МАТЕМАТИКА

УДК 517.18:514.1

Р.А. Богданова

ГРУППА ДВИЖЕНИЙ СИМПЛИЦИАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ КАК РЕШЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Решена задача о нахождении локальной группы множества всех движений симплициальной плоскости, являющейся феноменологически симметричной двумерной геометрией. Основу работы составляют аналитические методы, применяемые в решении функционального уравнения.

Ключевые слова: *феноменологическая симметрия*, *феноменологически симметричная двумерная геометрия*, *локальная группа движений*, *функциональное уравнение.*

Метрическая точка зрения на геометрию, возникшая в XIX веке, отраженная в работах Г. Гельмгольца [1] и А. Пуанкаре [2], тесно связанная с групповой концепцией Ф. Клейна [3], позволила Ю.И. Кулакову создать достаточно общую концепцию расстояния – теорию физических структур [4], основу которой составляет так называемая *феноменологическая симметрия*. Сущность феноменологической симметрии состоит в том, что в n-мерном пространстве между всеми взаимными расстояниями для $n+2$ произвольных точек имеется функциональная связь [5]. Г.Г. Михайличенко [6, 7] установлена эквивалентность групповой и феноменологической симметрий, позволившая ему построить полную классификацию двумерных феноменологически симметричных геометрий [8]. В этой классификации наряду с хорошо известными двумерными геометриями (плоскость Евклида, плоскость Лобачевского, плоскость Минковского, симплектическая плоскость, двумерная сфера, двумерный однополосный гиперболоид) представлены плоскость Гельмгольца, в отношении которой проводились исследования В.А. Кыровым [9], псевдогельмгольцева плоскость и симплициальная плоскость, которая также была отмечена и использована геометрами А.А. Александровым [10] и Р.И. Пименовым [11].

Целью данного исследования является нахождение локальной группы множества всех движений симплициальной плоскости как решение функционального уравнения.

Определение множества всех движений плоскости, сохраняющих *метрическую функцию* [7] как функцию пары точек, приводит к разработке аналитических методов решения соответствующих функциональных уравнений, что позволит дополнить теорию функциональных уравнений, поскольку в ней известно немного общих методов их решения [12–15].

Пусть имеется множество M_2, являющееся гладким двумерным многообразием, а также отображение некоторого множества $G_f \, I \, M_2 \times M_2$ в R, сопоставляющее каждой паре точек $(A,B) \, I \, G_f$ вещественное число $f(A,B) \, I \, R$.

Если x, y – локальные координаты двумерного многообразия M_2, то для отображения $f(A,B)$ можно записать его локальное координатное представление (сохранив функциональный символ f):

$$f(A,B) = f(x_A, y_A, x_B, y_B), \tag{1}$$

где x_A, y_A, x_B, y_B – локальные координаты текущих точек A и B пары $(A,B) \in G_f$.

Следуя [8], будем точки многообразия M_2 обозначать i, j, k, l и соответственно их координаты x_i, y_i и т.п.

Здесь и везде далее поскольку $i = (x_i, y_i)$, $j = (x_j, y_j)$, то $f(i,j)$, согласно (1), есть некоторая функция $f(x_i, y_i, x_j, y_j)$ и, в частности

$$\frac{\partial f(i,j)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x_i, y_i, x_j, y_j)}{\partial x_i}. \tag{2}$$

В отношении метрической функции $f(A,B)$ будем предполагать выполнение следующих аксиом:

A1. Область определения G_f функции $f(A,B)$ есть открытое и плотное множество в $M_2 \times M_2$.

A2. Функция f в локальных координатах имеет гладкость того порядка, который достаточен для наших целей.

A3 (Аксиома невырожденности). Для координатного представления функции $f(A,B)$ выполняются следующие неравенства:

$$\frac{\partial(f(i,j))}{\partial(x_i, y_i)} \neq 0, \ \frac{\partial(f(i,j))}{\partial(x_j, y_j)} \neq 0, \tag{3}$$

где x_i, y_i и x_j, y_j – локальные координаты текущих точек i и j пары $(i,j) \in G_f$ (следует учитывать правила обозначений, принятые нами в (2)).

Заметим, что при условии (3) ранг касательного отображения для отображения (1) равен 2, то есть максимален.

Рассмотрим гладкое отображение $F_U : U \to E \subseteq R^6$, где $U \subseteq M_2 \times M_2 \times M_2 \times M_2$, сопоставляющее четверке (i,j,k,l) точку $z = (f(i,j), f(i,k), f(i,l), f(j,k), f(j,l), f(k,l)) \in R^6$, область определения которого U, очевидно, открыта и плотна в $M_2 \times M_2 \times M_2 \times M_2$. Далее, пусть имеется ещё одно гладкое отображение $\Phi : E \to S \subseteq R$, где $E \subset R^6$, которое сопоставляет точке $z \in R^6$ число $\Phi(z) \in R$.

Определение 1. Будем говорить, что функция $f(i,j)$ задает на гладком двумерном многообразии M_2 *двумерную феноменологически симметричную геометрию ранга* 4, если кроме аксиом **A1, A2, A3** выполняется аксиома **A4**.

A4 (Аксиома феноменологической симметрии). Существует плотное в $U \subseteq M_2 \times M_2 \times M_2 \times M_2$ подмножество, для каждой точки Ψ которого, то есть четверки (i,j,k,l) и некоторой ее окрестности $\varepsilon(\langle i,j,k,l \rangle)$, найдется такое достаточно гладкое отображение $\Phi : E \to S \subseteq R$, определенное в некоторой области $E \subset R^6$, содержащей точку $z = (F(\varepsilon(\langle i,j,k,l \rangle)))$, что в ней $\operatorname{grad}\Phi \neq \bar{0}$ и множество $F((\varepsilon\langle i,j,k,l \rangle))$ является подмножеством множества нулей функции Φ, то есть

$$\Phi\big(f(i,j),f(i,k),f(i,l),f(j,k),f(j,l),f(k,l)\big)=0 \tag{4}$$

для всех упорядоченных пар четверки (i, j, k, l) из $\varepsilon(\langle i,j,k,l\rangle)$.

Данные построения поясняет рис. 1:

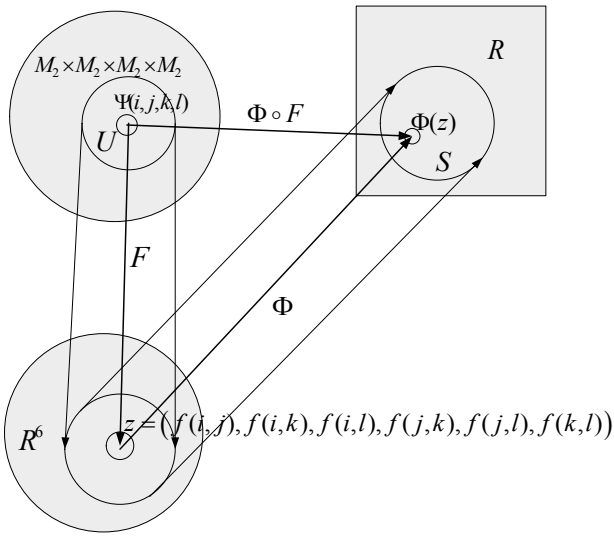

Рис. 1. Диаграмма отображений двумерной феноменологически симметричной геометрии ранга 4

Если данная аксиома выполнена для отображения

$$\Phi\big(f(i,j),f(i,k),f(i,l),f(j,k),f(j,l),f(k,l)\big),$$

то на множестве E величины $f(i,j), f(i,k), f(i,l), f(j,k), f(j,l), f(k,l)$ связаны независимым функциональным соотношением (4).

Функциональная матрица отображения F_U:

$$A=\begin{pmatrix}
\frac{\partial f(i,j)}{\partial x_i} & \frac{\partial f(i,k)}{\partial x_i} & \frac{\partial f(i,l)}{\partial x_i} & 0 & 0 & 0\\
\frac{\partial f(i,j)}{\partial y_i} & \frac{\partial f(i,k)}{\partial y_i} & \frac{\partial f(i,l)}{\partial x_i} & 0 & 0 & 0\\
\frac{\partial f(i,j)}{\partial x_j} & 0 & 0 & \frac{\partial f(j,k)}{\partial x_j} & \frac{\partial f(j,l)}{\partial x_j} & 0\\
\frac{\partial f(i,j)}{\partial y_j} & 0 & 0 & \frac{\partial f(j,k)}{\partial y_j} & \frac{\partial f(j,l)}{\partial y_j} & 0\\
0 & \frac{\partial f(i,k)}{\partial x_k} & 0 & \frac{\partial f(j,k)}{\partial x_k} & 0 & \frac{\partial f(k,l)}{\partial x_k}\\
0 & \frac{\partial f(i,k)}{\partial y_k} & 0 & \frac{\partial f(j,k)}{\partial y_k} & 0 & \frac{\partial f(k,l)}{\partial y_k}\\
0 & 0 & \frac{\partial f(i,l)}{\partial x_l} & 0 & \frac{\partial f(j,l)}{\partial x_l} & \frac{\partial f(k,l)}{\partial x_l}\\
0 & 0 & \frac{\partial f(i,l)}{\partial y_l} & 0 & \frac{\partial f(j,l)}{\partial y_l} & \frac{\partial f(k,l)}{\partial y_l}
\end{pmatrix}, \tag{5}$$

имеет 8 строк и 6 столбцов, а ранг этой матрицы есть ранг касательного отображения.

Определенная выше двумерная феноменологически симметричная геометрия ранга 4 наделена групповой симметрией [8].

Определение 2. Гладкое локальное взаимно однозначное (обратимое) отображение

$$x' = \lambda(x, y), \quad y' = \lambda(x, y)\,, \tag{6}$$

удовлетворяющее условию

$$\frac{\partial(\lambda(x, y), \sigma(x, y)}{\partial(x, y)} \neq 0\,, \tag{7}$$

называется движением, если оно сохраняет метрическую функцию

$$f\left(\lambda(i), \lambda(j), \sigma(i), \sigma(j)\right) = f(i, j)\,, \tag{8}$$

где $\lambda(i) = \lambda(x_i, y_i), \quad \lambda(j) = \lambda(x_j, y_j), \quad \sigma(i) = \sigma(x_i, y_i),$
$\sigma(j) = \sigma(x_j, y_j), \quad f(i, j) = f(x_i, y_i, x_j, y_j).$

Здесь и в последующем изложении материала будем использовать эти обозначения.

Рассмотрим симплициальную плоскость, которая задается на гладком двумерном многообразии метрической функцией

$$f(i, j) = (x_i - x_j)^m (y_i - y_j)^n\,, \tag{9}$$

где m, n – отличные от нуля различные целые числа. Условия $m \neq 0, n \neq 0$ делают функцию, в которую координаты x_i, y_i и x_j, y_j точек i и j входят существенным образом в соответствие с аксиомой **A3**, невырожденной, а условием $m \neq n$ исключается двумерная геометрия плоскости Миньковского, явный вид метрической функции которой приведен в работе [8, с. 13].

Для любых четырех точек i, j, k, l симплициальной плоскости шесть взаимных расстояний связаны уравнением (4), выражающем ее феноменологическую симметрию, явный вид которого для целых чисел m, n неизвестен. Наличие связи (4) подтверждается непосредственным вычислением в программе Matlab ранга функциональной матрицы (5), который равен 5.

Преобразование (6) сохраняет метрическую функцию (9):

$$(\lambda(i) - \lambda(j))^m (\sigma(i) - \sigma(j))^n = (x_i - x_j)^m (y_i - y_j)^n\,. \tag{10}$$

Равенство (10) является функциональным уравнением на множество движений (6).

Теорема. Множество всех движений симплициальной плоскости есть трехпараметрическая группа ее преобразований

$$x' = \alpha x + \gamma, \quad y' = \beta y + \delta, \tag{11}$$

где $\alpha^m \beta^n = 1$.

Доказательство. Заметим, что в отношении преобразования (6), определяющего движение, предполагается только его гладкость и обратимость, выражаемая условием (7).

Аналитический метод решения функциональных уравнений типа (10) состоит в сведении их к алгебраическим и дифференциальным уравнениям [16].

Продифференцируем функциональное уравнение по координатам x_j, y_j точки j и разделим на него результаты дифференцирования:

$$\left.\begin{aligned} \frac{m}{\lambda(i)-\lambda(j)}\frac{\partial\lambda(j)}{\partial x_j}+\frac{n}{\sigma(i)-\sigma(j)}\frac{\partial\sigma(j)}{\partial x_j}=\frac{m}{x_i-x_j},\\ \frac{m}{\lambda(i)-\lambda(j)}\frac{\partial\lambda(j)}{\partial y_j}+\frac{n}{\sigma(i)-\sigma(j)}\frac{\partial\sigma(j)}{\partial y_j}=\frac{n}{y_i-y_j}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Полученные два равенства (12) рассмотрим как систему алгебраических уравнений относительно дробей $\dfrac{1}{\lambda(i)-\lambda(j)}$, $\dfrac{1}{\sigma(i)-\sigma(j)}$.

Определитель этой системы (12)

$$\Delta(j)=\begin{vmatrix} m\dfrac{\partial\lambda(j)}{\partial x_j} & n\dfrac{\partial\sigma(j)}{\partial x_j}\\ m\dfrac{\partial\lambda(j)}{\partial y_j} & n\dfrac{\partial\sigma(j)}{\partial y_j} \end{vmatrix}=mn\frac{\partial(\lambda(j),\sigma(j))}{\partial(x_j,y_j)},$$

в котором $\Delta(j)=\Delta(x_j,y_j)$, вследствие условия (7) отличен от нуля, и поэтому она может быть решена методом Крамера:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\lambda(i)-\lambda(j)}=\frac{mn}{\Delta(j)}\frac{\partial\sigma(j)}{\partial y_j}\frac{1}{x_i-x_j}-\frac{n^2}{\Delta(j)}\frac{\partial\sigma(j)}{\partial x_j}\frac{1}{y_i-y_j},\\ \frac{1}{\sigma(i)-\sigma(j)}=-\frac{m^2}{\Delta(j)}\frac{\partial\lambda(j)}{\partial y_j}\frac{1}{x_i-x_j}+\frac{mn}{\Delta(j)}\frac{\partial\lambda(j)}{\partial x_j}\frac{1}{y_i-y_j}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Для сокращения записи последующего изложения материала представим решения (13) в виде

$$\frac{1}{\lambda(i)-\lambda(j)}=\frac{a}{u}+\frac{g}{\vartheta},\quad \frac{1}{\sigma(i)-\sigma(j)}=\frac{b}{u}+\frac{h}{\vartheta}, \tag{14}$$

введя следующие обозначения для переменных и коэффициентов соответственно:

$$u=x_i-x_j,\quad \vartheta=y_i-y_j,\quad a=\frac{mn}{\Delta(j)}\frac{\partial\sigma(j)}{\partial y_j},\quad b=-\frac{m^2}{\Delta(j)}\frac{\partial\lambda(j)}{\partial y_j},$$

$$g=-\frac{n^2}{\Delta(j)}\frac{\partial\sigma(j)}{\partial x_j},\quad h=\frac{mn}{\Delta(j)}\frac{\partial\lambda(j)}{\partial x_j}.$$

Согласно этим обозначениям, переменные u, ϑ независимы, а коэффициенты a, b, g, h могут зависеть от точки j, причем в силу условия (7) $ha-bg\neq 0$.

Из решений (14) найдем разности

$$\lambda(i)-\lambda(j)=\frac{u\vartheta}{gu+a\vartheta},\quad \sigma(i)-\sigma(j)=\frac{u\vartheta}{hu+b\vartheta} \tag{15}$$

и подставим их в исходное функциональное уравнение (10):

$$\frac{u^m\vartheta^m}{(gu+a\vartheta)^m}\frac{u^n\vartheta^n}{(hu+b\vartheta)^n}=u^m\vartheta^n, \tag{16}$$

откуда после простых преобразований получаем тождество

$$(gu + a\vartheta)^m (hu + b\vartheta)^n = u^n \vartheta^m .$$

После дифференцирования этого тождества по переменной u получим выражение

$$\frac{mg(gu + a\vartheta)^m (hu + b\vartheta)^n}{gu + a\vartheta} + \frac{nh(gu + a\vartheta)^m (hu + b\vartheta)^n}{hu + b\vartheta} = \frac{nu^n \vartheta^m}{u},$$

которое с учетом тождества $(gu + a\vartheta)^m (hu + b\vartheta)^n = u^n \vartheta^m$ примет следующий вид:

$$\frac{mg}{gu + a\vartheta} + \frac{nh}{hu + b\vartheta} = \frac{n}{u}.$$

Преобразуем последнее выражение:

$$\frac{mghu^2 + (m-n)bgu\vartheta - nab\vartheta^2}{u(gu + a\vartheta)(hu + b\vartheta)} = 0,$$

откуда

$$mghu^2 + (m-n)bgu\vartheta - nab\vartheta^2 = 0. \qquad (17)$$

Переменные $u = x_i - x_j$, $\vartheta = y_i - y_j$ как функции координат точки i независимы. Дважды дифференцируя тождество (17) по переменным u и ϑ, получим следующие ограничения на коэффициенты выражений (15): $hg = 0, bg = 0, ab = 0,$ которые имеют место одновременно с неравенством $ha - bg \neq 0$. Из того что $bg = 0$, с учетом неравенства следует, что $ha \neq 0$, откуда $h \neq 0, a \neq 0$, и поэтому $g = 0, b = 0$. Но тогда значительно упрощаются выражения (15) для разностей с учетом введенных обозначений $u = x_i - x_j$, $\vartheta = y_i - y_j$:

$$\lambda(i) - \lambda(j) = \frac{x_i - x_j}{a}, \quad \sigma(i) - \sigma(j) = \frac{y_i - y_j}{h}, \qquad (18)$$

в которых, напомним, $a = a(j) \neq 0, h = h(j) \neq 0$.

Дифференцируя результат (18) по координатам точки i, разделяем переменные:

$$\frac{\partial\lambda(x_i, y_i)}{\partial x_i} = \frac{1}{a(x_j, y_j)} = const = \alpha, \quad \frac{\partial\sigma(x_i, y_i)}{\partial y_i} = \frac{1}{h(x_j, y_j)} = const = \beta .$$

Введение констант α и β позволяет в выражениях (18) осуществить дополнительное разделение переменных:

$$\lambda(x_i, y_i) - \alpha x_i = \lambda(x_j, y_j) - \alpha x_j = const = \gamma,$$
$$\sigma(x_i, y_i) - \beta y_i = \sigma(x_j, y_j) - \beta x_j = const = \delta,$$

то есть

$$\lambda(x, y) = \alpha x + \gamma, \quad \sigma(x, y) = \beta y + \delta. \qquad (19)$$

Дополнительная связь на константы выражений (19) возникает при их подстановке в исходное функциональное уравнение (10):

$$\alpha^m \beta^n = 1. \qquad (20)$$

Функции (19) со связью (20) как полное решение функционального уравнения (10) по формулам (6) определяют трехпараметрическое множество всех движений

(11) симплициальной плоскости. Это множество является группой по композиции движений, причем выполнение всех аксиом группы очевидно. Теорема полностью доказана.

Дополнительно отметим, что метрическая функция симплициальной плоскости (10) является двухточечным инвариантом группы преобразований (11). С другой стороны, каждый такой инвариант $f(i,j) = f(x_i, y_i, x_j, y_j)$ является решением функционального уравнения

$$f(\lambda(x_i, y_i), \sigma(x_i, y_i), \lambda(x_j, y_j), \sigma(x_j, y_j)) = f(x_i, y_i, x_j, y_j)$$

для группы преобразований (6), определяемой выражениями (19) функций λ и σ. Общее решение этого уравнения

$$\tilde{f}(i,j) = \chi\left((x_i - x_j)^m (y_i - y_j)^n\right)$$

совпадает с метрической функцией (9) с точностью до гладкого преобразования $\chi(\tilde{f}) \to f$ и замены локальных координат x, y.

Автор выражает глубокую благодарность д.ф.-м.н., профессору Г.Г. Михайличенко за постановку задачи и многочисленные полезные замечания и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гельмгольц Г.* О фактах, лежащих в основании геометрии // Об основаниях геометрии. М.: ГИТТЛ, 1956. С. 366–388.
2. *Пуанкаре А.* Об основных гипотезах геометрии // Об основаниях геометрии. М.: ГИТТЛ, 1956. С. 388–398.
3. *Клейн Ф.* Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований ("Эрлангенская программа") // Об основаниях геометрии. М.: ГИТТЛ, 1956. С. 402–434.
4. *Кулаков Ю.И.* Теория физических структур. М.: Доминико, 2004.
5. *Кулаков Ю.И.* Геометрия пространств постоянной кривизны как частный случай теории физических структур // ДАН СССР. 1970. Т. 193. № 5. С. 985–987.
6. *Михайличенко Г.Г.* О групповой и феноменологической симметриях в геометрии // ДАН СССР. 1983. Т. 269. № 2. С. 284–288. (Michailichenko G.G. On group and phenomenological simmetries in geometry // Soviet Math. Dokl. 1983. V. 27. No. 2. P. 325–326.)
7. *Михайличенко Г.Г.* Полиметрические геометрии. Новосибирск: НГУ, 2001.
8. *Михайличенко Г.Г.* Двумерные геометрии. Барнаул: Изд-во Барнаульского государственного педагогического университета, 2004.
9. *Кыров В.А.* Гельмгольцевы пространства размерности два // Сиб. матем. журн. 2005. Т. 46. № 6. С. 1341–1359.
10. *Александров А.Д.* Геометрия и приложения (Избранные труды; Т. 1). Новосибирск: Наука, 2006.
11. *Пименов Р.И.* Необходимые и достаточные условия линейности преобразований, сохраняющих конусы // Матем. заметки. 1969. Т. 6. № 4. С. 361–369.
12. *Азбелев Н.В., Максимов В.П.*, *Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002.
13. *Kuczma M.* Functional equations in a single variable. Polska Akademia Nauk. Monografie matematyczne. T. 46. Warszawa: Polish Scientific Publishers, 1968.
14. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005.
15. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974
16. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1966.

Статья поступила 17.12.2013 г.

Bogdanova R.A. MOTION GROUP OF THE SIMPLICIAL PLANE AS A SOLUTION OF A FUNCTIONAL EQUATION

Proceeding from metrical viewing of geometry, which appeared in the 19th century in works of H. Helmholtz and A. Poincare and which is deeply connected with F. Klein's group conception, Yu.I. Kulakov created a general conception of distance – the physical structures' theory based on the so-called phenomenological symmetry. The essence of this symmetry is the fact that there is a functional connection between all mutual distances for $n + 2$ arbitrary points in the n-dimensional space. G.G. Mikhailichenko's works established the equivalence of the group and phenomenological symmetries, which helped him to construct a complete classification of two-dimensional phenomenologically symmetric geometries. Along with well-known two-dimensional geometries (Euclidean plane, Lobachevsky plane, Minkowski plane, symplectic plane, two-dimensional sphere, and two-dimensional one-sheet hyperboloid) this classification shows the Helmholtz plane, pseudo-Helmholtz plane, and simplicial plane which was also the object of study of such geometricians as A.A. Aleksandrov and R.I. Pimenov.

The aim of this study is to find a local group of the set of all simplicial plane motions as a solution for a functional equation.

Defining the set of plane motions preserving the metric function as a function of a pair of points leads to developing analytical methods for solving the corresponding functional equations; that allows one to complement the theory of functional equations since there are few general methods of their solution.

It has been found that any motion of a simplicial plane is defined by a linear transformation, which was not assumed beforehand and was not obvious. Nevertheless the whole set of motions turned out to be a group essentially dependent on three independent parameters. Thus, a simplicial plane is endowed with the group symmetry of the 3rd degree, i.e. it is a phenomenologically symmetric geometry with maximum mobility. It should be noted that this result is not valid for an arbitrary geometry but is typical just for phenomenologically symmetric geometries.

Keywords: phenomenological symmetry, phenomenologically symmetric two-dimensional geometry, local group of movements, functional equation.

BOGDANOVA Rada Alexandrovna
(Gorno-Altaisk State University, Gorno-Altaisk, Russian Federation)

E-mail: bog-rada@yandex.ru

REFERENCES

1. Gel'mgol'c G. O faktah, lezhashhih v osnovanii geometrii. *Ob osnovanijah geometrii*. Moscow, GITTL Publ., 1956, pp. 366–388. (in Russian)
2. Puankare A. Ob osnovnyh gipotezah geometrii. *Ob osnovanijah geometrii*. Moscow, GITTL Publ., 1956, p. 388–398. (in Russian)
3. *Klejn F.* Sravnitel'noe obozrenie novejshih geometricheskih issledovanij ("Jerlangenskaja programma"). *Ob osnovanijah geometrii*. Moscow, GITTL Publ., 1956. pp. 402–434. (in Russian)
4. Kulakov Ju.I. *Teorija fizicheskih struktur*. Moscow, Dominiko Publ., 2004. (in Russian)
5. Kulakov Ju.I. Geometrija prostranstv postojannoj krivizny kak chastnyj sluchaj teorii fizicheskih struktur (1970) *Dokl. AN SSSR*, v. 193, no. 5, pp. 985–987. (in Russian)
6. *Michailichenko G.G.* On group and phenomenological simmetries in geometry (1983) *Soviet Math. Dokl*., v. 27, no. 2, p. 325–326.
7. Mihajlichenko G.G. *Polimetricheskie geometrii*. Novosibirsk, NGU Publ., 2001. (in Russian)
8. Mihajlichenko G.G. *Dvumernye geometrii*. Barnaul, Izd-vo Barnaul'skogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta, 2004. (in Russian)
9. *Kyrov V.A.* Gel'mgol'cevy prostranstva razmernosti dva (2005) *Sib. matem. zhurn*., v. 46, no. 6, pp. 1341–1359. (in Russian)

10. Aleksandrov A.D. *Geometrija i prilozhenija* (*Izbrannye trudy*; V. 1). Novosibirsk, Nauka Publ., 2006. (in Russian)
11. Pimenov R.I. Neobhodimye i dostatochnye uslovija linejnosti preobrazovanij, sohranjajushhih konusy (1969) *Matem. zametki*, v. 6, no. 4, pp. 361 – 369. (in Russian)
12. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rahmatullina L.F. *Jelementy sovremennoj teorii funkcional'no-differencial'nyh uravnenij. Metody i prilozhenija*. Moscow, Institut komp'juternyh issledovanij Publ., 2002. (in Russian)
13. Kuczma M. *Functional equations in a single variable*. *Polska Akademia Nauk. Monografie matematyczne*, v. 46. Warszawa, Polish Scientific Publishers, 1968.
14. Poljanin A.D., Zajcev V.F., Zhurov A.I. *Metody reshenija nelinejnyh uravnenij matematicheskoj fiziki i mehaniki*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005. (in Russian)
15. Pontrjagin L.S. *Obyknovennye differencial'nye uravnenija*. Moscow, Nauka Publ., 1974. (in Russian)
16. Arnol'd V.I. *Obyknovennye differencial'nye uravnenija*. Moscow, Nauka Publ., 1966. (in Russian)