

МЕХАНИКА

УДК 532.542

Е.И. Борзенко, О.А. Дьякова, Г.Р. Шрагер

ИССЛЕДОВАНИЕ ЯВЛЕНИЯ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ В СЛУЧАЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ИЗОГНУТОМ КАНАЛЕ¹

Исследуется напорное течение вязкой несжимаемой жидкости в изогнутом под прямым углом канале. Рассматриваются три модели взаимодействия жидкости с твердой стенкой, которые соответствуют следующим граничным условиям: прилипание, проскальзывание по закону Навье и проскальзывание с предельным напряжением. Задача решается численно с помощью конечно-разностного алгоритма. В результате расчетов получены картины установившегося течения с образованием циркуляционных зон вблизи угловых точек. Проведены параметрические исследования влияния моделей взаимодействия и основных параметров на картину течения.

Ключевые слова: *течение, вязкая жидкость, граничное условие, изогнутый канал, численное моделирование.*

В технологии переработки полимерных материалов широко реализуются течения в различных элементах технологической оснастки. Полимерная композиция в текучем состоянии является вязкой жидкостью. При математическом моделировании на стенке традиционно используется условие прилипания. Однако, экспериментальные данные [1, 2] показывают нарушение условия прилипания на твердой стенке, в результате чего реализуется условие скольжения. Подобные явления могут привести к дефектам в готовом изделии, в частности эффекту «акульей кожи» («shark-skin effect») [3].

В работе [4] на примере задачи о течении в плоском канале рассматриваются модели взаимодействия жидкости с твердой стенкой, в которых касательная скорость является функцией нормального и касательного напряжений. Установившееся течение при заданном перепаде давления в плоском канале с различной геометрией поперечного сечения с учетом условия скольжения Максвелла исследуется в [5]. Численная реализация условия скольжения Навье для метода конечных элементов применительно к плоским и пространственным течениям подробно рассмотрена в [6]. Исследования течений вязкой жидкости в микроканалах с учетом условия проскальзывания на твердых стенках проводятся в [7, 8].

В настоящей работе исследуется плоское течение несжимаемой ньютоновской жидкости в изогнутом под прямым углом канале. При этом рассматриваются три задачи с различными граничными условиями на твердой стенке: прилипание, проскальзывание Навье и проскальзывание с предельным напряжением.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 12-08-00313а) и в рамках госзадания Минобрнауки РФ № 2014 (код проекта 1943).

Постановка задачи

Исследуется плоское течение вязкой несжимаемой жидкости в изогнутом канале с заданным постоянным расходом во входном сечении. Математическая постановка течения включает уравнение Навье – Стокса и неразрывности, которые в безразмерных переменных в векторном виде записываются следующим образом:

$$\begin{cases} \text{Re}(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla p + \Delta \mathbf{U}, \\ \nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $\mathbf{U} = (U, V)$ – вектор скорости, p – давление, $\text{Re} = \rho U_0 L / \mu$ – число Рейнольдса, ρ – плотность жидкости, μ – динамическая вязкость. В качестве безразмерных масштабов длины, скорости, времени, давления используются величины: L – ширина входного канала, U_0 – среднерасходная скорость во входном сечении, L/U_0 , $\mu U_0 / L$ соответственно.

Область течения представлена на рис.1. Жидкость подается через входное сечение Γ_2 . При этом профиль скорости совпадает с параболическим профилем, характерным для установившегося течения ньютоновской жидкости в плоском бесконечном канале с заданным единичным расходом и соответствующими физической постановке условиями на твердой стенке. В выходном сечении Γ_3 используются мягкие граничные условия, заключающиеся в равенстве нулю производных по нормали к границе от компонентов вектора скорости. Входная и выходная границы находятся на достаточном удалении от уступа во избежание влияния последнего на характер течения в окрестности Γ_2 и Γ_3 . Отношение поперечных размеров входного и выходного каналов составляет 1:4.

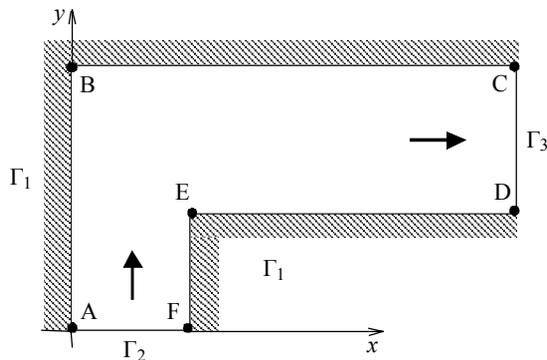


Рис. 1. Область течения

На твердой стенке наряду с традиционным условием прилипания $\mathbf{U} = 0$ (модель 1) рассматривается условие проскальзывания Навье (модель 2), в соответствии с которым касательная скорость на твердых границах Γ_1 пропорциональна касательному напряжению. В условиях данной постановки в безразмерной форме оно имеет вид

$$\begin{cases} u_s = \beta \frac{\partial u_s}{\partial n}, \\ u_n = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $\beta = \beta^* \mu / L$ – безразмерный коэффициент проскальзывания, β^* – размерный коэффициент проскальзывания, u_s – касательная скорость, u_n – нормальная скорость.

Третьей исследуемой моделью является модель проскальзывания с предельным напряжением, согласно которой жидкость на твердой стенке Γ_1 начинает проскальзывать вдоль нее, если касательное напряжение на стенке превышает некое предельное напряжение. Особенностью такой модели является то, что при ее использовании на твердой границе возникают участки, на которых выполняется условие прилипания. Условие проскальзывания для модели с предельным напряжением в безразмерной форме записывается в виде

$$\begin{cases} u_s = 0, u_n = 0, & \text{если } \tau \leq \tau_0, \\ |u_s| = \beta \left(\left| \frac{du_s}{dn} \right| - \tau_0 \right), u_n = 0, & \text{если } \tau > \tau_0, \end{cases} \quad (3)$$

где $\tau_0 = \frac{\tau_0^* L}{\mu U}$ – безразмерный критерий, $\tau = \left| \frac{\partial u_s}{\partial n} \right|$ – касательное напряжение, τ_0^* – размерное предельное напряжение. Условие проскальзывания (3) для модели с предельным напряжением при $\tau_0 = 0$ переходит в условие проскальзывания Навье (2).

Таким образом, решение задачи сводится к отысканию полей скорости и давления, которые будут удовлетворять уравнениям системы (1) с заданными граничными условиями.

Метод решения

Поставленная задача решается численно с помощью конечно-разностного метода. Для нахождения полей скорости и давления в расчетных узлах разнесенной сетки используется алгоритм PISO [9], широко применяемый для решения задач о течении вязких жидкостей. Расчет на каждом итерационном шаге состоит из двух стадий. На первой рассчитывается поле скорости, а на второй – корректируются поля давления и скорости, чтобы последнее удовлетворяло уравнению неразрывности.

Для проверки аппроксимационной сходимости был проведен ряд расчетов на последовательности сеток. На рис. 2 представлено распределение скорости U в сечении $x = 2$, проходящем через циркуляционную зону вблизи уступа E . Результаты

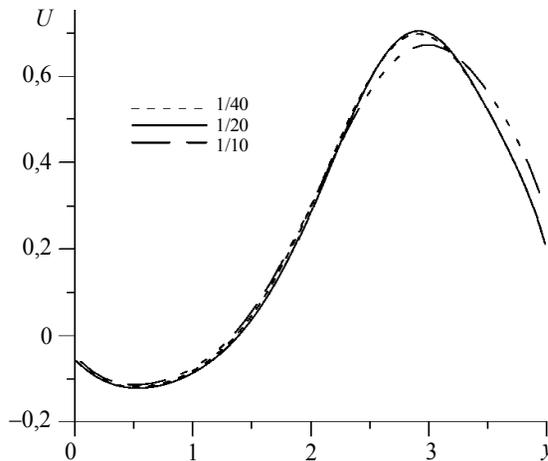


Рис. 2. Распределение скорости U в сечении $x = 2$
(модель 2, $Re = 40$, $\beta = 0,2$)

на сетках с шагом по пространству $1/20$ и $1/40$ практически не отличаются, поэтому все дальнейшие расчеты проводились на сетке с шагом по пространству $1/20$.

Сравнение результатов расчета течения с учетом условия прилипания по описанной методике с результатами, полученными с помощью пакета прикладных программ с открытым исходным кодом OpenFOAM, представлено на рис. 3. Наблюдается качественное и количественное согласование результатов.

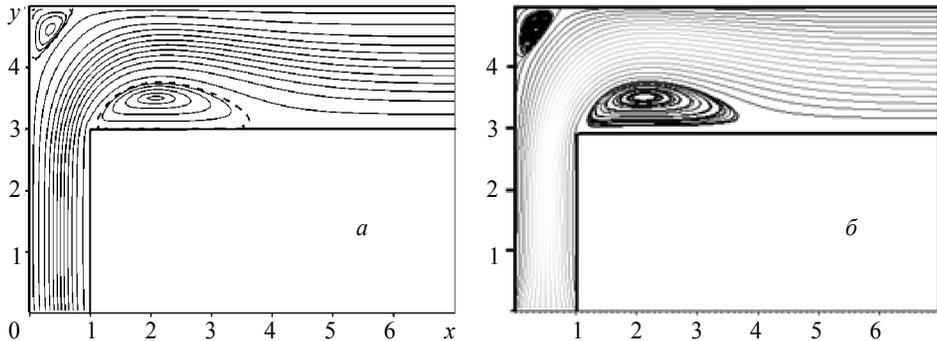


Рис. 3. Линии тока при $Re = 40$
(*a* – настоящая работа, *б* – пакет OpenFOAM)

Результаты расчетов

Численные расчеты показали, что для описанных выше моделей взаимодействия жидкости с твердой стенкой формируется установившийся режим течения. В окрестностях входной и выходной границ реализуются плоскопараллельное течение с параболическим профилем скорости; в окрестности угловых точек образуются циркуляционные зоны.

Вначале исследовалось течение с моделью 2. Граничное условие на входе, соответствующее установившемуся течению в плоском бесконечном канале с заданным постоянным расходом, имеет вид

$$V_{\text{вх}}(x) = -\frac{6}{1+6\beta}(x^2 - x - \beta).$$

На рис. 4 представлены распределения линий тока в окрестности угловой точки, демонстрирующие картину течения для различных значений коэффициента проскальзывания β . Пунктирная линия отделяет основной поток от циркуляционной зоны. Из рисунка видно, что при увеличении β происходит уменьшение циркуляционной зоны вблизи верхней угловой точки *B* и увеличение размеров циркуляционной зоны за уступом *E*. Так, при $\beta = 0$ (рис. 4, *a*) длина циркуляционной зоны 2 составляет 7,9 безразмерных единиц, а при $\beta = 0,8$ (рис. 4, *в*) – 12,5 безразмерных единиц. Дальнейшее увеличение β практически не влияет на размеры циркуляционных зон в окрестности точки *E*, а зона вблизи точки *B* исчезает.

Далее исследовалось влияние граничных условий на твердой стенке на распределение кинематических характеристик вдоль нее. На рис. 5, *a, б* приведено распределение скорости на границе *AB*, которое подтверждает постепенное уменьшение циркуляционной зоны, соответствующей отрицательным значениям скорости, вблизи верхней угловой точки *B*. Таким образом, при $\beta = 0,5$ нет отрицательной области значений касательной скорости, то есть зона отсутствует.

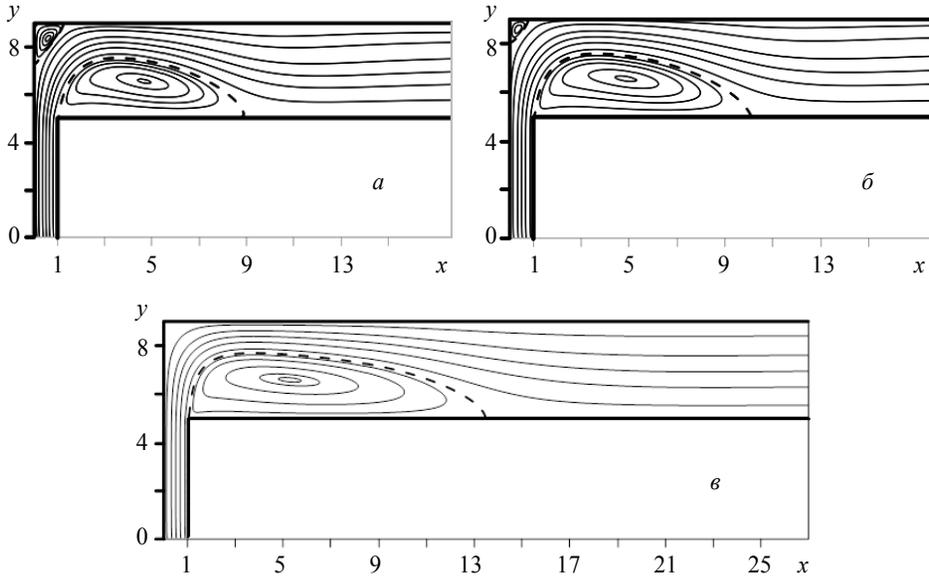


Рис. 4. Распределение линий тока при различных β
($Re = 40$, a – модель 1; модель 2: $\beta = 0,2$, $\text{в} - \beta = 0,8$)

Распределения касательной скорости на границе EF представлено на рис. 5, в . На участке твердой стенки в окрестности входа значение скорости совпадает со значением $V_{\text{вх}}(x = 1)$, соответствующем установившемуся течению жидкости в плоском бесконечном канале. С ростом координаты y начинает проявляться влияние уступа, которое в направлении, противоположном течению, тем больше, чем меньше β .

При увеличении значений коэффициента проскальзывания амплитуда распределения скорости на границе ED (рис. 5, з) возрастает, что соответствует увеличению интенсивности и размеров циркуляционной зоны вблизи уступа E ; экстремальные значения распределения скорости соответствуют максимальным значениям касательного напряжения, достигаемым как внутри циркуляционной зоны, так и за ее пределами.

В свою очередь распределение скорости на выходе при увеличении β становится более пологим, что свидетельствует об усилении явления проскальзывания, и совпадает с аналитическим решением для течения ньютоновской жидкости в плоском бесконечном канале с заданным постоянным расходом и соответствующими физической постановке условиями на твердой стенке.

На рис. 6 приведено поле давления для рассматриваемой модели. При этом для удобства анализа на выходе устанавливается нулевое значение с учетом того, что давление определяется с точностью до константы. Параллельное распределение изолиний в окрестности входной и выходной границ свидетельствует о плоскопараллельном течении. При этом наиболее высокие давления возникают в окрестности входной границы и верхней угловой точки B , чему соответствуют более светло окрашенные области, а наименьшие значения давлений достигаются в области циркуляционной зоны сразу за уступом E .

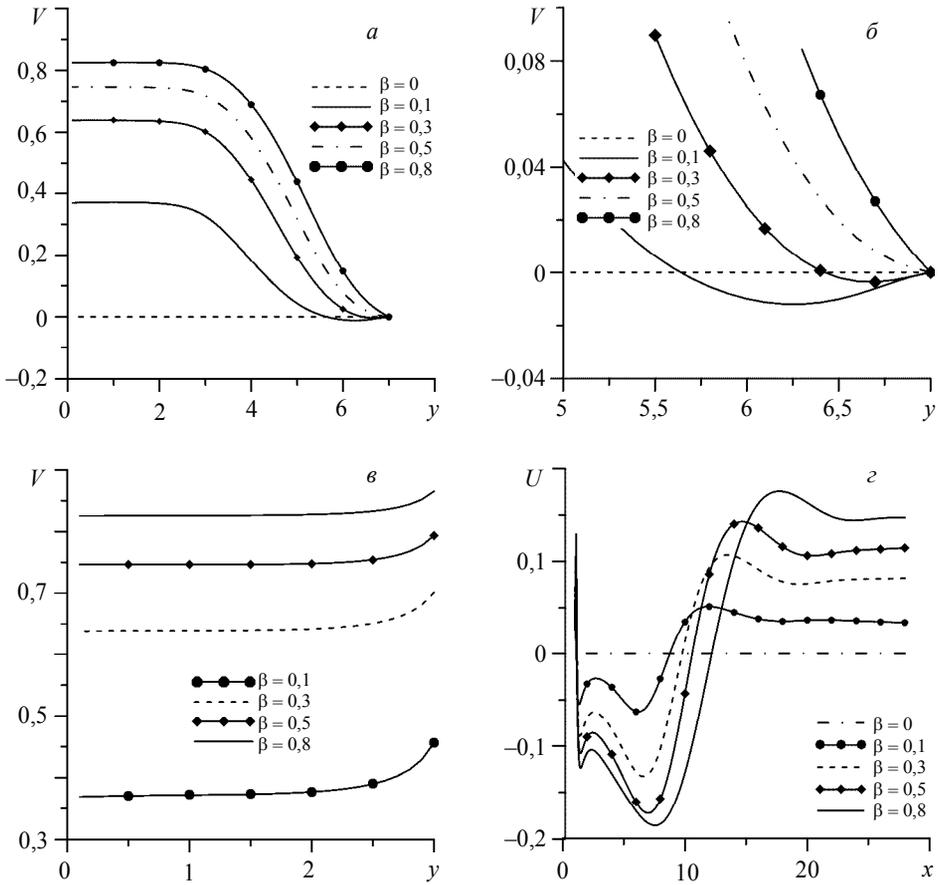


Рис. 5. Распределение скорости вдоль границ при различных β ($Re = 40$; а, б – граница AB, в – граница EF, з – граница ED)

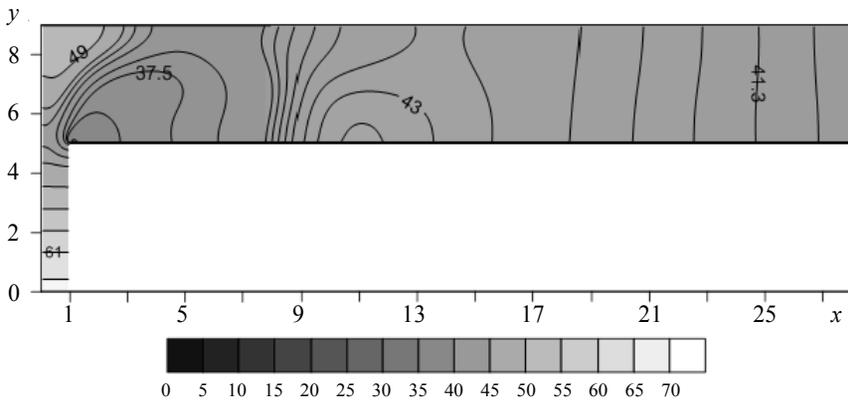


Рис. 6. Поле давления ($Re = 40, \beta = 0,2$)

При исследовании динамических характеристик от параметра модели было установлено, что при увеличении β разность давлений на входе и на выходе ΔP уменьшается, что демонстрирует рис. 7, а. Для достаточно больших β касательная скорость на твердых стенках достигает максимальных значений, соответствующих заданному расходу. При этом в областях одномерного течения профиль продольной скорости стремится к однородному распределению и стенки практически не создают сопротивления, чем объясняется асимптотическая сходимость к нулю ΔP . Результаты исследования влияния числа Re на характеристику ΔP для различных коэффициентов проскальзывания представлены на рис. 7, б. Из рисунка видно, что с ростом числа Re перепад давления ΔP уменьшается, что объясняется снижением влияния вязких сил. При этом увеличение коэффициента проскальзывания способствует уменьшению значений перепада давления.

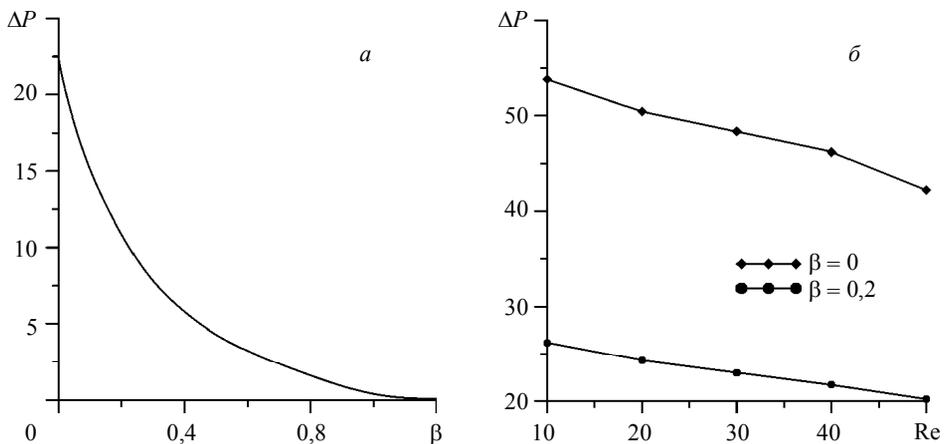


Рис. 7. Зависимость разности давлений на входе и выходе ($Re = 40$, а – от коэффициента проскальзывания β , б – от Re)

Далее рассматривалась третья модель взаимодействия, при этом распределение скорости во входной границе задавалось формулой

$$V_{\text{вх}}(x) = -\frac{6(1+6\beta\tau_0)}{1+6\beta}(x^2 - x - \beta) - \beta\tau_0,$$

Было установлено, что течение носит аналогичный предыдущей модели характер с образованием циркуляционных зон в окрестности угловых точек и формированием плоскопараллельного течения вблизи входной и выходной границ. Исследование картины течения показало, что увеличение предельного напряжения способствует изменению размеров циркуляционных зон. Поэтому далее проводилось исследование зависимости размеров циркуляционных зон от τ_0 . На рис. 8 приведены зависимости высоты h_1 (кривая 1) и длины L_1 (кривая 2) циркуляционной зоны вблизи верхней угловой точки B от предельного напряжения. Из рисунка видно, что сначала увеличение значения τ_0 приводит к росту этих размеров, а при достижении некоторых максимальных значений они начинают уменьшаться и в результате асимптотически стремятся к значениям, характерным для условий прилипания. Это объясняется тем, что рост τ_0 приводит к выполнению условия прилипания на всех стенках. Аналогичное поведение имеют размеры циркуляционных зон за уступом E (рис. 8, б, в).

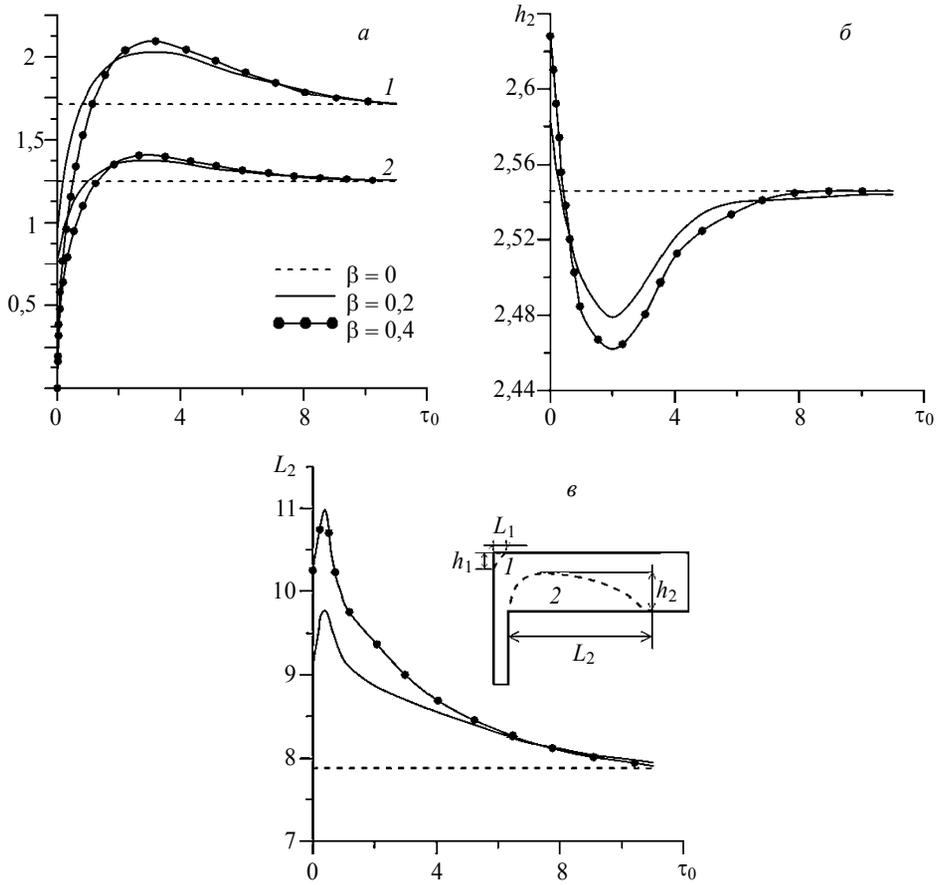


Рис. 8. Зависимость размеров циркуляционных зон от τ_0 ($Re = 40$)

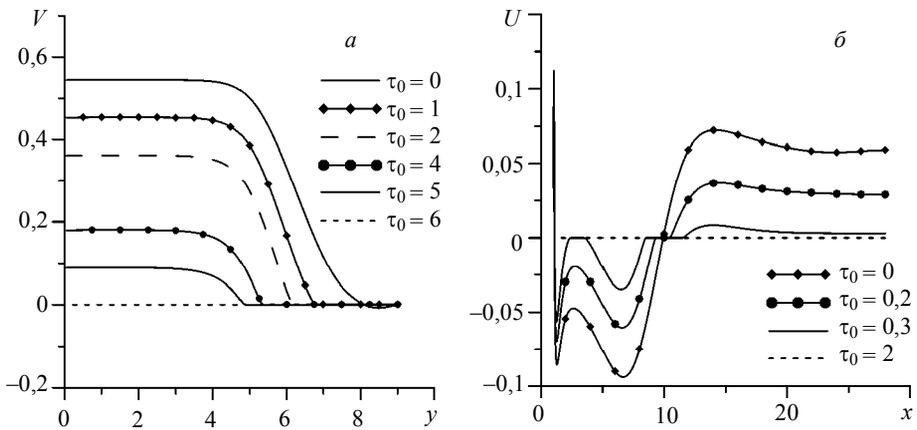


Рис. 9. Распределение скорости на твердых границах при различных τ_0 ($Re = 40$, $\beta = 0,2$, а – на границе AB , б – на границе ED)

Параметрические исследования кинематических характеристик на границе позволяют сделать вывод, что с ростом τ_0 длина участков, на которых выполняется условие прилипания, увеличивается. Приведенное на рис. 9, а распределение скорости на границе AB показывает, что при $\tau_0 = 0$ на этой границе выполняется только условие проскальзывания, а, например, при $\tau_0 = 2$ длина участка, на котором выполняется условие прилипания, составляет уже порядка 1 безразмерной единицы. При достижении критического напряжения $\tau_0 = 6$ на стенке выполняется только условие прилипания. Аналогичная зависимость от τ_0 наблюдается и для распределения скорости на других границах. В частности, на границе ED (рис. 8, б) жидкость полностью начинает прилипать при $\tau_0 = 2$, а на границе EF – при $\tau_0 = 11$.

Заключение

Исследование течения в изогнутом канале с заданным постоянным расходом на входе показало, что в случае установившегося движения характерным является наличие в потоке циркуляционных зон в окрестностях угловых точек. Продемонстрировано изменения размеров циркуляционных зон в зависимости от типа граничных условий на твердой стенке: прилипание, скольжение и скольжение с предельным напряжением. Проведены параметрические исследования распределения полей скоростей и давления в широком диапазоне изменения параметров моделей взаимодействия жидкости с твердой стенкой. Условие скольжения задавалось по закону Навье. С ростом коэффициента скольжения наблюдался рост скорости на твердых стенках. Начиная с некоторого значения, дальнейшее увеличение коэффициента практически не влияет на картину течения, а разность давлений на входе и выходе асимптотически стремится к нулю. В случае модели скольжения с предельным напряжением для малых значений предельного напряжения картина течения имеет аналогичный предыдущему случаю характер. Однако с его ростом на стенках появляются участки, где скольжение отсутствует. Дальнейшее увеличение предельного напряжения приводит к реализации течения, характерного для условия прилипания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Neto C., Evans D., Bonaccorso E.* Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies // *Reports on Progress in Physics*. 2005. V. 39. P. 2859–2897.
2. *Янков В.И.* Переработка волокнообразующих полимеров. Основы реологии полимеров и течение полимеров в каналах. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2008. 264 с.
3. *Koopmans Rudolf J., Molenaar Jaap.* The “sharkskin effect” in polymer extrusion // *Polymer Engineering & Science*. 1998. V. 38. P. 101–107.
4. *Rao I.J., Rajagopal K.R.* The effect of the slip boundary condition on the flow of fluids in a channel // *Acta Mechanica*. 1999. V. 135. P. 113–126.
5. *Bahrani M., Tamayol A., Taheri P.* Slip-flow pressure drop in microchannels of general cross section // *J. Fluids Engineering*. 2009. V. 131. P. 031201-1 – 031201-8.
6. *Volker J.* Slip with friction and penetration with resistance boundary conditions for the Navier-Stokes equation – numerical test s and aspects of the implementation // *J. Computational and Applied Mechanics*. 2002. V. 147. P. 287–300.
7. *Minakova A., Rudyak V., Dektereva A., Gavrilov A.* Investigation of slip boundary conditions in the T-shaped microchannel // *Int. J. Heat and Fluid Flow*. 2013. V. 43. P. 161–169.
8. *Hoomana K., Hooman F., Famouri M.* Scaling effects for flow in micro-channels: Variable property, viscous heating, velocity slip, and temperature jump // *Int. Communications in Heat and Mass Transfer*. 2009. V. 36. P. 192–196.

9. Issa R.J. Solution of the implicit discretized reacting flow equations by operator-splitting // Journal of Computational Physics. 1986. V. 62. P. 40–65.

Статья поступила 15.01.2014 г.

Borzenko E.I., Diakova O.A., Shrager G.R. STUDYING THE SLIP PHENOMENON FOR A VISCOUS FLUID FLOW IN A CURVED CHANNEL. The pressure flow of a viscous incompressible fluid in a channel curved at the right angle is studied. We consider three models of the interaction between the fluid and solid wall that satisfy the following boundary conditions: no-slip, Navier slip, and slip with a limit stress. The problem is solved numerically using a finite-difference algorithm based on the SIMPLE scheme. The steady pattern flow with the formation of the circulation areas around corner points is demonstrated. It is characterized by one-dimensional flow regions near inlet and outlet boundaries. Parametric studies of the influence of interaction models and main parameters on the flow pattern are performed. In particular, tangent velocity profiles at the solid wall as functions of the slip length, circulation areas' sizes, and limit stress are constructed.

Keywords: flow, viscous fluid, boundary condition, curved channel, numerical simulation

BORZENKO Evgeniy Ivanovich (Candidate of Physics and Mathematics, Assoc. Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: borzenko@ftf.tsu.ru

DLAKOVA Olga Alekseevna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: olga.dyakova.1992@mail.ru

SHRAGER Gennadiy Rafailovich (Doctor of Physics and Mathematics, Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: shg@ftf.tsu.ru

REFERENCES

1. Neto C., Evans D., Bonaccorso E. Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies (2005) Reports on Progress in Physics. V. 39, pp. 2859–2897.
2. Yankov V.I. Pererabotka voloknoobrazuyushchikh polimerov. Osnovy reologii polimerov i techenie polimerov v kanalakh. – Moskva-Izhevsk.: NITs «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika», Institut komp'yuternykh issledovaniy, 2008. 264 p. (in Russian)
3. Koopmans Rudolf J., Molenaar Jaap. The “sharkskin effect” in polymer extrusion (1998) Polymer Engineering & Science. V. 38, pp.101–107.
4. Rao I.J., Rajagopal K.R. The effect of the slip boundary condition on the flow of fluids in a channel (1999) Acta Mechanica. V.135, pp.113–126.
5. Bahrami M., Tamayol A., Taheri P. Slip-flow pressure drop in microchannels of general cross section (2009) Journal of Fluids engineering. V.131, pp.031201-1 – 031201-8.
6. Volker J. Slip with friction and penetration with resistance boundary conditions for the Navier-Stokes equation – numerical test s and aspects of the implementation (2002) Journal of computational and Applied Mechanics. V.147, pp.287–300.
7. Minakova A., Rudyak V., Dektereva A., Gavrilo A. Investigation of slip boundary conditions in the T-shaped microchannel (2013) International Journal of Heat and Fluid Flow. V. 43, pp.161–169.
8. Hoomana K., Hooman F., Famouri M. Scaling effects for flow in micro-channels: Variable property, viscous heating, velocity slip, and temperature jump (2009) International Communications in Heat and Mass Transfer. V. 36, pp.192–196.
9. Issa R.J. Solution of the implicit discretized reacting flow equations by operator-splitting (1986) Journal of Computational Physics. V. 62, pp. 40–65.