. P. 20-32. (1988).]
22. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Optimal'naya nelineynaya fil'tratsiya markovskogo potoka sobyitij s pereklyucheniyami. *Tekhnika sredstv svyazi. Ser. Sistemy svyazi*. 1989. Vyp. 7. P. 46-54. [Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. The optimal nonlinear filtration of Markovian flow of events with commutation. *Communications technique. Series: Telecommunications systems*. Issue 7. P. 46-54. (1989).]
23. Nezhel'skaya L.A. Algoritm otsenivaniya sostoyaniy polusinkhronnogo potoka sobyitij s uchetom mertvogo vremeni. *Massovoe obsluzhivanie: potoki, sistemy, seti : materialy Chetyrnadtsatoy Belorusskoy zimney shkoly-seminara po teorii massovogo obsluzhivaniya*. Minsk : Izd-vo BGU, 1998. P. 18-21. [Nezhel'skaya L.A. Algorithm of states evaluation of semisynchronous flow of events in consideration of dead time. *Queueing theory: flows, systems and networks: materials of 14<sup>th</sup> Belarusian winter workshop on queueing theory*. Minsk: Belarusian State University publishing house. P. 18-21. (1998).]
24. Gortsev A.M., Kalyagin A.A., Nezhel'skaya L.A. Optimal'naya otsenka sostoyaniy obobshchennogo polusinkhronnogo potoka sobyitij. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika*. 2010. No. 2(11). P. 66-81. [Gortsev A.M., Kalyagin A.A., Nezhel'skaya L.A. Optimal states estimation of integrated semisynchronous flow of events. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. No. 2(11). P. 66-81. (2010).]
25. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. O svyazi MC-potokov i MAP-potokov sobyitij. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika*. 2011. No. 1(14). P. 13-21. [Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. On connection of MC flows and MAP flows of events. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. No. 1(14). P. 13-21. (2011).]
26. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A., Solov'ev A.A. Optimal State Estimation in MAP Event Flows with Unextendable Dead Time. *Automation and Remote Control*. V. 73. No. 8. P. 1316-1326. (2012).
27. Bushlanov I.V., Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimating parameters of the synchronous twofold-stochastic flow of events. *Automation and Remote Control*. No. 9. P. 1517-1533. (2008).
28. Apanasovich V.V., Kolyada A.A., Chernyavskiy A.F. Statisticheskii analiz sluchaynykh potokov v fizicheskom eksperimente. Minsk : Universitetskoe, 1988. 254 p. [Apanasovich V.V., Kolyada A.A., Chernyavskiy A.F. Statistical analysis of stochastic flows in physical experiment. Minsk: Publishing house "University's". (1988).]
29. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events. *Measurement Techniques*. V. 46. No. 6. P. 536-545. (2003).
30. Khazen E.M. Metody optimal'nykh statisticheskikh resheniy i zadachi optimal'nogo upravleniya. M. : Sov. radio, 1968. 256 p. [Khazen E.M. Methods of optimal statistical decisions and problems of optimal control. Moscow: Soviet radio. (1968).]