УДК 517.54

И.А. Колесников

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АКЦЕССОРНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЯ НА СЧЕТНОУГОЛЬНИК

Метод П.П. Куфарева определения акцессорных параметров в интеграле Кристоффеля – Шварца распространяется на случай конформного отображения верхней полуплоскости на счетноугольник с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π.

Ключевые слова: *конформное отображение, счетноугольник, симметрия переноса, акцессорные параметры, метод П.П. Куфарева.*

Область Δ называют областью с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π, если при линейном преобразовании $L(w) = w + 2\pi$ область остается неизменной $L(\Delta) = \Delta$.

Область Δ называют область типа полуплоскости, если при преобразовании $L(w) = w + 2\pi$ среди всех простых концов границы области Δ в бесконечно удаленной точке неподвижным остается только один простой конец.

Определение 1. Счетноугольником с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π называют [1] односвязную область Δ типа полуплоскости, с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π, такую, что часть границы области Δ от точки w_0 до точки $w_0 + 2\pi$ состоит из конечного числа прямолинейных отрезков и лучей.

Двигаясь по границе счетноугольника Δ от точки w_0 до точки $w_0 + 2\pi$ в положительном направлении, обозначим последовательно встречающиеся угловые точки границы через $A_1^0, A_2^0, \ldots, A_n^0, A_1^1$, $A_1^1 = A_1^0 + 2\pi$, $n \in \mathbb{N}$, а углы счетноугольника обозначим соответственно через $\alpha_1\pi$, $\alpha_2\pi$,…, $\alpha_n\pi$, $\alpha_1\pi$. Для вершин A_k^0 в конечной части плоскости $\alpha_k \in (0,1) \cup (1,2]$, если вершина A_k^0 находится в бесконечно удаленной точке, то $\alpha_k = 0$. Из геометрических соображений видим, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = n$. Остальные вершины A_k^m определяются сдвигом вершин A_k^0 вдоль вещественной оси $A_k^m = A_k^0 + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, $k = 1,\ldots,n$.

Согласно теореме Римана, существует отображение f, однолистно и конформно переводящее верхнюю полуплоскость $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ на счетноугольник Δ. Интерес к конформным отображениям верхней полуплоскости на счетноугольники с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π появился в последние десятилетия [2, 3] благодаря приложению к некоторым задачам гидродинамики, задачам теплопроводности, СВЧ-теории и др.. Интегральная формула Кристоффеля – Шварца записана для отображения f верхней полуплоскости на счетноугольники с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π И.А. Александровым [4] с использованием принципа симметрии Римана – Шварца, С.А. Копаневым и Л.С. Копаневой [1] с помощью формулы типа формулы Шварца в следующей теореме.

Теорема 1. Для отображения f, переводящего верхнюю полуплоскость на счетноугольник и удовлетворяющего условию $\lim\limits_{\operatorname{Im} z \Rightarrow +\infty} (f(z)-z)=0$, имеет место формула (типа формулы Кристоффеля – Шварца)

$$f(z)=c_1\int_0^z \prod_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{a_k^0-\zeta}{2}\right)^{\alpha_k-1} d\zeta + c_2, \tag{1}$$

где c_1, c_2, – комплексные постоянные, $a_k^0 \in [0,2\pi)$ – прообразы вершин счетноугольника с углами $\alpha_k\pi$.

На отображение f наложено дополнительно условие

$$\lim_{\operatorname{Im} z \Rightarrow +\infty} (f(z)-z)=0,$$

предел здесь равномерный относительно $\operatorname{Re} z$. Заметим, что это условие влечет за собой свойство $f(z+2\pi m)=f(z)+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$.

В задачах на нахождение конформного отображения задаются вершины области, а прообразы вершин a_k и константы c_1, c_2, называемые акцессорными параметрами, как и в классической формуле Кристоффеля – Шварца остаются неизвестными. К настоящему времени разработаны различные эффективные методы численного определения этих параметров в классической формуле Кристоффеля – Шварца. Один из таких методов определения акцессорных параметров восходит к работе П.П. Куфарева [6] (см., более подробно, [7]). Используя параметрический метод Левнера, П.П. Куфарев показал, что для отображения с внутренней нормировкой определение акцессорных параметров в интеграле Кристоффеля – Шварца может быть сведено к задаче интегрирования некоторой системы дифференциальных уравнений с начальными условиями Коши. Первые доведенные до конца расчеты выполнены Ю.В. Чистяковым [8]. Метод П.П. Куфарева получил развитие в работе [9], в работе [10] – применительно к случаю конформного отображения верхней полуплоскости на многоугольник при наличии граничной нормировки. В работе [11] с использованием идеи П.П. Куфарева и аппарата краевых задач Гильберта с кусочно-гладкими коэффициентами и вариации решений таких задач получен новый приближенный метод нахождения акцессорных параметров в интеграле Кристоффеля – Шварца. В настоящей статье метод П.П. Куфарева определения акцессорных параметров распространяется на случай конформного отображения верхней полуплоскости на счетноугольник с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π.

Пусть D есть односвязная область с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π типа полуплоскости, представляющая собой плоскость $\mathbb{C}$ с разрезами по попарно непересекающимся простым кривым γ_m, уходящим на бесконечность, $\gamma_m=\gamma_0+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$, где γ_0 имеет некоторую параметризацию $\gamma_0:[0,+\infty)\to\mathbb{C}$, $\gamma_0=\gamma_0(\xi)$. Часть кривой γ_0, когда $\xi\in[s,+\infty)\subset[0,+\infty)$, обозначим через $\gamma_0^{(s)}$, то есть $\gamma_0^{(s)}:[s,+\infty)\to\mathbb{C}$, $\gamma_0^{(s)}=\gamma_0(\xi)$.

Согласно теореме Римана, для каждого $s\in[0,+\infty)$ существует однолистное и голоморфное отображение $\Psi_s:\Pi^+\to\mathbb{C}$, $\Psi=\Psi_s(z)=\Psi(z,s)$, такое, что

$$\Psi_s\left(\Pi^+\right)=\mathbb{C}\setminus\bigcup_{m\in\mathbb{Z}}\gamma_m^{(s)}=\mathbb{C}\setminus\left\{\bigcup_{m\in\mathbb{Z}}\gamma_m(\xi), s\le\xi<+\infty\right\}.$$

Ясно, что $\Psi_0\left(\Pi^+\right)=D$. Выберем параметризацию кривой $\gamma_0=\gamma_0\left(s(t)\right)=\gamma_0(t)$ так, чтобы $0\le t<+\infty$ и выполнялось

$$\lim_{\operatorname{Im} z\Rightarrow+\infty}\left(\Psi\left(z,t\right)-z\right)=0.$$

Обозначим $\Psi_t\left(\Pi^+\right)=D(t)$. При фиксированном t $D(t)$ является частным случаем счетноугольника с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π.

Семейство отображений $\Psi\left(z,t\right)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению типа уравнения Левнера [12]:

$$\frac{\partial\Psi\left(z,t\right)}{\partial t}=\frac{\partial\Psi\left(z,t\right)}{\partial z}\operatorname{ctg}\frac{\lambda(t)-z}{2}. \qquad (3)$$

Заметим, что $\lambda(t)$ при каждом фиксированном t – точка вещественной оси, являющаяся прообразом конца кривой $\gamma_0(t)$.

Построим континуальное семейство областей $D(t)$, $0<t<\infty$, сходящееся к счетноугольнику Δ как к ядру относительно точки w_0 при t, стремящемся к нулю, где w_0 принадлежит области Δ. Соединим какую-нибудь вершину A_k^0, $k\in\{1,...,n\}$, и вершины $A_k^m=A_k^0+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$, счетноугольника Δ с бесконечно удаленной точкой параллельными лучами l_0^m, целиком лежащими вне Δ. Проведем переменные разрезы $\gamma_0^m(t)$, $m\in\mathbb{Z}$, удлиняющиеся из бесконечно удаленной точки по лучам l_0^m до начала этих лучей, получим семейство областей $D\left(t_0\right)=\mathbb{C}\setminus\bigcup_{m\in\mathbb{Z}}\gamma_0^m(t)$, $0<t_0\le t<\infty$. Каждому разрезу может принадлежать несколько вершин счетноугольника Δ, выделим какие-нибудь из них с одинаковой мнимой координатой. Выпустим из выбранных вершин прямолинейные разрезы $\gamma_1^m(t)$ вдоль некоторых сторон l_1^m счетноугольника Δ, примыкающих к лучам l_0^m в этих вершинах так, чтобы подвижные концы разрезов при изменении t от t_0 до некоторого t_1, $0\le t_1\le t_0$, проходили путь, равный длине стороны l_1^0 счетноугольника Δ. Можем считать, что на этом и последующих этапах построения, для отображения $\Psi\left(z,t\right):\Pi^+\to D(t)$ выполняется условие (2). Если $D\left(t_1\right)=\left(\mathbb{C}\setminus\bigcup_{m\in\mathbb{Z}}\gamma_0^m(t)\right)\setminus\bigcup_{m\in\mathbb{Z}}\gamma_1^m(t)\ne\Delta$, то $t_1>0$ и в этом случае продолжаем построение, принимая область $D\left(t_1\right)$ за исходную и проводя в ней разрезы $\gamma_2^m(t)$ вдоль некоторых сторон l_2^m счетноугольника, примыкающих к $l_0^m\cup l_1^m$. Получим область $D\left(t_2\right)=\mathbb{C}\setminus\bigcup_{m\in\mathbb{Z}}\bigcup_{k=0}^{2}\gamma_k^m(t)$, $0\le t_2<t_1$. После n аналогичных шагов будет

построена полигональная область $\mathbb{C}\setminus\bigcup\limits_{m\in\mathbb{Z}}\bigcup\limits_{k=0}^{n-1}\gamma_k^m(t)$ без внешних точек, содержащая счетноугольник Δ и не включающая в свою границу стороны l_n^m, $m\in\mathbb{Z}$, этого счетноугольника. Проведя надлежащие разрезы γ_n^m, $m\in\mathbb{Z}$, вдоль этих сторон счетноугольника Δ, получим семейство областей, сходящееся к счетноугольнику Δ как к ядру относительно точки w_0 при t, стремящемся к нулю.

Семейство отображений $\Psi:\Pi^+\to D(t)$ можем выбрать таким образом, чтобы выполнялось условие (2) и $\Psi(0,t)=A_1^0$ для всех $t\in[0,\infty)$. Равномерная сходимость внутри верхней полуплоскости семейства отображений $\Psi(z,t)$ к отображению f следует из приведенной далее теоремы.

Теорема 2. Пусть $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – последовательность односвязных областей, $D_n\subset\overline{\mathbb{C}}$. Все области D_n, $n\in\mathbb{N}$, содержат точку w_0 вместе с некоторой ε-окрестностью, границе каждой области D_n, $n\in\mathbb{N}$, принадлежат точки w_1, w_2, w_3. При n, стремящемся к бесконечности, последовательность областей D_n сходится к ядру D относительно точки w_0, причем границе области D принадлежат точки w_1, w_2, w_3. Тогда последовательность отображений $f_n:\Pi^+\to\overline{\mathbb{C}}$, $f_n\left(\Pi^+\right)=D_n$, нормированных условиями $f_n(0)=w_1$, $f_n(1)=w_2$, $f_n(\infty)=w_3$, сходится к отображению $f:\Pi^+\to\overline{\mathbb{C}}$, $f\left(\Pi^+\right)=D$, при n стремящемся к бесконечности равномерно внутри Π^+, причем $f(0)=w_1$, $f(1)=w_2$, $f(\infty)=w_3$.

Доказательство. Пусть последовательность отображений $g_n:\Pi^+\to\overline{\mathbb{C}}$, $g_n=g_n(\zeta)$, $g_n\left(\Pi^+\right)=D_n$ удовлетворяет условиям $g_n(\zeta_0)=w_0$, $g_n'(\zeta_0)>0$, $n\in\mathbb{N}$, где $\zeta_0\in\Pi^+$. Согласно теореме Каратеодори о сходимости последовательности областей к ядру, последовательность отображений g_n равномерно сходится к голоморфному однолистному отображению g, $g\left(\Pi^+\right)=D$ внутри верхней полуплоскости. Обозначим прообразы точек w_1, w_2, w_3 при отображении g через a, b, c соответственно, пусть, для определенности, $a<b<c$. Обозначим прообразы точек w_1, w_2, w_3 при отображении g_n через $a_n=a+\alpha_n$, $b_n=b+\beta_n$, $c_n=c+\gamma_n$ соответственно.

Построим последовательность дробно-линейных отображений $\zeta_n=\zeta_n(z)$, удовлетворяющую условиям $\zeta_n(0)=a_n$, $\zeta_n(1)=b_n$, $\zeta_n(\infty)=c_n$. Предположим сначала, что точки a, b, c – конечные, тогда отображение ζ_n будет иметь вид

$$\zeta_n(z)=\frac{z(b-a+\beta_n-\alpha_n)(c+\gamma_n)-(b-c+\beta_n-\gamma_n)(a+\alpha_n)}{z(b-a+\beta_n-\alpha_n)-(b-c+\beta_n-\gamma_n)}.$$

При n, стремящемся к бесконечности, последовательность отображений ζ_n сходится к отображению

$$\zeta(z)=\frac{z(b-c)c-(b-c)a}{z(b-c)-(b-c)}.$$

Покажем, что последовательность отображений ζ_n сходится равномерно внутри верхней полуплоскости к отображению ζ, т. е. что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что $|\zeta_n(z) - \zeta(z)| < \varepsilon$ при любом $n > N$ и для всякого $z \in K$, где K – компакт, содержащийся в верхней полуплоскости. Поскольку z принадлежит замкнутому, ограниченному множеству K, то существуют $\max\limits_{z \in K} |z|$ и $\min\limits_{z \in K} \operatorname{Im} z$, обозначим их соответственно M и m. Последовательности a_n, b_n, c_n сходятся к числам a, b, c, следовательно, можно указать такой номер N, что при $n > N$ выполняется $|\alpha_n| < \delta$, $|\beta_n| < \delta$, $|\gamma_n| < \delta$, для любого $\delta > 0$, пусть

$$\delta \le \frac{|b-a|}{3}. \tag{4}$$

Оценим модуль разности отображений ζ и ζ_n для $n > N$, имеем

$$|\zeta_n(z) - \zeta(z)| \le \frac{|z|^2 A_n + |z| B_n + C_n}{|z(b-a+\beta_n-\alpha_n)+c-b+\gamma_n-\beta_n||z(b-c)+c-b|}, \tag{5}$$

где последовательности A_n, B_n, C_n выражаются через a, b, c, α_n, β_n, γ_n. Оценим сверху последовательность A_n, имеем

$$A_n = \left|\gamma_n\left((b-a)^2 + (b-a)(\beta_n - a_n)\right)\right| \le \delta\left((b-a)^2 + |b-a| 2\delta\right).$$

В силу (4) заключаем, что

$$A_n \le \delta A,$$

где $A = \frac{5}{3}(b-a)^2$ – константа. Аналогично, для B_n, C_n получаем

$$B_n \le \delta B, \quad C_n \le \delta C.$$

Оценим знаменатель правой части неравенства (5). Для первого множителя, учитывая (4), получаем

$$|z(b-a+\beta_n-\alpha_n)+c-b+\gamma_n-\beta_n| \ge |b-a+\beta_n-\alpha_n| \operatorname{Im} z \ge$$
$$\ge (|b-a| - 2\delta) \operatorname{Im} z \ge \frac{1}{3}|b-a| \operatorname{Im} z,$$

а для второго

$$|z(b-a)+c-b| \ge |b-a| \operatorname{Im} z.$$

Таким образом,

$$|\zeta_n(z) - \zeta(z)| \le \delta R,$$

где

$$R = 3\frac{M^2 A + MB + C}{m^2 (b-a)^2}.$$

Для заданного $\varepsilon > 0$ возьмем $\delta > 0$, удовлетворяющее условию (4) и $\delta \le \frac{\varepsilon}{R}$, получим

$$|\zeta_n(z) - \zeta(z)| \le \varepsilon.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $c = \infty$. Отображение

$$\zeta_n(z) = z(b-a+\beta_n-\alpha_n) + a + \alpha_n$$

переводит верхнюю полуплоскость на верхнюю полуплоскость так, что $\zeta_n(0) = a_n$, $\zeta_n(1) = b_n$, $\zeta_n(\infty) = c_n$ и при n, стремящемся к бесконечности, сходится к отображению

$$\zeta(z) = z(b-a) + a.$$

Покажем, что последовательность отображений ζ_n сходится равномерно внутри верхней полуплоскости к отображению ζ. Пусть $z \in K$, где K – компакт, обозначим $\max\limits_{z\in K} |z|$ через M. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Возьмем такое N, чтобы $|\alpha_n| < \delta$, $|\beta_n| < \delta$, при всех $n > N$, где

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2M+1}.$$

Оценим модуль разности отображений ζ и ζ_n для $n > N$, имеем

$$|\zeta_n(z) - \zeta(z)| = |z(\beta_n - \alpha_n) + \alpha_n| \le |z||\beta_n| + |z||\alpha_n| + |\alpha_n| \le \delta(2M+1) \le \varepsilon.$$

Таким образом, последовательность отображений ζ_n сходится равномерно внутри верхней полуплоскости к отображению ζ, $\zeta(0) = a$, $\zeta(1) = b$, $\zeta(\infty) = c$.

Пусть точка $z \in K$, K – компакт, $K \subset \Pi^+$. Начиная с некоторого номера N_1, образ точки z при отображении ζ_n содержится в $U_{\varepsilon_1}(\zeta(z))$ – окрестности точки $\zeta(z)$ радиуса ε_1. Функция $|g'| : \zeta(K) \to \mathbb{R}$ непрерывна, задана на компакте и, в силу теоремы Вейерштрасса, принимает в $\zeta(K)$ наибольшее значение $|g'(\zeta)| \le h < \infty$ для всех $\zeta \in \zeta(K)$. Следовательно, при достаточно малых ε_1 окружность $|\zeta - \zeta(z)| = \varepsilon_1$ переходит в кривую, такую, что расстояние от любой ее точки до окружности $|w - g(\zeta(z))| = h\varepsilon_1$ является малой высшего порядка относительно ε_1 т.е. образ окрестности $U_{\varepsilon_1}(\zeta(z))$ содержится в окрестности точки $g(\zeta(z))$ радиуса $\varepsilon_1(h+1)$.

Пусть $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2(h+1)}$. Получаем, что

$$|g(\zeta_n(z)) - g(\zeta(z))| < \varepsilon_1(h+1) \le \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех $z \in K$ при $n \ge N_1$. Начиная с некоторого номера N_2, для всех $z \in K$ выполняется

$$|g(\zeta_n(z)) - g_n(\zeta_n(z))| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из неравенства треугольника следует, что, начиная с номера $N = \max(N_1, N_2)$, выполняется

$$|g_n(\zeta_n(z)) - g(\zeta(z))| \le |g(\zeta_n(z)) - g(\zeta(z))| + |g(\zeta_n(z)) - g_n(\zeta_n(z))| \le \varepsilon,$$

для всех $z \in K$.

Получаем, что композиция $g_n(\zeta_n(z)) = f_n(z)$ сходится равномерно внутри верхней полуплоскости к отображению f. Теорема доказана.

Теорема 2 обычным образом обобщается на случай континуального семейства областей.

Теорема 2 может быть получена с помощью [13, теорема 14.6].

Таким образом, для отображения f, переводящего верхнюю полуплоскость Π^+ на счетноугольник Δ, существует производящая функция $\Psi(z,t)$, совпадающая с отображением f при $t = 0$.

Зафиксируем на границе счетноугольника Δ точки $A_*^m = A_*^0 + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, где A_*^0 – точка, принадлежащая части границы счетноугольника от точки A_1^0 до точки A_1^1 и $A_*^0 \neq A_1^0$, $A_*^0 \neq A_1^1$. Из точек A_*^m проведем прямолинейные разрезы $\varphi^m = \varphi^0 + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$, переменной длины, зависящие от вещественного параметра $\varphi^0 = \varphi^0(t),\ 0 \le t \le \tau'$, внутрь области Δ. С увеличением параметра t от 0 до некоторого τ'', $0 \le \tau'' \le \tau'$, разрезы φ^m удлиняются соответственно до точек $\Lambda_*^m = \Lambda_*^0(\tau'') + 2\pi m$, $A_*^0 = \lim\limits_{t\to+0} \varphi(t)$. Обозначим прообраз конца разреза $\Lambda_*^0(t)$ через $\lambda(t)$, пусть $0 < \lambda(t) < 2\pi$ при $0 \le t \le \tau'$. Углы, образованные разрезом $\varphi^m(t)$ с границей области Δ, обозначим через $\alpha_{n+1}\pi$, $\alpha_{n+2}\pi$. При t, стремящемся к τ', разрезы $\varphi^m(t)$ могут замкнуться на границу счетноугольника Δ, в этом случае точка $\Lambda_*^0(\tau')$ попадает на часть границы счетноугольника от точки A_1^0 до точки A_1^1 и $\Lambda_*^0(\tau') \neq A_1^0$, $\Lambda_*^0(\tau') \neq A_1^1$. Обозначим через $\Delta(t)$ область Δ с разрезами, $\Delta(t)$ является счетноугольником с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π.

Обозначим через $f(z,t)$ отображение, переводящее верхнюю полуплоскость Π^+ на счетноугольник с разрезами $\Delta(t)$, такое, что $f\left(\Pi^+, 0\right) = \Delta$, $\lim\limits_{\operatorname{Im} z \Rightarrow +\infty} \left(f(z,t) - z\right) = 0$ и $f(0,t) = A_1^0$. Отображение $f(z,t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (2). С другой стороны, отображение $f(z,t)$, согласно теореме 1, представляется интегралом

$$f(z,t) = c(t)\int_0^z \sin\frac{\lambda(t)-\zeta}{2}\prod_{k=1}^{n+2}\left(\sin\frac{a_k^0(t)-\zeta}{2}\right)^{\sigma_k} d\zeta + A_1^0, \tag{6}$$

где a_{n+1}^0, a_{n+2}^0 – прообразы точки A_*^0, $a_1^0 = 0$, $\lambda(t)$ – прообраз подвижного конца разреза $\Lambda_*^0(t)$, $0 < a_{n+1}^0 \le \lambda(t) \le a_{n+2}^0 < 2\pi$, $\sigma_k = \alpha_k - 1$, $k = 1,\ldots,n+2$. Отметим, что параметры α_{n+1} и α_{n+2} связаны соотношениями $\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} = 1$, если $A_*^0 \neq A_k^0$, $k = 1,\ldots,n$ и $\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} = \alpha_k$, если $A_*^0 = A_k^0$, $k = 1,\ldots,n$.

Пусть при $t = 0$ известны значения всех параметров, входящих в формулу (6), то есть известно конформное отображение $f : \Pi^+ \to \Delta$, $f = f(z,0)$. Требуется определить конформное отображение $f : \Pi^+ \to \Delta(t)$, $f = f(z,t)$, при всех допустимых значениях параметра t, иначе говоря, найти при таких t акцессорные параметры $a_k^0(t)$, $\lambda(t)$, $c(t)$. Для определения акцессорных параметров отображения f получен следующий результат.

Теорема 3. Для всех $0 \le t \le \tau'$ акцессорные параметры удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{da_k^0(t)}{dt} = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\lambda(t) - a_k^0(t)}{2},\quad k = 2,\ldots,n+2, \tag{7}$$

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+2}\sigma_k \operatorname{ctg}\frac{\lambda(t)-a_k^0(t)}{2}; \tag{8}$$

$$c(t) = \text{const} = c_1, \tag{9}$$

с начальными условиями

$$a_k^0(0) = a_k^0, \quad k = 2,...,n+2,$$

$$a_{n+1}^0(0) = a_{n+2}^0(0) = \lambda(0) = f^{-1}\left(A_*^0, 0\right).$$

Замечание 1. Если $A_*^0 = A_p^0$, $p = 2,\dots,n$, то в формуле (7) отсутствует уравнение при $k = p$, а в формулах (8), (9) должно отсутствовать слагаемое при $k = p$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\Phi(z,t) = \ln f_z'(z,t)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial\Phi(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial\Phi(z,t)}{\partial z}\operatorname{ctg}\frac{\lambda(t)-z}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-2}\frac{\lambda(t)-z}{2}. \tag{10}$$

Поскольку

$$\Phi(z,t) = \ln c(t) + \ln\sin\frac{\lambda(t)-z}{2} + \sum_{k=1}^{n+2}\sigma_k \ln\sin\frac{a_k^0(t)-z}{2},$$

то ее частные производные относительно параметра t и переменной z имеют вид

$$\frac{\partial\Phi(z,t)}{\partial t} = \frac{c'(t)}{c(t)} + \lambda'(t)\operatorname{ctg}\frac{\lambda(t)-z}{2} + \sum_{k=1}^{n+2}\sigma_k\left(a_k^0(t)\right)'\operatorname{ctg}\frac{a_k^0(t)-z}{2}; \tag{11}$$

$$\frac{\partial\Phi(z,t)}{\partial z} = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\lambda(t)-z}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+2}\sigma_k \operatorname{ctg}\frac{a_k^0(t)-z}{2}. \tag{12}$$

Подставляя (11) и (12) в уравнение (10), получим соотношение

$$\frac{c'(t)}{c(t)} + \lambda'(t)\operatorname{ctg}\frac{\lambda(t)-z}{2} + \sum_{k=1}^{n+2}\sigma_k\left(a_k^0(t)\right)'\operatorname{ctg}\frac{a_k^0(t)-z}{2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{\lambda(t)-z}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\lambda(t)-z}{2}\sum_{k=1}^{n+2}\sigma_k \operatorname{ctg}\frac{a_k^0(t)-z}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-2}\frac{\lambda(t)-z}{2},$$

которое должно выполняться при всех значениях параметра t и всех z из верхней полуплоскости.

Приравнивая вычеты левой и правой частей уравнения (13) в точках $z = a_k^0(t)$, $\lambda(t)$ и сравнивая свободные члены, получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{da_k^0(t)}{dt} = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\lambda(t)-a_k^0(t)}{2}, \quad k = 2,...,n+2; \tag{14}$$

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+2}\sigma_k \operatorname{ctg}\frac{\lambda(t)-a_k^0(t)}{2}, \tag{15}$$

$$\frac{d\ln c(t)}{dt}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+2}\sigma_k,$$

с начальными условиями

$$\lim_{t\to+0}a_k^0(t)=a_k^0,\ \ k=2,\ldots,n,$$

$$\lim_{t\to+0}a_{n+1}^0(t)=\lim_{t\to+0}a_{n+2}^0(t)=\lim_{t\to+0}\lambda(t)=f^{-1}\left(A_*^0,0\right), \tag{16}$$

$$\lim_{t\to+0}c(t)=c_1.$$

Так как $\sum_{k=1}^{n+2}\sigma_k=-1$, то

$$c(t)=\text{const}=c(0)=c_1. \tag{17}$$

Теорема доказана.

Уравнения (14), (15), (17) вместе с начальными условиями (16) для акцессорных параметров позволяют путем интегрирования найти их значения в любой момент времени t, $0\le t\le\tau'$.

Предположим, что разрез φ^0 выходит не из вершины счетноугольника Δ. Обозначим длину прямолинейного отрезка $\left|A_*^0,\Lambda_*^0(t)\right|$ через s. Поскольку

$$\frac{ds}{dt}=\left|\frac{\partial f(\lambda,t)}{\partial t}\right|,$$

то, используя уравнение (3) и (6), можем показать, что

$$\frac{ds}{dt}=\left|c(t)\prod_{k=1}^{n+2}\left(\sin\frac{a_k^0(t)-\lambda(t)}{2}\right)^{\sigma_k}\right|.$$

Таким образом, значение τ'' параметра t, до которого проводится интегрирование, определяется в процессе интегрирования из соотношения

$$\left|A_*^0,\Lambda_*^0(\tau'')\right|=\int_0^{\tau''}\left|c(t)\prod_{k=1}^{n+2}\left(\sin\frac{a_k^0(t)-\lambda(t)}{2}\right)^{\sigma_k}\right|dt,$$

если разрез φ^0 выходит не из вершины счетноугольника, и соотношения

$$\left|A_*^0,\Lambda_*^0(\tau'')\right|=\int_0^{\tau''}\left|c(t)\prod_{k=1,k\ne p}^{n+2}\left(\sin\frac{a_k^0(t)-\lambda(t)}{2}\right)^{\sigma_k}\right|dt,$$

если разрез выходит из вершины A_p^0.

Для определения значения τ'' параметра t, до которого проводиться интегрирование, также можно воспользоваться соотношением

$$\left|A_*^0,\Lambda_*^0(\tau'')\right|=\left|c_1\int_{a_{n+1}^0(\tau'')}^{\lambda(\tau'')}\sin\frac{\lambda(\tau'')-\zeta}{2}\prod_{k=1}^{n+2}\left(\sin\frac{a_k^0(\tau'')-\zeta}{2}\right)^{\sigma_k}d\zeta\right|,$$

если разрез φ^0 выходит не из вершины счетноугольника, и соотношением

$$\left|A_*^0, \Lambda_*^0(\tau'')\right| = \left| c_1 \int\limits_{a_{n+1}^0(\tau'')}^{\lambda(\tau'')} \sin\frac{\lambda(\tau'')-\zeta}{2} \prod_{k=1,k\neq p}^{n+2} \left(\sin\frac{a_k^0(\tau'')-\zeta}{2}\right)^{\sigma_k} d\zeta \right|,$$

если разрез выходит из вершины A_p^0.

Теорему 3 можно применять и в том случае, когда разрезы φ^m замыкаются на границу счетноугольника. Тогда при t, стремящемся к τ', r прообразов вершин $a_k^0(t)$ стягиваются в одну точку $\lim\limits_{t\to\tau'} a_j^0(t) = \lim\limits_{t\to\tau'} a_{j+1}^0(t) = \ldots = \lim\limits_{t\to\tau'} a_{j+r}^0(t)$. Число r равно числу вершин счетноугольника $\Delta(t)$, которые отделяются от счетноугольника Δ разрезом φ^0.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Копанев С.А., Копанева Л.С.* Формула типа формулы Кристоффеля – Шварца для счетноугольника // Вестник Томского государственного университета. 2003. № 280. С. 52–54.
2. *Floryan J.M.* Schwarz-Christoffel methods for conformal mapping of regions with a periodic boundary // J. Comput. and Applied Math. 1993. No. 46. P. 77–102.
3. *Hussenpflug W.S.* Elliptic integrals and the Schwarz – Christoffel transformation // Computers Math. Applic. 1997. V. 33. No. 12. P. 15–114.
4. *Александров И.А.* Конформные отображения полуплоскости на области с симметрией переноса // Изв. вузов. Математика. 1999. № 6(445). С. 15–18.
5. *Куфарев П.П.* Об одном методе численного определения параметров в интеграле Шварца – Кристоффеля // ДАН СССР. 1947. Т. 57. №. 6. С. 535–537.
6. *Александров И.А.* Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976. 344 с.
7. *Чистяков Ю.В.* Численный метод определения функции, конформно отображающей круг на многоугольники: дис. ... к. ф.-м. н. Томский гос. ун-т, 1953.
8. *Hopkins T.R., Roberts D.E.* Kufarev's metod for determining the Schwartz – Christoffel parameters // Numer. Math. 1979. No. 33. P. 353–365.
9. *Гутлянский В.Я., Зайдан А.О.* О конформных отображениях полигональных областей // Укр. матем. журн. 1993. Т. 45. № 11. С. 1464–1467.
10. *Насыров С.Р., Низамиева Л.Ю.* Определение акцессорных параметров в смешанной обратной краевой задаче с полигональной известной частью границы // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11. № 4. С. 34–40
11. *Александров И.А., Копанева Л.С.* Левнеровские семейства отображений полуплоскости на области с симметрией переноса // Вестник Томского государственного университета. 2004. № 284. С. 5–7.
12. *Насыров С.Р.* Геометрические проблемы теории разветвленных накрытий римановых поверхностей. Казань: Магариф, 2008. 276 с.

Статья поступила 17.02.2014 г.

Kolesnikov I.A. DETERMINATION OF ACCESSORY PARAMETERS FOR MAPPING ONTO A NUMERABLE POLYGON. We consider a simply connected region of the half-plane type with symmetry of translation along the real axis by 2π and such that a part of the boundary from a point w_0 to a point $w_0+2\pi$ consists of a finite number of straight line segments and rays. The region is called a numerable polygon with symmetry of translation along the real axis by 2π. Conformal mappings of the upper half-plane onto a numerable polygon find applications in some problems of hydrodynamics, heat conduction problems, microwave theory, etc. The representation of conformal mappings of the half-plane onto a numerable polygon with symmetry of translation along the real axis by 2π is known in a form of the Christoffel–Schwarz type integral. Different efficient numerical methods of finding the accessory parameters included in the classical

Christoffel–Schwarz integral have been developed; one of them was proposed by P.P. Kufarev. In this paper, the problem of finding the accessory parameters in the Christoffel–Schwarz integral for mapping onto a numerable polygon with symmetry of translation by 2π along the real axis is reduced to the problem of integrating a system of ordinary differential equations with Cauchy initial conditions by use of an idea of P.P. Kufarev. The system of differential equations is derived using the Christoffel–Schwarz formula for mapping onto a numerable polygon and the differential equation of the Loewner type for mapping the half-plane onto the plane with cuts along pairwise disjoint simple curves γ_m tending to infinity, $\gamma_m = \gamma_0 + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$.

Keywords: conformal mapping, numerable polygon, symmetry of translation, accessory parameters, P.P. Kufarev's method.

KOLESNIKOV Ivan Aleksandrovich (M.Sc., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: ia.kolesnikov@mail.ru

REFERENCES

1. Kopanev S.A., Kopaneva L.S. Formula tipa formuly Kristoffelya – Shvartsa dlya schetnougol'nika (2003) Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. No. 28, pp. 52–54. (in Russian)
2. Floryan J.M. Schwarz – Christoffel methods for conformal mapping of regions with a periodic boundary (1993) J. Comput. and Applied Math. No. 46, pp. 77–102.
3. Hussenpflug W.S. Elliptic integrals and the Schwarz – Christoffel transformation (1997) Computers Math. Applic. V. 33. No. 12, pp. 15–114.
4. Aleksandrov I.A. Konformnye otobrazheniya poluploskosti na oblasti s simmetriey perenosa (1999) Izv. vuzov. Matematika. No. 6(445), pp. 15–18. (in Russian)
5. Kufarev P.P. Ob odnom metode chislennogo opredeleniya parametrov v integrale Shvartsa-Kristoffelya (1947) Dokl. Akad. Nauk SSSR. V. 57. No. 6, pp. 535–537. (in Russian)
6. Aleksandrov I.A. Parametricheskie prodolzheniya v teorii odnolistnykh funktsiy. Moskow, Nauka Publ., 1976. 344 p. (in Russian)
7. Chistyakov Yu.V. Chislennyy metod opredeleniya funktsii, konformno otobrazhayushchey krug na mnogougol'niki. Diss. kand. fiz.-mat. nauk. Tomsk, 1953. (in Russian)
8. Hopkins T.R., Roberts D.E. Kufarev's metod for determining the Schwartz – Christoffel parameters (1979) Numer. Math. No. 33, pp. 353–365.
9. Gutlyanskiy V.Ya., Zaydan A.O. O konformnykh otobrazheniyakh poligonal'nykh oblastey (1993) Ukr. Matem. Zhurn. V. 45. No. 11, pp. 1464–1467. (in Russian)
10. Nasyrov S.R., Nizamieva L.Yu. Opredelenie aktsessornykh parametrov v smeshannoy obratnoy kraevoy zadache s poligonal'noy izvestnoy chast'yu granitsy (2011) Izv. Sarat. univ. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika. V. 11. No. 4, pp. 34–40. (in Russian)
11. Aleksandrov I.A., Kopaneva L.S. Levnerovskie semeystva otobrazheniy poluploskosti na oblasti s simmetriey perenosa (2004) Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. No. 284, pp. 5–7. (in Russian)
12. Nasyrov S.R. Geometricheskie problemy teorii razvetvlennykh nakrytiy rimanovykh poverkhnostey. Kazan', Magarif Publ., 2008. 276 p. (in Russian)