ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2014 Математика и механика № 4(30)

УДК 517.928

А.А. Талиев

ЗАТЯГИВАНИЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕПРЕРЫВНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

Рассмотрено сингулярно возмущенное уравнения с непрерывными правыми частями, для которых не выполняется условие устойчивости точки покоя присоединенного уравнения на рассматриваемом промежутке. Доказана теорема существования и единственности решения. Приведен пример.

Ключевые слова: *сингулярно возмущенное уравнение, вырожденное присоединенное уравнение, точка покоя, устойчивость и неустойчивость точки покоя, непрерывные функции.*

Пусть рассматривается задача

$$\varepsilon \cdot \dot{x}(t,\varepsilon) = f(\varepsilon, t, x(t,\varepsilon)); \tag{1}$$

$$x(t_0,\varepsilon) = x^0, \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ – малый параметр; x^0 – const; $t \in [t_0, T]$, $[t_0, T]$ – отрезок действительной оси, $t_0 < T$.

Уравнения вида (1) называются сингулярно возмущенными уравнениями [1, 2]. Системы уравнений гораздо более общего вида исследованы в [2].

Центральной проблемой в теории сингулярно возмущенных уравнений является близость решения рассматриваемой задачи, если она существует, к решению вырожденного уравнения, (которая получается из (1) при $\varepsilon = 0$), т.е.

$$f(0, t, \tilde{x}(t)) = 0. \tag{3}$$

Предположим, что уравнение (3) имеет изолированное решение $\tilde{x}(t) = \varphi(t)$ [2].

В [2] данная задача решена в терминах присоединенной системы.

Для (1) присоединенным уравнением будет

$$\frac{d\xi(\tau)}{d\tau} = f(0, t, \xi(\tau)), \tag{4}$$

где $0 \le \tau < +\infty$, t рассматривается как параметр и $t \in [t_0, T]$.

При решении данной проблемы одним из основных условий является устойчивость точки покоя для (4). Если учесть (3), то $\xi(\tau) = \varphi(t)$ будет точкой покоя для (4).

В [1] исследованы сингулярно возмущенные уравнения при нарушении данного условия. При этом задача решена для уравнений с аналитическими правыми частями в некоторой области $H \subset C$ – комплексная плоскость.

В данной работе рассматривается задача

$$\varepsilon \cdot \dot{x}(t,\varepsilon) = \lambda(t) \cdot x(t,\varepsilon) + \varepsilon \cdot g(t, x(t,\varepsilon)); \tag{5}$$

$$x(t_0,\varepsilon) = x^0, \tag{6}$$

где $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$ – малый параметр; x^0 – const; $t\in[t_0,T]$, $[t_0,T]$ – отрезок действительной оси, $t_0<T$, x – скаляр.

От правых частей уравнения (5) потребуем выполнения следующих условий:

U.I. 1. $\lambda(t)<0,\ t_0\le t<T_0;\ \lambda(T_0)=0;$

$\lambda(t)>0,\ T_0<t\le T;\ \lambda(t)\in C[t_0,T],$

где $C[t_0,T]$ – множество непрерывных функций на промежутке $[t_0,T]$.

$$2.\ F_1(t)=\int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds.\ F_1(t)\le 0,$$

при $t_0\le t\le T$, причем $F_1(t_0)=0$ и $F_1(T)<0$.

U.II. $\forall(t,x)\in\Omega=\{(t,x)\,|\,t_0\le t\le T,|x|\le\delta\}$, $0<\delta$ – некоторая постоянная:

1. $\left|x^0\right|\le\delta$;

2. $g(t,0)\equiv 0$

3. $\left|g(t,\tilde{x})-g(t,\tilde{\tilde{x}})\right|\le M\left|\tilde{x}-\tilde{\tilde{x}}\right|$, где $0<M$ – некоторая постоянная.

Решение задачи $x(t,\varepsilon)$ будем искать в классе $C^1\left[t_0,T\right]$ – пространстве функций, имеющих непрерывные производные первого порядка по t.

При $\varepsilon=0$ из уравнения (5) получим вырожденное уравнение

$$\lambda(t)\cdot\bar{x}(t)=0,$$

которое имеет решение $\bar{x}(t)=0$.

Присоединенное уравнение

$$\frac{d\tilde{x}(\omega)}{d\omega}=\lambda(t)\cdot\tilde{x}(\omega),$$

где t – рассматривается как параметр; $\omega\ge 0$, имеет точку покоя $\tilde{x}\equiv 0$, которая устойчива при $t\in[t_0,T_0)$ и неустойчива при $t\in(T_0,T]$.

Постановка задачи. Исследовать асимптотическое поведение решения $x(t,\varepsilon)$, если оно существует, при $\varepsilon\to 0$ на всем промежутке $[t_0,T]$.

Аналогичные задачи рассмотрены в [1]. При этом поставленные задачи решены в некоторой области $H\subset C$ – комплексная плоскость. Причем правые части являются аналитическими по всем переменным, за исключением ε, если она входит в правую часть. В данной работе от правых частей требуется только выполнимость U.I, U.II, т.е. не требуется аналитичность правых частей.

Теорема. Пусть выполнены условия U.I, U.II. Тогда $x(t,\varepsilon)$ – решение задачи (5), (6) существует, единственно и для него справедлива оценка

$$|x(t,\varepsilon)|\le\left|x^0\right|e^{\frac{1}{\varepsilon}F_1(t)+M(t-t_0)}. \tag{7}$$

Доказательство. Задачу (5), (6) заменим следующим интегральным уравнением:

$$x(t,\varepsilon)=x^0e^{\frac{1}{\varepsilon}F_1(t)}+\int_{t_0}^{t}e^{\frac{1}{\varepsilon}[F_1(t)-F_1(\tau)]}g(\tau,x(\tau,\varepsilon))d\tau, \tag{8}$$

где $F_1(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \lambda(s)ds$.

Из условия $\lambda(t) \in C[t_0, T]$ следует, что $F_1(t) \in C^1[t_0, T]$.

Для доказательства существования решения уравнения (8) применим метод последовательных приближений.

Последовательные приближения определим следующим образом:

$$x_0(t,\varepsilon) = 0 ,$$

$$x_m(t,\varepsilon) = x^0 e^{\frac{1}{\varepsilon}F_1(t)} + \int\limits_{t_0}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon}[F_1(t)-F_1(\tau)]} g(\tau, x_{m-1}(\tau,\varepsilon))d\tau . \qquad (9)$$

Проведем оценку последовательных приближений (9). Доказательство проведем, применяя метод математической индукции.

Докажем справедливость следующей оценки:

$$|x_m| \le |x_1| \left(1 + M(t-t_0) + \frac{M^2}{2!}(t-t_0)^2 + ... + \frac{M^{m-1}}{(m-1)!}(t-t_0)^{m-1} \right). \qquad (10)$$

Предпологая, что верно (10), докажем $(t, x_m) \in \Omega$. Для этого рассмотрим следующие случаи:

$$1)\ t_0 \le t < t_0 + \frac{\varepsilon^\gamma}{M} \quad \text{и} \quad 2)\ t_0 + \frac{\varepsilon^\gamma}{M} \le t \le T ,$$

где γ – произвольная постоянная, не зависящая от ε и $0 < \gamma < 1$.

Пусть $$1)\ t_0 \le t < t_0 + \frac{\varepsilon^\gamma}{M} .$$

Из (10), учитывая U.II.1, имеем

$$|x_m| \le |x_1| e^{M(t-t_0)} \le |x_1| e^{\varepsilon^\gamma} \le |x_1| \le \left|x^0\right| e^{\frac{1}{\varepsilon}F_1(t)} \le \left|x^0\right| \le \delta .$$

Пусть $$2)\ t_0 + \frac{\varepsilon^\gamma}{M} \le t \le T \text{ , тогда } F_1(t) < 0 ,$$

следовательно, $e^{\frac{1}{\varepsilon}F_1(t)+M(T-t_0)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, .т.е. $e^{\frac{F_1(t)+\varepsilon\cdot M(T-t_0)}{\varepsilon}} < 1$.

Учитывая это, из (10) получим

$$|x_m| \le |x_1| e^{M(t-t_0)} \le |x_1| e^{M(T-t_0)} = \left|x^0\right| e^{\frac{1}{\varepsilon}F_1(t)+M(T-t_0)} < \left|x^0\right| \le \delta .$$

Таким образом, если верно (10), то $(t, x_m) \in \Omega$.

Переходим к доказательству (10).

Пусть оценка (10) верна при $m = k$:

$$|x_k| \le |x_1| \left(1 + M(t-t_0) + \frac{M^2}{2!}(t-t_0)^2 + ... + \frac{M^{k-1}}{(k-1)!}(t-t_0)^{k-1} \right), \qquad (11)$$

причем $(t, x_k) \in \Omega$.

Докажем справедливость оценки для $m = k+1$.

Из (9) имеем

$$|x_{k+1}| \le |x^0| e^{\frac{1}{\varepsilon}F_1(t)} + \int_{t_0}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon}[F_1(t)-F_1(\tau)]} |g(\tau, x_k)| d\tau .$$

Так как $(t, x_k) \in \Omega$, то выполняется неравенство

$$|g(\tau, x_k)| \le M |x_k(\tau, \varepsilon)| .$$

Таким образом,

$$|x_{k+1}(t,\varepsilon)| \le |x_1| + M \int_{t_0}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon}[F_1(t)-F_1(\tau)]} |x_k(\tau,\varepsilon)| d\tau \tag{12}$$

Используя оценку (11), из (12) получим

$$|x_{k+1}(\tau,\varepsilon)| \le |x_1| + M \int_{t_0}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon}[F_1(t)-F_1(\tau)]} |x_1(\tau,\varepsilon)| \sum_{p=0}^{k} \frac{M^p}{p!} (\tau - t_0)^p \, d\tau .$$

Отсюда, используя оценку

$$|x_1(\tau,\varepsilon)| = |x^0| e^{\frac{1}{\varepsilon}F_1(\tau)},$$

имеем

$$|x_{k+1}(\tau,\varepsilon)| \le |x_1| + M \int_{t_0}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon}[F_1(t)-F_1(\tau)]} |x^0| e^{\frac{1}{\varepsilon}F_1(\tau)} \sum_{p=0}^{k} \frac{M^p}{p!} (\tau - t_0)^p \, d\tau =$$

$$= |x_1| + M |x^0| e^{\frac{1}{\varepsilon}F_1(t)} \int_{t_0}^{t} \sum_{p=0}^{k} \frac{M^p}{p!} (\tau - t_0)^p d\tau =$$

$$= |x_1| + M |x_1| \sum_{p=0}^{k} \frac{M^p}{p!} \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)^p \, d\tau = |x_1| \left[1 + \sum_{p=0}^{k} \frac{M^{p+1}}{(p+1)!} (t - t_0)^{p+1} \right]$$

или

$$|x_{k+1}| \le |x_1| \left[1 + \sum_{p=0}^{k} \frac{M^{p+1}}{(p+1)!} (t - t_0)^{p+1} \right] = |x_1| \sum_{p=0}^{k+1} \frac{M^p}{p!} (t - t_0)^p .$$

Полученная оценка показывает справедливость оценки (10) при $m = k+1$.

Из (10) следует , что $\forall t \in [t_0, T] \wedge \forall m \in N : |x_m| \le |x_1| e^{M \cdot (t - t_0)}$.

Теперь докажем сходимость последовательности $\{x_m\}$. Для этого x_m представим в виде

$$x_m = x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots + (x_m - x_{m-1}) .$$

Пусть $x_0(t,\varepsilon) \equiv 0$.

При $m = 1$ имеем $|x_1| = |x^0| e^{\frac{1}{\varepsilon}F_1(t)}$. Так как, $\forall k \in N : (t, x_k) \in \Omega$, то выполняется условие U.II.3.

Далее, учитывая U.II.3., получим

$$\left|x_2-x_1\right|\le\int_{t_0}^{t}e^{\frac{1}{\varepsilon}[F_1(t)-F_1(\tau)]}\left|g(\tau,x_1)-g(\tau,0)\right|d\tau\le M\left|x^0\right|e^{\frac{1}{\varepsilon}F_1(t)}(t-t_0)=\left|x_1\right|M\left(t-t_0\right).$$

Пусть $$\left|x_k-x_{k-1}\right|\le\left|x_1\right|\frac{M^{k-1}(t-t_0)^{k-1}}{(k-1)!}$$

Для $m=k+1$ имеем

$$\left|x_{k+1}-x_k\right|\le\int_{t_0}^{t}e^{\frac{1}{\varepsilon}[F_1(t)-F_1(\tau)]}\left|g\left(\tau,x_k\right)-g\left(\tau,x_{k-1}\right)\right|d\tau\le$$
$$\le M\int_{t_0}^{t}e^{\frac{1}{\varepsilon}[F_1(t)-F_1(\tau)]}\left|x_k-x_{k-1}\right|d\tau\le M\int_{t_0}^{t}e^{\frac{1}{\varepsilon}[F_1(t)-F_1(\tau)]}\left|x_1\right|\frac{M^{k-1}\left(\tau-t_0\right)^{k-1}}{(k-1)!}d\tau=$$
$$=\frac{M^k}{(k-1)!}\left|x^0\right|e^{\frac{1}{\varepsilon}F_1(t)}\int_{t_0}^{t}\left(\tau-t_0\right)^{k-1}d\tau=\left|x_1\right|\frac{M^k}{k!}\left(t-t_0\right)^k.$$

Таким образом,

$$\left|x_m\right|\le\left|x_1\right|+\left|x_2-x_1\right|+\left|x_3-x_2\right|+\ldots+\left|x_m-x_{m-1}\right|\le$$
$$\le\left|x_1\right|+\left|x_1\right|M(t-t_0)+\left|x_1\right|\frac{M^2(t-t_0)^2}{2!}+\ldots+\left|x_1\right|\frac{M^m(t-t_0)^m}{m!}\le \tag{13}$$
$$\le\left|x_1\right|\left(1+M\left(t-t_0\right)+\ldots+\frac{M^m(t-t_0)^m}{m!}\right).$$

Из (13) следует, что $\{x_m(t,\varepsilon)\}$ сходится к некоторой функции $x(t,\varepsilon)$, которая является решением уравнения (8).

Если учесть (10), то для этого решения получим оценку

$$\left|x\left(t,\varepsilon\right)\right|\le\left|x_1\right|e^{M(T-t_0)}.$$

Таким образом, оценка (7) доказана.

Докажем единственность решения.

Допустим, что существует другое решение $y(t,\varepsilon)$ задачи (5), (6). Причем $(t,y(t,\varepsilon))\in\Omega$.

Тогда это решение можно представить в следующем виде:

$$y\left(t,\varepsilon\right)=x^0e^{\frac{1}{\varepsilon}F(t)}+\int_{t_0}^{t}e^{\frac{1}{\varepsilon}[F(t)-F(\tau)]}g(\tau,\mathrm{y}\left(\tau,\varepsilon\right))d\tau.$$

Следуя [3], имеем

$$\left|x_m-y\right|\le\int_{t_0}^{t}e^{\frac{1}{\varepsilon}(F_1(t)-F_1(\tau))}\left|g\left(\tau,x_{m-1}\right)-g\left(\tau,y\right)\right|d\tau, \tag{14}$$

где $x_m(t,\varepsilon)=x^0e^{\frac{1}{\varepsilon}F(t)}+\int_{t_0}^{t}e^{\frac{1}{\varepsilon}[F(t)-F(\tau)]}g(\tau,x_{m-1}(\tau,\varepsilon))d\tau$.

Так как $\forall m \in N : (t, x_m) \in \Omega$ и $(t, y) \in \Omega$, то выполняется U.II.3. Учитывая сказанное, из (14) при $m = 1,2$ имеем

$$|x_1 - y| \le \int_{t_0}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon}(F_1(t) - F_1(\tau))} |g(\tau, y)| d\tau \le \int_{t_0}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon}(F_1(t) - F_1(\tau))} M |y| d\tau \le$$

$$\le M \int_{t_0}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon}(F_1(t) - F_1(\tau))} e^{M(T - t_0)} |x_1| d\tau \le M e^{M(T - t_0)} \left| x^0 \right| e^{\frac{1}{\varepsilon}F_1(t)} (t - t_0);$$

$$|x_2 - y| \le \int_{t_0}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon}(F_1(t) - F_1(\tau))} |g(\tau, x_1) - g(\tau, y)| d\tau \le \int_{t_0}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon}(F_1(t) - F_1(\tau))} M |x_1 - y| d\tau \le$$

$$\le M \int_{t_0}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon}(F_1(t) - F_1(\tau))} M e^{M(T - t_0)} \left| x^0 \right| e^{\frac{1}{\varepsilon}F_1(\tau)} (\tau - t_0) d\tau \le M^2 e^{M(T - t_0)} \left| x^0 \right| e^{\frac{1}{\varepsilon}F_1(t)} \frac{(t - t_0)^2}{2!}.$$

Предположим, что

$$|x_m - y| \le |x_1| \frac{M^m e^{M(T - t_0)} (t - t_0)^m}{m!}. \tag{15}$$

Для $|x_{m+1} - y|$, учитывая (15), из (14) имеем

$$|x_{m+1} - y| \le \int_{t_0}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon}[F_1(t) - F_1(\tau)]} |g(\tau, x_m) - g(\tau, y)| d\tau \le \int_{t_0}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon}[F_1(t) - F_1(\tau)]} M |x_m - y| d\tau \le$$

$$\le M \int_{t_0}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon}[F_1(t) - F_1(\tau)]} |x_1| \frac{M^m e^{M(T - t_0)} (\tau - t_0)^m}{m!} d\tau =$$

$$= \frac{M^{m+1} e^{M(T - t_0)}}{m!} \left| x^0 \right| e^{\frac{1}{\varepsilon}F_1(t)} \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)^m d\tau = |x_1| \frac{M^{m+1} e^{M(T - t_0)} (t - t_0)^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Таким образом, (15) верна для любого $m \in N$. Из (15) при $m \to \infty$ имеем $|x - y| \le 0$.

Из этого следует, что $x = y$. Единственность решения доказана.

Теорема доказана полностью.

Приведем пример: $\lambda(t) = t, \quad t \in \left[-1, \frac{1}{2}\right],$

$$F_1(t) = \frac{1}{2}(t^2 - 1), \quad F_1(-1) = 0, \quad F_1\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8} < 0.$$

$g(t, x) = a(t) \dfrac{x}{x^2 + 1}$, где $\forall t \in \left[-1, \frac{1}{2}\right] : a(t)$ – произвольная монотонно возрастающая функция, причем $|a(t)| \le M$; $\Omega = \left\{ (t, x) \mid t \in \left[-1, \frac{1}{2}\right], |x| < 1 \right\}$.

Для данного примера выполняются условия U.I. и U.II.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алыбаев К.С.* Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости // Вестник КГНУ. Сер. 3. 2001. Вып. 6. С.190–200.
2. *Тихонов А.Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Мат. сб. 1952. Т. 31(73). № 3. С. 575–586.
3. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1954.

Статья поступила 10.12.2013 г.

Taliev A. A. STABILITY LOSS PROTRACTION FOR SINGULARLY PERTURBED EQUATIONS WITH CONTINUOUS RIGHT-HAND SIDES

Since the middle of the last century, mathematicians' attention was attracted by differential equations with small parameters at highest derivatives. Such equations are called singularly perturbed. The central problem in the theory of singularly perturbed equations is solving the problem about the asymptotic proximity of solutions of singularly perturbed equations and degenerate equation. First, this problem was solved by A.N. Tikhonov. In works by A.N. Tikhonov, one of the conditions is the stability of the rest point. It is proved that under these conditions (restrictions), there is a limit transition. The limit transition is not uniform over the whole interval. In a vicinity of the point, there appears so-called boundary layer. In works by A.B. Vasilyeva, solutions' asymptotic expansions by the small parameter of ordinary differential equations were constructed. M.I. Imanaliev developed a method for expanding solutions of singularly perturbed and integro-differential equations.The first work in which the stability condition is violated and nevertheless there exists the transition limit is M.A. Shishkova’s work. The phenomenon that is described in the works of M.A. Shishkova was called the loss stability protraction. In those works, the posed problems were solved in the space of analytic functions, i.e., right-hand sides of the equations were supposed to be analytic in a certain region of the complex plane.

In this paper, we consider singularly perturbed equations with continuous right-hand sides such that the stability condition for the rest point of the adjoint equation is not satisfied on the considered interval. We prove the existence and uniqueness of the solution. The existence of the solution is proved using the method of successive approximations. An example is presented.

Keywords: singularly perturbed equation, degenerate ajoint equation, rest point, stability and instability of a rest point, continuous functions.

TALIEV Aidarbek Abdurazakovich
(The senior teacher of the Osh State University, Osh, Kyrgyzstan)

E-mail:aidartaliev@mail.ru

REFERENCES

1. Alybaev K.S. Metod linij urovnja issledovanija singuljarno vozmushhennyh uravnenij pri narushenii uslovija ustojchivosti (2001) *Vestnik KGNU*, ser. 3, no. 6., pp. 190–200. (in Russian)
2. Tihonov A.N. Sistemy differencial'nyh uravnenij soderzhashhie malye parametry pri proizvodnyh (1952) *Mat. sb*., v. 31(73), no. 3, pp. 575–586. (in Russian)
3. Bellman R. *Teorija ustojchivosti reshenij differencial'nyh uravnenij*. Moscow, Izd-vo inostrannoj literatury, 1954. (in Russian)