

УДК 519.872

Л.А. Жидкова, С.П. Моисеева

**ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСЛА ЗАНЯТЫХ ПРИБОРОВ В СИСТЕМЕ ММРР|M| ∞
С ПОВТОРНЫМИ ОБРАЩЕНИЯМИ**

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ на проведение научных исследований в Томском государственном университете на 2012–2013 гг. (№ 8.4055.2011).

Рассматривается система массового обслуживания ММРР|M| ∞ с повторными обращениями в систему. Найдены аналитические выражения для нахождения первого и второго моментов, характеризующих число занятых приборов в системе, а также их асимптотическое приближение.

Ключевые слова: система массового обслуживания с повторными обращениями; марковский модулированный поток; метод асимптотического анализа.

Одним из перспективных направлений современной экономической науки является привлечение для описания и количественного выражения экономических реалий методов их математического описания и моделирования. В связи с этим возникает задача формализации той высокой неопределенности, которая свойственна реальным экономическим процессам.

В качестве математических моделей социально-экономических и демографических процессов часто используют системы массового обслуживания (СМО) с неограниченным числом обслуживающих приборов [1–3]. Как правило, в таких системах число потенциальных клиентов (страховых и торговых компаний, пенсионных фондов) считается неограниченным. В реальных технических системах число обслуживающих приборов конечно, но в случае, когда вероятностью потери заявки можно пренебречь, такие системы можно аппроксимировать бесконечнолинейными СМО. Исследование таких систем с пуассоновским входящим и произвольным временем обслуживания можно встретить в работах В.В. Рыкова, П.П. Бочарова, А.В. Печинкина и других авторов [4–7].

Однако применение пуассоновского потока для расчета характеристик качества обслуживания в реальных системах дает большую погрешность. Обоснованность адекватности применения марковского модулированного пуассоновского потока для описания информационных потоков в мультисервисных сетях связи и телекоммуникационных системах следует из работ W.E. Leland, M.S. Taqqu, W. Willinger, V. Paxson, C. Lindemann, M. Lohmann и др. [8–9]. Системам с непуассоновскими входящими потоками (марковскими модулированными, полумарковскими) посвящены статьи D. Baum и L. Breuer [10, 11], M. Parulekar и A.M. Makowski [6], A.K. Jayawardene и O. Kella [12] и многих других.

Основными методами исследования СМО с неограниченным числом приборов, как правило, являются метод вложенных цепей Маркова и метод дополнительной переменной, в последние двадцать лет стали развиваться матрично-аналитические методы [13]. В тех случаях, когда не удается найти характеристики системы в явном виде, применяют асимптотические методы [14–16].

Одной из модификаций СМО с неограниченным числом приборов являются системы массового обслуживания с повторными обращениями, которые применяются для описания математических моделей, например, страховых или торговых компаний. Исследования таких систем с пуассоновским входящим потоком приведены в работах [2, 17], где методом производящих функций определены такие процессы, как число занятых приборов в системе и характеристики потоков, обращающихся в систему. Такие модели используют для описания процесса зависимости величины капитала коммерческой организации от стимулирующих программ, например предоставление скидки при приобретении товара; кроме того, подобные системы предлагаются в качестве математических моделей распределительных вычислительных сетей [1, 18].

Для аналогичных систем с произвольным временем обслуживания в работе [19] предложен метод предельной декомпозиции, позволяющий свести исследование бесконечнолинейной системы массового обслуживания к исследованию совокупности однолинейных систем. К сожалению, данный метод не удастся применить для исследования систем не пуассоновским входящим потоком (ММРР, МАР, рекуррентный поток), для таких потоков необходимо освоение новых методов исследования.

В данной статье приводится исследование СМО с повторными обращениями, на вход которой поступает поток ММРР $|M|_{\infty}$. С помощью метода начальных моментов найдены основные характеристики системы, такие как среднее число занятых приборов в системе и второй момент числа занятых приборов. Кроме того, для более детального исследования процессов, указанных выше, предложен метод асимптотического анализа.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов (рис. 1), на вход которой поступает марковский модулированный поток (ММРР), управляемый цепью Маркова $k(t)$, заданной матрицей инфинитезимальных характеристик $Q = \|q_{ij}\|$ и матрицей условных интенсивностей Λ [16].

Продолжительность обслуживания заявки имеет экспоненциальное распределение с параметром μ [20]. Поступившая заявка занимает любой из свободных приборов, завершив обслуживание на котором, с вероятностью $1-r$ покидает систему или с вероятностью r возвращается в неё для повторного обслуживания [2,17].

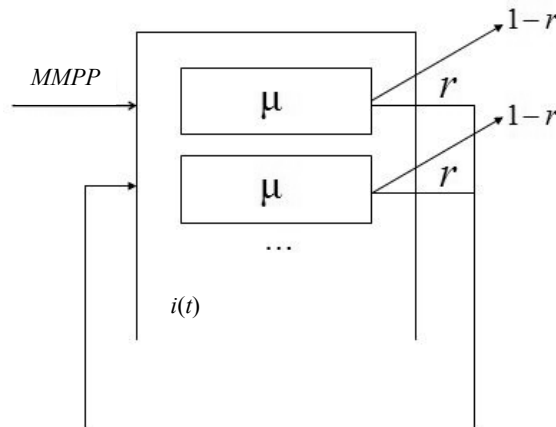


Рис.1. Система массового обслуживания ММРР $|M|_{\infty}$ с повторным обращением к блоку

Обозначим $i(t)$ число занятых приборов в момент времени t , $n(t)$ – число повторных заявок, обратившихся за время t , $k(t)$ – состояние управляющей цепи Маркова. Полученный двумерный случайный процесс $\{k(t), i(t)\}$ является марковским. Для его распределения вероятностей $P(k, i, n, t) = P\{k(t) = k, i(t) = i, n(t) = n\}$ получаем систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P(k, i, t)}{\partial t} = P(k, i, t)(-\lambda_k - i\mu(1-r)) + P(k, i+1, t)(i+1)\mu(1-r) + P(k, i-1, t)\lambda_k + \sum_{v \neq k} P(v, i, t)q_{vk}. \quad (1)$$

Введем частичные характеристические функции [21] вида

$$H(k, u, w, t) = \sum_i \sum_n e^{ju i} e^{jwn} P(k, i, n, t).$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial H(k, u, t)}{\partial u} = j \sum_{i=0}^{\infty} i e^{ju i} P(k, i, t),$$

из (1) имеем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial H(k, u, t)}{\partial t} + j\mu(1-r)(e^{-ju} - 1) \frac{\partial H(k, u, t)}{\partial u} = \lambda_k (e^{ju} - 1) H(k, u, t) + \sum_{v \neq k} q_{vk} H(v, u, t).$$

Запишем данную систему в виде матричного уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial t} + j\mu(1-r)(e^{-ju} - 1) \frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial u} = \mathbf{H}(u, t) [\Lambda(e^{ju} - 1) + \mathbf{Q}], \quad (2)$$

где

$$\mathbf{H}(u, t) = [H(1, u, t), H(2, u, t), \dots, H(K, u, t)],$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_K \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1K} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{K1} & q_{K2} & \dots & q_{KK} \end{bmatrix}.$$

2. Метод начальных моментов

Используя уравнение (2), определим начальные моменты для числа занятых приборов в системе, для этого рассмотрим нулевой момент времени, в который имеем число повторных обращений $w = 0$ (так как число обслуженных заявок равно нулю), тогда (2) перепишем в следующем виде:

$$j\mu(1-r)(e^{-ju} - 1) \frac{\partial \mathbf{H}(u)}{\partial u} = \mathbf{H}(u) [\Lambda(e^{ju} - 1) + \mathbf{Q}]. \quad (3)$$

Чтобы определить момент первого порядка, продифференцируем уравнение (3) по u :

$$\mu(1-r)e^{-ju} \frac{\partial \mathbf{H}(u)}{\partial u} + j\mu(1-r)(e^{-ju} - 1) \frac{\partial^2 \mathbf{H}(u)}{\partial u^2} = \frac{\partial \mathbf{H}(u)}{\partial u} [\Lambda(e^{ju} - 1) + \mathbf{Q}] + j e^{ju} \mathbf{H}(u), \quad (4)$$

обозначив

$$\left. \frac{\partial \mathbf{H}(u)}{\partial u} \right|_{u=0} = j \mathbf{m}_1,$$

получаем следующую систему линейных уравнений:

$$\mathbf{m}_1 \mu(1-r) = \mathbf{m}_1 \mathbf{Q} + \mathbf{R} \Lambda.$$

Здесь $\mathbf{R} = \mathbf{H}(0)$ – вектор стационарного распределения вероятностей управляющей цепи Маркова [16], которое определяется системой уравнений $\mathbf{RQ} = 0$ и удовлетворяет условию нормировки $\mathbf{RE} = 1$. Решая данную систему, получаем выражение, определяющее вектор $\mathbf{m}_1$:

$$\mathbf{m}_1 = \mathbf{R} \Lambda [\mu(1-r) \mathbf{I} - \mathbf{Q}]^{-1}. \quad (5)$$

Тогда значение среднего числа занятых приборов в системе определяется следующим выражением:

$$M\{i(t)\} = \frac{1}{\mu(1-r)} \mathbf{R} \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}.$$

Для определения момента второго порядка продифференцируем по u выражение (4), получим

$$\begin{aligned} -j\mu(1-r)e^{-ju} \frac{\partial \mathbf{H}(u)}{\partial u} + 2\mu(1-r)e^{-ju} \frac{\partial^2 \mathbf{H}(u)}{\partial u^2} + j\mu(1-r)(e^{-ju} - 1) \frac{\partial^3 \mathbf{H}(u)}{\partial u^3} = \\ = \frac{\partial^2 \mathbf{H}(u)}{\partial u^2} [\mathbf{\Lambda}(e^{ju} - 1) + \mathbf{Q}] + 2je^{ju} \frac{\partial \mathbf{H}(u)}{\partial u} \mathbf{\Lambda} - e^{ju} \mathbf{H}(u). \end{aligned}$$

Тогда, обозначив

$$\left. \frac{\partial^2 \mathbf{H}(u)}{\partial u^2} \right|_{u=0} = j^2 \mathbf{m}_2,$$

получим

$$\mathbf{m}_2 [\mathbf{Q} - 2\mu(1-r)\mathbf{I}] + \mathbf{m}_1 [2\mathbf{\Lambda} + \mu(1-r)\mathbf{I}] + \mathbf{R} \mathbf{\Lambda} = 0, \quad (6)$$

где $\mathbf{I}$ – единичная диагональная матрица. Подставляя в (5) выражение (6) и решая данное уравнение относительно величины $\mathbf{m}_2$, имеем

$$\mathbf{m}_2 = \mathbf{R} \mathbf{\Lambda} \left\{ [\mathbf{Q} - \mu(1-r)\mathbf{I}]^{-1} [2\mathbf{\Lambda} + \mu(1-r)\mathbf{I}] - \mathbf{I} \right\} \{ \mathbf{Q} - 2\mu(1-r)\mathbf{I} \}^{-1}.$$

Тогда второй момент числа занятых приборов в системе имеет вид

$$M\{i^2(t)\} = \mathbf{m}_2 \mathbf{E} = \mathbf{R} \mathbf{\Lambda} \left\{ [\mathbf{Q} - \mu(1-r)\mathbf{I}]^{-1} [2\mathbf{\Lambda} + \mu(1-r)\mathbf{I}] - \mathbf{I} \right\} \{ \mathbf{Q} - 2\mu(1-r)\mathbf{I} \}^{-1} \mathbf{E}.$$

3. Метод асимптотического анализа

Для более полного исследования применим метод асимптотического анализа, заключающийся в нахождении аппроксимации характеристической функции числа занятых приборов в системе $\text{MMPP}|M|^\infty$ при определенных условиях. Для нашей системы будем рассматривать условие растущего времени обслуживания [16], т.е. высокой загрузки системы.

3.1. Асимптотика первого порядка

Обозначим

$$\mu = \varepsilon, \quad u = \varepsilon y, \quad \mathbf{H}(u) = \mathbf{F}_1(y, \varepsilon). \quad (7)$$

Перепишем (3) с учетом введенных обозначений:

$$j(1-r)(e^{-j\varepsilon y} - 1) \frac{\partial \mathbf{F}_1(y, \varepsilon)}{\partial y} = \mathbf{F}_1(y, \varepsilon) [\mathbf{\Lambda}(e^{j\varepsilon y} - 1) + \mathbf{Q}]. \quad (8)$$

Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем уравнение

$$0 = \mathbf{F}_1(y) \mathbf{Q},$$

решение которого имеет вид

$$\mathbf{F}_1(y) = \mathbf{R} \mathbf{\Phi}_1(y). \quad (9)$$

Домножая уравнение (8) на единичный вектор $\mathbf{E}$ и выполняя все необходимые преобразования, имеем

$$j(1-r)(e^{-j\epsilon y} - 1) \frac{\partial \mathbf{F}_1(y, \epsilon)}{\partial y} \mathbf{E} = \mathbf{F}_1(y, \epsilon)(e^{j\epsilon y} - 1) \Lambda \mathbf{E}.$$

Раскладывая в этом уравнении экспоненты в ряд, а также разделив обе части уравнения на ϵ и полагая $\epsilon \rightarrow 0$, получаем

$$(1-r)y \frac{\partial \mathbf{F}_1(y)}{\partial y} \mathbf{E} = jy \mathbf{F}_1(y) \Lambda \mathbf{E}. \quad (10)$$

Подставляя (9) в систему (10) и учитывая условие $\mathbf{R}\mathbf{E} = 1$, получаем дифференциальное уравнение первого порядка для нахождения функции $\Phi_1(y)$:

$$\frac{\partial \Phi_1(y)}{\partial y} \mathbf{E} = \frac{j}{(1-r)} \Phi_1(y) \Lambda \mathbf{E}.$$

Откуда, учитывая начальное условие $\Phi_1(0) = 1$, имеем

$$\Phi_1(y) = \exp \left\{ \frac{jy}{1-r} \kappa_1 \right\}, \quad \kappa_1 = \mathbf{R} \cdot \Lambda \cdot \mathbf{E}.$$

Следовательно, учитывая (9),

$$\mathbf{F}_1(y) = \mathbf{R} \exp \left\{ \frac{jy}{1-r} \kappa_1 \right\}.$$

В силу замены (7) и предыдущего равенства можно записать следующее асимптотическое равенство:

$$\mathbf{H}(u) = \mathbf{F}_1(y, \epsilon) \approx \mathbf{F}_1(y) = \mathbf{R} \cdot \exp \left\{ \frac{jy}{1-r} \kappa_1 \right\}.$$

Поэтому для характеристической функции стационарного процесса $i(t)$ запишем

$$M \left\{ e^{ju i(t)} \right\} = \mathbf{H}(u) \mathbf{E} \approx \exp \left\{ \frac{jy}{1-r} \kappa_1 \right\} = \exp \left\{ \frac{ju}{1-r} \frac{\kappa_1}{\mu} \right\}.$$

Данное равенство будем называть асимптотикой первого порядка для СМО ММРР $|\mathbf{M}|^\infty$ с повторными обращениями.

3.2. Асимптотика второго порядка

Выполним следующую замену:

$$\mathbf{H}(u) = \mathbf{H}_2(u) \exp \left\{ \frac{ju}{1-r} \frac{\kappa_1}{\mu} \right\}.$$

Тогда уравнение (3) для $H_2(u)$ будет иметь вид

$$j\mu(1-r)(e^{-ju} - 1) \frac{\partial \mathbf{H}_2(u)}{\partial u} = \mathbf{H}_2(u) \left[\mathbf{Q} + \Lambda(e^{ju} - 1) + \kappa_1(e^{-ju} - 1) \mathbf{I} \right]. \quad (11)$$

Обозначим

$$\mu = \epsilon^2, \quad u = \epsilon y, \quad \mathbf{H}_2(u) = \mathbf{F}_2(y, \epsilon) \quad (12)$$

и из (11) получим

$$j\varepsilon(1-r)(e^{-j\varepsilon y} - 1) \frac{\partial \mathbf{F}_2(y, \varepsilon)}{\partial y} = \mathbf{F}_2(y, \varepsilon) \left[\mathbf{Q} + \Lambda(e^{j\varepsilon y} - 1) + \kappa_1(e^{-j\varepsilon y} - 1) \mathbf{I} \right], \quad (13)$$

тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем уравнение

$$0 = \mathbf{F}_2(y) \mathbf{Q}.$$

Следовательно, решение $\mathbf{F}_2(y, \varepsilon)$ в уравнении (13) можно записать в виде разложения

$$\mathbf{F}_2(y, \varepsilon) = \Phi_2(y) [\mathbf{R} + j\varepsilon \mathbf{f}_2] + O(\varepsilon^2). \quad (14)$$

Подставляя данное выражение в (13) и раскладывая в ней экспоненты в ряд, получаем уравнение для нахождения функции $\mathbf{f}_2$

$$\mathbf{R}(\Lambda - \kappa_1 \mathbf{I}) + \mathbf{f}_2 \mathbf{Q} = 0.$$

Чтобы найти функцию $\Phi_2(y)$, домножим обе части уравнения (13) на единичный вектор $\mathbf{E}$, далее, раскладывая в данном выражении экспоненты в ряд и подставляя (14), получаем дифференциальное уравнение первого порядка

$$(1-r) \frac{\partial \Phi_2(y)}{\partial y} = j^2 y \Phi_2(y) [\mathbf{R} \cdot \Lambda \cdot \mathbf{E} + \mathbf{f}_2 (\Lambda - \kappa_1 \mathbf{I}) \mathbf{E}].$$

Решение данного уравнения, удовлетворяющее начальному условию $\Phi_2(0) = 1$, имеет вид

$$\Phi_2(y) = \exp \left\{ \frac{(jy)^2}{2(1-r)} \kappa_2 \right\},$$

где $\kappa_2 = \kappa_1 + \mathbf{f}_2 (\Lambda - \kappa_1 \mathbf{I}) \mathbf{E}$.

Тогда в силу замен (12) запишем асимптотическое равенство для $\mathbf{H}_2(u)$:

$$\mathbf{H}_2(u) = \mathbf{F}_2(y, \varepsilon) \approx \mathbf{F}_2(y) = \mathbf{R} \cdot \exp \left\{ \frac{(jy)^2}{2(1-r)} \kappa_2 \right\} = \mathbf{R} \cdot \exp \left\{ \frac{(ju)^2}{2(1-r)} \frac{\kappa_2}{\mu} \right\}. \quad (15)$$

Это равенство будем называть асимптотикой второго порядка.

Учитывая (11) и (15), имеем следующее выражение для $\mathbf{H}(u)$:

$$\mathbf{H}(u) = \mathbf{H}_2(u) \cdot \exp \left\{ \frac{jy}{1-r} \frac{\kappa_1}{\mu} \right\} = \mathbf{R} \cdot \exp \left\{ \frac{ju}{1-r} \frac{\kappa_1}{\mu} + \frac{(ju)^2}{2(1-r)} \frac{\kappa_2}{\mu} \right\},$$

поэтому для характеристической функции числа занятых приборов $i(t)$ в системе получим

$$M \left\{ e^{ju i(t)} \right\} = \mathbf{H}(u) \mathbf{E} = \exp \left\{ \frac{ju}{1-r} \frac{\kappa_1}{\mu} + \frac{(ju)^2}{2(1-r)} \frac{\kappa_1}{\mu} \right\}.$$

Из последнего выражения следует, что стационарное распределение вероятностей числа занятых приборов в системе ММРР|М| ∞ можно аппроксимировать гауссовским распределением со следующими параметрами:

$$a = M \{ i(t) \} = \frac{\kappa_1}{\mu(1-r)}, \quad \sigma^2 = M \left\{ (i(t) - a)^2 \right\} = \frac{\kappa_2}{\mu(1-r)}.$$

4. Область применения асимптотических результатов

Выясним, насколько результаты, полученные с помощью асимптотического анализа, близки к аналитическим результатам.

Пример 1.

Используем следующие значения параметров:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & -0,6 & 0,4 \\ 0,5 & 0,3 & -0,8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 \end{bmatrix}.$$

Для заданных значений, изменяя параметр μ , получаем следующие результаты (табл. 1).

Таблица 1

Сравнение асимптотических и аналитических результатов

μ	1		0,5		0,25		0,1		0,05	
	М	Д	М	Д	М	Д	М	Д	М	Д
Асимптотические результаты	4,067	4,244	8,133	8,488	16,267	16,976	40,667	42,440	81,333	84,881
Аналитические результаты	4,067	4,210	8,133	8,450	16,267	16,936	40,667	42,399	81,333	84,839

Вычислим относительную погрешность между величиной дисперсии, полученной методом моментов, и асимптотическим методом (табл. 2).

Таблица 2

Относительная погрешность

μ	1	0,5	0,25	0,1	0,05
Δ	0,82%	0,45%	0,24%	0,10%	0,05%

Следует отметить, что при данных входных параметрах максимальная относительная погрешность составляет менее 1%. Отметим, что при уменьшении параметров времени обслуживания результаты, полученные асимптотическим методом, приближаются к аналитическим результатам, что позволяет применять асимптотический алгоритм для широкого круга задач.

Пример 2.

Рассмотрим еще один пример с большой интенсивностью входящего потока (табл. 3). Используем следующие значения параметров:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & -0,6 & 0,4 \\ 0,5 & 0,3 & -0,8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таблица 3

Сравнение асимптотических и аналитических результатов

μ	1		0,5		0,25		0,1		0,05	
	М	Д	М	Д	М	Д	М	Д	М	Д
Асимптотические результаты	36,667	59,383	73,333	118,765	146,667	237,531	336,667	593,827	733,330	1187,654
Аналитические результаты	36,667	55,354	73,333	114,343	146,667	232,882	336,667	589,031	733,330	1182,807

Вычислим относительную погрешность между величиной дисперсии, полученной методом моментов, и асимптотическим методом.

Т а б л и ц а 4

Относительная погрешность

μ	1	0,5	0,25	0,1	0,05
Δ	7,28%	3,87%	2,00%	0,81%	0,41%

Заметим, что в данном примере относительная погрешность, приведенная в табл. 4, оказалась в разы больше погрешности в примере 1; это говорит о том, что на асимптотические результаты влияет не только продолжительность времени обслуживания, но и входящие параметры, а именно интенсивность входящего потока.

Заключение

В настоящей работе была построена математическая модель обслуживания заявок в системе ММРР|M| ∞ , а также определены аналитические выражения для нахождения первого и второго моментов, характеризующих число занятых приборов в системе и их асимптотического приближения. Проведен численный анализ полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеева С.П., Захорольная И.А. Математическая модель параллельного обслуживания кратных заявок с повторными обращениями // Автометрия. 2011. Т. 47, № 6. С. 51–58.
2. Морозова А.С., Моисеева С.П., Назаров А.А. Исследование экономико-математической модели влияния ценовой скидки для постоянных клиентов на прибыль коммерческой организации // Вестник Томского государственного университета. 2006. № 293. С. 49–52.
3. Носова М.Г. Автономная немарковская система массового обслуживания и ее применение в задачах демографии : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Томск, 2010. 204 с.
4. Кёнинг Д., Рыков В., Штоян Д. Теория массового обслуживания. М. : Московский институт нефтехимической и газовой промышленности, 1979. 112 с.
5. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания. М. : Изд-во РУДН, 1995. 520 с.
6. Parulekar M., Makowski A.M. Tail probabilities for M/G/ ∞ input processes (I): Preliminary asymptotics // Queueing Systems. 1997. V. 27, is. 3–4. P. 271–296.
7. Baltzer J.C. On the fluid limit of the M/G/ ∞ queue queueing systems // Theory and applications. August 2007. V. 56, is. 3–4. P. 255–265.
8. Leland W.E., Willinger W., Taqqu M.S., Wilson D.V. On the self-similar nature of Ethernet traffic, ACM SIGCOMM // Computer Communication Review. 1995. V. 25. P. 202–213.
9. Klemm A., Lindemann C., Lohmann M., Modeling I.P. Traffic Using the Batch Markovian Arrival Process (extended version) // Performance Evaluation. 2003. V. 54. P. 149–173.
10. Baum D. The infinite server queue with Markov additive arrivals in space // Proceedings of the international conference «Probabilistic analysis of rare events». Riga, Latvia, 1999. P. 136–142.
11. Breuer L., Baum D. The Inhomogeneous BMAP/G/infinity queue // Proceedings 11th GI/ITG Conference on measuring, modelling and evaluation of computer and communication systems (MMB 2001). Aachen, Germany, 2001. P. 209–223.
12. Jayawardene A.K., Kella O. M/G/ ∞ with alternating renewal breakdowns // Queueing Systems. 1996. V. 22, is. 1–2. P. 79–95.
13. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория массового обслуживания. Томск : Изд-во НТЛ, 2005. 228 с.
14. Iglehart D.L. Limit diffusion approximations for the many server queue and the repairman problem // J. Appl. Prob. 1965. No. 2. P. 429–441.
15. Reynolds J.F. Some results for the bulk-arrival infinite-server Poisson queue. // Oper. Res. 1968. V. 16. P. 186–189.
16. Назаров А.А., Моисеева С.П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск : Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.
17. Жидкова Л.А., Моисеева С.П. Математическая модель потоков покупателей двухпродуктовой торговой компании в виде системы массового обслуживания с повторными обращениями к блокам // Известия Томского политехнического университета. 2013. Т. 322, № 6. С. 5–9.

18. Жидкова Л.А., Моисеева С.П. Исследование систем параллельного обслуживания кратных заявок простейшего потока // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 4(17). С. 49–55.
19. Моисеева С.П., Ананина И.А., Назаров А.А. Исследование потоков в системе $M|GI|_{\infty}$ с повторными обращениями методом предельной декомпозиции // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. № 3(8). С. 56–66.
20. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. М. : КомКнига, 2005. 408 с.
21. Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания. М. : Физматгиз, 1963. 236 с.

Жидкова Любовь Александровна. E-mail: zhidkova@mail.ru

Моисеева Светлана Петровна. E-mail: smoiseeva@mail.ru

Томский государственный университет

Поступила в редакцию 28 октября 2013 г.

Zhidkova Lyubov A., Moiseeva Svetlana P. (Tomsk State University, Russian Federation).

Investigation of the queueing system $MMPP|M|_{\infty}$ with repeated service.

Keywords: Queueing system with repeated service; Markov modulated process; method of asymptotic analysis.

In this paper the investigation of the queueing infinity-server system with the Markov modulated arrival process and repeated service is presented. The Markov modulated Poisson process is defined by the infinitesimal generator $Q = \|q_{ij}\|$ and conditional rates Λ . Each incoming customer occupies any of the vacant server for stochastic time interval distributed according to the exponential law with the parameter μ . After service the customer leaves system with probability $1-r$ and comes back for repeated service with probability r .

The goal of the research is to obtain the distribution parameters of the number of busy servers in stationary mode. The system of differential equations for partial characteristic functions of the number of busy servers is obtained in the following matrix form:

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial t} + j\mu(1-r)(e^{-ju} - 1) \frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial u} = \mathbf{H}(u, t) [\Lambda(e^{ju} - 1) + \mathbf{Q}].$$

The formulas for the average and variance of the number of busy servers are found by the moments method. The detailed research is performed by the asymptotic analysis method when the service time increases. It is shown that the asymptotic characteristic function of the number of busy servers in stationary mode can be approximated by the Gaussian distribution with the following parameters:

$$a = M\{i(t)\} = \frac{\kappa_1}{\mu(1-r)},$$

$$\sigma^2 = M\{(i(t) - a)^2\} = \frac{\kappa_2}{\mu(1-r)},$$

where values κ_1 , κ_2 are defined by the expressions

$$\kappa_1 = \mathbf{R} \cdot \Lambda \cdot \mathbf{E},$$

$$\kappa_2 = \kappa_1 + \mathbf{f}_2 (\Lambda - \kappa_1 \mathbf{I}) \mathbf{E}.$$

Here the vector $\mathbf{f}_2$ is the decision of the linear equations system

$$\mathbf{R}(\Lambda - \kappa_1 \mathbf{I}) + \mathbf{f}_2 \mathbf{Q} = 0.$$

The applicability range of the asymptotic approximation is determined by numerical calculations. It is shown that asymptotic results depend on the service time and arrivals rate.

REFERENCES

1. Moiseeva S.P., Zakhrol'naya I.A. Matematicheskaya model' parallel'nogo obsluzhivaniya kratnykh zayavok s povtornymi obrashcheniyami. *Avtometriya*. 2011. V. 47. No. 6. P. 51-58. [Moiseeva S.P., Zakhrol'naya I.A. Mathematical model of parallel retrial queueing of multiple requests. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. V. 47. No. 6. P. 567-572. (2011).]
2. Morozova A.S., Moiseeva S.P., Nazarov A.A. Issledovanie ekonomiko-matematicheskoy modeli vliyaniya tsenovoy skidki dlya postoyannykh klientov na pribyl' kommercheskoy organizatsii. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta*. 2006. No. 293. P. 49-52. [Morozova A.S., Moiseeva S.P., Nazarov A.A. Investigation of the economic-mathematical model of discount for patrons influence on income of trading company. *Tomsk State University Journal*. No. 293. P. 49-52. (2006).]
3. Nosova M.G. Avtonomnaya nemarkovskaya sistema massovogo obsluzhivaniya i ee primeneniye v zadachakh demografii : dis. ... kand. fiz.-mat. nauk. Tomsk, 2010. 204 p. [Nosova M.G. Autonomous non-markovian Queueing system and application in tasks of demography: Ph.D. Thesis. Tomsk State University, Tomsk. (2010).]
4. Kening D., Rykov V., Shtoyan D. Teoriya massovogo obsluzhivaniya. M. : Moskovskiy institut neftekhimicheskoy i gazovoy promyshlennosti, 1979. 112 p. [Konig D., Rykov V., Stoyan D. Queueing Theory. M.: Moscow Institute of Oil and Gas. (1979).]

5. Bocharov P.P., Pechinkin A.V. Teoriya massovogo obsluzhivaniya. M. : Izd-vo RUDN, 1995. 520 p. [Bocharov P.P., Pechinkin A.V. Queueing Theory. M.: Peoples' Friendship University of Russia (PFUR). (1995).]
6. Parulekar M., Makowski A. M. Tail probabilities for M/G/∞ input processes (I): Preliminary asymptotics. *Queueing Systems*. V. 27. Issue 3-4. P. 271-296. (1997).
7. Baltzer J.C. On the fluid limit of the M/G/∞ queue queueing systems. *Theory and applications*. V. 56. Issue 3-4. P. 255-265. (August 2007).
8. Leland W.E., Willinger W., Taqqu M.S., Wilson D.V. On the self-similar nature of Ethernet traffic", ACM SIGCOMM. *Computer Communication Review*. V. 25. P. 202-213. (1995).
9. Klemm A., Lindemann C., Lohmann M., Modeling IP Traffic Using the Batch Markovian Arrival Process (extended version). *Performance Evaluation*. V. 54. P. 149-173. (2003).
10. Baum D. The infinite server queue with Markov additive arrivals in space. *Proceedings of the international conference "Probabilistic analysis of rare events"*. Riga, Latvia. P. 136-142. (1999).
11. Breuer L., Baum D. The Inhomogeneous BMAP/G/infinity queue. *Proceedings 11th GI/ITG Conference on measuring, modelling and evaluation of computer and communication systems (MMB 2001)*. Aachen, Germany. P. 209-223. (2001).
12. Jayawardene A.K., Kella O. M/G/∞ with alternating renewal breakdowns. *Queueing Systems*. V. 22. Issue 1-2. P. 79-95. (1996).
13. Nazarov A.A., Terpugov A.F. Teoriya massovogo obsluzhivaniya. Tomsk : Izd-vo NTL, 2005. 228 c. [Nazarov A.A., Terpugov A.F. Queueing Theory. Tomsk: NTL. (2005).]
14. Iglehart D. L. Limit diffusion approximations for the many server queue and the repairman problem. *J. Appl. Prob.* No. 2. P. 429-441. (1965).
15. Reynolds J.F. Some results for the bulk-arrival infinite-server Poisson queue. *Oper. Res.* V. 16. (1968).
16. Nazarov A.A., Moiseeva S.P. Metod asimptoticheskogo analiza v teorii massovogo obsluzhivaniya. Tomsk : Izd-vo NTL, 2006. 112 s. [Nazarov A.A., Moiseeva C.P. Method of asymptotic analyze on Queueing Theory. Tomsk: NTL. (2006).]
17. Zhidkova L.A., Moiseeva S.P. Matematicheskaya model' potokov pokupateley dvukhproduktovoy trgovoy kompanii v vide sistemy massovogo obsluzhivaniya s povtornymi obrashcheniyami k blokam. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta*. 2013. V. 322, no. 6. P. 5–9. [Zhidkova L.A., Moiseeva S.P. Mathematical model of consumer traffic in two – commodity commercial company in the form of queueing system with repeated block access. *The Bulletin of Tomsk Polytechnic University*. V. 322. No. 6. P. 5-9. (2013).]
18. Zhidkova L.A., Moiseeva S.P. Issledovanie sistem parallel'nogo obsluzhivaniya kratnykh zayavok prosteyshogo potoka. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika*. 2011. No. 4(17). P. 49-55. [Zhidkova L.A., Moiseeva S.P. Investigation of the parallel service system with multiple claims of the Poisson process. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. No. 4(17). P. 49-55. (2011).]
19. Moiseeva S.P., Ananina I.A., Nazarov A.A. Issledovanie potokov v sisteme M|GI|∞ s povtornymi obrashcheniyami metodom predel'noy dekompozitsii. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika*. 2009. No. 3(8). P. 56-66. [Moiseeva S.P., Ananina I.A., Nazarov A.A. Research of streams in system M|GI|∞ with repeated references the method of limiting decomposition. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. No. 3(8). P. 56-66. (2009).]
20. Gnedenko B.V., Kovalenko I.N. Vvedenie v teoriyu massovogo obsluzhivaniya. M. : KomKniga, 2005. 408 p. [Gnedenko B.P., Kovalenko I.N. Introduction in Queueing Theory. M.: KomKniga. (2005).]
21. Khinchin A.Ya. Raboty po matematicheskoy teorii massovogo obsluzhivaniya. M. : Fizmatgiz, 1963. 236 s. [Hinchin A.Y. Papers about mathematical theory of Queueing. M.: Fizmatgiz. (1963).]